



universität
wien

Universität Wien
Institut für Astronomie
Türkenschanzstraße 17
1180 Wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Störungsrechnung mit Lie–Reihen

angestrebter akademischer Grad
Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer.nat.)

Verfasser: Ákos Bazsó
Matrikel-Nummer:
Studienrichtung:
(lt. Studienblatt) A 413 Astronomie
Betreuer: Univ. Prof. Dr. Rudolf Dvorak

Wien, am 28. Januar 2008

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	iii
Tabellenverzeichnis	v
1. Einleitung	1
1.1. Zielsetzungen dieser Arbeit	1
1.2. Übersicht über bisherige Arbeiten zum Sitnikov Problem	2
1.3. Zum Aufbau dieser Arbeit	3
2. Grundlagen und Methoden	5
2.1. Formulierung der Keplerschen Gesetze	5
2.1.1. Kepler I	5
2.1.2. Kepler II	8
2.1.3. Kepler III	10
2.1.4. Keplersche Gleichung	10
2.2. Die Hamiltonsche Mechanik	11
2.2.1. Hamiltonfunktion	12
2.2.2. Variationsprinzip	13
2.2.3. Kanonische Transformationen	14
2.2.4. Poissonklammern	16
2.3. Das dynamische Modell	17
2.3.1. Das Sitnikov Problem	17
2.3.2. Herleitung der Bewegungsgleichung	18
2.4. Alternative Formulierungen des Sitnikov Problems	20
2.4.1. Das MacMillan Problem	21
2.4.2. Formulierung von Alfaro-Chiralt	23
2.4.3. T-Gleichung von Wodnar	23
3. Numerische Methoden	25
3.1. Lösung der Keplerschen Gleichung	25
3.1.1. Reihenentwicklung mit Besselfunktionen	25
3.1.2. Newton-Raphson Methode	33
3.1.3. Iterationsmethoden höherer Konvergenzordnung	36
3.2. Numerische Integration der Bewegungsgleichung	41
3.2.1. Allgemeines	41
3.2.2. Runge-Kutta Verfahren	42

3.2.3. Lie-Integrator	44
3.2.4. Symplektischer Integrator	52
3.2.5. Zusammenfassung und Vergleich der Integratoren	54
4. Analytische Methoden	61
4.1. Das Prinzip der Lie-Transformationen	61
4.1.1. Kanonische Störungstheorie	61
4.1.2. Infinitesimale kanonische Transformationen	63
4.1.3. Lie-Transformationen	64
4.2. Automatische Durchführung von Lie-Transformationen	69
4.2.1. Beschreibung	69
4.2.2. Details	70
4.3. Störungsrechnung für das MacMillan Problem	75
4.3.1. Der linearisierte MacMillan Fall	75
4.3.2. Der allgemeine MacMillan Fall	76
4.4. Störungsrechnung für das Sitnikov Problem	84
4.4.1. Reihendarstellung für den Radius	84
4.4.2. Der linearisierte Sitnikov Fall	85
4.4.3. Der allgemeine Sitnikov Fall	86
4.5. Störungsrechnung für die T-Gleichung	95
4.5.1. Der allgemeine Fall	95
5. Zusammenfassung	99
A. Ergänzungen zum Lie-Integrator	101
A.1. Beziehung zwischen Lie-Reihe und Taylorreihe	101
A.2. Gültigkeit der Rekursionsformeln	102
B. Ergänzungen zur Lie-Transformation	104
B.1. Das Package <code>lietrafo.m</code>	104
B.1.1. Beschreibung	104
B.1.2. Quelltext	105
B.2. Chebyshev Approximation von Funktionen	108
C. Danksagung	109
Literaturverzeichnis	111
Index	115

Abbildungsverzeichnis

2.1. Geometrie des Kepler Problems	7
2.2. Konfiguration des Sitnikov Problems	19
2.3. Konfiguration des MacMillan Problems	22
3.1. Anzahl der Auswertungsschritte für die Funktion $r(t, \varepsilon)$	31
3.2. Lösung der Kepler Gleichung mittels Bessel Verfahren	32
3.3. Anfangsnäherung zur Keplerschen Gleichung	35
3.4. Vergleich einiger Methoden zur Wahl der Anfangsnäherung	36
3.5. Lösung der Kepler Gleichung mittels Newton-Raphson Verfahren	37
3.6. Lösung der Kepler Gleichung mittels Danby-Burkardt Verfahren	39
3.7. Direkter Vergleich der Integrationsverfahren im MacMillan Fall	55
3.8. Vergleich von Langzeitintegrationen bei fester Schrittweite	56
3.9. Runge-Kutta Integrator bei unterschiedlichen Rechengenauigkeiten	57
3.10. Adaptiver Runge-Kutta Integrator im Vergleich zu einer Referenzlösung	58
3.11. Symplektischer Integrator und Sticky-Orbits bei T-Gleichung	59
4.1. Schematischer Ablaufplan des Programms für Lie-Transformationen	71
4.2. Lie-Transformation: Zusammensetzung der Laufzeit nach Funktionen	73
4.3. Laufzeitvergleich der Lie-Transformation bei verschiedenen Modellen	73
4.4. Typische Trajektorie im linearisierten MacMillan Fall	77
4.5. Approximation der Potentialfunktion des MacMillan Problems	78
4.6. Vergleich der ursprünglichen und transformierten Hamiltonfunktion	80
4.7. MacMillan Fall: Trajektorien für (0.01, 0.0) nach Chebyshev Lösung	82
4.8. MacMillan Fall: Trajektorien für (0.01, 0.0) nach Taylor Lösung	82
4.9. MacMillan Fall: Trajektorien für (0.20, 0.0) nach Chebyshev Lösung	83
4.10. MacMillan Fall: Trajektorien für (0.2, 0.0) und (0.1, 0.0) nach Taylor Lösung	83
4.11. Linearisierter Sitnikov Fall: Trajektorie für Exzentrizität $\varepsilon = 0.05$	87
4.12. Linearisierter Sitnikov Fall: Trajektorie für Exzentrizität $\varepsilon = 0.10$	87
4.13. Linearisierter Sitnikov Fall: Trajektorie für Exzentrizität $\varepsilon = 0.15$	88
4.14. Linearisierter Sitnikov Fall: Trajektorie für Exzentrizität $\varepsilon = 0.20$	88
4.15. Frequenzpaare in der erzeugenden Funktion	90
4.16. Sitnikov Fall 6. Ordnung: Trajektorie für (0.01, 0.0), $\varepsilon = 0.01$	92
4.17. Sitnikov Fall 6. Ordnung: Trajektorie für (0.10, 0.0), $\varepsilon = 0.10$	92
4.18. Sitnikov Fall 6. Ordnung: Trajektorie für (0.20, 0.0), $\varepsilon = 0.05$	93
4.19. Sitnikov Fall 6. Ordnung: Trajektorie für (0.20, 0.0), $\varepsilon = 0.20$	93
4.20. Sitnikov Fall 6. Ordnung: Trajektorie für (0.10, 0.0), $\varepsilon = 0.15$	94

4.21. Sitnikov Fall 6. Ordnung: Trajektorie für $(0.0, 0.35367)$, $\varepsilon = 0.15$	94
4.22. T-Gleichung 4. Ordnung: Trajektorie für $(0.10, 0.0)$, $\varepsilon = 0.05$	97
4.23. T-Gleichung 4. Ordnung: Trajektorie für $(0.10, 0.0)$, $\varepsilon = 0.15$	97
4.24. T-Gleichung 4. Ordnung: Trajektorie für $(0.10, 0.0)$, $\varepsilon = 0.25$	98

Tabellenverzeichnis

3.1. Auswertungsschritte für Besselfunktionen verschiedener Ordnungen	30
3.2. Laufzeitvergleich der Methoden zur Lösung der Kepler Gleichung	40
3.3. Butcher-Tabelle für das klassische Runge-Kutta Verfahren	43
3.4. Butcher-Tabelle für das eingebettete Verfahren nach Cash-Karp	45
4.1. Laufzeitvergleich der Lie-Transformation bei verschiedenen Modellen . . .	74

Kapitel 1.

Einleitung

In der Himmelsmechanik geht es darum, das Verhalten dynamischer Systeme zu verstehen und ihren Zustand durch mathematische Modelle für einen beliebigen Zeitpunkt vorhersagen zu können. Das streng mechanische Weltbild, welches nach den Newtonschen Gesetzen funktioniert, schien diese Vorgabe zu erfüllen. In der Praxis handelt es sich aber um sehr komplexe Systeme, es gibt viele beteiligte Körper und ihre jeweiligen Wechselwirkungen – auch wenn man sich nur auf Gravitationskräfte beschränkt – erschweren oder verhindern eine vollständige geschlossene Beschreibung der Bewegungen.

Das Sonnensystem ist ein Beispiel eines solchen komplexen Systems. Wie Untersuchungen seiner Dynamik zeigten, ist es nicht das präzise Uhrwerk, als das es Newton sah. Vielmehr ist es zwar ein deterministisches System, welches sich nach festgelegten mathematischen Bewegungsgleichungen entwickelt, in dem aber auch chaotische Bewegungen auftreten und somit seine Entwicklung und sein Zustand in der Zukunft unbestimmt sind.

Das allgemeinste in der Himmelsmechanik vorkommende Problem ist das so genannte N -Körper-Problem. Dabei bilden N Massenpunkte ein interagierendes System, sie wechselwirken miteinander durch Gravitationskräfte. Obwohl es sehr wünschenswert wäre, die Lösung dieses Problems zu kennen, existiert bis heute keine analytische Lösung. Man kann Teilaspekte des N -Körper-Problems aber in vereinfachten Fällen untersuchen, die wichtigsten Spezialfälle bilden das Zwei- und Dreikörperproblem (2 KP bzw. 3 KP).

Bei dem Zweikörperproblem handelt es sich um ein integrierbares Problem, das zudem auch als erste Näherung in anderen Fällen anwendbar ist, wie zum Beispiel für die Bahnen der Planeten unseres Sonnensystems.

Das Dreikörperproblem als das nächst kompliziertere System ist dagegen schon nicht mehr integrierbar, wie H. Poincaré gezeigt hat. Für das eingeschränkte Dreikörperproblem existieren nach J. L. de Lagrange fünf Lösungen, in einer speziellen Konfiguration, dem später zu besprechenden MacMillan Fall, noch eine weitere.

1.1. Zielsetzungen dieser Arbeit

In dieser Diplomarbeit geht es um Störungsrechnung mit Lie-Reihen. Die Methode der von S. Lie entwickelten Lie-Reihen wird verwendet, um durch Lie-Transformationen näherungsweise Lösungen für ein dynamisches System zu erhalten. Die so erhaltene Störungslösung ist eine asymptotische Lösung, also nur für begrenzte Zeiträume gültig, und

sie hat einen beschränkten Konvergenzbereich, für Details siehe Nayfeh [21].

Wir folgen dem Prinzip der kanonischen Störungstheorie, wobei angenommen wird, dass für das untersuchte Problem eine „ungestörte“ Lösung bekannt ist. Dieser integrable Anteil wird durch Terme mit einem Störparameter ergänzt, sie stellen eine Störung der gefundenen Lösung dar. Wenn die Störungen nicht allzu groß sind, existieren in der Umgebung der ungestörten Lösung weitere Lösungen des gestörten Systems.

Durch Lie-Transformationen wird die Hamiltonfunktion eines gegebenen Systems so transformiert, dass daraus nach der Durchführung der kanonischen Transformation – die es Ordnung für Ordnung aufzubauen gilt – eine dazu äquivalente, aber vereinfachte Hamiltonfunktion resultiert. Mit ihrer Hilfe lässt sich eine Lösung des gestörten Problems konstruieren und diese, nach einer Rücktransformation auf die ursprünglichen Variablen, für unterschiedliche Anfangsbedingungen untersuchen.

Diese Methode der Störungsrechnung wird mit einem Computer-Algebra-System umgesetzt. Die theoretische Basis dazu bilden die Arbeit von Deprit [4], der diese Art von kanonischen Transformationen vorgestellt hat, verschiedene Kapitel aus dem Buch von Lichtenberg & Lieberman [17], sowie das aktuelle Buch von Ferraz-Mello [9], in der sowohl eine ausführliche Zusammenfassung zu der Lie-Theorie als auch Vergleiche z. B. mit der Poincaré-von Zeipel-Theorie gegeben werden. Auch Dvorak & Freistetter [7] geben eine Zusammenfassung zur Lie-Transformation; weitere wichtige Anregungen flossen aus dem Buch über Himmelsmechanik von Ęrđi [8] ein.

Zur Anwendung der Lie-Reihen werden Beispiele aus der Himmelsmechanik betrachtet: Das so genannte „Sitnikov Problem“ in drei verschiedenen Beschreibungen. Dieses dynamische Problem wird sowohl analytisch mit Lie-Transformationen behandelt, als auch mittels numerischer Integration mit einem Lie-Reihen-Integrator [10].

1.2. Übersicht über bisherige Arbeiten zum Sitnikov Problem

Das in dieser Arbeit mit den Methoden der Störungsrechnung behandelte himmelsmechanische Problem – das Sitnikov Problem – ist in der Literatur zuvor bereits ausführlich untersucht worden. Im Folgenden soll eine Auswahl der hier verwendeten Quellen und ihrer Beiträge vorgestellt werden.

Ausgangspunkt ist die ursprüngliche Arbeit von Sitnikov [26], in welcher er die Konfiguration definierte und erste analytische Resultate beschrieb; bzw. sogar zurückgehend auf MacMillan [19], welcher als Erster einen speziellen (den kreisförmigen) Fall dieser Konfiguration untersuchte und die Lösung als Potenzreihe in der abhängigen Variable angab.

Zu Anfang der 1990-er Jahre wurde das Sitnikov Problem auch ausgiebig mit numerischen Berechnungen untersucht, z. B. durch Dvorak [6] und Hagel & Trenkler [13]. Daneben gab es auch Bemühungen, weitere Einsichten auf analytischem Weg zu gewinnen, etwa durch Hagel [11] oder Wodnar [31] und [32].

Auch die Anstrengungen von Liu & Sun [18] zur Entwicklung einer Abbildung (Mapping) für den Phasenraum haben das Wissen um dieses Modell vermehrt.

Zu den aktuellen Arbeiten zu diesem Thema gehört etwa jene von Hagel & Lhotka [12], in welcher sie Floquet Theorie einsetzen, und das System durch Störungsrechnung bei hohen Ordnungen untersuchen können.

1.3. Zum Aufbau dieser Arbeit

Diese Arbeit gliedert sich in drei Hauptkapitel (Kapitel 2, 3 und 4), wobei jedes Kapitel einen anderen Schwerpunkt enthält.

In Kapitel 2 werden zunächst die Grundlagen zum Verständnis der dynamischen Modelle der Himmelsmechanik besprochen – die Keplerschen Gesetze. Anschließend werden die fundamentalen analytischen Methoden der Klassischen Mechanik vorgestellt, auf denen die Methoden in Kapitel 4 basieren. In dieser kurzen Einleitung zur Hamiltonschen Mechanik wird in kompakter Form auf die Bedeutung der Hamiltonfunktion eingegangen und der Nutzen von Kanonischen Transformationen hervorgehoben. Zuletzt wird gezeigt, wie das dynamische Modell des Sitnikov Problems hergeleitet werden kann, mit dessen Eigenschaften sich in der Folge diese Arbeit beschäftigen wird, und welche alternativen Formulierungen noch existieren.

Der erste Teil von Kapitel 3 stellt verschiedene Lösungsmethoden für die Keplersche Gleichung vor. Im Zusammenhang mit diesen numerischen Methoden, auf sie aufbauend, werden danach Verfahren zur numerischen Integration der Bewegungsgleichungen besprochen, darunter die bekannten Runge-Kutta Verfahren, symplektische Algorithmen und ein spezieller Lie-Reihen-Integrator für das Sitnikov Problem.

Aufbauend auf die Methoden aus Kapitel 2 führt Kapitel 4 Lie-Transformationen als Mittel für die störungstheoretische Behandlung von Hamiltonsystemen ein. Es wird untersucht, wie effektiv Algorithmen zur automatischen Durchführung von Lie-Transformationen sind, und wo die Grenzen ihrer praktischen Anwendbarkeit liegen. Zur Anwendung kommen Lie-Transformationen bei dem Sitnikov Problem, die qualitativen Eigenschaften der gefundenen Lösungen werden im Vergleich zu numerischen Lösungen untersucht.

Kapitel 2.

Grundlagen und Methoden

2.1. Formulierung der Keplerschen Gesetze

J. Kepler stellte in den Jahren 1609 und 1619 aus Beobachtungsdaten von T. Brahe die nach ihm benannten *Keplerschen Gesetze* auf¹. Nachdem Kepler sich lange und erfolglos damit beschäftigte, aus Brahes Daten die Marsbahn als Überlagerung von Kreisbewegungen darzustellen, verwarf er diese noch aus der Antike stammende Idee. Stattdessen ließ er auch elliptische Umlaufbahnen zu, so leitete er aus den vorliegenden Daten die ersten beiden Gesetze ab. Diese waren eine jener Grundlagen, die I. Newton gestatteten, sein Gravitationsgesetz rechnerisch zu überprüfen.

Die ersten beiden Keplerschen Gesetze beschreiben vollständig die Bewegung jeweils eines Paares von Himmelskörpern – das so genannte Kepler- oder *Zweikörperproblem* – und die Form ihrer Umlaufbahnen, z. B. die Bewegung eines Planeten um die Sonne. Kepler wusste noch nichts von der Wechselwirkung der Himmelskörper untereinander, ebenso war ihm das Gravitationsgesetz unbekannt. Aus heutiger Sicht sind die Keplerschen Gesetze zwar nur näherungsweise für unser Sonnensystem zutreffend – und tatsächlich nur exakt gültig für ein Zweikörperproblem – aber im Fall vernachlässigbarer Massen mehrerer Planeten gegenüber dem Zentralkörper dennoch gute Näherungen.

2.1.1. Kepler I

Das erste Keplersche Gesetz macht eine Aussage über die Form der Umlaufbahn eines Himmelskörpers. Es besagt, dass ein einzelner Planet sich in einer Ebene (Bahnebene) auf einer elliptischen Umlaufbahn um die Sonne bewegt, welche in einem der beiden Brennpunkte dieser Ellipse steht.

Allgemeiner kann man sagen, dass die Bewegung um einen Zentralkörper auf Kegelschnitten stattfindet. Die Art des Kegelschnitts wird durch den Parameter ε bestimmt, die *numerische Exzentrizität* (im Folgenden immer nur als Exzentrizität bezeichnet). Dieser Parameter ergibt sich im elliptischen Fall durch das Verhältnis der beiden Achsen (a, b) (Haupt- und Nebenachse) als

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

¹Ausführlichere Beschreibungen zu Kepler und seiner Arbeit im Kontext der Astronomie seiner Zeit finden sich in [30], Kap. I und II.

Abhängig vom Wert der Exzentrizität ε ist die Umlaufbahn des Körpers für

- $\varepsilon = 0$ ein Kreis,
- $0 < \varepsilon < 1$ eine Ellipse,
- $\varepsilon = 1$ eine Parabel,
- $\varepsilon > 1$ eine Hyperbel.

Definition 1 Die Ellipse ist die Menge jener Punkte X , deren Abstand von den beiden Brennpunkten (F_1, F_2) genau dem Doppelten der großen Halbachse a entspricht.

$$\text{ell} := \{X \mid |XF_1| + |XF_2| = 2a\}$$

Nimmt man ein kartesisches Koordinatensystem an und legt den Ursprung in jenen Brennpunkt, in welchem sich der Zentralkörper befindet, dann folgt aus der obigen Definition für den Ortsvektor $\mathbf{x} = (x, y)$, $|\mathbf{x}| = r$ des umlaufenden Körpers

$$|\mathbf{x}| + |\mathbf{x} + 2\mathbf{e}| = 2a,$$

wobei $|\mathbf{e}| = \varepsilon a$, $0 < \varepsilon < 1$, der Abstand vom Mittelpunkt der Ellipse zu dem als Ursprung gewählten Brennpunkt F ist (siehe Abbildung 2.1).

Schreibt man die obige Gleichung mittels

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} + 2\mathbf{e})^2 &= (2a - r)^2 \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + 4\mathbf{e} \cdot \mathbf{x} + 4\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} &= r^2 - 4ar + 4a^2 \end{aligned}$$

um, und ersetzt die Skalarprodukte durch $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2 = r^2$ sowie $\mathbf{e} \cdot \mathbf{x} = \varepsilon ar \cos \varphi$, mit φ dem von $\mathbf{e}$ und $\mathbf{x}$ eingeschlossenen Winkel, so folgt schlussendlich aus

$$ar + \varepsilon ar \cos \varphi = a^2 - \varepsilon^2 a^2$$

das erste Keplersche Gesetz

$$r(\varphi) = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \varphi}. \quad (2.1.1)$$

Definition 2 Der Winkel φ zwischen dem Perizentrum² und der aktuellen Bahnposition des Körpers, gemessen im Brennpunkt in mathematisch positiver Umlaufrichtung (Gegenuhrzeigersinn), wird als die wahre Anomalie bezeichnet.

²Das Perizentrum ist jener Punkt der Umlaufbahn eines Körpers mit dem kürzesten Abstand zwischen Körper und Brennpunkt. Im Gegensatz dazu wird der Punkt mit der größten Entfernung zum Brennpunkt Apozentrum genannt.

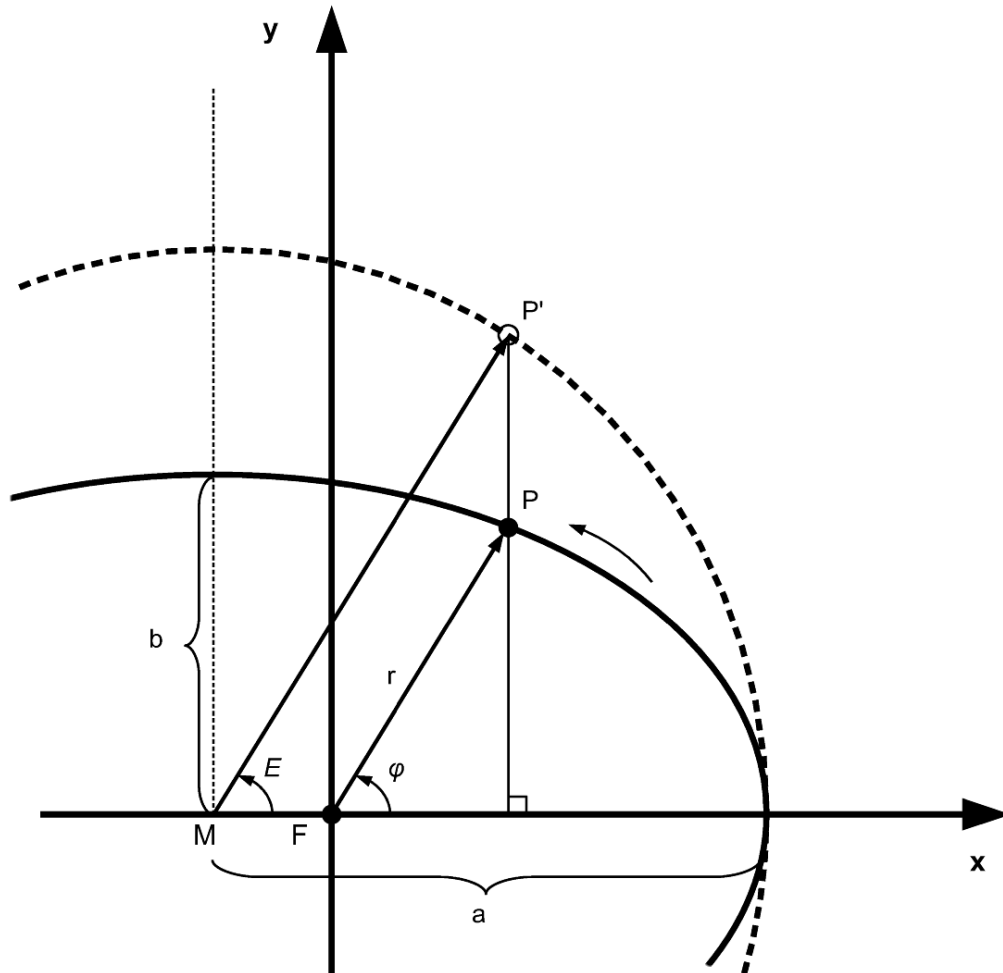


Abbildung 2.1.: Geometrie des Kepler Problems – Bahnellipse eines Planeten P mit der Sonne im Brennpunkt F . Eingezeichnet sind die wahre Anomalie φ als Winkel zwischen der x -Achse und dem Ort des Planeten P von F aus gesehen, und der Hilfswinkel der exzentrischen Anomalie E zwischen der x -Achse und dem Ort P' des Planeten auf dem konzentrischen Hilfskreis. Der Punkt M ist sowohl Mittelpunkt der Ellipse als auch des Kreises.

Im Fall $\varepsilon = 0$ fallen die Brennpunkte mit dem Mittelpunkt zusammen, der Abstand zum umlaufenden Körper ist immer gleich $r = a$. Für $0 < \varepsilon < 1$ verändert sich der Abstand $r(\varphi)$ gemäß Gleichung (2.1.1); es gibt einen Minimalabstand (Körper im Perizentrum)

$$r_{\min} = a(1 - \varepsilon)$$

für $\varphi = 0$, und der Maximalabstand ist (Körper im Apozentrum)

$$r_{\max} = a(1 + \varepsilon)$$

für $\varphi = \pi$. Für alle Werte $0 \leq \varepsilon < 1$ handelt es sich um eine geschlossene 2π -periodische Bahnkurve, $r(\varphi) = r(\varphi + 2\pi)$.

2.1.2. Kepler II

Das zweite Keplersche Gesetz besagt, dass der Vektor der Relativkoordinaten (Radiusvektor) in gleichen Zeitintervallen immer gleich große Flächenstücke der Umlaufbahn überstreicht. Das heißt, dass der Körper sich in der Nähe des Perizentrums schneller bewegt – der Radiusvektor hat einen kleineren Betrag und die Änderung von φ ist größer. Im Apozentrum bewegt sich der Körper entsprechend langsamer.

Diese Tatsache bedeutet nichts anderes, als die Erhaltung des Drehimpulses. Bezeichnet $\mathbf{x} = (x, y, z)$ den Ort und $\dot{\mathbf{x}}$ die Geschwindigkeit des Körpers auf einer Umlaufbahn um den Körper im Ursprung, so ist der Drehimpuls durch

$$\mathbf{L} = \mu \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}$$

gegeben. Mit μ wird die *reduzierte Masse*³ $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ bezeichnet. Unter der Annahme, dass keine äußeren Kräfte wirken (keine Drehmomente), ist der Drehimpuls erhalten, also zeitlich konstant. Man zeigt dies dadurch, indem man die obige Gleichung für den Drehimpuls nach der Zeit ableitet,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mu (\dot{\mathbf{x}} \times \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x} \times \ddot{\mathbf{x}}) = 0$$

wobei der erste Term verschwindet, weil das Kreuzprodukt zweier paralleler Vektoren Null ist. Der zweite Term ergibt ebenfalls Null, weil nach den Newtonschen Bewegungsgleichungen für die Beschleunigungen

$$\mu \ddot{\mathbf{x}} \propto \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}$$

gilt, so dass auch $\ddot{\mathbf{x}}$ parallel zu $\mathbf{x}$ steht.

Eine wichtige Folgerung daraus ist, dass $\mathbf{x}$ und $\dot{\mathbf{x}}$ stets in derselben Ebene liegen und $\mathbf{L}$ darauf orthogonal steht, da $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$ und die Skalarprodukte $\mathbf{x} \cdot \mathbf{L} = \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{L} = 0$ sind.

Wählt man z. B. $\mathbf{L}$ in z-Richtung und verwendet ebene Polarkoordinaten,

$$\mathbf{x} = (x, y, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0),$$

³Es werden Relativkoordinaten verwendet, in denen die Bewegung des Schwerpunktes separiert wurde. Dies reduziert das System auf die Bewegung eines Teilchens mit der Masse μ .

dann lauten der Drehimpulsvektor und sein Betrag

$$\mathbf{L} = \mu \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}} = \mu (0, 0, r^2 \dot{\varphi}), \quad |\mathbf{L}| = \text{const.} = \mu r^2 \dot{\varphi}.$$

In mathematischer Formulierung lautet damit das zweite Keplersche Gesetz

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = c = \text{const.} \quad (2.1.2)$$

Die Konstante c heißt Flächenkonstante, sie wird bestimmt, indem die Ellipse in N Teilstücke unterteilt wird. Jedes dieser N Teilstücke wird in der gleichen Zeit von $\Delta t = \frac{T}{N}$ durchlaufen, wobei T die Zeit für einen vollen Umlauf von 2π ist. Die Teilstücke besitzen nach Gl. (2.1.2) jeweils immer eine Fläche von

$$\Delta A = \frac{ab\pi}{N} = \frac{c\Delta t}{2},$$

sodass sich

$$c = \frac{2\pi}{T} ab$$

ergibt. Man definiert dann $n := \frac{2\pi}{T}$ als die **mittlere Bewegung**⁴.

Aus dem zweiten Keplerschen Gesetz lässt sich auch ein Ausdruck für die Zeitabhängigkeit der wahren Anomalie herleiten. Ausgangspunkt ist Gl. (2.1.2) in der Form

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = nab.$$

Setzt man für r den Ausdruck nach Gl. (2.1.1) ein, so erhält man mit $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$

$$\frac{d\varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} = \frac{n \, dt}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}}$$

schließlich das Integral

$$(1 - \varepsilon^2)^{3/2} \int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} \frac{d\bar{\varphi}}{(1 + \varepsilon \cos \bar{\varphi})^2} = n \int_{t_0}^t d\bar{t} = n(t - t_0). \quad (2.1.3)$$

Das Integral ergibt die Zuordnung zwischen der wahren Anomalie φ und der Zeit t . Löst man das Integral (2.1.3) auf, erhält man schließlich einen impliziten Zusammenhang für $\varphi(t)$.

⁴Die *mittlere Bewegung* entspricht einer Winkelgeschwindigkeit und gibt an, um welchen Winkel in Radians sich der Körper in einer Zeiteinheit gleichmäßig auf seiner Umlaufbahn bewegt.

2.1.3. Kepler III

Abschließend zur Vollständigkeit besagt das **dritte Keplersche Gesetz**, welches Kepler zehn Jahre später als seine ersten beiden veröffentlichte, dass das Verhältnis der Bahnhalbachsen a_i und der Umlaufzeiten T_i zweier Himmelskörper um denselben Zentralkörper wieder eine Beziehung bilden, nämlich

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2}. \quad (2.1.4)$$

Dieses dritte Gesetz hat eine große praktische Bedeutung für die Bestimmung der Abstände der Himmelskörper. Angenommen man kennt das Verhältnis der Umlaufzeiten zweier Planeten um die Sonne, so kann man mit dem dritten Keplerschen Gesetz das Verhältnis ihrer Sonnenabstände bestimmen. Obwohl dadurch nur relative Beziehungen folgen, genügt bereits eine absolute Messung, und alle relativen Angaben können als absolute Werte dargestellt werden.

2.1.4. Keplersche Gleichung

Außerdem hat Kepler noch die nach ihm benannte *Keplersche Gleichung* aufgestellt, und zwar aus geometrischen Überlegungen.

Direkter kann man sie herleiten, wenn man zur Lösung des Integrals (2.1.3) eine Substitution sucht, welche die Berechnung vereinfacht. Diese Substitution ist nicht offensichtlich, und es gibt andere Wege sie einzuführen, der kürzeste Weg ist aber

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \tan \frac{E}{2} \quad (2.1.5)$$

zu setzen ($0 \leq \varepsilon < 1$). Dieser Ansatz wird nun in (2.1.3) eingesetzt, und nach einigen Umformungen erhält man das neue Integral

$$\int dE (1 - \varepsilon \cos E) = n(t - t_0).$$

Die Integration ist jetzt einfach, die **Keplersche Gleichung** (auch **Keplergleichung**) für den elliptischen Fall ($0 \leq \varepsilon < 1$) lautet demnach in der neuen Variable $E(t)$

$$E - \varepsilon \sin E = n(t - t_0). \quad (2.1.6)$$

Definition 3 Die neu eingeführte Variable $E(t)$ heißt **exzentrische Anomalie**. Sie wird vom Perizentrum aus zum scheinbaren Ort⁵ des Planeten auf dem konzentrischen Hilfskreis in positiver Umlaufrichtung im Mittelpunkt der Ellipse gemessen. (siehe Abb. 2.1)

⁵Der scheinbare Ort des Planeten ist die Verlängerung der durch den Ort des Planeten auf der Ellipse gehenden Verbindungslinie senkrecht zur großen Halbachse.

Die exzentrische Anomalie ist für $0 < \varepsilon < 1$ zu zwei Zeitpunkten identisch mit der wahren Anomalie, bei $E = 0$ im Perizentrum und $E = \pi$ im Apozentrum. Es liegt daher nahe, dass der Radius statt mit der wahren Anomalie auch mittels der exzentrischen Anomalie ausgedrückt werden kann, nämlich als

$$r(E) = a(1 - \varepsilon \cos E). \quad (2.1.7)$$

Definition 4 Der in Gleichung (2.1.6) auftauchende Ausdruck $n(t - t_0)$ wird als *mittlere Anomalie* bezeichnet. Sie ist ein gleichförmig anwachsender Winkel für die Bewegung eines fiktiven Körpers auf dem Hilfskreis mit Radius gleich der großen Halbachse der Ellipse. Die mittlere Anomalie ist immer unabhängig von der Exzentrizität, sie hängt nur von der mittleren Bewegung n ab, daher nur von der Umlaufzeit T , d. h. $M := \frac{2\pi}{T}(t - t_0)$.

Die transzendente Keplersche Gleichung hat jedoch keine Lösung durch elementare Funktionen, sodass zu ihrer Lösung meist numerische Verfahren angewendet werden. Erst 1972 gelang es Siewert & Burniston [25] eine analytische Lösung durch Integrale zu finden, aber selbst deren Werte müssen durch Quadraturen numerisch bestimmt werden. Kennt man zu einem Zeitpunkt t die Lösung für $E(t)$, so lassen sich dadurch sowohl die wahre Anomalie $\varphi(t)$ (nach Gl. (2.1.5)) als auch der Radius r bestimmen (entweder nach Gl. (2.1.1) oder nach Gl. (2.1.7)). Aus diesen Polarkoordinaten (r, φ) können danach die kartesischen Koordinaten (x, y) über die übliche Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned}$$

bestimmt werden.

Methoden zur numerischen Lösung der Keplerschen Gleichung (2.1.6) werden ab Seite 25 vorgestellt.

2.2. Die Hamiltonsche Mechanik

Ein mächtiges Konzept der Klassischen Mechanik ist der *Hamiltonformalismus*. In diesem Formalismus spielt die *Hamiltonfunktion* eine zentrale Rolle. Die Hamiltonfunktion wird nicht nur in der Klassischen Mechanik angewendet, sondern hat auch eine wichtige Funktion in der Quantenmechanik.

In vielen Lehrbüchern wird zuerst der *Lagrangeformalismus* eingeführt, um danach mittels *Legendretransformation* aus der *Lagrangefunktion* die Hamiltonfunktion zu definieren. In dem so eingeführten Hamiltonformalismus werden dann die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen, die kanonischen Transformationen, das Variationsprinzip und die *Hamilton-Jacobi-Theorie* behandelt.

In diesem Abschnitt soll jedoch die Verwendung der Lagrangefunktion auf das Minimum beschränkt bleiben, da der Hamiltonformalismus großteils ohne sie auskommt. Um eine konsistente Beschreibung und Einführung zu geben, ist die Lagrangefunktion selbstverständlich unentbehrlich, aber ihre Herleitung und genauen Eigenschaften werden weggelassen.

2.2.1. Hamiltonfunktion

Unter der Voraussetzung, dass die Funktion $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ existiert und ihre zweiten partiellen Ableitungen $\left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \right| \neq 0$ sind, kann man eine Legendretransformation auf sie anwenden.

Die *Hamiltonfunktion* H ist dann als die Legendretransformierte bezüglich der Geschwindigkeitsvariablen $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ der *Lagrangefunktion* L definiert:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (2.2.1)$$

Die unabhängigen Variablen q_i werden *verallgemeinerte Koordinaten* genannt, die

$$p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

heißen *verallgemeinerte Impulse*.

Definition 5 Der $2N$ -dimensionale Raum $\Gamma = \{q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N\}$ heißt *Phasenraum*. Gibt es mehr als ein Teilchen, z. B. d. Teilchen, so hat der Phasenraum die Dimension $2Nd$. Der Zustand eines mechanischen Systems zu einem bestimmten Zeitpunkt ist durch einen Punkt in dem Phasenraum eindeutig bestimmt.

Die Variablen $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_N)$ und $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_N)$ bilden einen Satz von *kanonisch konjugierten Variablen*; die dynamische Entwicklung des Systems wird durch $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ beschrieben.

Eine nicht explizit zeitabhängige Hamiltonfunktion $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ heißt *autonom*, und man kann zeigen, dass sie eine *Erhaltungsgröße* ist, d. h.

$$\frac{dH}{dt} = 0. \quad (2.2.2)$$

Im Fall von *nicht-autonomen* Hamiltonfunktionen $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, die explizit die Zeit t enthalten, kann man durch eine Erweiterung des Phasenraums wieder eine autonome Hamiltonfunktion erhalten. Man führt die neue Variable $q_{N+1} = t$ ein, die dazu kanonisch konjugierte Variable p_{N+1} wird als additiver Term zu der Hamiltonfunktion hinzugefügt. Die erweiterte Hamiltonfunktion $\bar{H} = \bar{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ lautet dann

$$\bar{H}(q_1, \dots, q_N, q_{N+1}, p_1, \dots, p_N, p_{N+1}) = H(q_1, \dots, q_N, q_{N+1}, p_1, \dots, p_N) + p_{N+1},$$

und ist wieder autonom.

Im Fall von geschwindigkeitsunabhängigen Potentialen ($U \neq U(\dot{\mathbf{q}})$) und von konservativen Systemen stellt die Hamiltonfunktion als Summe von kinetischer Energie T und potentieller Energie U die Gesamtenergie des Systems dar:

$$H = T + U. \quad (2.2.3)$$

2.2.2. Variationsprinzip

Hamiltons *Prinzip der kleinsten Wirkung* (auch Wirkungsprinzip) besagt, dass sich das dynamische System unter allen möglichen Kurven, welche durch zwei festgehaltene Punkte (Zustände im Phasenraum) $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}(t_1)$ und $\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}(t_2)$ gehen, entlang jenen entwickelt, bei denen die Variation des Funktional (*Wirkungsfunktion*)

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (2.2.4)$$

ihren Extremwert annimmt, d. h. $\delta S = 0$ ist.

Aus der Anwendung dieses Prinzips lassen sich die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen herleiten.

Zunächst formt man Gl. (2.2.1) um, damit in Gl. (2.2.4) die Lagrangefunktion L durch die Hamiltonfunktion ersetzt werden kann. Da die Variablen q_i und p_i ($i = 1 \dots N$) voneinander unabhängig sind, können sie auch unabhängig variiert werden.

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - H \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{i=1}^N \dot{q}_i \delta p_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^N \left\{ \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right\} = 0 \end{aligned}$$

Zwischendurch führt man die partielle Integration

$$\int_{t_1}^{t_2} dt p_i \delta \dot{q}_i = \underbrace{\left[p_i \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2}}_{=0} - \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{p}_i \delta q_i$$

aus, wobei der erste Term entfällt, weil die Variation der festgehaltenen Endpunkte $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ verschwindet.

Als Ergebnis lassen sich dann die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

($i = 1 \dots N$) ablesen.

Somit ist nun offensichtlich, dass unter Verwendung von Gl. (2.2.5) tatsächlich

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \\ &= \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \\ &= \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow H \neq H(t)\end{aligned}$$

gilt, und autonome Hamiltonfunktionen damit ein Integral der Bewegung darstellen.

Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen bilden ein System von $2N$ Differentialgleichungen 1. Grades, im Gegensatz zur Lagrangeschen- oder Newtonschen Formulierung mit N Differentialgleichungen 2. Grades.

Nach Scheck [24], Kap. 2.15, wird die Bedeutung der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen bei folgender Definition sichtbar:

Definition 6 *Ein mechanisches System heißt kanonisches System, wenn man ihm eine Hamiltonfunktion $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ zuordnen kann, so dass die Bewegungsgleichungen die Gestalt von Gl. (2.2.5) haben.*

2.2.3. Kanonische Transformationen

Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen sind invariant gegenüber *kanonischen Transformationen*. Diese sind eindeutige, invertierbare, differenzierbare Abbildungen (Diffeomorphismen) der Koordinaten, welche zur Vereinfachung der Bewegungsgleichungen verwendet werden.

Eine kanonische Transformation bildet bekannte kanonische Variablen $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ in neue kanonische Variablen $(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ ab,

$$\begin{aligned}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &\longmapsto (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \\ H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) &\longmapsto \bar{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)\end{aligned}$$

so dass nicht nur die alten Variablen die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (2.2.5) bezüglich $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ erfüllen, sondern auch die neuen Variablen in Bezug auf die transformierte Hamiltonfunktion $\bar{H} = \bar{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_i}, \quad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_i} \quad (i = 1 \dots N).$$

Definition 7 *Eine Koordinate q_k heißt zyklische Koordinate, wenn die Hamiltonfunktion sie nicht explizit enthält, d. h. wenn $\frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0$. Dadurch ist $p_k = \alpha_k = \text{const.}$ Die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems vermindert sich dadurch um einen Freiheitsgrad.*

Wenn alle q_i , $i = 1 \dots N$ zyklisch sind, also $H = H(p_1, \dots, p_N, t)$ gilt, dann sind die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen sofort mittels

$$\begin{aligned} \dot{p}_i = 0 & \Rightarrow p_i = \alpha_i = \text{const} \\ \dot{q}_i = \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \right)_{p_i = \alpha_i} = f_i(\vec{\alpha}, t) & \Rightarrow q_i = \beta_i + \int_{t_0}^t d\bar{t} f_i(\vec{\alpha}, \bar{t}) \end{aligned}$$

mit den Integrationskonstanten (α_i, β_i) lösbar, welche sich z. B. aus den Anfangsbedingungen $(q_i(0), p_i(0))$ ergeben.

Wenn also durch eine kanonische Transformation die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen unverändert gültig bleiben, so muss das Variationsprinzip sowohl für die alten als auch die neuen Variablen zutreffen:

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \right) &= 0, \\ \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{i=1}^N P_i \dot{Q}_i - H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) \right) &= 0. \end{aligned}$$

Durch Vergleich der Integranden folgt daher:

$$\sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^N P_i \dot{Q}_i - H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) + \frac{dF}{dt}. \quad (2.2.6)$$

Die totale Zeitableitung der Funktion F kann hier hinzugefügt werden, da sie integriert nach t für festgehaltene Anfangs- und Endpunkte eine verschwindende Variation hat, genauer

$$\delta \left(\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{dF}{dt} \right) = [\delta F]_{t_2} - [\delta F]_{t_1} = 0.$$

Die transformierte Hamiltonfunktion lautet dann

$$\bar{H} = H + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (2.2.7)$$

Die Funktion F heißt *erzeugende Funktion* der kanonischen Transformation. Es gibt vier Möglichkeiten, wie man die Funktion F wählen kann,

$$\begin{aligned} F_1 &= F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t), \\ F_2 &= F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t), \\ F_3 &= F_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t), \\ F_4 &= F_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t). \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Mittels Legendretransformationen ist es möglich, je zwei dieser erzeugenden Funktion ineinander überzuführen.

Ziel einer kanonischen Transformation ist daher, von einer gegebenen Hamiltonfunktion auf eine transformierte Hamiltonfunktion zu kommen, in welcher eine oder mehrere Variablen zyklische Variablen sind. Man kann sogar so weit gehen, und eine kanonische Transformation suchen, durch welche die transformierte Hamiltonfunktion selbst identisch Null wird, die transformierten Variablen $(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ sind dann alle Konstanten. Dieser Idee folgend gelangt man zu der *Hamilton-Jacobi Differentialgleichung*, einer partiellen Differentialgleichung 1. Grades. Im Fall einer erzeugenden Funktion des Typs F_1 lautet sie folgendermaßen:

$$H(q, \frac{\partial F_1}{\partial q}, t) + \frac{\partial F_1}{\partial t} = 0. \quad (2.2.9)$$

Eine Funktion F , welche eine vollständige Lösung der Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung (2.2.9) darstellt, ist somit erzeugende Funktion einer kanonischen Transformation, durch die – mittels $Q_i = \alpha_i$, $P_i = \beta_i$, $\bar{H} \equiv 0$ – die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (2.2.5) für $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ gelöst werden.

2.2.4. Poissonklammern

Für eine beliebige differenzierbare Funktion $f = f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, die auf dem Phasenraum definiert ist, lautet ihre totale Zeitableitung:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i}. \end{aligned}$$

Dabei wurden die Ableitungen der Phasenraumvariablen $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ nach Gl. (2.2.5) ersetzt.

Die *Poissonklammer* zweier Funktionen $f = f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, $g = g(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ wird als

$$[f, g] = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \quad (2.2.10)$$

gebildet.

Gemäß dieser Definition schreibt man die Zeitableitung von f mit Poissonklammer und Hamiltonfunktion H als

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H].$$

Eigenschaften der Poissonklammer: Es gelten die folgenden Beziehungen, die in verschiedenen Lehrbüchern inklusive Beweisen zu finden sind.

1. Symmetrieeigenschaften: $[f, g] = -[g, f]$
2. Poissonklammer einer Funktion mit sich selbst: $[f, f] \equiv 0$
3. Jacobi-Identität: $[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$

4. Poissonklammern für Paare von Variablen gleichen Typs: $[q_i, q_k] = [p_i, p_k] = 0$
5. Poissonklammern für Paare von Variablen verschiedenen Typs:

$$[q_i, p_k] = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \dots & i = k \\ 0 & \dots & i \neq k \end{cases}$$

Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (2.2.5) kann man unter Anwendung der Poissonklammer auch als

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= [q_i, H] = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= [p_i, H] = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned}$$

schreiben.

2.3. Das dynamische Modell

Grundlage dieser Arbeit bildet das Modell des Dreikörperproblems (3 KP). Allerdings wird nicht die allgemeinste Formulierung des Dreikörperproblems behandelt, sondern das vereinfachte Modell des *eingeschränkten Dreikörperproblems*. Man nimmt für einen der drei Körper eine gegenüber den anderen beiden verschwindend kleine Masse an, mit der Konsequenz, dass die Bewegung der massebehafteten Körper dadurch eine ungestörte Zweikörperbewegung darstellt, welche integrierbar ist.

2.3.1. Das Sitnikov Problem

Für das Modell des eingeschränkten Dreikörperproblems wurden unter anderem zwei Spezialfälle vorgeschlagen, einer von W. D. MacMillan [19], der andere von K. Sitnikov [26]. Diese Spezialfälle sind heute als das *MacMillan Problem* bzw. das *Sitnikov Problem* bekannt. Genau genommen ist das Sitnikov Problem allgemeiner, es enthält seinerseits als Spezialfall das MacMillan Problem, wenn die Exzentrizität Null ist.

Ausgehend vom dreidimensionalen Dreikörperproblem macht man im Grunde folgende Vereinfachungen:

1. Zur Beschreibung des dynamischen Systems wird die Newtonsche Mechanik verwendet, alle Massen sind als punktförmig anzusehen, es treten keinerlei relativistische Effekte auf.
2. Es gibt zwei gleich schwere Körper (Hauptkörper, „primaries“) und einen dritten Körper von dazu vernachlässigbarer Masse.
3. Die Hauptkörper bewegen sich in einer Ebene auf elliptischen Bahnen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt („Baryzentrum“), und sie werden durch den dritten Körper

nicht beeinflusst. Ihre Bewegung kann als Keplersche Bewegung durch das Zweikörperproblem beschrieben werden. Im MacMillan Problem wird noch weiter eingeschränkt, dass sich die Hauptkörper auf Kreisbahnen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt bewegen.

4. Der dritte Körper bewegt sich senkrecht zu der Ebene der beiden Hauptkörper, der Schnittpunkt seiner Bahn mit der Ebene der Hauptkörper ist immer das Baryzentrum. Es handelt sich dabei also um eine eindimensionale Bewegung.

Eine schematische Darstellung des beschriebenen Modells zeigt die Abbildung 2.2.

2.3.2. Herleitung der Bewegungsgleichung

Ausgangspunkt der Überlegungen soll die Hamiltonfunktion für das System von $N = 3$ Massenpunkten $\{m_1, m_2, m_3\}$ sein. Der Ortsvektor in einem kartesischen Koordinatensystem für die i -te Masse ($i = 1, 2, 3$) ist $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$, der Impuls $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{x}}_i$. Die kinetische Energie T und die potentielle Energie U für die Hamiltonfunktion nach Gl. (2.2.3) lauten

$$T(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i}, \quad U(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{i,k=1 \\ i < k}}^3 \phi_{ik}.$$

Das Gravitationspotential ϕ_{ik} zwischen den Massen m_i und m_k ist in den Relativkoordinaten $\rho_{ik} = |\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i|$ in folgender Form gegeben:

$$\phi_{ik} = \frac{Gm_i m_k}{\rho_{ik}}.$$

Die Konstante G ist die Gravitationskonstante ($G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$).

Für die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen müssen nach Gl. (2.2.5) die Gradienten der Hamiltonfunktion bezüglich den Orts- und Impulsvariablen gebildet werden.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{p}_i} = \frac{\mathbf{p}_i}{m_i} \\ \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_i} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_i} = -G \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 m_i m_k \frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i}{\rho_{ik}^3} \right). \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung der Bewegungsgleichungen werden die Massen der Hauptkörper $m_1 = m_2 = m = \frac{1}{2}$ gleichgesetzt, entsprechend Punkt 2 von oben. Mit der Einschränkung $\frac{m_3}{m} \ll 1$ wird erreicht, dass keine Wechselwirkungsterme mit dem dritten Körper auftreten. Die Bewegungsgleichungen für die Indizes $i = 1, 2$ beziehen sich somit auf ein Zweikörperproblem, welches hier nicht weiter betrachtet werden muss.

Die letzte Vereinfachung folgt aus der vierten Bedingung, dass sich der dritte Körper nur entlang der z -Achse bewegen darf. Das bedeutet, dass zu jedem Zeitpunkt die

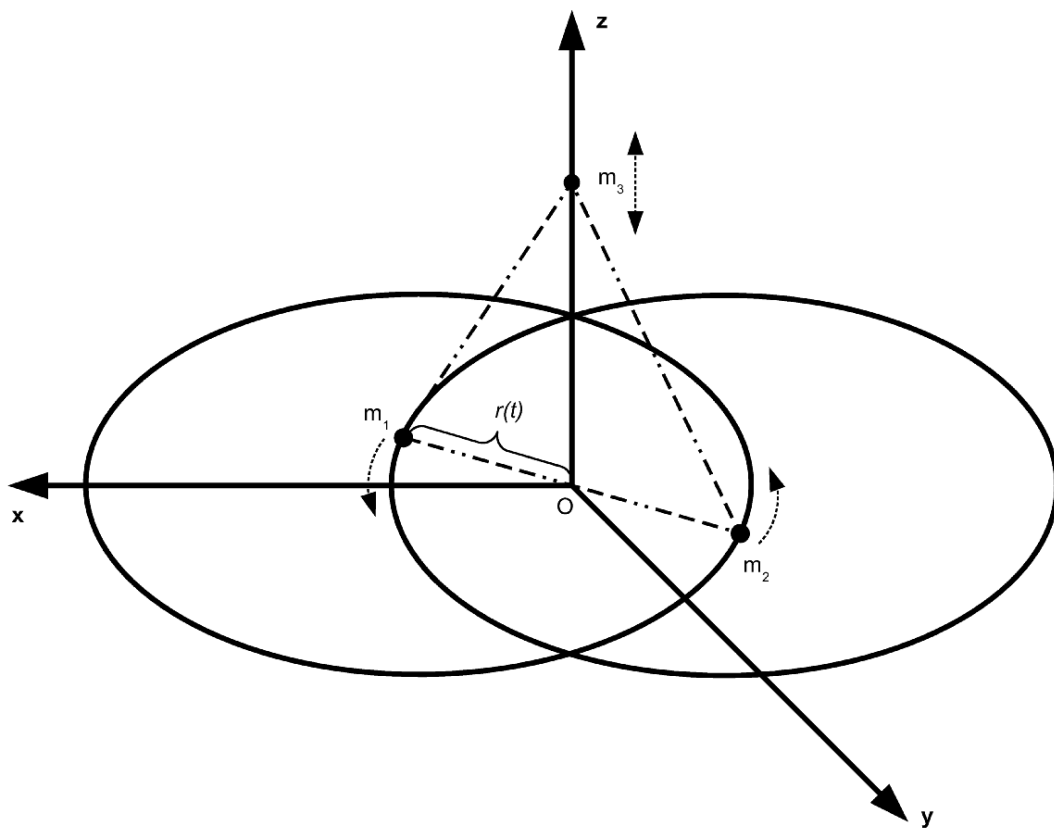


Abbildung 2.2.: Konfiguration des Sitnikov Problems – die beiden massengleichen Hauptkörper m_1 und m_2 laufen in der $x-y$ Ebene auf elliptischen Bahnen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt O , der Körper m_3 mit vernachlässigbarer Masse oszilliert entlang der z -Achse.

Beschleunigungen $\ddot{x}_3 = \ddot{y}_3 = 0$ sein müssen. Gemäß diesen Zwangsbedingungen können weitere zwei Differentialgleichungen eliminiert werden, sodass nur mehr das System

$$\begin{aligned}\frac{dz_3}{dt} &= \frac{p_3}{m_3} \\ \frac{dp_3}{dt} &= -Gmm_3 \frac{z_3 - z_1}{\rho_{13}} - Gmm_3 \frac{z_3 - z_2}{\rho_{23}}\end{aligned}$$

bestehen bleibt. Durch die Wahl des Koordinatensystems – die Hauptkörper bewegen sich auf konfokalen Ellipsen mit der großen Halbachse $a = \frac{1}{2}$, der Ursprung des Koordinatensystems wird in ihren gemeinsamen Brennpunkt gelegt, dadurch erreicht man immer symmetrische Abstände der dritten Masse relativ zu den beiden Hauptkörpern – sind $z_1 = z_2 = 0$ und $\rho_{31} = \rho_{32} = \rho$. Außerdem wählt man die Längen- und Zeiteinheiten entsprechend, damit $G \equiv 1$ wird. Über die Beziehung $\rho^2 = r^2 + z_3^2$ kann man ρ durch die z -Koordinate des Körpers und den momentanen Abstand $r = r(t)$ eines der Hauptkörper vom Ursprung ausdrücken. Somit lauten die Bewegungsgleichungen für den dritten „masselosen“ Körper

$$\frac{dz_3}{dt} = \frac{p_3}{m_3} \quad (2.3.1a)$$

$$\frac{dp_3}{dt} = m_3 \frac{z_3}{(r^2 + z_3^2)^{3/2}}. \quad (2.3.1b)$$

Um diese Gleichungen in der üblichen Notation darzustellen, setzt man $z_3 = z$, leitet Gl. (2.3.1a) nach der Zeit ab und setzt dann Gl. (2.3.1b) ein. Die nichtlineare Differentialgleichung zweiten Grades für $z = z(t)$ des Sitnikov Problems lautet somit

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = 0. \quad (2.3.2)$$

Diese Bewegungsgleichung besitzt eine Hamiltonfunktion, die für das Sitnikov Problem durch

$$H(z, \dot{z}, t) = \frac{1}{2} \dot{z}^2 - \frac{1}{(r^2 + z^2)^{1/2}} \quad (2.3.3)$$

gegeben ist.

2.4. Alternative Formulierungen des Sitnikov Problems

Das vorgestellte Problem mit Bewegungsgleichung (2.3.2) erlaubt auch andere, alternative Formulierungen.

Die bestehende Differentialgleichung enthält den Term $r(t)$, der den Abstand der Primärkörper von ihrem gemeinsamen Schwerpunkt beschreibt. Daher ist die Gleichung explizit zeitabhängig, ihre Lösung verlangt die Bestimmung von $r(t)$. Die im Folgenden vorgestellten alternativen Formulierungen haben alle das Ziel, die Berechnung der Funktion $r(t)$ auf die eine oder andere Art zu vereinfachen.

2.4.1. Das MacMillan Problem

Chronologisch bereits wesentlich früher als von Sitnikov wurde 1911 von MacMillan [19] ein spezieller Fall des eingeschränkten Dreikörperproblems vorgestellt, der einen Spezialfall des Sitnikov Problems darstellt. In einer Bemerkung zu seiner Arbeit wies MacMillan selbst darauf hin, dass einige Jahre früher Pavanini (1907) bereits einige der Ergebnisse veröffentlichte.

MacMillan stellte eine Differentialgleichung wie Gl. (2.3.2) auf, als weitere Einschränkung wird aber für die beiden Hauptkörper eine kreisförmige Bewegung – Exzentrizität $\varepsilon = 0$ – angenommen. Das vereinfacht die Differentialgleichung insofern, als dass $r(t)$ dadurch eine Konstante wird, $r = a = \frac{1}{2}$, und die Gleichung nicht mehr explizit von der Zeit abhängt.

Die Abbildung 2.3 gibt einen Überblick über die Konfiguration des MacMillan Problems.

Die Differentialgleichung für das MacMillan Problem in der Variablen $z = z(t)$ lautet

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{z}{\left(\frac{1}{4} + z^2\right)^{3/2}} = 0. \quad (2.4.1)$$

Dies ist zwar noch immer eine nichtlineare Differentialgleichung, jedoch ist sie autonom und integrierbar. Gleichung (2.4.1) lässt sich einmal nach der Zeit integrieren, wodurch sich die zeitunabhängige Hamiltonfunktion

$$H(z, \dot{z}) = \frac{1}{2} \dot{z}^2 - \frac{1}{\left(\frac{1}{4} + z^2\right)^{1/2}} \quad (2.4.2)$$

ergibt, sie ist nach Gl. (2.2.2) eine Erhaltungsgröße, d. h. $H(z, \dot{z}) = \text{const.}$, $\frac{dH}{dt} = 0$. Wenn die Bewegung gebunden sein soll, müssen Umkehrpunkte $z = \pm z_{\max}$ existieren, an denen $\dot{z} = 0$ ist. Dies ist nach Gl. (2.4.2) dann der Fall, wenn

$$z_{\max} = \sqrt{\frac{1}{H^2} - \frac{1}{4}}$$

und daraus folgt, dass der Wert der Hamiltonfunktion im Intervall $-2 \leq H < 0$ liegt, das negative Vorzeichen ist nötig, damit $\dot{z}^2 \geq 0$ bleibt.

MacMillan führte dann weitere Substitutionen ein und die Differentialgleichung (2.4.1) auf ein elliptisches Integral vom Legendreschen Typ zurück, dessen Lösung $t(z)$ ergibt, die Zeit t für einen bestimmten Wert von z . Die Lösungsfunktion $z(t)$ wird als eine Fourierreihe bis zur zweiten Ordnung in

$$\mu = \frac{z_{\max}^2}{1 + z_{\max}^2}$$

angegeben, welche periodische ($\nu = \frac{2\pi}{P}$) Koeffizientenfunktionen besitzt:

$$\begin{aligned} z(t) = & z_{\max} \left[\sin(\nu t) + \frac{3}{64} \mu (\sin(\nu t) + \sin(3\nu t)) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4096} \mu^2 (79 \sin(\nu t) + 108 \sin(3\nu t) + 29 \sin(5\nu t)) + \mathcal{O}(\mu^3) \right]. \end{aligned}$$

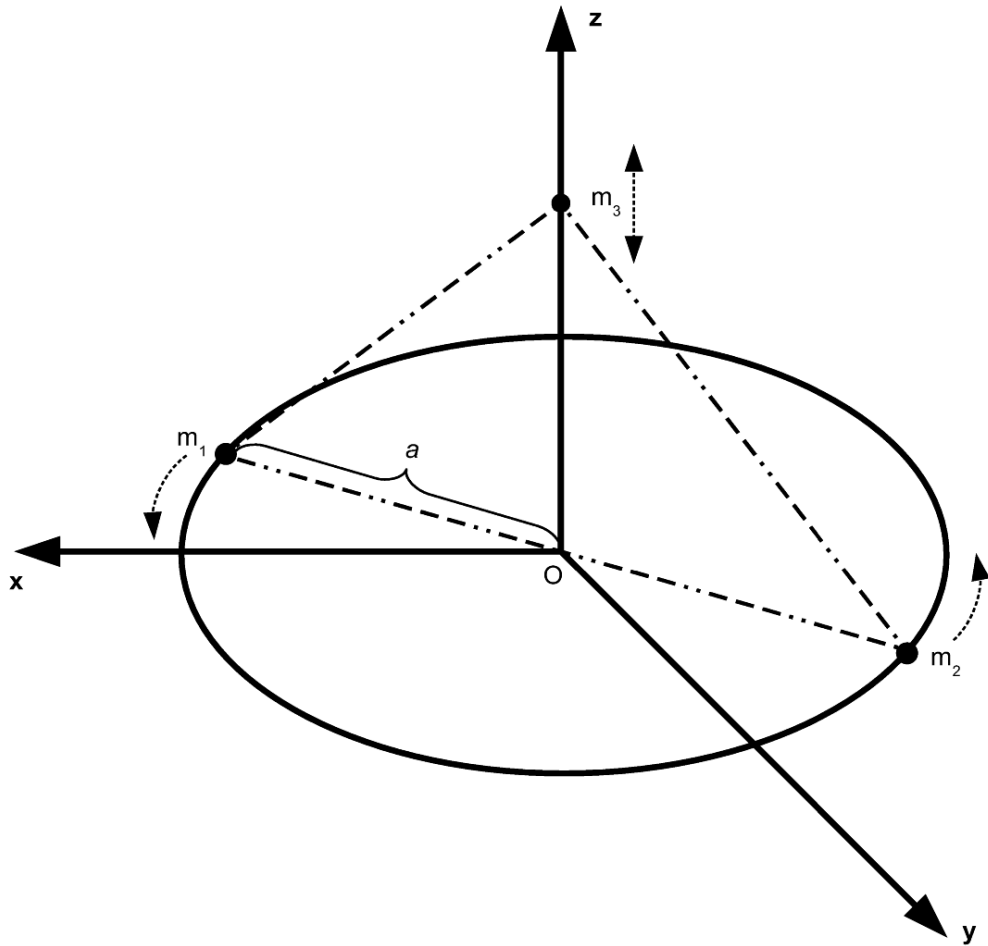


Abbildung 2.3.: Konfiguration des MacMillan Problems – die beiden massengleichen Hauptkörper m_1 und m_2 bewegen sich auf einer Kreisbahn mit Radius a in der $x-y$ Ebene, so dass ihre Verbindungslinie stets durch ihren gemeinsamen Schwerpunkt O geht, der Körper m_3 mit vernachlässigbarer Masse oszilliert entlang der z -Achse. Der Abstand a zwischen den Hauptkörpern und dem Ursprung ist für alle Zeiten konstant.

2.4.2. Formulierung von Alfaro-Chiralt

In ihrer Veröffentlichung beschäftigen sich Martínez Alfaro & Chiralt [20] mit dem Sitnikov Problem unter dem Gesichtspunkt, ob für alle Werte der Exzentrizität $0 \leq \varepsilon < 1$ noch invariante Kurven um einen Fixpunkt existieren.

Zum Zweck der Untersuchung der Bewegungsgleichungen ist es unvorteilhaft, den Abstand $r(t)$ eines Hauptkörpers vom Ursprung als Funktion der Zeit zu bestimmen. Dessen Wert hängt jedoch über die Zeit mit der exzentrischen Anomalie zusammen, die Kepler-gleichung (2.1.6) stellt den Zusammenhang her.

Um diese Probleme zu umgehen, schlagen sie folgende Vorgangsweise vor: Statt der unabhängigen Variable t wird die neue unabhängige Variable E (exzentrische Anomalie) eingeführt. Der Wechsel $r(t) \mapsto r(E)$ beseitigt das Problem, die Kepler-gleichung lösen zu müssen. Der Radius kann nun direkt aus Gl. (2.1.7) berechnet werden.

Aus der Kepler-gleichung

$$E - \varepsilon \sin E = t$$

erhält man das Differential

$$dt = dE (1 - \varepsilon \cos E) ,$$

und weiters, da $r(E) = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon \cos E)$ gilt (es wurde $a = \frac{1}{2}$ gesetzt), ist $\frac{dt}{dE} = 2r$.

Wenn man $\frac{dz}{dt} = u$ setzt, lässt sich damit die Gl. (2.3.2) als System von Differential-gleichungen ersten Grades schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dE} \frac{dE}{dt} &= \frac{dz}{dE} \frac{1}{2r} = u \\ \frac{du}{dE} \frac{dE}{dt} &= \frac{du}{dE} \frac{1}{2r} = -\frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Somit lauten die endgültigen Bewegungsgleichungen in der unabhängigen Variable E für $z = z(E)$, $u = u(E)$, $r = r(E)$

$$\frac{dz}{dE} = 2ru \tag{2.4.3a}$$

$$\frac{du}{dE} = -\frac{2rz}{(r^2 + z^2)^{3/2}}. \tag{2.4.3b}$$

2.4.3. T-Gleichung von Wodnar

Einen ähnlichen Weg schlug Wodnar [31] ein, als er die sog. T-Gleichung herleitete. Der Wechsel von der unabhängigen Variable t auf die wahre Anomalie φ führt über die Substitution

$$z(t) \mapsto T(\varphi) \doteq \frac{z}{2r},$$

so gelingt es, die Abhängigkeit von r zu eliminieren. Durch diese Substitution wird eine Differentialgleichung in der Variable $T(\varphi)$ aufgestellt.

Der Ansatz eingesetzt in die Differentialgleichung (2.3.2) ergibt

$$\frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{2rT}{(r^2 + 4r^2T^2)^{3/2}} = \frac{1}{4r^2} \frac{T}{\left(\frac{1}{4} + T^2\right)^{3/2}}.$$

Der Differentialoperator $\frac{d}{dt}$ wird in seiner Wirkung nach der Kettenregel durch $\frac{d\varphi}{dt} \frac{d}{d\varphi}$ ersetzt (Punkte stehen für die Ableitung $\frac{d}{dt}$, Striche für $\frac{d}{d\varphi}$). Um die Substitution auch für $\ddot{z}$ durchzuführen, wird zuerst $\dot{z}$ berechnet

$$\dot{z} = 2 \frac{d}{dt} (rT) = 2\dot{\varphi} \frac{d}{d\varphi} (rT) = 2\dot{\varphi} (r'T + rT').$$

Eine weitere Anwendung des Differentialoperators ergibt dann den Ausdruck

$$\ddot{z} = 2((r''T + 2r'T' + rT'')\dot{\varphi}^2 + (r'T + rT')\ddot{\varphi})$$

für die zweite Ableitung.

Nach einigen Umformungen, nämlich den Ersetzungen für die Ableitungen von r und φ unter Berücksichtigung der Gleichungen (2.1.1) und (2.1.2), ergibt sich die **T-Gleichung** nach Wodnar in der folgenden Form

$$\frac{d^2T}{d\varphi^2} + \frac{\varepsilon \cos \varphi + \left(\frac{1}{4} + T^2\right)^{-3/2}}{1 + \varepsilon \cos \varphi} T = 0. \quad (2.4.4)$$

In [31] wird ein Ausdruck für die Hamiltonfunktion angegeben,

$$H(T, T', \varphi) = \frac{1}{2} (T^2 + T'^2) - \frac{\frac{1}{2}T^2 + \left(\frac{1}{4} + T^2\right)^{-1/2}}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad (2.4.5)$$

von der die Bewegungsgleichung (2.4.4) unter Verwendung der Gleichung (2.2.5) ebenfalls herzuleiten ist.

Kapitel 3.

Numerische Methoden

Hier wird beschrieben, wie das Sitnikov Problem mit numerischen Methoden behandelt wird. Die Bewegungsgleichungen werden mit verschiedenen Methoden numerisch integriert, es wird untersucht, welche Methode bei der Berechnung des Abstandes der Primärkörper am effizientesten ist, und ob ein Iterationsverfahren oder die direkte Reihenentwicklung mit Besselfunktionen schneller konvergiert.

Drei verschiedene Arten von numerischen Integratoren werden verglichen, darunter die bekannten Runge-Kutta Integratoren, ein für das Problem erstellter Lie-Integrator und ein symplektischer Integrator.

3.1. Lösung der Keplerschen Gleichung

Die numerische Behandlung der Bewegungsgleichung (2.3.2) des Sitnikov Problems wird durch die Tatsache erschwert, dass dort der Term $r(t)$ auftritt, weshalb die Differentialgleichung nicht in geschlossener Form vorliegt. Der radiale Abstand r eines der Primärkörper zum Zeitpunkt t ergibt sich zwar ohne weiteres aus den bekannten Keplerschen Gesetzen und den aus ihnen folgenden Beziehungen, jedoch beinhalten diese statt explizit die Zeit meist nur die wahre oder exzentrische Anomalie. Diese Winkeln als Funktionen der Zeit zu bestimmen führte – wie in Abschnitt 2.1.4 gezeigt – auf die Keplersche Gleichung. In einem Algorithmus zur numerischen Integration der Bewegungsgleichung wird es daher notwendig sein, den Radius $r(t)$ für jeden Zeitschritt neu zu berechnen, bzw. aus vorher bestimmten Stützstellen zu interpolieren.

Gesucht ist also eine Methode, welche in möglichst kurzer Zeit eine Lösung der Keplerschen Gleichung von möglichst hoher Präzision ergibt. Es werden drei unterschiedliche Ansätze zur Lösung vorgestellt, und auf ihre Eigenschaften und ihre Effizienz untersucht.

3.1.1. Reihenentwicklung mit Besselfunktionen

In verschiedenen Büchern wird ein Verfahren angegeben, wie über eine Fourierreihenentwicklung die im Zweikörperproblem auftretenden Ausdrücke $\cos(jE)$ und $\sin(jE)$ ($j = 1, 2, 3, \dots$) nach Vielfachen der mittleren Anomalie M , d. h. wegen $M = nt$ als Funktionen der Zeit, entwickelt werden können. Dabei treten *Besselfunktionen* verschiedenen ganzzahligen Grades auf.

Unter anderem treten in der Keplerschen Gleichung (2.1.6) und bei der Berechnung von $r(E)$ nach Gl. (2.1.7) trigonometrische Funktionen in der exzentrischen Anomalie

auf, für deren Fourierreihen folgende Ansätze gemacht werden können:

$$\begin{aligned}\cos(jE) &= \frac{1}{2}a_0^{(j)} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(j)} \cos(kM) \\ \sin(jE) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(j)} \sin(kM).\end{aligned}$$

Um die Koeffizienten dieser unendlichen Reihen zu bestimmen, müssen die Integrale

$$\begin{aligned}a_k^{(j)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dM \cos(jE) \cos(kE), \quad (k \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \\ b_k^{(j)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dM \sin(jE) \sin(kE), \quad (k \in \mathbb{N})\end{aligned}$$

gelöst werden.

Im Verlauf dieser Rechnungen, die detailliert in Stumpff [30], Kap. VII.58, und Kovalevsky [16] aufgeführt sind, treten dann als Reihenkoeffizienten die Besselschen Funktionen auf. Das Ergebnis der Integration hängt vom Wert des ganzzahligen Parameters $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 1$ ab, die Fourierreihen lauten

$$\cos(jE) = \begin{cases} -\frac{\varepsilon}{2} \dots j = 1 \\ 0 \dots j > 1 \end{cases} + j \sum_{k=1}^{\infty} (J_{k-j}(k\varepsilon) - J_{k+j}(k\varepsilon)) \frac{\cos(kM)}{k} \quad (3.1.1)$$

$$\sin(jE) = j \sum_{k=1}^{\infty} (J_{k-j}(k\varepsilon) + J_{k+j}(k\varepsilon)) \frac{\sin(kM)}{k} \quad (3.1.2)$$

wobei ε überall für die Exzentrizität steht, bedingt dadurch, dass das Differential der Keplerschen Gleichung $dM = dE(1 - \varepsilon \cos E)$ bei der Integration verwendet wurde.

Anwendungen der Reihendarstellungen

Als Anwendung der soeben gefundenen Fourierreihendarstellung sollen die folgenden beiden Beispiele betrachtet werden.

1. Die Keplersche Gleichung (2.1.6) kann nun mit Hilfe von Gl. (3.1.2) als

$$E - M = \varepsilon \sin E = 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_k(k\varepsilon) \frac{\sin(kM)}{k}$$

dargestellt werden (mittels einer Umformung gemäß den Eigenschaften der Besselfunktionen, siehe unten).

2. Statt den Radius in Gl. (2.1.7) als Funktion der exzentrischen Anomalie $r(E(t))$ anzugeben, benutzt man Gl. (3.1.1) für $j = 1$ und schreibt $r(t)$ direkt als

$$\frac{r}{a} = 1 - \varepsilon \cos E = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} - \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} (J_{k-1}(k\varepsilon) - J_{k+1}(k\varepsilon)) \frac{\cos(kM)}{k} \quad (3.1.3)$$

wodurch man eine Reihe nach aufsteigenden Vielfachen der Variable M erhält. Ordnet man die Terme nach gleichen Potenzen in ε um, so sind deren Koeffizienten Funktionen von Cosinus-Termen in der mittleren Anomalie.

In den beiden oben hergeleiteten Reihen kann man noch die mittlere Anomalie $M = n(t - t_0)$ setzen, oft auch mit $t_0 = 0$, womit sofort die Abhängigkeit von der Zeit t sichtbar ist.

Bevor die Gleichung (3.1.3) zur Bestimmung des Abstandes der Primärkörper angewendet werden kann, sollen die in ihr auftretenden Besselfunktionen kurz näher betrachtet werden.

Ursprung der Besselfunktionen

Es gibt mindestens drei unterschiedliche Arten, wie die Besselfunktionen eingeführt werden können.

1. Der erste Weg wurde bereits oben skizziert, er entspricht der ursprünglich von W. Bessel¹ gewählten Vorgangsweise, Fourierreihenentwicklungen zu verwenden. Dabei treten die Besselfunktionen als Integrale der Art

$$J_n(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta \cos(x \sin \theta - n\theta)$$

bei der Bestimmung der Reihenkoeffizienten auf.

2. Die zweite Vorgehensweise führt über die Lösung der Besselschen Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0.$$

Der *Frobenius-Ansatz*² für die Funktion lautet

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\rho},$$

¹Besselfunktionen wurden von W. Bessel 1824 eingeführt, als er das Problem untersuchte, wie die Differenz von exzentrischer und mittlerer Anomalie aus der Keplerschen Gleichung als Fourierreihe nach Vielfachen der mittleren Anomalie M auszudrücken ist (siehe dazu Sneddon [28]).

²Der Frobenius-Ansatz ist ein Potenzreihenansatz für den Fall, dass – wie bei der gegebenen Differentialgleichung im Punkt $x = 0$ – die Differentialgleichung in einem Punkt $x = x_0$ eine Singularität hat.

wobei ρ zunächst unbestimmt ist und für die gegebene Differentialgleichung zweiten Grades bis zu zwei unterschiedliche reelle Werte annehmen kann, entsprechend existieren bis zu zwei linear unabhängige Lösungen. Damit ist die Lösungsfunktion für $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ eine Linearkombination der Besselschen Funktionen erster und zweiter Art,

$$y(x) = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x),$$

mit zwei Integrationskonstanten, welche durch die Anfangs- bzw. Randbedingungen bestimmt werden.

3. Als dritte Möglichkeit kann die Entwicklung der *erzeugenden Funktion*

$$B(x, z) := \exp\left(\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad |z| \neq 0$$

in eine *Laurentreihe*³ der Form

$$B(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n$$

dienen, deren reelle Koeffizienten die Besselfunktionen sind. Da dieser Weg eine direkte Art darstellt, und sich viele der Eigenschaften von Besselfunktionen damit zeigen lassen, soll er ausführlicher dargestellt werden.

Gemäß den Eigenschaften der Exponentialfunktion kann die erzeugende Funktion $B(x, z)$ auch als Produkt zweier Exponentialfunktionen

$$\begin{aligned} B(x, z) &= \exp\left(\frac{xz}{2}\right) \exp\left(-\frac{x}{2z}\right) \\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{x}{2}\right)^j z^j\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k z^{-k}\right) \\ &= \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{j!k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{j+k} z^{j-k} \end{aligned}$$

aufgefasst werden. Benutzt man $n = j - k$ als neuen Index, so folgt für den Koeffizienten von z^n

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \right) z^n$$

genau die Form

$$J_n(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \quad (3.1.4)$$

für die Potenzreihendarstellung der Besselfunktionen.

³Eine holomorphe Funktion $f(z)$ lässt sich in der Umgebung einer Singularität z_0 im Allgemeinen nicht in eine Taylorreihe entwickeln, dafür aber in eine Laurentreihe, eine komplexe Potenzreihe, welche auch Beiträge von negativen Potenzen z^{-n} enthalten kann (siehe dazu Jänich [15]).

Eigenschaften von Besselfunktionen

Für die Verwendung von Besselfunktionen sind einige Relationen und Eigenschaften wichtig, welche hier kurz beschrieben werden. Diese Zusammenfassung basiert im Wesentlichen auf Sneddon [28], Kap. IV.

1. Betragsabschätzung

$$|J_0(x)| \leq 1, \quad |J_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

2. Symmetrierelationen

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= (-1)^n J_n(x) \\ J_n(-x) &= (-1)^n J_n(x) \end{aligned}$$

3. Rekursionsrelationen

$$\begin{aligned} \frac{2n}{x} J_n(x) &= (J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)) \\ 2 \frac{dJ_n}{dx} &= (J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)) \\ x \frac{dJ_n}{dx} &= n J_n(x) - x J_{n+1}(x) \\ x \frac{dJ_n}{dx} &= x J_{n-1}(x) - n J_n(x) \\ \frac{d^m}{dx^m} (x^n J_n(x)) &= x^{n-m} J_{n-m}(x) \\ \frac{d^m}{dx^m} (x^{-n} J_n(x)) &= (-1)^m x^{-n-m} J_{n+m}(x) \\ \frac{d^m}{dx^m} J_n(x) &= \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} J_{n-m+2k}(x) \end{aligned}$$

Konvergenzeigenschaften der Reihen

Die unendlichen Reihen in Gl. (3.1.1) und Gl. (3.1.2) sind zwar als Fourierreihen in M für $0 \leq \varepsilon < 1$ konvergent, jedoch ist die Darstellung als Potenzreihe in der Variable ε nicht für den selben Wertebereich gestattet.

Dies wird in Stumpff [30], Kap. VII.61, gezeigt, indem für die Funktion $E = E(\varepsilon, M)$ der Konvergenzradius in der komplexen Ebene gesucht wird. Der Rechnung zufolge gibt es eine obere Schranke ε_c , bestimmt durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \varepsilon_c &= \frac{1}{\sinh \beta}, \quad \varepsilon_c = 0.662\,743\,419 \dots \\ \beta &= \coth \beta, \quad \beta = 1.199\,678\,640 \dots, \end{aligned}$$

bis zu welcher die Reihen für alle M konvergieren, oberhalb aber für gewisse Werte divergieren, wie z. B. für $(2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$. Offenbar dürfen die Reihen also für $\varepsilon < \varepsilon_c$ auch als Potenzreihen in ε verwendet werden, darüber hinaus aber nicht mehr unbedingt.

Die Konvergenz der Reihe in Gl. (3.1.4) ist ebenfalls gesichert, wenn man sie als eine alternierende unendliche Reihe

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$$

auffasst. Die Folge der $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ muss nur eine monoton fallende Nullfolge sein; gemäß dem Quotientenkriterium

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{x^2}{4(k+1)(n+k+1)} \right| = 0$$

ist diese Forderung für festgehaltenes x erfüllt. Allerdings ist die Verwendung von Gl. (3.1.4) zur direkten Bestimmung der Funktionswerte nicht in allen Fällen sinnvoll.

Die Gleichungen (3.1.4) und (3.1.3) wurden in `besselj.c` als Programm implementiert, sodass dadurch jede beliebige Besselfunktion $J_n(x)$ und der Radius $r(t, \varepsilon)$ numerisch berechnet werden können. Das Programm zählt intern mit, wie viele Iterationen notwendig sind, um eine vorgegebene Genauigkeit ϵ zu erreichen.

x	Ordnung n der Besselfunktion										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.25	7	7	7	6	6	6	5	5	5	5	4
0.75	9	9	8	8	8	7	7	6	6	6	5
1.50	11	11	10	10	9	9	8	8	7	7	6
3.00	14	14	13	13	12	11	11	10	9	9	8
6.28	20	19	19	18	17	16	15	14	13	12	11
10.00	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	15

Tabelle 3.1.: Die Anzahl der Auswertungsschritte zur Berechnung des Funktionswertes von $J_n(x)$ bei Anwendung von Gl. (3.1.4). Angegeben sind die Anzahl der Auswertungen bei einer bestimmten Ordnung n (oberste Zeile) für verschiedene Werte des Arguments x (linke Spalte). Für alle Werte gilt, dass eine Fehlergrenze von $\epsilon = 10^{-15}$ vorgeschrieben war.

Die in Tabelle 3.1 angegebenen Werte lassen den Schluss zu, dass die Anzahl der Auswertungen mit der Ordnung n der Besselfunktion sinkt, wie es wegen $J_n(x) \propto \left(\frac{x}{2}\right)^n$ zu erwarten ist. Mit steigendem Wert des Arguments x erhöht sich für festes n die Anzahl der Auswertungsschritte.

Für die Gl. (3.1.3) müssen jeweils zwei Besselfunktionen pro Iterationsschritt ausgewertet werden. Die Zählung erfolgt daher so, dass immer nur ein komplett berechneter

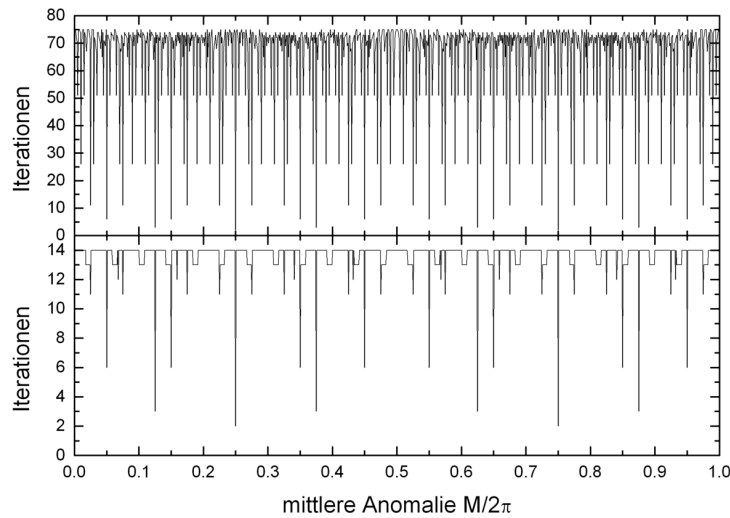


Abbildung 3.1.: Die Anzahl der ausgeführten Rechenschritte zur Ermittlung des Wertes von $r(t, \varepsilon)$ bei Anwendung von Gl. (3.1.3) aufgetragen gegen die mittlere Anomalie M ($M = nt$, hier für $n = 1$), skaliert auf das Intervall $0 \leq M \leq 1$, oben für die Exzentrizität $\varepsilon = 0.5$, unten für $\varepsilon = 0.05$. Bemerkenswert ist – neben der erwarteten Symmetrie von $r(t, \varepsilon)$ bezüglich $M = \pi$ – in beiden Fällen die Symmetrie bezüglich dem Wert $\frac{\pi}{2}$ (entspricht 0.25 im Bild). Alle Werte wurden für einen maximalen Fehler von $\epsilon = 10^{-15}$ erhalten.

Index k der Reihe als ein Auswertungsschritt gezählt wird. Es zeigt sich, dass der Zeitpunkt t ebenfalls einen Einfluss auf die Anzahl der Iterationen hat, mindestens so wichtig ist aber der Wert der Exzentrizität ε . Abbildung 3.1 zeigt die Anzahl der Iterationen für zwei verschiedene Werte von ε .

Abweichungen von einem gedachten durchgängigen Maximalwert treten bevorzugt bei rationalen Werten $(p/q)\pi$ auf, bei denen $p/q < 1$ gilt und p und q keinen gemeinsamen Teiler haben (wegen der Symmetrie bezüglich dem Wert π gilt die Aussage umgekehrt genauso für $p/q > 1$). Im unteren Teil von Abbildung 3.1 für die Exzentrizität $\varepsilon = 0.05$ wäre der Maximalwert 14 Iterationen, und die Einschnitte befinden sich bei $\{\frac{p}{2}\pi, \frac{p}{4}\pi, \frac{p}{10}\pi, \frac{p}{20}\pi, \dots\}$, wobei jeweils $p = \{1, 3, 7, 9, \dots\}$ in Übereinstimmung mit $p/q < 1$ zu wählen ist. Je höher der Wert der Exzentrizität ε ist, umso mehr Einschnitte gibt es, d. h. umso dichter liegen sie zusammen.

Für moderate x ist für $J_n(x)$ ein Fehler von unter 10^{-15} möglich, dies wurde verifiziert, indem die Ergebnisse aus `besselj.c` mit auf mehr als 30 Nachkommastellen berechneten Ergebnissen aus Mathematica verglichen wurden. Jedoch spielt eine Fehlerquelle eine ent-

scheidende Rolle: Selbst bei Verwendung von 64-bit Gleitkommazahlen (`double`) kommt es ab ca. 20 Iterationen zu Rundungsfehlern. Die interne Genauigkeit reicht nicht mehr aus, um alle relevanten Stellen für die Terme $\frac{1}{k!(n+2k)!}$ darzustellen. Diese Rundungsfehler wirken vor allem in der Reihe für $r(t, \varepsilon)$ bei höheren Exzentrizitäten.

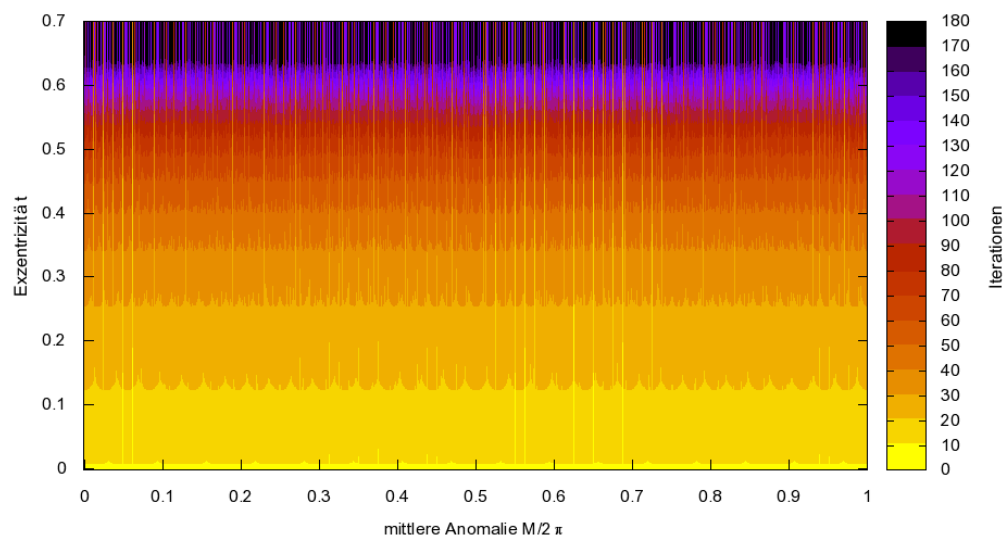


Abbildung 3.2.: Die Anzahl der Iterationen in Gl. (3.1.3) als Farbcodierung (siehe Skala) aufgetragen über einem Gitter von 2000×350 Anfangsbedingungen der Parameter (M, ε) . Mit wachsender Exzentrizität steigt die Anzahl der Iterationen monoton an, während verschiedene Werte der mittleren Anomalie M geringeren Einfluss haben. Die senkrechten Streifen – wie auch in Abb. 3.1 zu sehen – stammen von rationalen Vielfachen von π , ihre Anzahl nimmt mit wachsender Exzentrizität stark zu, so dass ab einer Exzentrizität $\varepsilon > \varepsilon_c$ die Reihe keine vernünftigen Ergebnisse mehr liefert.

Insgesamt gesehen ist der Aufwand bei dieser Methode nicht zufrieden stellend, selbst für moderate Exzentrizitäten werden bereits viele Rechenschritte benötigt, vgl. Abbildung 3.2; vor allem aber ist die Methode für Exzentrizitäten $\varepsilon > \varepsilon_c \approx 0.663$ gar nicht vorgesehen.

Interessant wird die Methode erst wieder bei der analytischen Behandlung des Sitnikov Problems. Sie erlaubt die Darstellung von Gl. (3.1.3) als Potenzreihe in der Exzentrizität, wegen ihrer absoluten Konvergenz für $\varepsilon < \varepsilon_c$ dürfen Reihenglieder beliebig umgestellt werden.

3.1.2. Newton-Raphson Methode

Betrachtet man das Problem, Lösungen der Keplerschen Gleichung zu finden, aus dem Gesichtspunkt einer Nullstellensuche, so bieten sich verschiedene Methoden dafür an. Eine Standardmethode, um auch nichtlineare und transzendente Gleichungen zu behandeln, ist die *Newton-Raphson Methode*⁴ (auch Newtonsche Näherungsmethode). Sie ist eine iterative Methode zur Bestimmung der Nullstellen einer beliebigen Funktion einer oder mehrerer Variablen.

Im einfachsten Fall ist eine Funktion $f : x \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, welche an der Stelle $x = \xi$ eine Nullstelle besitzen soll, $f(\xi) = 0$ (auch mehrere Nullstellen $\{\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}\}$ sind möglich). Die Funktion soll in einer Umgebung von ξ mindestens einmal differenzierbar sein und die Ableitung nicht verschwinden, d. h.

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=\xi} \neq 0.$$

Da im Allgemeinen die Nullstelle ξ nicht exakt bekannt ist und auch nicht direkt bestimmt werden kann, sucht man ein iteratives Schema, um ihren Wert anzunähern. Dazu soll die Taylorreihe von f um irgendeinen Punkt x_0 in der (hinreichend kleinen) Umgebung von ξ aufgestellt werden. Falls in

$$f(\xi) = 0 = f(x_0) + (\xi - x_0) \frac{df(x_0)}{dx} + \frac{(\xi - x_0)^2}{2!} \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} + \mathcal{O}((\xi - x_0)^3)$$

die quadratischen Terme und alle Terme höheren Grades vernachlässigt werden, so erhält man, wenn die erste Ableitung als $f'(x_0)$ geschrieben wird, nach wenigen Umformungen

$$\xi = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Interpretiert man nun x_0 als einen ersten (groben) Schätzwert für die Nullstelle der Funktion f , und die Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ als zunehmend besser angenäherte Werte für die Nullstelle, dann lautet die Iterationsvorschrift für die **Newton-Raphson Methode**

$$x_{n+1} = \Phi(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1.5)$$

Dies stellt für die Iterationsfunktion $\Phi(x_n)$ ein Fixpunktproblem dar, dessen Lösung die Nullstelle von f ergibt, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi,$$

also die Folge gegen ξ konvergiert.

Definition 8 Die *Newton-Raphson Methode* ist lokal konvergent in einer hinreichend kleinen Umgebung der Nullstelle. Sie ist außerdem lokal quadratisch konvergent, da die erste Ableitung der Iterationsfunktion $\Phi(x_n)$ bei $x_n = \xi$ gleich Null ist, erst die zweite Ableitung an dieser Stelle ist ungleich Null.

Diese beiden Behauptungen werden in Stoer & Bulirsch [29], Kap. 5.2, bewiesen.

⁴I. Newton entwickelte dieses Verfahren speziell für die Anwendung auf die Keplersche Gleichung; J. Raphson verallgemeinerte das Verfahren später auf andere Funktionen.

Anwendung auf die Keplersche Gleichung

Nach diesen Überlegungen soll jetzt die Newton-Raphson Methode auf die Keplersche Gleichung (2.1.6) für $0 \leq \varepsilon < 1$ angewendet werden. Dazu muss sie in die Form

$$f(E) = E - \varepsilon \sin E - M = 0 \quad (3.1.6)$$

gebracht werden, sodass die obige Formel (3.1.5) direkt angewendet werden kann. Zusätzlich wird die Ableitung der Funktion benötigt, sie lautet

$$f'(E) = 1 - \varepsilon \cos E$$

und für $\varepsilon \neq 1$ ist immer $f'(E) > 0$ erfüllt. Die Ableitung ist daher eine monotone Funktion ohne Nullstellen, sie verursacht keine Singularitäten, sodass die Newton-Raphson Methode in diesem Fall immer konvergieren und eine eindeutige Lösung liefern wird.

Es bleibt noch zu untersuchen, auf welche Weise der Anfangswert E_0 für die Iteration zu wählen ist, und welche Wahl geeignet ist. Für das betreffende Intervall $0 \leq \varepsilon < 1$ kann im Spezialfall $\varepsilon = 0$ sofort die Lösung der Keplerschen Gleichung angegeben werden, sie lautet $E(M) = M$. Für kleine Exzentrizitäten $\varepsilon \neq 0$ ist diese Lösung in nullter Näherung noch immer richtig, aber es gilt

$$E(M) = M + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Die Beiträge der hier vernachlässigten Terme werden mit wachsendem ε aber immer bedeutsamer, sodass dieser Ansatz bald nicht mehr ausreicht.

In Érdi [8], Kap. 2.3, wird beschrieben, wie eine erweiterte Anfangsnäherung für E_0 aufgestellt wird (basierend auf Smith [27], siehe Abb. (3.3)). Betrachtet man für $0 \leq M \leq \pi$ die Gl. (3.1.6), so stellen einerseits

$$f(M) = -\varepsilon \sin M \leq 0$$

und

$$f(M + \varepsilon) = \varepsilon (1 - \sin(M + \varepsilon)) \geq 0$$

andererseits die Nullstelle von $f(E) = 0$ begrenzende Werte dar. Das bedeutet, dass die Nullstelle im Intervall $M \leq E \leq M + \varepsilon$ liegen muss, denn hier ändert die Funktion ihr Vorzeichen. Aus ihrer Ableitung $f'(E) > 0$ folgt, dass sie in dem betrachteten Intervall nur eine Nullstelle besitzen kann. Der Punkt, an dem die Gerade durch die Punkte $f(M)$ und $f(M + \varepsilon)$ die E -Achse schneidet, soll als die Anfangsnäherung E_0 für die Iteration dienen. Die Steigung dieser Geraden ist durch

$$\frac{f(E_0) - f(M)}{E_0 - M} = \frac{f(M + \varepsilon) - f(M)}{(M + \varepsilon) - M}$$

gegeben. Mit $f(E_0) = 0$ ergibt sich der Zusammenhang für die Anfangsnäherung E_0 als

$$E_0(M) = M + \varepsilon \frac{\sin M}{1 + \sin M - \sin(M + \varepsilon)}. \quad (3.1.7)$$

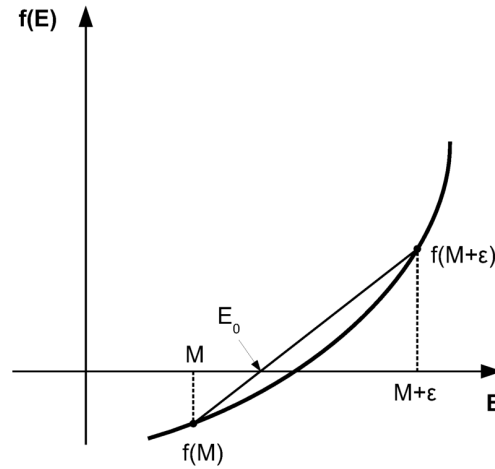


Abbildung 3.3.: Graphische Darstellung zur Bestimmung der Anfangsnäherung E_0 für die iterative Lösung der Keplerschen Gleichung. Die Nullstelle der Gerade durch die Punkte $f(M)$ und $f(M + \varepsilon)$ bei E_0 dient als Approximation an die Nullstelle der Funktion $f(E)$.

Bemerkenswert an der Funktion in Gl. (3.1.7) ist, dass ihr Nenner keine Nullstelle im betrachteten Bereich besitzt, und dass ihre Taylorreihe für kleine ε die Form

$$E_0 = M + \varepsilon \sin M + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin 2M + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

annimmt, also als eine natürliche Erweiterung des Ansatzes $E_0 = M$ anzusehen ist.

Das oben besprochene Newton-Raphson Verfahren für die Lösung der Keplerschen Gleichung wurde in dem Programm `newton.c` implementiert. Im Vergleich mit der zuerst besprochenen Methode der Reihenentwicklungen zeigen sich deutliche Vorteile sowohl in der Geschwindigkeit (Anzahl der Rechenschritte für eine vorgegebene Genauigkeit), als auch bei der Genauigkeit.

Abbildung 3.5 zeigt eine Übersicht des Parameterraums (M, ε) , in der die Anzahl der Iterationen als Farbwert aufgetragen ist. Man erkennt, dass über einen großen Bereich in der Exzentrizität relativ wenige (< 10) Iterationen benötigt werden, um die vorgegebene Genauigkeit zu erreichen. Trotzdem gibt es Bereiche bei hohen Exzentrizitäten (um $M = 0.05$), in denen das Verfahren sehr viele – bis zu einer Höchstgrenze von 10^4 – Iterationen benötigt.

Das Newton-Raphson Verfahren ist somit zur Lösung der Keplerschen Gleichung gut geeignet, vorausgesetzt, dass eine geeignete Methode zur Bestimmung der Anfangsnäherung E_0 eingesetzt wird.

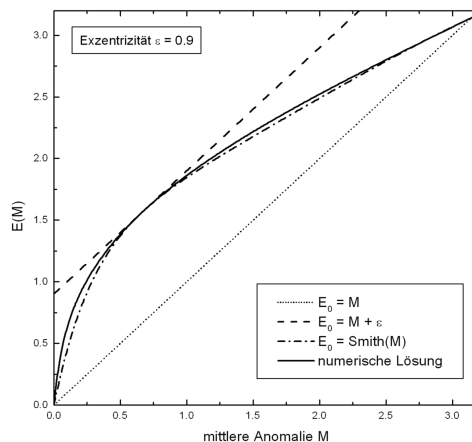


Abbildung 3.4.: Die Abbildung vergleicht verschiedene Methoden zur Wahl einer Anfangsnäherung E_0 zur numerischen Lösung der Keplerschen Gleichung. Bei der Wahl von $E_0(M)$ kann man sich auf den Bereich $0 \leq M \leq \pi$ beschränken, wie in Ng [22] beschrieben wird. Für eine Exzentrizität von $\varepsilon = 0.9$ stellt die durchgezogene Kurve die numerisch bestimmte Lösung dar. Die Anfangsnäherung $E_0 = M$ ist durch die diagonale Linie gegeben, während die Wahl von $E_0 = M + \varepsilon$ als strichlierte Gerade dargestellt wird. Die durch Punkte unterbrochene Kurve stellt den nach Gl. (3.1.7) gewählten Anfangswert dar. Die letztere Methode stellt für diese vergleichsweise hohe Exzentrizität noch immer eine ausgezeichnete Näherung dar.

3.1.3. Iterationsmethoden höherer Konvergenzordnung

Die dritte untersuchte Methode wurde von Danby & Burkardt [3] vorgestellt. Sie konstruieren eine Iterationsmethode, welche durch die Entwicklung der Taylorreihe der gesuchten Funktion bis zur Ordnung k eine Konvergenzordnung $k + 1$ erreicht. So lassen sich leicht Verfahren mit Konvergenz vierten Grades oder höher anwenden. Dabei stellt es sich heraus, dass die Newton-Raphson Methode ein Spezialfall dieses Verfahrens ist, wenn nur der lineare Term $k = 1$ in der Taylorreihe berücksichtigt wird, und folglich quadratische Konvergenz ($k + 1 = 2$) vorliegt.

Das Prinzip der Methode

Zur Approximation der gesuchten Nullstelle ξ soll eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dienen, deren Fehler im n -ten Schritt h_n sein soll,

$$\xi = x_n + h_n.$$

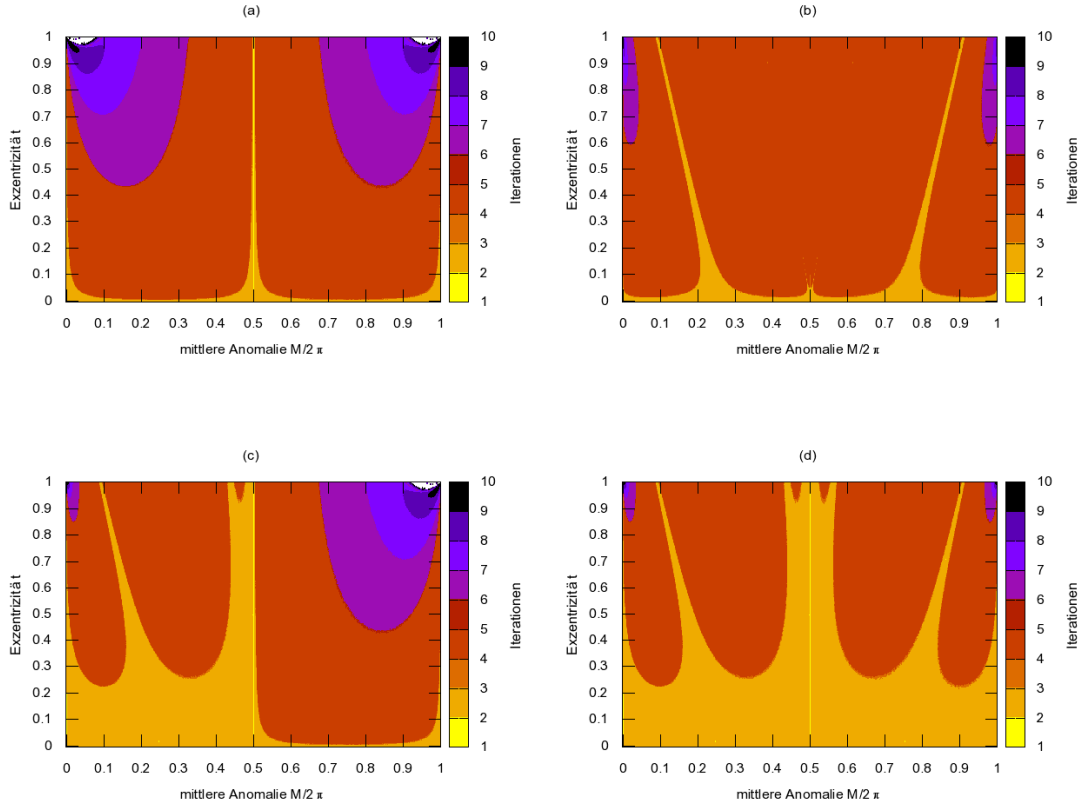


Abbildung 3.5.: Die Anzahl der Iterationen des Newton-Raphson Verfahrens aus Gl. (3.1.5) als Farbcodierung aufgetragen für 2000×500 Anfangsbedingungen der Parameter (M, ε) . Die vier Bilder zeigen den Einfluss der Wahl des Anfangswertes E_0 auf die Iterationsanzahl, jeweils für eine zu erreichende Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-15}$. In (a) wird $E_0 = M$ verwendet. Die weißen Bereiche in den oberen Ecken zeigen Anfangsbedingungen an, für welche deutlich mehr als 10 Iterationen benötigt werden (teilweise bis zu 10^4). In (b) wird als Anfangswert $E_0 = M \pm \varepsilon$ verwendet ($M + \varepsilon$ für $M < \pi$, bzw. analog $M - \varepsilon$ für $M > \pi$). Dadurch schrumpft der Bereich, in dem besonders viele Iterationen benötigt werden, deutlich. Bild (c) zeigt den direkten Vergleich der Anfangsnäherung nach (d) in der linken Hälfte, und der Wahl wie in (a) für die rechte Hälfte. In Bild (d) wird ausschließlich Gl. (3.1.7) für E_0 verwendet; es ist ersichtlich, dass mit dieser Wahl durchgehend weniger Iterationen benötigt werden als bei den anderen Methoden.

Die Iterationsvorschrift lautet

$$x_{n+1} = x_n + \delta_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.1.8)$$

wobei δ_n als die Lösung von

$$0 = f(x_n) + \delta_n f'(x_n) + \dots + \frac{\delta_n^k}{k!} f^{(k)}(x_n)$$

definiert sein soll. Der zu bestimmende Ausdruck lautet für $k = 3$ zum Beispiel

$$\delta_n = -\frac{f}{f' + \frac{1}{2}\delta_n f'' + \frac{1}{6}\delta_n^2 f'''},$$

seine Lösung wird durch eine Folge $\delta_{n,j}$, $1 \leq j \leq k$ gegeben, welche wieder eine Iterationsfunktion für die δ_n darstellt.

$$\delta_{n,1} = -\frac{f}{f'} \quad (3.1.9a)$$

$$\delta_{n,2} = -\frac{f}{f' + \frac{1}{2}\delta_{n,1} f''} \quad (3.1.9b)$$

$$\delta_{n,3} = -\frac{f}{f' + \frac{1}{2}\delta_{n,2} f'' + \frac{1}{6}\delta_{n,2}^2 f'''} \quad (3.1.9c)$$

Dieses Verfahren lässt sich auch auf höhere Ordnungen $k > 3$ verallgemeinern.

Es wird in [3] noch gezeigt, dass für den Fehler h_n

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_n}{\delta_n} = 1$$

gilt, und somit die Anwendung der δ -Folge berechtigt ist.

Wird in Gl. (3.1.8) die Gl. (3.1.9a) eingesetzt, so erhält man eine Iterationsfunktion, welche mit der Newton-Raphson Methode identisch ist, also quadratische Konvergenz besitzt. Verwendet man stattdessen Gl. (3.1.9b), erhält man Halleys Methode und kubische Konvergenz. Wird schließlich Gl. (3.1.9c) eingesetzt, so folgt ein Verfahren mit Konvergenz vierten Grades, die Iterationsfunktion (3.1.8) lautet in diesem Fall

$$x_{n+1} = x_n + \delta_{n,3}.$$

Zu Berechnung von $\delta_{n,k}$ müssen alle vorherigen Schritte $\delta_{n,j}$, $1 \leq j \leq k$ nach den Formeln (3.1.9) durchlaufen werden, sodass für höhere k der Aufwand größer wird.

Diese Methode wurden in dem Programm `findroot.c` implementiert, in der Abbildung 3.6 wird ihr Konvergenzverhalten für unterschiedlich gewählte Anfangswerte E_0 untersucht.

Das Konvergenzverhalten des Verfahrens nach Danby & Burkardt ist vor allem für hohe Exzentrizitäten viel besser als jenes des Newton-Raphson Verfahrens oder des Bessel

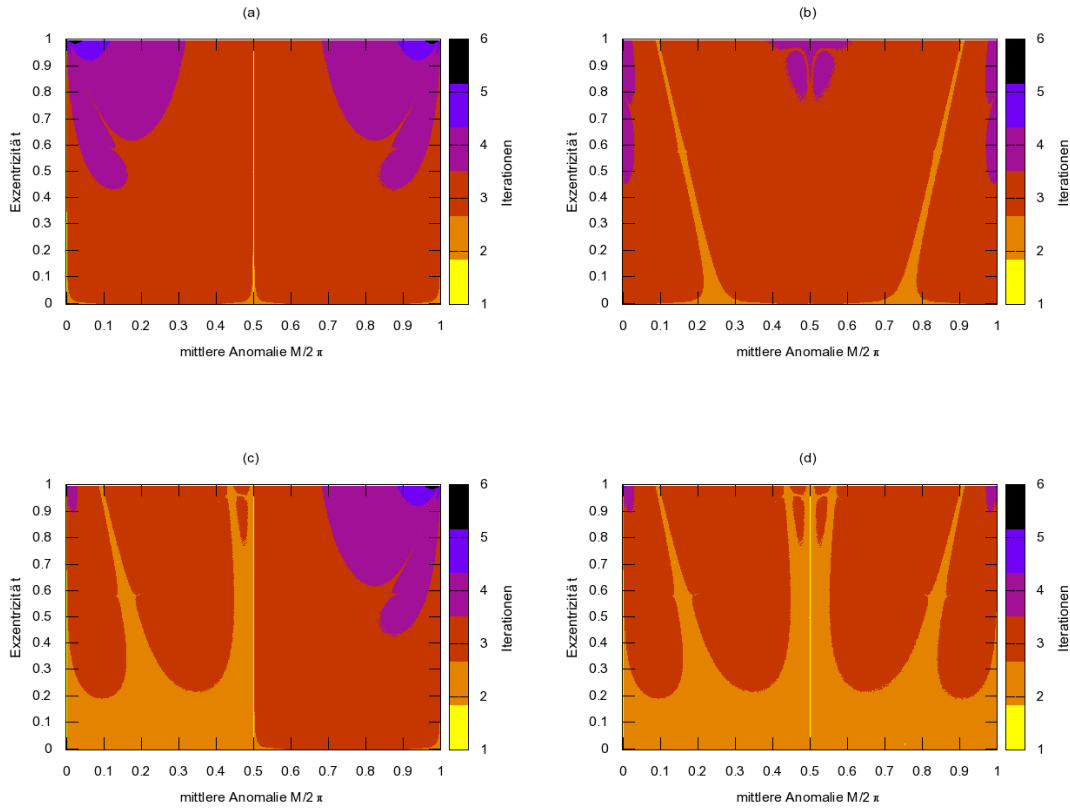


Abbildung 3.6.: Die Anzahl der Iterationen des Verfahrens aus Gl. (3.1.9c) als Farbcodierung in Abhängigkeit von den Parametern (M, ε) , hier für 2000×500 verschiedene Startwerte. Die vier Bilder zeigen den Einfluss des Anfangswertes E_0 auf die Iterationsanzahl, überall für eine Genauigkeit von $\epsilon = 10^{-15}$. In Bild (a) wird $E_0 = M$ verwendet. Mit dieser Wahl wird eine Lösung der vorgegebenen Genauigkeit nach maximal 6 Iterationen erzielt, für einen großen Bereich in (M, ε) jedoch schon nach 3 Iterationen. Bild (b) zeigt die Wahl von $E_0 = M + \varepsilon$ für $M < \pi$ (bzw. $E_0 = M - \varepsilon$ für $M > \pi$). Auch hier zeigt sich wieder, wie in Abb. 3.5, dass bei höheren Exzentrizitäten gegenüber (a) weniger Iterationen benötigt werden. In (c) ist ein Vergleich der Anfangsnäherungen nach (d) für die linke Hälfte und nach (a) für die rechte Hälfte zu sehen. Bild (d) verwendet ausschließlich Gl. (3.1.7) für E_0 , mit dieser Wahl kommt es nur noch in wenigen Ausnahmefällen zu einer Lösung erst nach 6 Iterationen, mehr Iterationen werden überhaupt nicht benötigt. Wieder übertrifft diese Methode die anderen deutlich, meist wird im Vergleich mindestens eine Iteration weniger benötigt.

Anzahl Anfangs- bedingungen (M, ε)	Newton-Raphson			Danby-Burkardt		
	PC1	PC2	PC3	PC1	PC2	PC3
100×120	0.128	0.156	0.105	0.015	0.019	0.012
1000×10	0.096	0.121	0.079	0.012	0.014	0.012
1000×60	0.122	0.145	0.103	0.013	0.016	0.010
1000×120	0.130	0.152	0.108	0.013	0.015	0.011
1000×600	0.123	0.148	0.109	0.013	0.015	0.011

Tabelle 3.2.: Ein Vergleich der Laufzeiten der drei verwendeten Methoden (Besselfunktionen, Newton-Raphson Verfahren, Danby-Burkardt Verfahren) auf drei verschiedenen Rechnern (PC1 mit 450 MHz, PC2 mit 700 MHz und PC3 mit 1900 MHz). Die Werte in der Tabelle sind alle relativ zur Laufzeit des Programms für die Besselfunktionen, welches auf den Wert 1 normiert wurde, und sie sind jeweils über 10 Durchgänge gemittelt. Aus den angegebenen Daten sieht man, dass das Newton-Raphson Verfahren um einen Faktor 7–10 schneller ist, während die Methode nach Danby & Burkardt um einen Faktor 50–100 schneller ist.

Verfahrens (vgl. die Abbildungen 3.2, 3.5 und 3.6), es ist hinsichtlich der aufgewendeten Rechenzeit überlegen, siehe dazu Tabelle 3.2.

Zusammen mit der Anfangsnäherung nach Gl. (3.1.7) ist diese Methode den beiden anderen vorgestellten Methoden vorzuziehen. Sie ist daher die Methode der Wahl für die weitere numerische Behandlung des Sitnikov Problems, vor allem für die numerische Integration der Bewegungsgleichung (2.3.2).

3.2. Numerische Integration der Bewegungsgleichung

Zur Überprüfung der Resultate der Störungsrechnung ist der Vergleich jener Ergebnisse mit numerisch gewonnenen Vergleichsdaten wichtig. Die zeitliche Entwicklung der Trajektorien lässt sich auch mittels numerischer Verfahren verfolgen, welche die Bewegungsgleichungen numerisch integrieren.

In dieser Arbeit werden mehrere Typen von numerischen Integratoren untersucht, um festzustellen ob und wie gut sie geeignet sind, die Lösungen der Bewegungsgleichungen des Modellproblems zu beschreiben. Dazu gehören einerseits die bekannten Runge-Kutta Verfahren mit adaptiver Schrittweite, andererseits aber auch ein Lie-Integrator, der eigens für dieses Problem erstellt wurde und schließlich bietet sich wegen der Struktur des Problems auch ein symplektischer Integrator an.

3.2.1. Allgemeines

Wenn es mit analytischen Methoden nicht gelingt, die Lösungen $y_i = y_i(x)$ eines Systems von n Differentialgleichungen

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y(x)), \quad (i = 1 \dots n)$$

mit gegebenen Anfangswerten $(y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$ zu bestimmen, also für die Integrale

$$y_i(x) = y_i(x_0) + \int_{x_0}^x dx f_i(x, y(x))$$

*geschlossene Lösungen*⁵ zu erhalten, kommen die verschiedenen numerischen Integratoren zum Einsatz.

Nach dem Existenzsatz von Cauchy hat das obige Differentialgleichungssystem für analytische Funktionen f_i in einer nicht-verschwindenden Umgebung der Anfangswerte $(x_0, y_i^{(0)})$ die Lösungen $y_i(x)$. Diese Lösungen können als konvergente Taylorreihen

$$y_i(x) = y_i^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x - x_0)^k}{k!} \left(\frac{d^k y_i}{dx^k} \right)_{x=x_0} \quad (3.2.1)$$

dargestellt werden, die Ableitungen folgen durch wiederholte Differentiation des gegebenen Differentialgleichungssystems (siehe Ferraz-Mello [9]).

Die zentrale Aufgabe jedes numerischen Integrators ist es, zu diskreten Werten der unabhängigen Variable $x_k = x_0 + kh$ die exakte Funktion $y_i^{(k)} = y_i(x_k)$ durch Werte $\tilde{y}_i^{(k)} = \tilde{y}_i(x_k)$ innerhalb gewisser vorgegebener Fehlertoleranzen zu approximieren. Diese Approximation hängt von der verwendeten Schrittweite h ab.

⁵Nach Deuffhard & Bornemann [5] versteht man unter der geschlossenen Lösung einer Differentialgleichung einen Ausdruck von endlich vielen miteinander verknüpften elementaren Funktionen, wie z. B. trigonometrische und rationale Funktionen, oder Exponential- und Logarithmusfunktion.

Die in der Himmelsmechanik sehr häufig auftretenden Differentialgleichungen zweiten Grades der Form

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y(x)),$$

wie eben die Bewegungsgleichung (2.3.2) des Sitnikov Problems, lassen sich auch immer als ein System von Differentialgleichungen ersten Grades schreiben,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= u \\ \frac{du}{dx} &= f(x, y(x)) \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

wodurch die Verfahren zur numerischen Integration auf sie anwendbar werden.

3.2.2. Runge-Kutta Verfahren

Die Klasse der *Runge-Kutta Verfahren*⁶ sind numerische Integrationsverfahren, um Anfangswertprobleme für Systeme von Differentialgleichungen zu lösen. Sie gehören zum Typ der „Einschrittverfahren“, d. h. sie behandeln jeden Berechnungsschritt unabhängig von vorangegangenen oder nachfolgenden Schritten.

Der Ansatz für diese Verfahren besteht darin, die Differentialquotienten der Taylorreihenentwicklung durch verschachtelte Auswertungen der zu lösenden Funktion $f(x, y(x))$ zu ersetzen. Diese Vorgehensweise sorgt dafür, dass die führenden Terme der Taylorreihe eliminiert werden, damit nur noch Terme möglichst hohen Grades in h übrig bleiben. Der *lokale Diskretisierungsfehler* $\tau = y(x_i) - y_i$, als die Differenz von exakter und numerischer Lösung, ist dann ein Maß für die Qualität der Approximation (siehe Stoer & Bulirsch [29], Kap. 7.2, und Deuffhard & Bornemann [5], Kap. 4.2). Man sagt, ein Verfahren hat die *Konsistenzordnung* (oder Ordnung) s , wenn ihr Fehlerterm ausschließlich Potenzen größer oder gleich h^{s+1} enthält, d. h. der lokale Diskretisierungsfehler ist $\tau \propto \mathcal{O}(h^{s+1})$.

Durch Gewichtung einzelner Euler-Schritte zu Stützstellen im Intervall $[x, x+h]$ wird der Fehler eines s -stufigen Runge-Kutta Verfahrens von der Ordnung $\mathcal{O}(h^{s+1})$, wobei h die Schrittweite ist.

Das Runge-Kutta Verfahren der Ordnung s ist für den n -ten Schritt ($n \geq 0$) von y_n auf y_{n+1} – ausgehend von einem gegebenen Anfangswert $y_0 = y(x_0)$ – gegeben durch folgende Formulierung

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i \tag{3.2.3a}$$

$$k_i = f(x_n + c_i h, g_i) \tag{3.2.3b}$$

$$g_i = y_n + h \sum_{j=1}^s a_{i,j} k_j \tag{3.2.3c}$$

mit reellen Koeffizienten $b_i, c_i, i = 1 \dots s$ und der quadratischen Matrix $\mathbf{A} = (a_{i,j})$.

⁶Diese Verfahren sind nach C. Runge (1895) und M. W. Kutta (1901) benannt.

Aus den Gl. (3.2.3) leitet sich für $s = 4$ und $a_{i,j} = 0$ für $j \geq i$, $i = 1 \dots 4$ das klassische explizite Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \left(\frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4 \right) \\ k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1\right) \\ k_3 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2\right) \\ k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3) \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

her.

Die Koeffizienten $a_{i,j}$, b_i , c_i eines solchen Verfahrens können allgemein in der so genannten *Butcher-Tabelle* angegeben werden:

c_1	0		0		
c_2	$a_{2,1}$	0		0	
c_3	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	0		0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$	$\vdots$
c_s	$a_{s,1}$	$a_{s,2}$	$\dots$	$a_{s,s-1}$	0
	b_1	b_2	$\dots$	b_{s-1}	b_s

Aus diesem Schema ist ersichtlich, dass die Matrix $\mathbf{A}$ eine untere Diagonalmatrix ist. Falls der Koeffizient $c_1 = 0$ ist, heißt das Verfahren explizit.

Das in Gl. (3.2.4) angegebene klassische Runge-Kutta Verfahren besitzt dementsprechend eine Butcher-Tabelle wie in Tabelle (3.3) angegeben.

0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
1	0	0	1	0
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Tabelle 3.3.: Die Butcher-Tabelle für die Koeffizienten des klassischen expliziten Runge-Kutta Verfahrens der Ordnung 4.

Einer der Nachteile des klassischen Runge-Kutta Verfahrens ist, dass keine Aussage über den aktuellen Fehler gemacht wird. Es ist nur für $s = 4$ grob $\tau \propto h^5$ bekannt, jedoch ist die Methode bei fester Schrittweite h nicht empfindlich genug gegenüber Änderungen der Funktion $f(x, y(x))$. Durch eine adaptive Steuerung der Schrittweite in

jedem Rechenschritt gewinnt man mehr Information über das lokale Verhalten der Funktion und eine höhere Genauigkeit, als Grundlage benötigt man aber eine Abschätzung des lokalen Fehlers.

Ein verbessertes Runge-Kutta Verfahren wurde von J. R. Cash und A. H. Karp angegeben: Durch Abschätzung des lokalen Fehlers als Differenz von zwei Verfahren unterschiedlicher Ordnung s und $(s - 1)$, wird der Funktionswert durch die Methode höherer Ordnung bestimmt, die Differenz der beiden Methoden bestimmt den lokalen Fehler. Diese Vorgehensweise erlaubt auch die Verwendung einer adaptiven Schrittweite, beruhend auf dem lokalen Fehler. Solche Verfahren heißen auch *eingebettete Runge-Kutta Verfahren* (engl. *embedded methods*).

Das in Gl. (3.2.3) beschriebene Verfahren wird dabei so abgeändert, dass anstatt nur einem Satz von Koeffizienten b_i ein weiterer Satz $\hat{b}_i$ dazukommt, wobei die Anzahl der Auswertungen der Funktion $f(x, y(x))$ nicht mehr s betragen muss, sondern im Allgemeinen höher liegt.

c_1	0		0	
c_2	$a_{2,1}$	0		0
c_3	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	0	 0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$
c_s	$a_{s,1}$	$a_{s,2}$	...	$a_{s,s-1}$ 0
	b_1	b_2	...	b_{s-1} b_s
	$\hat{b}_1$	$\hat{b}_2$	...	$\hat{b}_{s-1}$ $\hat{b}_s$

Durch diese unterschiedliche Gewichtung der k_i kommt ein Wertepaar $(y_{n+1}, \hat{y}_{n+1})$ – basierend auf Methoden verschiedener Ordnung – zu Stande, aus dessen Differenz die Fehlerschätzung für eine vorgegebene Fehlertoleranz ϵ (z. B. $\epsilon = 10^{-d}$, $d \in \mathbb{N}$) eine neue Schrittweite

$$h_{n+1} = \alpha h_n \left(\frac{\epsilon}{|y_{n+1} - \hat{y}_{n+1}|} \right)^{1/p}, \quad \alpha < 1$$

berechnet.

Mittels der Beschreibungen in dem Buch „Numerical Recipes“ von Press et al. [23], Kap. 16.2, wird das „Runge-Kutta Cash-Karp“ RKCK 5(4) Verfahren angewendet. Dessen Koeffizienten sind in dem Butcher Schema in Tabelle (3.4) angegeben, es handelt sich um rationale Approximationen der Lösungen der Bedingungsgleichungen für die Koeffizienten $a_{i,j}$, b_i , c_i , deren Fehler jedoch kleiner als 10^{-16} sind.

3.2.3. Lie-Integrator

Eine weitere numerische Integrationsmethode stellt die Integration mittels Lie-Reihen⁷ dar.

⁷Lie-Reihen wurden zuerst von S. Lie verwendet, der ihre Eigenschaften untersuchte und sie bei der Untersuchung von infinitesimalen Symmetrietransformationen einsetzte.

0	0	0	0	0	0	0
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	0	0	0
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$	0	0	0	0
$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{6}{5}$	0	0	0
1	$-\frac{11}{54}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{70}{27}$	$\frac{35}{27}$	0	0
$\frac{7}{8}$	$\frac{1631}{55296}$	$\frac{175}{512}$	$\frac{575}{13824}$	$\frac{44275}{110592}$	$\frac{253}{4096}$	0
	$\frac{37}{378}$	0	$\frac{250}{621}$	$\frac{125}{594}$	0	$\frac{512}{1771}$
	$\frac{2825}{27648}$	0	$\frac{18575}{48384}$	$\frac{13525}{55296}$	$\frac{277}{14336}$	$\frac{1}{4}$

Tabelle 3.4.: Die Butcher-Tabelle für die Koeffizienten des eingebetteten expliziten Runge-Kutta Cash-Karp Verfahrens der Ordnung 5(4).

In der Himmelsmechanik wurden Lie-Reihen von Gröbner & Knapp [10] eingesetzt, um Systeme von nichtlinearen und partiellen Differentialgleichungen numerisch zu behandeln, darunter das Zwei- und Dreikörperproblem. Die Implementation von Hanslmeier & Dvorak [14] verwendet ebenfalls Lie-Reihen, um die Bewegungsgleichungen des Zwei- bzw. Dreikörperproblems zu untersuchen. Sie erweiterten diese Methode aber durch Rekursionsrelationen auf das allgemeine N-Körperproblem.

Die Lie-Integrationsmethode ist im Prinzip die Anwendung einer Taylorreihenentwicklung für die (unbekannte) Lösungsfunktion, deren Ableitungen aus der gegebenen Differentialgleichung bzw. dem Differentialgleichungssystem folgen (siehe dazu Anhang A).

D-Operator

Sei ein Differentialgleichungssystem ersten Grades in den n -Stück komplexen Variablen $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$ gegeben, z. B. als eine Umformulierung einer expliziten DGL n -ten Grades nach Gl. (3.2.2).

$$\begin{aligned}
 \frac{dz_1}{dt} &= \vartheta_1(\mathbf{z}) \\
 &\vdots \\
 \frac{dz_n}{dt} &= \vartheta_n(\mathbf{z})
 \end{aligned}
 \tag{3.2.5}$$

Definition 9 Man definiert den D-Operator auf folgende Weise:

$$D := \sum_{i=1}^n \vartheta_i(\mathbf{z}) \frac{\partial}{\partial z_i} = \vartheta_1(\mathbf{z}) \frac{\partial}{\partial z_1} + \dots + \vartheta_n(\mathbf{z}) \frac{\partial}{\partial z_n}
 \tag{3.2.6}$$

für holomorphe Funktionen $\vartheta_i(\mathbf{z})$ der komplexen Variablen $z_i \in \mathbb{C}$ ($i = 1 \dots n$).

Der D -Operator ist ein linearer Differentialoperator, wird er auf eine beliebige holomorphe Funktion $f(\mathbf{z})$ angewendet, d. h.

$$Df = \sum_{i=1}^n \vartheta_i(\mathbf{z}) \frac{\partial f}{\partial z_i}$$

so ergeben sich wieder holomorphe Funktionen auf dem selben Definitionsgebiet. Da holomorphe Funktionen beliebig oft differenzierbar sind, ist es möglich, auch den D -Operator beliebig oft auf sie anzuwenden, und wegen der Linearität von D gelten folgende Eigenschaften

$$D^2 f = D(Df), \dots, D^n f = D(D^{n-1} f),$$

und insbesondere $D^0 f \equiv f$.

Eigenschaften des D-Operators

In seiner Eigenschaft als linearer Differentialoperator müssen daher folgende Regeln vom D -Operator erfüllt werden, siehe Gröbner & Knapp [10], Kap. I.2:

$$Dc = 0 \tag{3.2.7a}$$

$$D(cf(\mathbf{z})) = c Df(\mathbf{z}) \tag{3.2.7b}$$

$$D^m \left(\sum_{k=1}^n c_k f_k(\mathbf{z}) \right) = \sum_{k=1}^n c_k (D^m f_k(\mathbf{z})) \tag{3.2.7c}$$

$$D^m (f_1(\mathbf{z}) f_2(\mathbf{z})) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (D^k f_1(\mathbf{z})) (D^{m-k} f_2(\mathbf{z})) \tag{3.2.7d}$$

wobei $c = \text{const}$, $m \geq 1$ ist.

Lie-Reihe

Die formale Lösung von Gl. (3.2.5) mit den Anfangsbedingungen $z_i(t_0) = \xi_i$ ist für $\tau = t - t_0$ gegeben durch

$$z_i(t) = e^{\tau D} \xi_i, \quad i = 1 \dots n. \tag{3.2.8}$$

Definition 10 Die Lie-Reihe ist eine unendliche Reihe der Art

$$L(D, \mathbf{z}, t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} D^k f(\mathbf{z}) \equiv e^{tD} f(\mathbf{z}) \tag{3.2.9}$$

welche auf beliebige holomorphe Funktionen $f(\mathbf{z})$ angewendet werden kann. Diese unendliche Reihe ist konvergent, sofern die im D -Operator enthaltenen Funktionen holomorph sind, der exakte Beweis zur Konvergenz ist in [10] zu finden.

Mit dieser Definition kann gezeigt werden, dass aus Gl. (3.2.8) die Lösungen des Differentialgleichungssystems (3.2.5) folgen, und dass es eine Verbindung zu der Taylorreihe um den Punkt $t = 0$ gibt

$$z_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \left(\frac{d^k z_i}{dt^k} \right)_{t=0},$$

wobei die Ableitungen $\frac{d^k z}{dt^k}$ formal aus den gegebenen Gleichungen (3.2.5) durch wiederholte Differentiation bestimmt werden, vollkommen analog zu dem in Gl. (3.2.1) beschriebenen Verfahren.

Eigenschaften von Lie-Reihen

Lie-Reihen erfüllen folgende wichtigen Beziehungen, welche zum Teil durch die Eigenschaften der Exponentialfunktion zu Stande kommen:

1. Vertauschungssatz

$$f(e^{tD}\mathbf{z}) = e^{tD}f(\mathbf{z})$$

2. Summen von Lie-Reihen

$$e^{tD} \left(\sum_{k=1}^m c_k f_k(\mathbf{z}) \right) = \sum_{k=1}^m c_k (e^{tD} f_k(\mathbf{z}))$$

3. Produkte von Lie-Reihen

$$e^{tD} \left(\prod_{k=1}^m f_k(\mathbf{z}) \right) = \prod_{k=1}^m (e^{tD} f_k(\mathbf{z}))$$

Analog dem Begriff der Konsistenzordnung für Runge-Kutta Verfahren haben numerische Integratoren aufbauend auf Lie-Reihen eine *Konsistenzordnung* s , wenn ihr Diskretisierungsfehler $\tau \propto t^{s+1}$ ist⁸. Bei einer konvergenten Lie-Reihe bleibt durch einen Abbruch nach dem s -ten Term

$$e^{tD} f(\mathbf{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} D^k f(\mathbf{z}) = \sum_{k=0}^s \frac{t^k}{k!} D^k f(\mathbf{z}) + \underbrace{\sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} D^k f(\mathbf{z})}_{\mathcal{R}_{s+1}(D, \mathbf{z}, t)}$$

der Restfehler $\mathcal{R}$ beschränkt, der Beweis wird in [10], Kap. I.3, geführt. Aus diesem Grund ist es bei einer Lie-Reihe hinreichend, die Terme $D^k f(\mathbf{z})$, ($k = 1 \dots s$) zu berechnen, um die Konsistenzordnung s zu erhalten. Gelingt es darüber hinaus, eine rekursive Beziehung zwischen den $D^k f(\mathbf{z})$ zu finden, so sind hohe Konsistenzordnungen mit relativ wenig Aufwand erreichbar.

⁸Der Lie-Reihen Integrator mit $s = 1$ entspricht dem Euler Verfahren.

Lie-Integrator zum Sitnikov Problem

Nach dieser theoretischen Einführung soll nun für das Sitnikov Problem ein Lie-Integrator aufgestellt werden. Ausgehend von der Bewegungsgleichung (2.3.2) wird nach Gl. (3.2.5) ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung aufgestellt. Da es sich bei der Ausgangsgleichung um eine Gleichung 2. Grades handelt, erhält man daher zwei Differentialgleichungen ersten Grades,

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= u = \vartheta_1(z, u) \\ \frac{du}{dt} &= -z (r^2 + z^2)^{-3/2} = \vartheta_2(z, u).\end{aligned}\tag{3.2.10}$$

Werden wegen $z = z(t)$, $\frac{dz}{dt} = u(t)$, $r = r(t)$ die Anfangsbedingungen für die Orts- und Geschwindigkeitsvariable bzw. den Radius zum Zeitpunkt $t = 0$ (bzw. allgemein bei $t = t_0$) als $z(t = 0) = \xi$, $u(t = 0) = \eta$, $r(t = 0) = \rho$ bezeichnet, so lautet der D -Operator, nach Gl. (3.2.6) aufgestellt,

$$D = \eta \frac{\partial}{\partial \xi} - \xi (\rho^2 + \xi^2)^{-3/2} \frac{\partial}{\partial \eta}.\tag{3.2.11}$$

Formal sind die Lösungen des Systems (3.2.10) nach Gl. (3.2.8) durch

$$\begin{aligned}z(t) &= e^{\tau D} \xi = \left(1 + \tau D + \frac{\tau^2}{2!} D^2 + \mathcal{O}(\tau^3)\right) \xi \\ u(t) &= e^{\tau D} \eta = \left(1 + \tau D + \frac{\tau^2}{2!} D^2 + \mathcal{O}(\tau^3)\right) \eta\end{aligned}$$

gegeben, τ bezeichnet die Schrittweite.

Aus diesen Beziehungen lassen sich Einschrittverfahren für die Integration der Bewegungsgleichungen erstellen, so dass für den Zeitschritt von t_n auf $t_{n+1} = t_n + \tau$ für beliebige Anfangswerte z_0 folgendes Schema

$$z_{n+1} = e^{\tau D} z_n = \left(\sum_{k=0}^s \frac{\tau^k}{k!} D^k \right) z_n + \mathcal{R}_{s+1}, \quad n \geq 0, s \in \mathbb{N},$$

(und analog auch für die Geschwindigkeitsvariable u_n) gilt. Wählt man die Schrittweite τ entsprechend, kann der Restfehler ($\mathcal{R} \propto \tau^{s+1}$) kleiner als eine vorgegebene Fehlertoleranz gemacht werden.

Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass zu jedem Zeitschritt der Wert für ρ , d. h. der Abstand $r(t)$ der Hauptkörper zum Baryzentrum, bekannt ist, etwa mittels einer der Methoden aus Abschnitt 3.1.

Außerdem sollen folgende Abkürzungen eingeführt werden:

1. Die erste Abkürzung betrifft

$$\omega := (\rho^2 + \xi^2)^{1/2},$$

was keine Probleme bereitet, da beide Terme in der Klammer immer positive Größen sind. Für die numerischen Rechnungen wird als Wert für ω immer die positive Quadratwurzel verwendet. Auch Ausdrücke der Art ω^{-p} , $p > 0$, $p \in \mathbb{R}$ sind – außer für $\varepsilon = 1$ (da dann $\rho = 0$ möglich ist) und $\xi = 0$ – wohldefiniert.

2. Weiters soll

$$\varphi := \omega^{-3} = (\rho^2 + \xi^2)^{-3/2}$$

gesetzt werden. Die Begründung für diesen Schritt folgt weiter unten.

Damit wird der D -Operator aus Gl. (3.2.11) modifiziert zu

$$D = \eta \frac{\partial}{\partial \xi} - \xi \varphi \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Die ersten Terme der Lie-Reihe lauten somit

$$D^0 \xi \equiv \xi, \quad D^1 \xi = \eta, \quad D^2 \xi = -\xi \varphi, \quad \dots$$

ab hier kann der D -Operator nach Gl. (3.2.7d) in Form einer binomischen Reihe auf beide Ausdrücke ξ und φ angewendet werden, und man erhält

$$D^{n+2} \xi = - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^{n-k} \xi \, D^k \varphi, \quad n \geq 0.$$

Da der Ausdruck $D^0 \xi = \xi$ der Anfangsbedingung der Ortsvariablen z entspricht, und analog $D^1 \xi = \eta$ der Anfangsbedingung der Geschwindigkeitsvariablen u , können mit der vorliegenden Formel alle höheren Terme berechnet werden, man benötigt jedoch zusätzlich die Ausdrücke $D^k \varphi$.

Wegen $\varphi = \omega^{-3}$ gilt

$$\begin{aligned} D\varphi &= D\omega^{-3} = \left[\eta \frac{\partial}{\partial \xi} - \xi (\rho^2 + \xi^2)^{-3/2} \frac{\partial}{\partial \eta} \right] (\rho^2 + \xi^2)^{-3/2} \\ &= -3 \left[(\rho^2 + \xi^2)^{1/2} \right]^{-5} (\xi \eta) = \omega^{-2} ((-3)\varphi \beta), \end{aligned}$$

wobei $\beta := \xi \eta$ gesetzt wird.

Wie schon in Hanslmeier & Dvorak [14] kann auch hier – wegen der Ähnlichkeiten der auftretenden D -Operatoren – gezeigt werden, dass bei weiterer Anwendung des D -Operators die Rekursionsrelation

$$D^{n+1} \varphi = \omega^{-2} \sum_{k=0}^n a_{n+1,k+1} D^{n-k} \varphi \, D^k \beta, \quad n \geq 0$$

besteht. Die reellen Koeffizienten $a_{m,n}$ lassen sich durch die rekursiven Beziehungen

$$\begin{aligned} a_{m,n} &= -3 & \dots & \quad m = n \\ a_{m,n} &= 0 & \dots & \quad m < n \\ a_{m,n} &= a_{m-1,n} - 2 & \dots & \quad n = 1 \\ a_{m,n} &= a_{m-1,n} + a_{m-1,n-1} & \dots & \quad 1 < n < m \end{aligned}$$

finden, die Matrix der zugehörigen Werte für $m, n \leq 5$ lautet

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & -8 & -3 & 0 & 0 \\ -9 & -15 & -11 & -3 & 0 \\ -11 & -24 & -26 & -14 & -3 \end{pmatrix}$$

und lässt sich mittels des Mathematica Package `lietools.m` für eine andere Zeilen- bzw. Spaltenanzahl erweitern.

Zuletzt bleibt noch zu bestimmen, wie man die Terme $D^k \beta$ erhält. Zunächst gilt ja gemäß Definition

$$D^0 \beta \equiv \beta = \xi \eta = D^0 \xi D^1 \xi,$$

sodass hieraus durch vollständige Induktion auf die Rekursionsrelation

$$D^n \beta = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^{n-k} \xi D^{k+1} \xi, \quad n \geq 0$$

geschlossen werden kann.

Zusammenfassend kann man drei Rekursionsformeln angeben, durch die sich die Wirkung des durch Gl. (3.2.11) gegebenen D -Operators darstellen lässt. Mit ihrer Hilfe lassen sich die Lösungen (3.2.8) der gegebenen Differentialgleichung (3.2.10) für die Anfangsbedingungen $z(t=0) = D^0 \xi$, $u(t=0) = \eta = D^1 \xi$ numerisch berechnen.

$$D^{n+2} \xi = - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^{n-k} \xi D^k \varphi \quad (3.2.12a)$$

$$D^{n+1} \varphi = \omega^{-2} \sum_{k=0}^n a_{n+1,k+1} D^{n-k} \varphi D^k \beta \quad (3.2.12b)$$

$$D^n \beta = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^{n-k} \xi D^{k+1} \xi \quad (3.2.12c)$$

wobei in allen drei Fällen $n \geq 0$ gilt.

Schrittweitensteuerung des Lie-Integrators

Wie bei jedem numerischen Integrator, werden auch bei dem Lie-Reihen Integrator unweigerlich Abbruchfehler – durch die Wahl der Ordnung der Methode – und Rundungsfehler – durch die endliche Genauigkeit der Darstellung von Zahlen – auftreten. Um diese Fehler zu minimieren, kann man versuchen, stets eine optimale Zeitschrittweite zu wählen, welche klein genug ist, um eine vorgeschriebene Genauigkeit zu erreichen, aber groß genug, damit Rundungsfehler nicht dominieren. Es existieren für andere Integrationsmethoden zahlreiche Methoden, welche man auch für den Lie-Reihen Integrator nutzen kann.

1. Im MacMillan Fall existiert eine Erhaltungsgröße, die Gesamtenergie H , die durch die Anfangsbedingungen nach Gl. (2.4.2) eindeutig gegeben ist. Die Schrittweite wird so zu wählen sein, dass die nach jedem Zeitschritt $t_n \rightarrow t_{n+1} = t_n + \tau$ neu berechnete Gesamtenergie H_n im Vergleich zu dem ursprünglich bestimmten Wert H_0 um höchstens einen Wert ϵ abweicht (in der Größenordnung von $10^{-8\dots 15}$).

Allgemein wird es bei einigen Systemen solche Erhaltungsgrößen geben und die Schrittweitensteuerung ist hier sehr effektiv möglich, doch dieses Vorgehen ist im Sitnikov Fall unmöglich, da hier die Hamiltonfunktion zeitabhängig ist und daher keine Erhaltungsgröße darstellt.

2. Man kann alternativ auf das Verfahren der „Schrittweitenverdopplung“ (*step-doubling*) zurückgreifen, wo ein Integrationsschritt einmal mit voller und zweimal mit halber Schrittweite gemacht wird, die Differenz der zwei erhaltenen Werte benutzt man für die Schätzung des Fehlers. Im Gegensatz zu den Runge-Kutta Verfahren, bei denen die Funktionen $f(x, y(x))$ für die rechten Seiten der Differentialgleichungen mindestens viermal pro Zeitschritt ausgewertet werden müssen, erlauben die Rekursionsrelationen in den Gl. (3.2.12) eine effizientere Berechnung. Da die Lie-Terme $D^k \xi$ zur Aufsummierung gespeichert werden, müssen sie für den ersten Schritt mit halber Schrittweite nicht erneut berechnet werden, wodurch sich eine Einsparung von 50% ergibt.

3. Als dritte Möglichkeit können – analog zu den eingebetteten Runge-Kutta Verfahren – unterschiedliche Ordnungen der Lie-Reihe miteinander kombiniert werden, z. B. zwei Verfahren mit Ordnungen n und $n + 2$ für Fehlerterme gleicher Art, also beide gerader oder ungerader Ordnung. Da auch hier bereits die Lie-Terme von der Methode höherer Ordnung bekannt sind, entsteht zur Berechnung der niedrigeren Ordnung kein zusätzlicher Aufwand, nur die Summation mit einer modifizierten Schrittweite muss durchgeführt werden.

Auf diesem Weg kann mit Lie-Reihen auch ein Integrator realisiert werden, welcher – analog zu dem Bulirsch-Stoer Integrator – Extrapolationsmethoden nutzt. Dabei dient ein Verfahren niedriger (z. B. zweiter oder vierter) Ordnung als Mittel, einen Zeitschritt mit relativ großer Schrittweite τ über eine Folge von Zwischenschritten τ_n und anschließender Extrapolation auf den Limes $\tau \rightarrow 0$ zu berechnen.

Obwohl die Verfahren zur Schrittweitensteuerung einen höheren Nutzen bringen, als sie an zusätzlichem Aufwand erfordern, wird im weiteren Verlauf der Lie-Reihen Integrator nur mit fester Schrittweite implementiert. Eine passende Wahl der (festgehaltenen) Schrittweite zu Beginn der Rechnung durch

$$\tau \propto 10^{-d/n}$$

für eine geforderte Genauigkeit von d Nachkommastellen bei der Lie-Ordnung n , soll aber garantieren, dass die numerischen Fehler hinreichend klein bleiben. Der Vorteil der Lie-Reihen Methode gegenüber anderen Integrationsmethoden bei fester Schrittweite ist

ihre variable Ordnung, sie gestattet es für die gleiche Genauigkeit eine wesentlich größere Schrittweite zu verwenden, und damit die Rechnung zu beschleunigen.

3.2.4. Symplektischer Integrator

Besonders im Hinblick auf Hamiltonsche Systeme sind numerische Integrationsverfahren sinnvoll, welche bei einem solchen System die Erhaltungsgrößen korrekt beschreiben. Dabei sollen nämlich

1. durch die Abbildung eines Punktes $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ im Phasenraum zum Zeitpunkt t auf den Punkt $(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}})$ zum Zeitpunkt $t + \tau$ die *symplektische Form*⁹

$$d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q} = d\bar{\mathbf{p}} \wedge d\bar{\mathbf{q}}, \quad (3.2.13)$$

2. und in gegebenen Fällen der Wert der Hamiltonfunktion, die Gesamtenergie $H = \text{const}$,

erhalten bleiben. Selbst bei simplen Systemen – wie dem linearen harmonischen Oszillator – zeigen die herkömmlichen expliziten Runge-Kutta Integratoren einen Drift in der Gesamtenergie, der mit der Zeit immer mehr zunimmt. Darüber hinaus ist bei ihnen die symplektische Form ebenfalls nicht erhalten.

Man kann zeigen (siehe Yoshida [34]), dass im Allgemeinen bei nicht-integrablen Hamiltonschen Systemen nicht beide Eigenschaften gleichzeitig erhalten bleiben können¹⁰.

Jene Methoden, welche die symplektische Struktur (3.2.13) exakt erhalten, d. h. sie halten über alle Zeitschritte $d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q} = \text{const}$, werden symplektische Integrationsmethoden genannt. Für sie gilt, dass durch sie eine zur ursprünglichen Hamiltonfunktion zugeordnete Hamiltonfunktion $\tilde{H}$ exakt erhalten bleibt.

Im Fall, dass die Hamiltonfunktion von der Art

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = T(\mathbf{p}) + V(\mathbf{q}) \quad (3.2.14)$$

ist, also separabel nach den verallgemeinerten Koordinaten und Impulsen, existieren explizite symplektische Verfahren. Durch die Phasenraumvariable $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ ausgedrückt, lauten die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für die Hamiltonfunktion $H = H(\mathbf{z})$

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = [\mathbf{z}, H]$$

unter Verwendung der in Gl. (2.2.10) definierten Poissonklammer. Fasst man die Poissonklammer als einen Differentialoperator auf,

$$D_H f(\mathbf{z}) := [f(\mathbf{z}), H],$$

⁹Die symplektische Form steht in Zusammenhang mit dem Satz von Liouville über die Volumserhaltung im Phasenraum.

¹⁰Im Spezialfall von linearen Hamiltonsystemen trifft beides zu, die Gesamtenergie *und* die symplektische Struktur bleiben erhalten, aber solche lineare Systeme sind ohnehin integrabel.

so lautet die formale Lösung

$$\mathbf{z}(t) = e^{\tau D_H} \mathbf{z}(t_0), \quad \tau = t - t_0,$$

und ist eine Analogie zu der Lie-Reihe in Gl. (3.2.8). Da die Hamiltonfunktion aus zwei Teilen besteht, muss der Ausdruck

$$e^{\tau(T+V)} = \left(\prod_{k=1}^n e^{\tau c_k T} e^{\tau d_k V} \right) + \mathcal{O}(\tau^{n+1})$$

mittels der Baker-Campbell-Hausdorff Formel approximiert werden. Auch hier gibt wieder $n \in \mathbb{N}$ die Konsistenzordnung an, sodass die Exponentialfunktion auf der linken Seite der Gleichung mit dem Produkt von Exponentialfunktionen auf der rechten Seite bis auf τ^{n+1} übereinstimmt.

Für $n = 4$ erhält man einen symplektischen Integrator 4. Ordnung,

$$p_i = p_{i-1} + \tau d_i \left(-\frac{\partial V}{\partial q} \right)_{q=q_{i-1}} \quad (3.2.15a)$$

$$q_i = q_{i-1} + \tau c_i \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_{p=p_i} \quad (3.2.15b)$$

($i = 1 \dots 4$) welcher der Abbildung

$$\begin{aligned} t_n &\longmapsto t_{n+1} = t_n + \tau \\ (q_n, p_n) &\longmapsto (q_{n+1}, p_{n+1}) \end{aligned}$$

entspricht.

Die nach Candy & Rozmus [2] verwendeten Koeffizienten lauten:

$$\begin{aligned} c_1 = c_4 &= \frac{1}{2 \left(2 - 2^{\frac{1}{3}} \right)} & d_2 = d_4 &= \frac{1}{\left(2 - 2^{\frac{1}{3}} \right)} \\ c_2 = c_3 &= \frac{1 - 2^{\frac{1}{3}}}{2 \left(2 - 2^{\frac{1}{3}} \right)} & d_3 &= \frac{1}{\left(1 - 2^{\frac{2}{3}} \right)} \\ & & d_1 &= 0 \end{aligned}$$

und es gibt nach Yoshida [33] weitere Möglichkeiten, wie man die Koeffizienten bestimmen kann. Bemerkenswert ist, dass wegen $d_1 = 0$ die Terme für den Gradient des Potentials (also die Kräfte) $\frac{\partial V}{\partial q}$ pro Zeitschritt nur drei Mal ausgewertet werden müssen, bei den vierstufigen Runge-Kutta Verfahren hingegen vier Mal.

Da im Fall des Sitnikov Problems und für die T-Gleichung die Hamiltonfunktionen (2.3.3) und (2.4.5) genau die Struktur von Gl. (3.2.14) aufweisen, kann man den oben besprochenen symplektischen Integrator auf sie anwenden.

3.2.5. Zusammenfassung und Vergleich der Integratoren

Mit den bisher besprochenen numerischen Integratoren – klassisches Runge-Kutta Verfahren, Runge-Kutta-Cash-Karp Verfahren, Lie-Reihen Integrator und symplektischer Integrationsalgorithmus – werden über mehrere Umläufe (Perioden) der Primärkörper Darstellungen der Trajektorie der dritten Masse erstellt. Dazu wird die Anzahl der Perioden (die Zeit t) gegen $z(t)$ aufgetragen, dies erlaubt einen qualitativen Vergleich der Einflüsse der Schrittweite, der Integrationsgenauigkeit und der Ordnung der verwendeten Verfahren auf das Ergebnis.

Zunächst wird im MacMillan Fall ermittelt, wie gut die verschiedenen Methoden die Gesamtenergie H erhalten. Eine Übersicht dazu geben die Abbildungen 3.7 und 3.8.

Wie in der Abbildung 3.7 zu sehen ist, treten bei Verwendung des klassischen Runge-Kutta Verfahrens mit fester Schrittweite (Teilbild (a), obere Grafik) stets Oszillationen in der Gesamtenergie auf, wenn die z -Koordinate des masselosen Körpers ihr Vorzeichen wechselt, d. h. wenn dieser einen Durchgang durch die Ebene der Primärkörper (Nulldurchgang) durchläuft. Numerisch treten dabei die höchsten Beschleunigungen auf, sodass schon kleine numerische Fehler hier große Auswirkungen zeigen. Der Absolutwert der Gesamtenergie zeigt weiterhin im Mittel einen Drift, bei Langzeitintegrationen führt das zu deutlichen Abweichungen. Zum Vergleich dazu sind die relativen Änderungen pro Schritt schwächer, wenn wie in (b) das Runge-Kutta-Cash-Karp Verfahren mit adaptiver Schrittweite verwendet wird, doch auch hier ist eine langfristige Änderung der Gesamtenergie zu erkennen. Aus der Verwendung des symplektischen Verfahrens in (c) resultieren periodische Änderungen der Gesamtenergie, im Mittel bleibt ihr Wert aber gut erhalten, wie auch die Langzeitintegration in Abbildung 3.8 zeigt. Für den Lie-Reihen Integrator in (d) oszilliert der Wert der Gesamtenergie relativ stark bei Nulldurchgängen, kehrt danach aber näherungsweise wieder zu dem Ausgangswert zurück, dadurch ist im Mittel über viele Perioden der Drift in der Gesamtenergie weniger stark ausgeprägt.

Differenzierte Untersuchungen für den Sitnikov Fall zeigen, in welchem Ausmaß ein bestimmter Integrator für die Untersuchung des Systems bei verschiedenen Werten der Exzentrizität geeignet ist.

Im Sitnikov Fall wird das Verhalten des Runge-Kutta Integrators für verschiedene Integrationsgenauigkeiten untersucht, sie spielt dann eine große Rolle, wenn eine nicht-periodische Bahn verfolgt werden soll. Als Beispiel ist in Abb. 3.9 eine chaotische Trajektorie ausgewählt um zu zeigen, dass eine höhere Integrationsgenauigkeit es gestattet, sie – relativ zu ungenaueren Rechnungen – über längere Zeiten zu verfolgen.

Während Integratoren mit fester Schrittweite für hohe Exzentrizitäten weniger bis ungeeignet sind, kann das Verfahren von Cash-Karp dank adaptiver Schrittweite – siehe Abbildung 3.10 – und Verwendung des Verfahrens nach Gl. (3.1.9c), bis zu extremen Werten der Exzentrizität von $\varepsilon = 0.9999$ eingesetzt werden. Zur Untersuchung mittels Phasenraumschnitten (engl. *Surface of Section*) ist auch der symplektische Algorithmus geeignet, doch mit dem Nachteil, dass wegen seiner geringen Ordnung kleinere Schrittweiten gewählt werden müssen und damit die Rechenzeit ansteigt.

Interessant ist der Vergleich der Lösungen mit dem symplektischen Algorithmus, der auf die T-Gleichung (2.4.4) für eine Exzentrizität von $\varepsilon = 0.25$ angewendet wurde, um

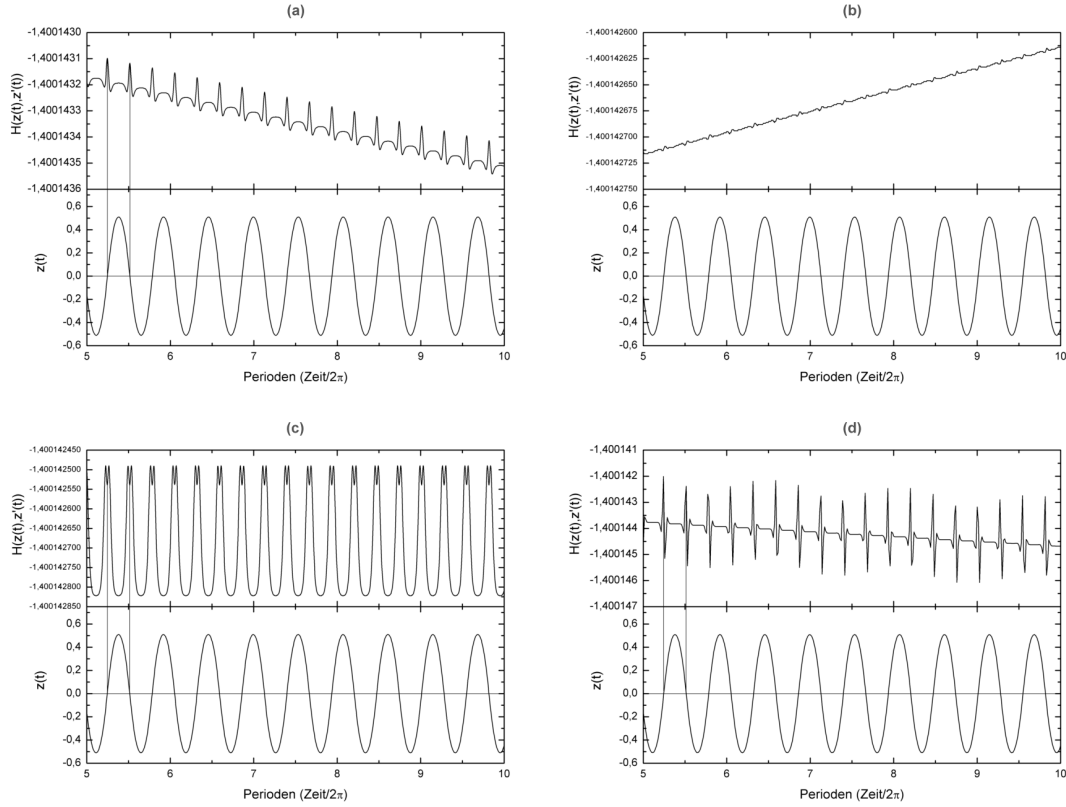


Abbildung 3.7.: Der direkte Vergleich der verwendeten Integrationsverfahren zeigt für den MacMillan Fall bei kreisförmiger Umlaufbahn der Primärkörper (Exzentrizität $\varepsilon = 0$) die Korrelation der Änderungen in der Gesamtenergie (Hamiltonfunktion) mit den Nulldurchgängen des masselosen Körpers. Die Anfangsposition ist in allen Fällen $(z(0), \dot{z}(0)) = (0.51, 0.0)$ und die Integrationsgenauigkeit 10^{-8} . Bei allen Abbildungen sind – bedingt durch die unterschiedlich starken Oszillationen – die vertikalen Skalen unterschiedlich, die horizontale Skala ist jedoch für alle gleich. Die verwendeten Integrationsmethoden sind der Reihe nach in (a) das klassische Runge-Kutta Verfahren mit fester Schrittweite, in (b) das Cash-Karp Verfahren mit adaptiver Schrittweite, in (c) das symplektische Verfahren (3.2.15) mit fester Schrittweite und in (d) ein Lie-Integrator 8. Ordnung ebenfalls mit fester Schrittweite.

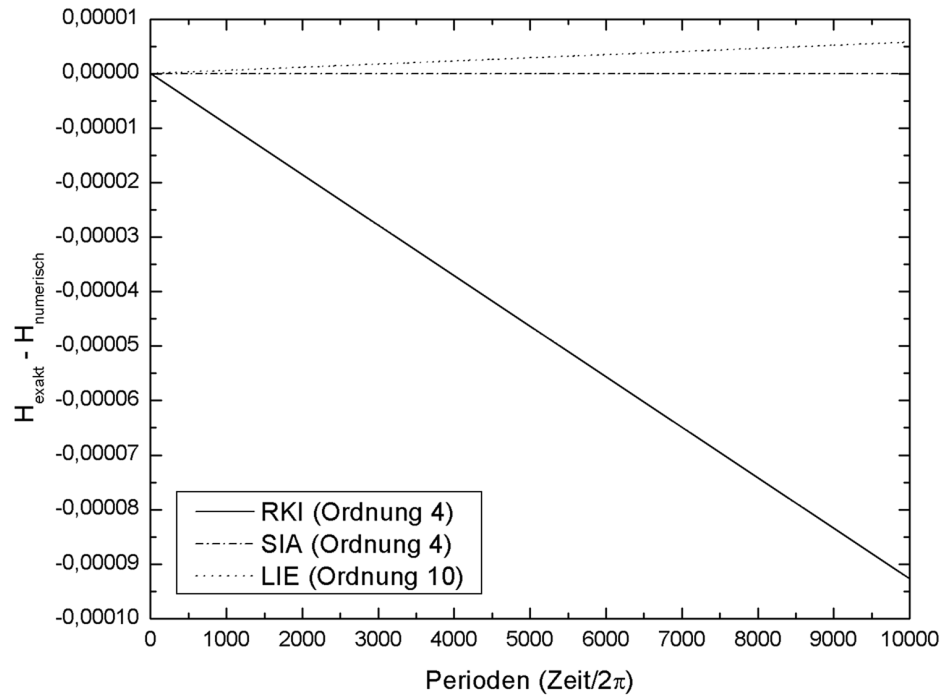


Abbildung 3.8.: Darstellung des Verhaltens von drei ausgewählten Integratoren bei Langzeitintegrationen, nämlich das Runge-Kutta Verfahren, der symplektische Integrationsalgorithmus und Lie-Integrator 10. Ordnung. Alle Verfahren rechneten mit fester Schrittweite und einer Genauigkeit von 10^{-8} über einen Zeitraum von 10^4 Perioden der Primärkörper, aufgetragen ist der relative Fehler in der Gesamtenergie für den MacMillan Fall. Die Kurven für das jeweilige Verfahren erscheinen bedingt durch die Skalierung glatt, tatsächlich zeigen sie aber ein Verhalten wie in Abb. 3.7 dargestellt.

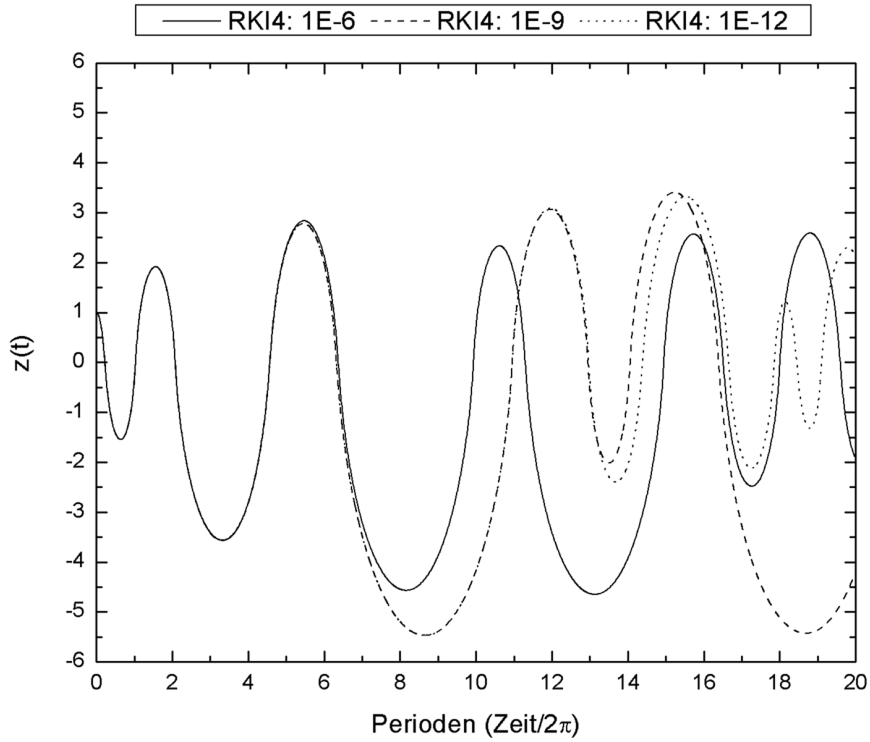


Abbildung 3.9.: Der Einfluss der Rechengenauigkeit bei dem klassischen Runge-Kutta Verfahren. Für das Sitnikov Problem wurde die Gl. (2.3.2) bei einer Exzentrizität von $\varepsilon = 0.25$ integriert, der Anfangspunkt lag im chaotischen Bereich des Phasenraumes bei $(z(0), \dot{z}(0)) = (1.005, 0.0)$. Die Abbildung zeigt, wie bereits nach ca. 5 bzw. 13 Perioden der Primärkörper die Trajektorien auseinander laufen.

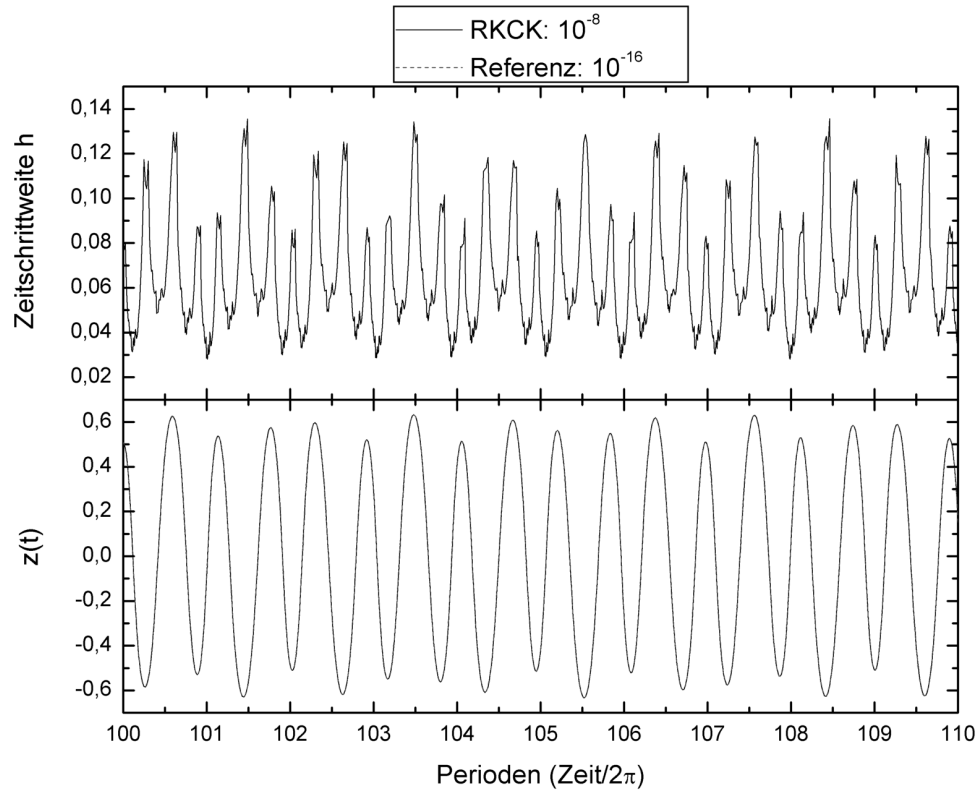


Abbildung 3.10.: Zur Integration der Bewegungsgleichung (2.3.2) wurde hier das Runge-Kutta Verfahren von Cash-Karp verwendet, welches mit seiner adaptiven Schrittweitensteuerung sehr gut mit der von Mathematica berechneten Referenztrajektorie übereinstimmt. Für die Exzentrizität von $\varepsilon = 0.15$ war der Anfangswert $(0.51, 0.0)$; gezeigt ist hier nur ein kleiner Ausschnitt aus einer längeren Integration.

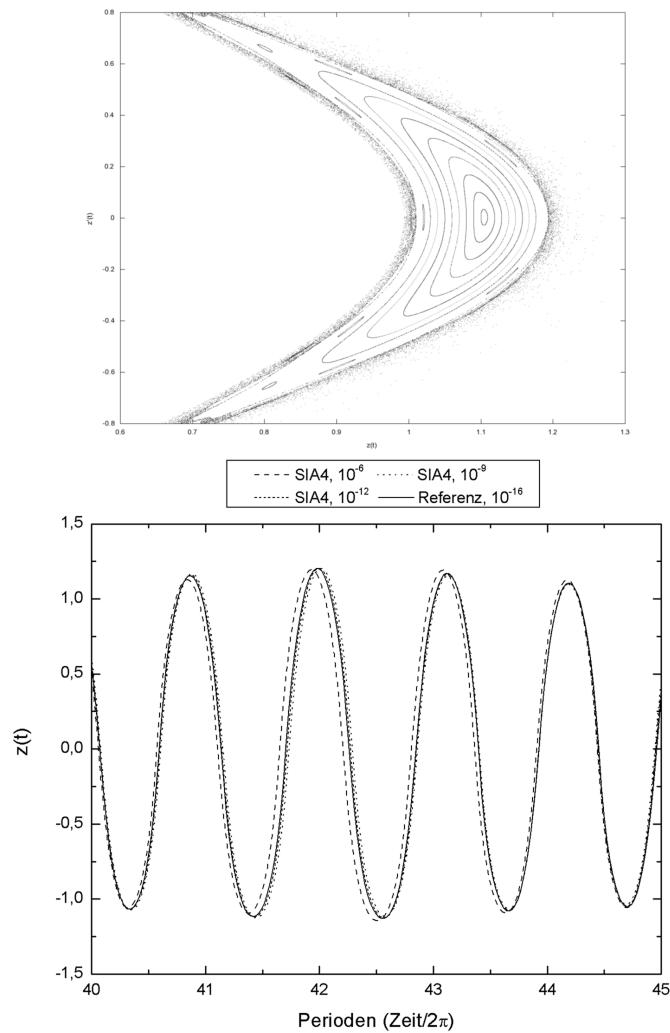


Abbildung 3.11.: Das symplektische Verfahren wurde hier eingesetzt, um bei der T-Gleichung die Umgebung einer Insel zu untersuchen. Es handelt sich bei einer Exzentrizität von $\varepsilon = 0.25$ um die Umgebung der 2 : 1 Resonanz, dazu wurden Anfangsbedingungen von $(0.995, 0.0)$ bis $(1.100, 0.0)$ über 5000 Perioden der Primärkörper integriert. Das obere Bild stellt den Phasenraumschnitt dar; das untere Bild zeigt eine Gegenüberstellung der Trajektorie für verschiedene Integrationsgenauigkeiten mit einer Referenzberechnung durch Mathematica.

nach sog. *Sticky-Orbits*¹¹ zu suchen. In Abbildung 3.11 zeigt die Lösung bei einer Rechengenauigkeit von 10^{-6} ein Verhalten, wie von Candy & Rozmus [2] berichtet: Es treten Abweichungen eher in der Phase auf, und nicht wie bei den Runge-Kutta Verfahren zusätzlich auch in der Amplitude. Die Trajektorie entfernt sich zunächst von der Referenz, um sich ihr dann nach wenigen Perioden wieder zu nähern. Das hier exemplarisch gezeigte Verhalten wiederholt sich noch öfters, bis sie sich dann wegen ihrer intrinsisch chaotischen Natur für immer von der Insel entfernt.

¹¹Sticky-Orbits sind Bahnen in unmittelbarer Nähe von invarianten Kurven im Phasenraum, sie bleiben über lange Zeiträume in deren Nähe bis sie schließlich in die umgebenden chaotischen Bereiche entkommen.

Kapitel 4.

Analytische Methoden

In diesem Kapitel wird das Sitnikov Problem mit Methoden der Störungsrechnung behandelt. Zunächst wird es in seiner einfachsten Form – dem Spezialfall des MacMillan Problems und für dessen linearisierte Bewegungsgleichung – untersucht, um einen Zusammenhang zu dem *Harmonischen Oszillator* herzustellen. Dann werden nach und nach immer mehr Terme berücksichtigt, um schließlich bei dem Sitnikov Problem auch den Einfluss der Exzentrizität zu untersuchen.

In diesem Teil soll eine analytische Näherungslösung in Form einer Potenzreihe die Ergebnisse der Störungsrechnung angeben, welche die Entwicklung von $z(t)$ und $\frac{dz}{dt}$ beschreibt.

Die verwendete Methode ist die der Lie-Transformationen, welche wieder auf Lie-Reihen aufbaut. In verschiedenen Publikationen, unter anderem in Deprit [4], Dvorak & Freistetter [7], Ferraz-Mello [9], Lichtenberg & Lieberman [17] und Nayfeh [21], wird diese Methode besprochen, und der Zusammenhang zu der Poincaré-von Zeipel Methode erörtert.

Für die Störungsrechnung hat sie den Vorteil, dass sie relativ leicht in geeigneten Computer-Algebra-Systemen (CAS) automatisiert werden kann, was in dieser Arbeit gemacht wurde.

4.1. Das Prinzip der Lie-Transformationen

4.1.1. Kanonische Störungstheorie

Für ein gegebenes dynamisches System soll eine Hamiltonfunktion der Art

$$H = H_0 + H_1$$

gelten, welche aus einem integrablen Teil H_0 und einem nicht-integrablen Teil H_1 besteht.

Die Hamiltonfunktion $H_0 = H_0(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$ bezieht sich auf ein einfaches integrables Problem, d. h. ein solches, dessen Lösung bereits bekannt ist, oft wird dazu als vereinfachtes Modell der harmonische Oszillator verwendet. Die Lösung für diesen Teil lässt sich durch die Funktionen $(q_{0,i}(t), p_{0,i}(t))$ ($i = 1 \dots N$) angeben, welche somit die Hamiltonschen

Bewegungsgleichungen (2.2.5)

$$\begin{aligned}\frac{dq_{0,i}}{dt} &= \frac{\partial H_0}{\partial p_{0,i}} \\ \frac{dp_{0,i}}{dt} &= -\frac{\partial H_0}{\partial q_{0,i}}\end{aligned}$$

erfüllen müssen.

Der nicht-integrable Teil $H_1 = H_1(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ stellt eine Störung des integrablen Systems H_0 dar, muss sich aber noch genügend nahe an diesem befinden, d. h. die Störungen dürfen nicht zu groß sein. Aus diesem Grund wird oft auch die Schreibweise

$$H = H_0 + \epsilon H_1$$

verwendet, die mittels eines Störparameters $|\epsilon| < 1$ andeutet, dass die Störungen relativ zum ungestörten Problem klein sind. H_1 kann auch in Form einer Potenzreihe vorliegen, d. h. viele Terme mit wachsenden Potenzen des kleinen Störparameters enthalten (siehe Bucerius & Schneider [1]). Für das gestörte Problem gilt, dass es ebenfalls durch kanonische Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial(H_0 + H_1)}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial(H_0 + H_1)}{\partial q_i}\end{aligned}\tag{4.1.1}$$

beschrieben wird.

Die Lösungen für das System $H = H_0 + H_1$ folgen aus den ungestörten Lösungen (mit Index 0)

$$\begin{aligned}q_i &= q_{0,i}(Q_k, P_k, t) \\ p_i &= p_{0,i}(Q_k, P_k, t),\end{aligned}\tag{4.1.2}$$

allerdings sind die (Q_k, P_k) im Allgemeinen zeitabhängige Größen. Durch Einsetzen der Gl. (4.1.2) in die Gl. (4.1.1) und verschiedenen Umformungen gelangt man zu einem kanonischen System für die gesuchten Funktionen

$$\begin{aligned}\frac{dQ_k}{dt} &= \frac{\partial H_1}{\partial P_k} \\ \frac{dP_k}{dt} &= -\frac{\partial H_1}{\partial Q_k}\end{aligned}\tag{4.1.3}$$

($k = 1 \dots N$). Um die Lösungen dieses Systems zu erhalten, wäre es sehr nützlich, wenn die Hamiltonfunktion $H_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ in möglichst einfacher Form vorläge.

4.1.2. Infinitesimale kanonische Transformationen

Eine spezielle Art von kanonischen Transformationen sind die *infinitesimalen kanonischen Transformationen*. Falls irgendeine der in Gl. (2.2.8) gegebenen erzeugenden Funktionen von kanonischen Transformationen zusätzlich stetig von einem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ abhängt, so dass auch ihre Ableitung $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$ stetig ist, dann ist durch

$$F_1 = F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t, \lambda)$$

eine einparametrische Schar von kanonischen Transformationen gegeben¹.

Abhängig vom jeweiligen Wert des Parameters, wird ein Ausgangspunkt $\mathbf{Q}$ durch die kanonische Transformation auf verschiedene Bildpunkte $\mathbf{q}$ (für den Wert λ) bzw. $\bar{\mathbf{q}}$ (bei einem anderen Wert des Parameters $\bar{\lambda}$) abgebildet. Wenn sich der Parameter nur wenig ändert, liegen – bedingt durch die Stetigkeit der Abbildung – die Bildpunkte im Phasenraum nahe zusammen. Diese Abbildung eines Punktes im Phasenraum auf einen „Nachbarnpunkt“ macht die Eigenschaft einer infinitesimalen Transformation aus, deshalb nennt man sie auch *Ähnlichkeitstransformation* oder englisch „near identity transformation“. Für

$$\lim_{\bar{\lambda} \rightarrow \lambda} F_1(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{Q}, \bar{\lambda}) = F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, \lambda)$$

ergibt sich die identische Abbildung bzw. identische Transformation, d. h. ein Punkt wird auf sich selbst abgebildet.

Die vier Typen von kanonischen Transformationen in Gl. (2.2.8) sind jeweils Funktionen der gemischten alten $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ und neuen Variablen $(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$. Um die Transformation explizit zu machen, muss daher immer eine der Bestimmungsgleichungen invertiert werden. Wenn statt dessen jedoch

$$W(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \lambda) := -\frac{\partial F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \lambda), \lambda)}{\partial \lambda}$$

verwendet wird, werden die kanonischen Gleichungen in expliziter Form durch

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{d\lambda} &= \frac{\partial W}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{d\lambda} &= -\frac{\partial W}{\partial q_i} \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

($i = 1 \dots N$) gegeben. Mittels infinitesimalen kanonischen Transformationen können also explizite Variablentransformationen durchgeführt werden! Die genaue Herleitung für dieses Ergebnis ist in Ferraz-Mello [9], Kap. 5.1, zu finden.

Die Funktion $W(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \lambda)$ wird *Lie-erzeugende Funktion* genannt, sie beschreibt eine einparametrische Schar von kanonischen Transformationen, welche durch den Parameter λ gegeben sind.

¹Statt F_1 kann ebenso jede andere erzeugende Funktion F_i aus Gl. (2.2.8) gewählt werden.

4.1.3. Lie-Transformationen

Führt man kanonische Transformationen mit den erzeugenden Funktionen aus Gl. (2.2.8) durch, so ergeben sich dadurch, wie bereits erwähnt, einige Nachteile. Deprit [4] verweist auf einige dieser Nachteile im Zusammenhang mit der Poincaré-von Zeipel Methode:

- Die erzeugenden Funktionen der Transformation liegen als Funktionen der gemischten alten und neuen Variablen vor, sie ergeben implizite Beziehungen. Eine explizite Darstellung der Transformation erfordert deshalb die Invertierung der Transformationsgleichungen, dies ist unter Umständen schwierig durchzuführen.
- Die Transformationsgleichungen lassen im Allgemeinen keine allgemein gültigen Verfahren zu, um beliebige Funktionen der alten Variablen in den neuen Variablen auszudrücken.
- Zusätzliche Bedingungen an die Transformation – wie die Forderung nach analytischen Koeffizienten, Elimination bestimmter Variablen – sind nicht a priori zu erfüllen.

Lie-Transformationen dagegen wurden entwickelt, um diese Nachteile zu überwinden, für die Störungsrechnung haben sie folgende Bedeutung:

1. Die Transformationen von alten auf neue Variablen liegen in expliziter Form vor.
2. Beliebige Funktionen der alten Variablen können als Funktionen der neuen Variablen ausgedrückt werden, dazu müssen nur eine Reihe von explizit gegebenen, verketteten Poissonklammern berechnet werden.
3. Die Rücktransformationen (oder inverse Transformationen) können auf die gleiche Weise aufgebaut werden.
4. Lie- und von Zeipel Transformationen sind in erster Ordnung identisch, was die Vergleichbarkeit erleichtert.

Lie-Transformationen können als verallgemeinertes Konzept einer infinitesimalen kanonischen Transformation aufgefasst werden. Die folgende Einführung über Lie-Transformationen folgt im Aufbau und der Notation [9], [7] und [4].

Lie-Reihen und kanonische Transformationen

Definition 11 Die Abbildung $D_W : f \longrightarrow D_W f = [f, W]$ heißt Lie-Ableitung erzeugt durch die Lie-erzeugende Funktion W , sie ist gegeben durch die Poissonklammer der Funktion $f = f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ mit $W = W(\mathbf{q}, \mathbf{p})$.

Die Lie-Ableitung ist analog zu dem D -Operator ein linearer Operator, d. h. es gilt

$$D_W^0 f \equiv f, \quad D_W^1 f = f, \quad D_W^2 f = D_W (D_W f), \quad \dots, \quad D_W^n f = D_W (D_W^{n-1} f),$$

vorausgesetzt die Funktion f ist entsprechend oft differenzierbar. Ansonsten gelten hier die gleichen Eigenschaften wie in den Gl. (3.2.7), und zusätzlich gelten

$$D_W [f, g] = [f, D_W g] + [D_W f, g] \quad (4.1.5a)$$

$$D_{\epsilon W}^n f = \epsilon^n D_W^n f. \quad (4.1.5b)$$

Man kann zeigen, dass die Lie-Ableitung einer Funktion $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \lambda)$ gleichwertig zu

$$D_W f = [f, W] = \frac{df}{d\lambda} \quad (4.1.6)$$

ist. Fasst man dies als eine Differentialgleichung auf, so ist ihre Lösung formal durch

$$f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \lambda) = e^{\lambda D_W} f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} D_W^n f$$

gegeben. Durch vollständige Induktion zeigt man außerdem für Gl. (4.1.5a), dass die Lie-Ableitung n -mal angewendet auf eine Poissonklammer

$$D_W^n [f, g] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [D_W^{n-k} f, D_W^k g] \quad (4.1.7)$$

ergibt.

Definition 12 Die Lie-Reihe der Funktion f erzeugt durch W ist gegeben durch die Abbildung

$$L_W : f \longrightarrow L_W f = e^{\lambda D_W} f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} D_W^n f.$$

Durch den Operator $L_W = e^{\lambda D_W}$ wird eine kanonische Transformation

$$(Q_i, P_i, \lambda) \longmapsto (q_i, p_i), \quad i = 1 \dots N$$

erzeugt,

$$\begin{aligned} q_i &= L_W Q_i = \left(e^{\lambda D_W} \right) Q_i \\ p_i &= L_W P_i = \left(e^{\lambda D_W} \right) P_i \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

$$f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \lambda) = f(e^{\lambda D_W} \mathbf{Q}, e^{\lambda D_W} \mathbf{P}, \lambda) = e^{\lambda D_W} f(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \lambda),$$

sie heißt die *Lie-Transformation erzeugt von der Lie-erzeugenden Funktion W* .

Die durch Gl. (4.1.8) gegebene Transformation ist tatsächlich eine kanonische Transformation, denn sie erfüllt die Bedingungen

$$\begin{aligned} [q_i, q_k] &= e^{\lambda D_W} [Q_i, Q_k] = 0, \\ [p_i, p_k] &= e^{\lambda D_W} [P_i, P_k] = 0, \\ [q_i, p_k] &= e^{\lambda D_W} [Q_i, P_k] = \delta_{ik}. \end{aligned}$$

Die Anwendung von L_W auf eine beliebige, unendlich oft differenzierbare Funktion $f(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \lambda), \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \lambda))$ erzeugt die Lie-Reihe

$$\bar{f}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \lambda) = L_W f = e^{\lambda D_W} f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} D_W^n f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \left(\frac{d^n f}{d\lambda^n} \right)_{\lambda=0}. \quad (4.1.9)$$

Anwendung von Lie-Transformationen

Ausgangspunkt ist eine autonome Hamiltonfunktion² $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, die $2N$ Variablen (q_i, p_i) ($i = 1 \dots N$) sollen die Gleichungen (2.2.5) erfüllen. Sie wird als eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen eines Parameters λ geschrieben,

$$\begin{aligned} H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n H_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \\ &= H_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \lambda H_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \lambda^2 H_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \mathcal{O}(\lambda^3), \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

wobei jeder Term

$$\lambda^k \propto \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \dots \lambda_m^{k_m} \quad k = k_1 + k_2 + \dots + k_m$$

aus mehreren Elementen λ_i ($i = 1 \dots m$) zusammengesetzt sein kann, die unter anderem auch Störparameter des Systems enthalten können.

Durch eine Lie-Transformation soll ein transformiertes System

$$K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \lambda) = H(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \lambda), \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \lambda)) + R(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \quad (4.1.11)$$

mit Restglied R (Restfunktion) erzeugt werden, in welchem die transformierte Hamiltonfunktion K (oft „Kamiltonian“ genannt) eine möglichst einfache Form hat, damit die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für (Q_i, P_i) ($i = 1 \dots N$) möglichst einfach zu lösen sind. Dies wird erreicht, indem etwa zyklische Variablen Q_i erzeugt werden. Die transformierte Hamiltonfunktion K besteht dann nur noch aus den verallgemeinerten Impulsen P_i , und diese sind zeitlich konstant (siehe Definition 7, Seite 14). Die konjugierten kanonischen Variablen Q_i lassen sich dann einfach durch

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P_i}$$

bestimmen. Ein weiterer Vorteil dieser so genannten *Wirkung-Winkel Variablen* („action-angle“ Variablen) liegt nun auch darin, dass sich so die Frequenzen der Bewegung ergeben. Durch die Transformation können also die wichtigsten Kenngrößen der Bewegung ermittelt werden, ohne die ursprünglichen Bewegungsgleichungen lösen zu müssen.

²Zu beachten ist, dass jede nicht-autonome Hamiltonfunktion nach dem Verfahren in Abschnitt 2.2.1 in eine autonome Hamiltonfunktion verwandelt werden kann.

Die erzeugende Funktion W dieser kanonischen Transformation wird daher so konstruiert, dass die geforderten Eigenschaften erfüllt werden. Sie wird ebenfalls in Form einer Potenzreihe vorliegen,

$$\begin{aligned} W(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n W_{n+1}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \\ &= W_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \lambda W_2(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \lambda^2 W_3(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \mathcal{O}(\lambda^3). \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

Für die transformierte Hamiltonfunktion K wird ebenso eine Reihendarstellung der Form

$$\begin{aligned} K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_n(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \\ &= K_0(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \lambda K_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \lambda^2 K_2(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \mathcal{O}(\lambda^3) \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

angenommen.

Die ursprünglichen kanonischen Variablen $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ der Hamiltonfunktion H werden mittels Gl. (4.1.8) durch $(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ ersetzt. Dazu muss auf jeden Term H_j ($j \geq 0$) in der Gl. (4.1.10) der Operator L_W nach Gl. (4.1.9) angewendet werden, dies erzeugt die Reihen

$$H_j(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \lambda), \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \lambda)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \left(\frac{d^n H_j(\mathbf{Q}, \mathbf{P})}{d\lambda^n} \right)_{\lambda=0}. \quad (4.1.14)$$

Aus Gl. (4.1.6) folgt, dass in Gl. (4.1.14) die Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{dH_j}{d\lambda} &= [H_j, W] \\ \frac{d^2 H_j}{d\lambda^2} &= \left[\frac{dH_j}{d\lambda}, W \right] + \left[H_j, \frac{\partial W}{\partial \lambda} \right] = [[H_j, W], W] + \left[H_j, \frac{\partial W}{\partial \lambda} \right] \end{aligned}$$

durch Lie-Ableitungen ersetzt werden können. Für die höheren Ableitungen verwendet man Gl. (4.1.7) und erhält für $n \geq 0$

$$\left(\frac{d^{n+1} H_j}{d\lambda^{n+1}} \right)_{\lambda=0} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left[\frac{d^{n-k} H_j}{d\lambda^{n-k}}, \frac{\partial^k W}{\partial \lambda^k} \right]_{\lambda=0}, \quad (4.1.15)$$

wird dazu noch

$$\left(\frac{\partial^{n+1} W}{\partial \lambda^{n+1}} \right)_{\lambda=0} = n! W_{n+1} \quad (4.1.16)$$

beachtet, wie aus Gl. (4.1.12) folgt, dann findet man mit diesen Rekursionsrelationen schnell alle Terme bis zu der gewünschten Ordnung in λ .

Explizit ausgeschrieben lauten die ersten Terme der Reihen (4.1.14) somit

$$H_j(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = H_j + \lambda [H_j, W_1] + \frac{\lambda^2}{2} ([[H_j, W_1], W_1] + [H_j, W_2]) + \mathcal{O}(\lambda^3),$$

wobei auf der rechten Seite alle $H_j = H_j(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ sind. Die so gefundenen Ausdrücke für die verschiedenen H_j werden nun in Gl. (4.1.10) eingesetzt.

Aus dem anschließenden Koeffizientenvergleich mit Gl. (4.1.13) ergibt sich das Schema zur Durchführung der Lie-Transformation. Da die Lie-Transformation für $\lambda = 0$ die identische Transformation ergibt, muss $K_0(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \equiv H_0(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ sein, die anderen Formeln für die transformierten Hamiltonfunktionen sind bis zur 3. Ordnung durch

$$K_0 = H_0 \quad (4.1.17a)$$

$$K_1 = H_1 + [H_0, W_1] \quad (4.1.17b)$$

$$K_2 = H_2 + [H_1, W_1] + \frac{1}{2} [[H_0, W_1], W_1] + \frac{1}{2} [H_0, W_2] \quad (4.1.17c)$$

$$\begin{aligned} K_3 = & H_3 + [H_2, W_1] + \frac{1}{2} [[H_1, W_1], W_1] + \frac{1}{2} [H_1, W_2] + \\ & + \frac{1}{6} [[H_0, W_2], W_1] + \frac{1}{6} [[[H_0, W_1], W_1], W_1] + \\ & + \frac{1}{3} [[H_0, W_1], W_2] + \frac{1}{3} [H_0, W_3] \end{aligned} \quad (4.1.17d)$$

gegeben. Zum Aufstellen der höheren Terme K_n ($n \geq 4$) wird ein automatisiertes Verfahren verwendet.

In der Bestimmungsgleichung für ein beliebiges K_n sind – mit Ausnahme der Funktion $W_n(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$, die erst zu diesem Zeitpunkt der Transformation zu bestimmen ist – ausschließlich Ausdrücke enthalten, welche aus früheren Transformationsschritten bekannt sind. Die erzeugende Funktion W_n kann so gewählt werden, dass der Ausdruck für K_n eine bestimmte Form hat, z. B. frei von den Q_i ist.

Restfunktion zur Lie-Transformation

Wie in Gleichung (4.1.11) angedeutet, wird eine Funktion H mittels der Lie-Transformation in eine vereinfachte Hamiltonfunktion K durch eine kanonische Transformation übergeführt. Da diese Transformation nur bis zu einer endlichen Ordnung durchgeführt wird, bleibt immer ein Restfehler bestehen.

Nach Deprit [4] ist das Hamiltonsystem

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad H = H_0 + \lambda H_1 + \lambda^2 H_2 + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

dem Hamiltonsystem

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P}, \quad \frac{dP}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q}, \quad K = H + R$$

äquivalent, für $\lambda \rightarrow 0$ sind die beiden Formulierungen identisch. Die Restfunktion $R = R(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \lambda)$ erlaubt die Abschätzung des Fehlers, wenn eine Lie-Transformation bei Ordnung n abgebrochen wird.

Zur Bestimmung der Restfunktion wird die erzeugende Funktion $W = W(\mathbf{Q}(t), \mathbf{P}(t))$ der Lie-Transformation benötigt. Zunächst hat R – ebenso wie die transformierte Hamiltonfunktion K oder die erzeugende Funktion W – die Form einer Potenzreihe im Parameter λ ,

$$R(\mathbf{Q}(t), \mathbf{P}(t), \lambda) = \lambda R_1 + \lambda^2 R_2 + \lambda^3 R_3 + \mathcal{O}(\lambda^4). \quad (4.1.18)$$

Die Bestimmung der jeweiligen Teilfunktion $R_i = R_i(\mathbf{Q}(t), \mathbf{P}(t))$ erfolgt – analog zum Verfahren für die transformierte Hamiltonfunktion K – ebenfalls über ein rekursives Schema. Aus den erzeugenden Funktionen W_i wird zunächst eine „Pseudo“-Hamiltonfunktion gebildet,

$$\begin{aligned} \bar{H} = \bar{H}(\mathbf{Q}(t), \mathbf{P}(t)) &= \bar{H}_0 + \lambda \bar{H}_1 + \lambda^2 \bar{H}_2 + \mathcal{O}(\lambda^3) \\ &= - \left(\frac{\partial W_1}{\partial t} + \lambda \frac{\partial W_2}{\partial t} + \lambda^2 \frac{\partial W_3}{\partial t} + \mathcal{O}(\lambda^3) \right) \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

die Restfunktion wird anschließend wie in den Gleichungen (4.1.17) aufgebaut,

$$R_1 = \bar{H}_0 = - \frac{\partial W_1}{\partial t} \quad (4.1.20a)$$

$$R_2 = \bar{H}_1 + [\bar{H}_0, W_1] = - \frac{\partial W_2}{\partial t} - \left[\frac{\partial W_1}{\partial t}, W_1 \right] \quad (4.1.20b)$$

$$\begin{aligned} R_3 &= \bar{H}_2 + [\bar{H}_1, W_1] + \frac{1}{2} [[\bar{H}_0, W_1], W_1] + \frac{1}{2} [\bar{H}_0, W_2] \\ &= - \frac{\partial W_3}{\partial t} - \left[\frac{\partial W_2}{\partial t}, W_1 \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial W_1}{\partial t}, W_2 \right] - \frac{1}{2} \left[\left[\frac{\partial W_1}{\partial t}, W_1 \right], W_1 \right] \end{aligned} \quad (4.1.20c)$$

usw. bis hinauf zu jeder benötigten Ordnung.

4.2. Automatische Durchführung von Lie-Transformationen

Die oben angeführten Formeln und viele Schritte einer Lie-Transformation lassen sich durch rekursive Algorithmen angeben, so dass sie sich zur Implementation in Computer-Algebra-Systemen eignen. Mit dem Programm Mathematica wurde das Package (eine Sammlung von Funktionen) `lietrafo.m` entwickelt, mit dem sich die Lie-Transformation automatisiert für beliebige Ordnungen durchführen lässt.

4.2.1. Beschreibung

Das Package enthält die Hauptfunktion `LieTransform`, die weitere Funktionen aufruft. Sie ist die Schnittstelle zum Anwender und nimmt die Eingaben entgegen, die zu transformierende Hamiltonfunktion, die Liste der vorkommenden kanonischen Variablen (q, p) , den (oder die) Störparameter und die Ordnung der Transformation. Die wichtigsten Schritte für die Transformation sind das Aufstellen und Berechnen der Poissonklammern, sowie die Bestimmung der erzeugenden Funktion bei einer bestimmten Ordnung sowie die

Bestimmung ihrer Koeffizienten. Diese und andere Aufgaben übernehmen spezialisierte Funktionen, die in Anhang B.1 besprochen werden.

Für Lie-Transformationen ebenso wichtig ist die Rücktransformation, nachdem die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für die vereinfachte transformierte Hamiltonfunktion gelöst wurden. Sollen die ursprünglichen Variablen durch die kanonischen Variablen des vereinfachten Systems dargestellt werden, berechnet `ReverseTransform` die dazu notwendigen Poissonklammern und gibt die kanonische Transformation (4.1.8) in expliziter Form an.

Ist man zusätzlich an der Restfunktion der Transformation interessiert, bestimmt `RemainderFunction` nach den Gleichungen (4.1.20) ihre Gestalt.

4.2.2. Details

Mit dem höchsten Rechenaufwand verbunden ist die Auswertung der Poissonklammern: Nach Deprits Rekursionsformel [4] ist zwar der rekursive Zusammenhang zwischen ihnen bekannt, jedoch stellt man fest, dass mit jeder zusätzlichen Transformationsordnung die Anzahl der Terme exponentiell zunimmt.

Wie man anhand der Gleichungen (4.1.17) erkennt, enthält jede Ordnung Poissonklammern, welche in ähnlicher Form (mit anderen Funktionen H_i) in der Ordnung zuvor bereits vorhanden waren. Die aufzulösende rekursive Beziehung (4.1.15) als Basis für die n -te Ordnung, zusammen mit der Eigenschaft (4.1.5a) der Lie-Ableitung führen aber dazu, dass für die Ordnung $n \geq 1$ jeweils 2^{n-1} neue Poissonklammern im Vergleich zur vorhergehenden Ordnung hinzukommen, und zwar weil

$$D_W^n [f, g] = D_W^{n-1} (D_W [f, g]) = D_W^{n-1} ([D_W f, g] + [f, D_W g])$$

gilt, und jede Anwendung des Operators D_W auf eine Poissonklammer deren Verdopplung zur Folge hat.

Berücksichtigt man bei Ordnung n alle Terme – den Kern $K_n = H_n$ der infinitesimalen Transformation, sowie bereits vorhandene und neue Poissonklammern – so wächst ihre Anzahl insgesamt wie 2^n , wie man an den Gleichungen (4.1.17) nachprüfen kann. Lichtenberg & Lieberman [17] wählten einen anderen Weg zur Aufstellung der Rekursionsformel, jedoch mit dem selben Ergebnis die Anzahl der Terme betreffend.

In der Praxis sind für den implementierten Algorithmus die aufwendigsten Berechnungen daher die Ableitungen in den Poissonklammern, während das Lösen der Gleichungssysteme für die Koeffizienten der erzeugenden Funktionen und eventuell die abschließende Vereinfachung der Kamiltonfunktion weniger anspruchsvoll sind. Abbildung 4.2 gibt das Verhältnis der Laufzeiten der an der Transformationen beteiligten Funktionen wieder. Während für die 3. Ordnung die Berechnung der Poissonklammern noch rund 47 % der auf 1 normierten Gesamtzeit ausmacht, so wächst der Anteil der Funktion `CombinePoissonBrackets` (CPB) auf 99.8 % für die 7. Ordnung.

Um die Leistungsfähigkeit der Implementation abschätzen zu können, wurden einige Rechnungen mit Testmodellen durchgeführt, dazu zählen unter anderem

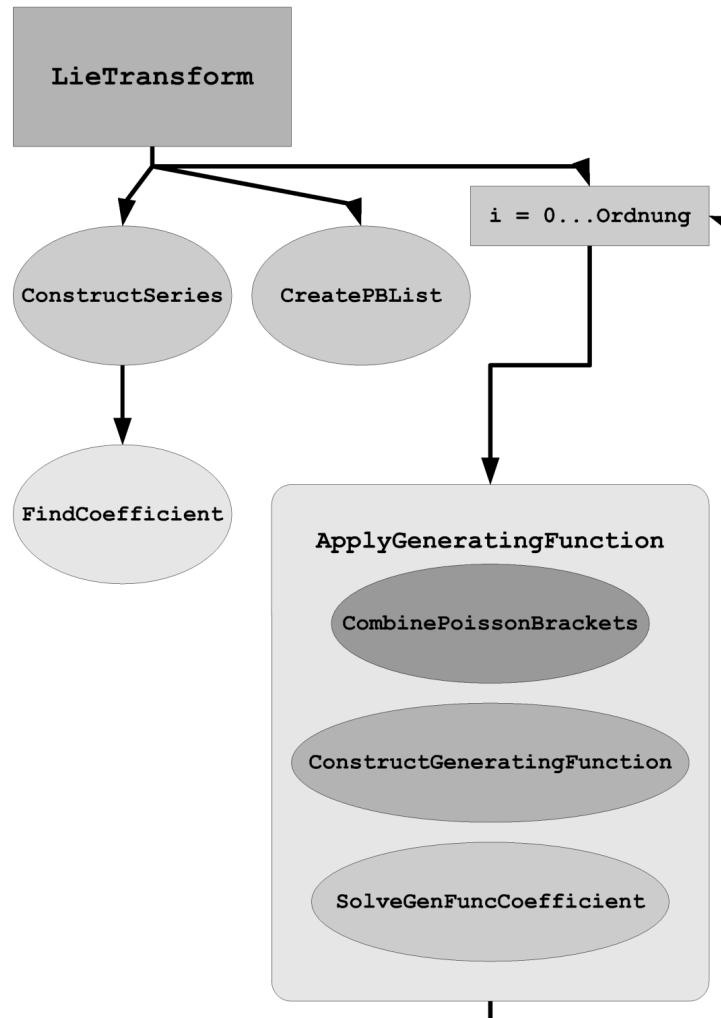


Abbildung 4.1.: Diagramm zum Aufbau des Package `lietrafo.m`. Dargestellt sind die verschiedenen Funktionen, welche für die einzelnen Phasen einer Lie-Transformation von Bedeutung sind.

1. der eindimensionale Duffing Oszillator ohne externe antreibende Kräfte, die dazugehörige Hamiltonfunktion lautet

$$H(q, p) = p + \frac{1}{8}\lambda p^2(3 - 4\cos(2q) + \cos(4q)),$$

2. die Hamiltonfunktion (2.4.2) des MacMillan Problems, in der Reihenentwicklung nach Gl. (4.3.6) für verschiedene Ordnungen in λ ,
3. die Hamiltonfunktion zweier gekoppelter Harmonischer Oszillatoren als ein einfaches Beispiel für ein System mit zwei Freiheitsgraden

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = p_1 + p_2 + \lambda\sqrt{p_1 p_2}(\cos(q_1 - q_2) - \cos(q_1 + q_2)),$$

4. die zweidimensionale Hénon-Heiles-Hamiltonfunktion [7]

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = p_1 + p_2 - 2\sqrt{2}\lambda \left[\frac{1}{12}\sqrt{p_2^3}(3\sin q_2 - \sin(3q_2)) - \frac{1}{4}p_1\sqrt{p_2}(\sin(2q_1 - q_2) - \sin(2q_1 + q_2) + 2\sin q_2) \right],$$

5. und die Hamiltonfunktion (2.4.5) für die T-Gleichung bis zur 4. Ordnung in λ .

Für die oben angeführten Hamiltonfunktionen wurde die Lie-Transformation jeweils vollständig bis zu einer gewählten Ordnung durchgeführt, gemessen wurde die benötigte Zeit³ für diese Aufgabe. Tabelle 4.1 fasst die Ergebnisse zusammen.

Die Zusammenfassung zeigt, dass für das einfachste Modell – den Duffing Oszillator – erwartungsgemäß die Laufzeit am kürzesten ist. Obwohl die Hamiltonfunktion nur aus einem Term 0. und 1. Ordnung in λ besteht, steigt selbst hier der Rechenaufwand sehr stark an, sodass mit der verwendeten Hardware keine Lie-Transformation für höhere Ordnungen als die 8. Ordnung möglich war.

Für das MacMillan Problem kommen zusätzlich in jeder betrachteten Ordnung Terme hinzu, sodass die längere Laufzeit im Vergleich zum Duffing Oszillator auf den Einfluss dieser Terme und der damit verbundenen Berechnung von mehr Poissonklammern zurückzuführen ist. Über alle Ordnungen genommen ist der Rechenaufwand für das MacMillan Problem im Vergleich zum Duffing Oszillator im Mittel zwei Mal höher.

Das ebenfalls nur aus Termen 0. und 1. Ordnung in λ bestehende Modell der gekoppelten Harmonischen Oszillatoren skaliert für niedrige Ordnungen teilweise besser als die Modelle mit nur einem Freiheitsgrad. Bei höheren Ordnungen macht sich allerdings der zunehmende Aufwand bei der Auswertung der Poissonklammern für vier anstatt nur zwei Variablen bemerkbar.

³Der gemessene Wert bezieht sich auf die reine CPU-Zeit, die durch den Mathematica Kernel beansprucht wurde. Die tatsächliche Laufzeit kann davon abweichen, falls andere Prozesse ebenfalls CPU-Zeit für sich beanspruchen; die Unsicherheit in der Zeitauflösung beträgt 0.001 Sekunden.

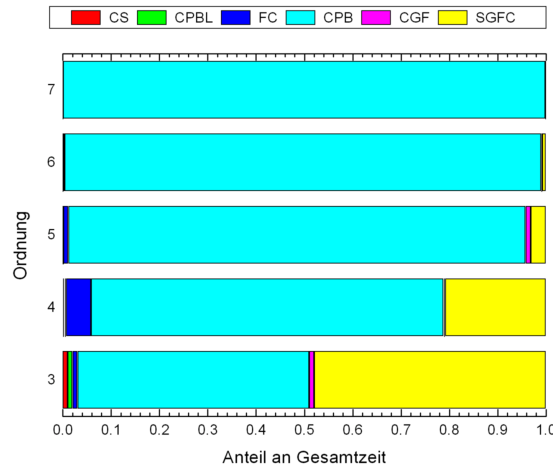


Abbildung 4.2.: Für die an einer Lie-Transformation beteiligten Funktionen (die Abkürzungen stehen für die Funktionsnamen aus Abbildung 4.1) wurde untersucht, welchen Anteil sie an der gesamten Rechenzeit für verschiedene Ordnungen der MacMillan Hamiltonfunktion haben. Die Laufzeit wurde aus Gründen der Vergleichbarkeit stets auf 1 normiert.

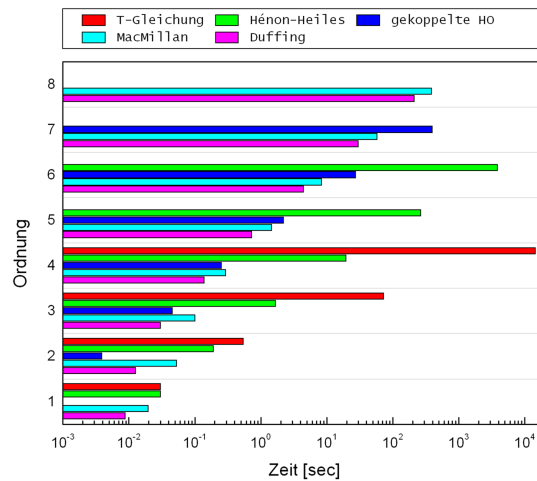


Abbildung 4.3.: Untersuchung zum Laufzeitverhalten des Programms für Lie-Transformationen und grafischer Vergleich für verschiedene Modelle. Die Ordnung der Transformation ist aufgetragen gegen die Laufzeit in logarithmischer Skalierung. Die erste Ordnung des Modells der gekoppelten Harmonischen Oszillatoren wurde hier ausgelassen, da ihre Laufzeit in der Größenordnung der Unsicherheit in der Zeitmessung liegt.

Ordnung	Duffing	MacMillan	Modell (Laufzeit in sec.)		
			gekoppelte HO	Hénon-Heiles	T-Gleichung
1	0.009	0.020	< 0.001	0.031	0.031
2	0.013	0.054	0.004	0.196	0.552
3	0.031	0.103	0.047	1.703	73.83
4	0.141	0.299	0.258	19.99	14760.5
5	0.750	1.500	2.277	273.3	
6	4.547	8.538	28.00	3962.3	
7	30.57	59.27	408.0		
8	216.3	395.3			

Tabelle 4.1.: Untersuchung zum Laufzeitverhalten des Programms für Lie-Transformationen anhand verschiedener Modelle. Die angegebenen Werte sind über mehrere Durchläufe gemittelt, sie wurden auf einem Rechner mit Einzelkernprozessor mit 1900 MHz und 2 GB RAM ermittelt. Die Laufzeit für die erste Ordnung des Modells der gekoppelten Harmonischen Oszillatoren liegt unterhalb der Zeitaufösung.

Das Hénon-Heiles Modell mit ebenfalls zwei Freiheitsgraden zeigt aufgrund seiner relativ komplizierten Struktur im Term erster Ordnung in λ die Grenzen des Verfahrens auf, die Berechnung noch höherer Ordnungen könnte an dem Mangel an verfügbarem Arbeitsspeicher scheitern.

Wie erwartet steigt die Rechenzeit für die T-Gleichung – wie das Hénon-Heiles Modell ein System mit zwei Freiheitsgraden – sehr schnell an, verantwortlich dafür sind die zusätzlichen Terme der Hamiltonfunktion ab der zweiten Ordnung in λ . In erster Ordnung liegen die Laufzeiten für dieses und das Hénon-Heiles Modell im Rahmen der Messungengenauigkeit gleich auf, wobei die entsprechenden Hamiltonfunktionen sogar (bis auf einen Term mehr für die T-Gleichung) gleich komplex sind. Die in Tabelle 4.1 eingetragenen Werte für die Laufzeit sind ab der zweiten Ordnung nur ein grober Mittelwert. Für die zweite Ordnung müssen etwa drei Laufzeiten berücksichtigt werden: jene für die Ordnungen $(2, 0)$, $(1, 1)$ und $(0, 2)$ in (T, ε) . Im ersten und letzten Fall betragen die Laufzeiten 0.11 bzw. 0.375 Sekunden, doch bedingt durch die höhere Anzahl von gemischten Terme beläuft sich die Laufzeit im Fall $(1, 1)$ auf 1.172 Sekunden, woraus sich der Mittelwert von 0.552 Sekunden ergibt. Für höhere Ordnungen ist das Verhältnis von kürzester zu längster Laufzeit noch extremer, in der dritten Ordnung liegt ein Faktor 10^3 zwischen den beiden Extremwerten, in der vierten Ordnung sogar mehr als 10^5 , d. h. die längste Rechnung in der 4. Ordnung dauert fast drei Mal länger als der in Tabelle 4.1 angegebene Durchschnittswert.

Die vorliegenden Aussagen für die T-Gleichung gelten stellvertretend auch für die z-Gleichung, die Hamiltonfunktionen ähneln sich im Aufbau und besitzen gleich viele Terme, weshalb die Laufzeiten auch direkt miteinander vergleichbar sind.

4.3. Störungsrechnung für das MacMillan Problem

Die Anwendung der Lie-Transformationen auf das Sitnikov Problem soll bei dessen einfachstem Spezialfall beginnen – dem MacMillan Fall. Die Hamiltonfunktion ist autonom, es handelt sich um ein System mit nur einem Freiheitsgrad und die Störungslösung kann mit Wirkungs- und Winkelvariablen (q, p) dargestellt werden.

4.3.1. Der linearisierte MacMillan Fall

Die Bewegungsgleichung

Ausgehend von der Bewegungsgleichung (2.4.1) soll die Differentialgleichung weitest möglich vereinfacht werden. Dazu wird eine Taylorreihenentwicklung nach der Variable z um den Wert $z_0 = 0$ verwendet und nach der 1. Ordnung in z die Entwicklung abgebrochen.

Durch diese Linearisierung erhält man die folgende Gleichung

$$\ddot{z} + 8z = 0.$$

Dieses linearisierte System entspricht einem Harmonischen Oszillator mit der Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ – der Grundfrequenz des Systems, die auch im Sitnikov Fall gleich bleibt – und ist deshalb analytisch lösbar. Die Lösung für $z(t)$ ergibt sich durch den Ansatz $z(t) = A \exp(\lambda t)$. Durch Einsetzen dieses Ansatzes in die Differentialgleichung ergibt sich die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ mit den Lösungen $\lambda_{\pm} = \pm i\omega$.

Die vollständige Lösung für beliebige Anfangsbedingungen $(z(0), \dot{z}(0)) = (z_0, \dot{z}_0)$ lautet demnach

$$\begin{aligned} z(t) &= z_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{z}_0}{\omega} \sin(\omega t) \\ \dot{z}(t) &= -z_0 \omega \sin(\omega t) + \dot{z}_0 \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

Die Hamiltonfunktion

Die Linearisierung der Hamiltonfunktion ergibt (bis auf eine vernachlässigbare Konstante)

$$H(z, \dot{z}) = \frac{1}{2} \dot{z}^2 + 4z^2. \quad (4.3.2)$$

Führt man analog zum Vorgang für den Harmonischen Oszillator eine kanonische Transformation mit der erzeugenden Funktion ([24], Kap. 2.24)

$$F_1(z, q, t) = \frac{1}{2} \omega z^2 \cot q$$

durch, so erhält man die folgenden beiden Beziehungen für den Wechsel auf Wirkungs- und Winkel-Variablen

$$\begin{aligned} z(t) &= \sqrt{\frac{2p}{\omega}} \sin q = \sqrt{\frac{2p}{\sqrt{8}}} \sin q \\ \dot{z}(t) &= \sqrt{2\omega p} \cos q = \sqrt{2\sqrt{8}p} \cos q. \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

In umgekehrter Richtung lauten die invertierten Beziehungen

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{8} z^2 + \frac{1}{\sqrt{8}} \dot{z}^2 \right) \\ q(t) &= \arctan \left(\frac{\sqrt{8} z}{\dot{z}} \right). \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Durch diese kanonische Transformation $(z, \dot{z}) \mapsto (q, p)$ vereinfacht sich die Hamiltonfunktion (4.3.2) zu

$$H(p) = \omega p,$$

sie ist nur mehr von dem kanonischen Impuls p abhängig. Da die dazu kanonisch konjugierte verallgemeinerte Koordinate q nicht mehr explizit vorkommt, stellt sie eine zyklische Variable dar (siehe Definition 7, Seite 14). Das bedeutet, dass im linearisierten Fall („0-te Ordnung“) wegen

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = 0 \quad \Rightarrow \quad p(t) = p_0 = \text{const} \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \omega \quad \Rightarrow \quad q(t) = \omega t + q_0 \end{aligned}$$

die vollständige Lösung auch ohne Hilfe der Störungsrechnung durch

$$\begin{aligned} z(t) &= \sqrt{\frac{p_0}{\sqrt{2}}} \sin(\omega t + q_0) \\ \dot{z}(t) &= 2\sqrt{\sqrt{2}p_0} \cos(\omega t + q_0) \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

gegeben ist. Die Konstanten (q_0, p_0) können dabei mittels Gl. (4.3.4) durch die Anfangsbedingungen $(z_0, \dot{z}_0)$ ausgedrückt werden. Dies sind analytische Lösungen, die für alle Zeiten t mit den Lösungen nach Gl. (4.3.1) identisch sind. Abbildung 4.4 stellt eine typische Trajektorie vor; für andere Anfangsbedingungen als in der Abbildung ändert sich die Amplitude der Schwingungen, die maximale Amplitude bleibt aber immer die selbe. Die Oszillationen wiederholen sich immer streng periodisch mit einer Kreisfrequenz von

$$\omega = \frac{\partial H}{\partial p} = \sqrt{8}$$

unabhängig von den Anfangsbedingungen.

4.3.2. Der allgemeine MacMillan Fall

Ab jetzt soll der allgemeine MacMillan Fall inklusive der nichtlinearen Terme behandelt werden. Die Störungsrechnung dazu setzt auf die in den beiden vorhergehenden Abschnitten vorgestellten Methoden auf, und erweitert sie, wo es notwendig wird. Insbesondere werden für den nichtlinearen Fall (jedoch noch immer mit der Einschränkung $\varepsilon = 0$) Lie-Transformationen verwendet, um die Hamiltonfunktion so zu transformieren, dass sie mit Wirkung-Winkel Variablen darstellbar ist.

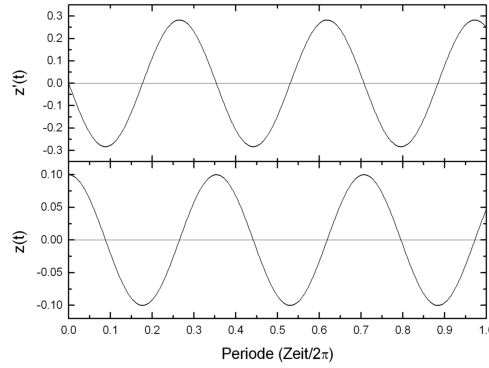


Abbildung 4.4.: Darstellung einer Trajektorie mit Anfangsbedingung $(z(0), \dot{z}(0)) = (0.1, 0.0)$ über eine Periode ($T = 2\pi$) für den linearisierten MacMillan Fall.

Die Hamiltonfunktion

Für die Hamiltonfunktion (2.4.2) des MacMillan Problems wird eine Taylorreihenentwicklung nach der Variable z durchgeführt,

$$H(z, \dot{z}) = \frac{1}{2} \dot{z}^2 - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (2z)^{2k}. \quad (4.3.6)$$

Diese Näherung ist für $|\frac{z}{r}| < 1$ gültig, d. h. für $|z| < \frac{1}{2}$, denn die beiden Polstellen bei $z = \pm \frac{i}{2}$ ($i \in \mathbb{C}$, $i = \sqrt{-1}$) begrenzen ihren Konvergenzradius auf $R = \frac{1}{2}$, haben aber physikalisch keine Bedeutung.

Von dieser unendlichen Reihe werden für die anschließende Lie-Transformation aber höchstens die Glieder bis zur Ordnung z^n mitgenommen, zum Beispiel für $n = 10$

$$H(z, \dot{z}) = \frac{1}{2} \dot{z}^2 - 2 + 4z^2 - 12z^4 + 40z^6 - 140z^8 + 504z^{10} + \mathcal{O}(z^{12}). \quad (4.3.7)$$

Je mehr Terme man betrachtet, umso besser wird natürlich die Übereinstimmung mit der wahren Hamiltonfunktion.

Da aber der Konvergenzradius der Reihe in Gleichung (4.3.6) nur $R = \frac{1}{2}$ ist, folgt, dass auch die Ergebnisse der Lie-Transformation nur für den Bereich $|z| < \frac{1}{2}$ anwendbar sind.

Der Arbeit von Hagel & Trenkler [13] folgend, ist eine Approximation des Potentialterms der ursprünglichen Hamiltonfunktion

$$U(z) = \left(\frac{1}{4} + z^2 \right)^{-1/2}$$

durch *Chebyshev Polynome* (auch Tschebyscheff Polynome) der bessere Weg – der Konvergenzradius wird auf den Bereich bis $|z| < 1$ erweitert. Diese Methode hat den Vorteil,

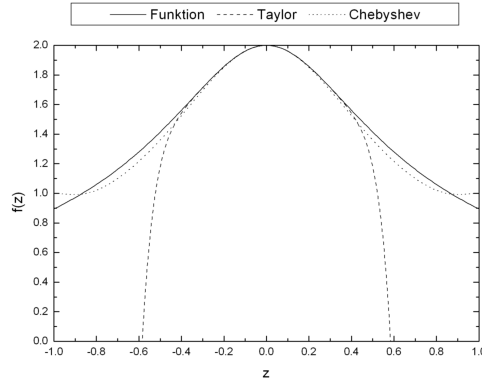


Abbildung 4.5.: Die Potentialfunktion des MacMillan Problems $U(z) = (1/4 + z^2)^{-1/2}$ und ihre Näherungen: die Taylorreihe bis zur Ordnung z^{10} mit Konvergenzradius $R = \frac{1}{2}$ um $z_0 = 0$, sowie die Approximation durch Chebyshev Polynome, ebenfalls bis zur Ordnung z^{10} .

dass sie – im Gegensatz zu der Taylorreihe – auch für $|z| > \frac{1}{2}$ die ursprüngliche Funktion noch gut annähert. Mittels dem in Anhang B.2 erläuterten Verfahren wird die Potentialfunktion $U(z)$ durch Chebyshev Polynome dargestellt.

Wegen der Symmetrie der Funktion $U(z)$ (siehe Abbildung 4.5) werden alle ungeraden Koeffizienten $c_{2n+1} = 0$, und nur die geraden Koeffizienten tragen zur Reihe bei. Für die Koeffizienten bis z^6 existieren analytische Lösungen für die Integrale, erst danach müssen sie mit Mathematica numerisch bestimmt werden. Mit auf ganze Zahlen gerundeten Koeffizienten folgt als Näherung für die Hamiltonfunktion

$$H(z, \dot{z}) = \frac{1}{2} \dot{z}^2 - 2 + 4z^2 - 8z^4 + 11z^6 - 9z^8 + 3z^{10} + \mathcal{O}(z^{12}), \quad (4.3.8)$$

welche für $|z| < 1$ gültig ist. Die Abbildung 4.5 zeigt das Verhalten der beiden Näherungen (4.3.7) und (4.3.8).

Für den ungestörten Anteil der Hamiltonfunktion wird die selbe kanonische Transformation (4.3.4) auf die neuen Variablen (q, p) wie im linearisierten Fall durchgeführt. Nach Vereinfachung der auftretenden trigonometrischen Funktionen werden durch den dimensionslosen Störparameter λ^k alle Terme zusammengefasst, die von dem $(k+1)$ -sten Term der Reihe (4.3.6) stammen. Danach besitzt die Hamiltonfunktion $H = H(q, p, \lambda)$ die Gestalt eines Polynoms in der Variable λ mit Koeffizienten als Funktionen von q und p .

Für die Lie-Transformationen wird zu den Hamiltonfunktionen (4.3.7) und (4.3.8) jeweils der konstante Wert 2 addiert, sodass tatsächlich

$$\bar{H}(q, p, \lambda) = H(q, p, \lambda) + 2$$

betrachtet wird. Diese Modifikation ändert jedoch nicht die Eigenschaften der transformierten Funktionen, da der konstante Term – bedingt durch die partiellen Ableitungen in den Poissonklammern – ohnedies stets vernachlässigbar wäre.

Das folgende Beispiel verdeutlicht die Form der Hamiltonfunktion nach ihrer Entwicklung bis zu dem nichtlinearen Term ($\mathcal{O}(z^6)$)

$$H(q, p, \lambda) = 2\sqrt{2}p + \lambda \left(-\frac{9}{4}p^2 + 3p^2 \cos(2q) - \frac{3}{4}p^2 \cos(4q) \right) + \mathcal{O}(\lambda^2).$$

Die Funktionen `mcmHamiltonianTSeries` und `mcmHamiltonianCSeries` aus dem Package `utilfunc.m` gestatten die Aufstellung der Hamiltonfunktion für die Lie-Transformation für eine beliebige Ordnung in λ , dabei kommt wahlweise eine der beiden vorgestellten Methoden zum Einsatz.

Lie-Transformation für die Hamiltonfunktion

Die Kamiltonfunktion nach der Lie-Transformation bis zur 8. Ordnung in λ lautet

$$\begin{aligned} K(P, \lambda) = & -2 + 2\sqrt{2}P - \frac{9}{4}\lambda P^2 + \frac{47}{32\sqrt{2}}\lambda^2 P^3 - \frac{125}{1024}\lambda^3 P^4 - \frac{3777}{16384\sqrt{2}}\lambda^4 P^5 + \\ & + \frac{9065}{131072}\lambda^5 P^6 + \frac{122209}{2097152\sqrt{2}}\lambda^6 P^7 - \frac{5126931}{134217728}\lambda^7 P^8 - \\ & - \frac{48837125}{4294967296\sqrt{2}}\lambda^8 P^9 + \mathcal{O}(\lambda^9). \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

Offensichtlich ist die Kamiltonfunktion frei von allen Winkelvariablen Q_i , da diese im Verlauf der Lie-Transformation vollständig eliminiert werden können. Damit sind alle Q_i zyklische Koordinaten, und für die P_i gilt deshalb

$$\frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0,$$

sodass sie zeitlich konstante Größen und durch die Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt $t = 0$ eindeutig bestimmt sind. Die Integrabilität des MacMillan Problems drückt sich also dadurch aus, dass durch die Lie-Transformation eine Kamiltonfunktion gefunden wird, welche nur aus den zeitlich konstanten Wirkungsvariablen besteht.

In Abbildung 4.6 wird verglichen, wie gut die Übereinstimmung der transformierten mit der tatsächlichen Hamiltonfunktion wirklich ist. Es wurde schon darauf hingewiesen, dass der Wert für H in Gl. (2.4.2) für gegebenes $(z(0), \dot{z}(0))$ eine Konstante ist, und ebenso muss das für den Wert von K in Gl. (4.3.9) gelten. Für den Vergleich wird die Kamiltonfunktion über die inverse Lie-Transformation von den Variablen (P, Q) auf (p, q) zurück transformiert, anschließend werden diese über die Beziehung (4.3.4) durch die verwendeten Koordinaten $(z, \dot{z})$ ausgedrückt. Der dekadische Logarithmus der Differenz $|H - K|$ wird dann über einem Gitter von Anfangsbedingungen aufgetragen. Der in der Abbildung gezeigte Ausschnitt ist auch repräsentativ für die weiteren drei Sektoren des

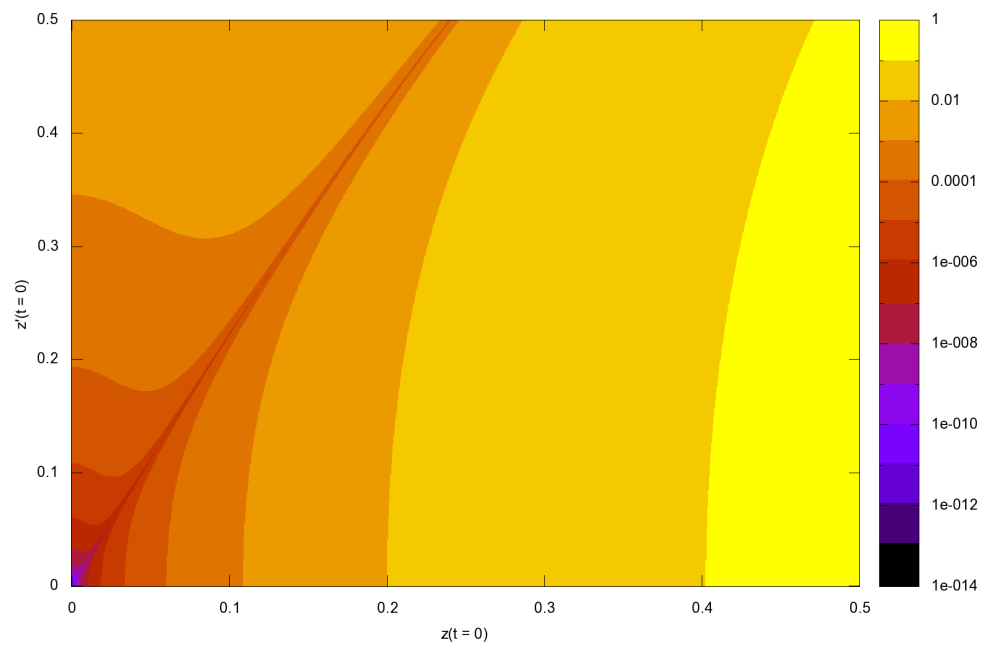


Abbildung 4.6.: Vergleich der ursprünglichen Hamiltonfunktion H mit der lie-transformierten Hamiltonfunktion K . Für 500×500 Anfangsbedingungen $(z(t=0), \dot{z}(t=0))$ wird die absolute Differenz $\log_{10}|H - K|$ aufgetragen.

Phasenraumes, da die Hamiltonfunktion (2.4.2) invariant gegenüber Vorzeichenwechsel $z \mapsto -z$ und $\dot{z} \mapsto -\dot{z}$ ist.

Aus den numerischen Untersuchungen ist bekannt, dass im MacMillan Fall die Amplituden der Schwingungen immer konstant bleiben. Mit der vorliegenden analytischen Lösung ist der Grund hierfür ersichtlich, denn die maximalen Amplituden sind allein durch die Wirkungsvariablen P_i bestimmt.

Die Kreisfrequenz der Bewegung ist durch

$$\begin{aligned} \omega = \frac{\partial K}{\partial P} = & 2\sqrt{2} - \frac{9}{2}\lambda P + \frac{141}{32\sqrt{2}}\lambda^2 P^2 - \frac{125}{256}\lambda^3 P^3 - \frac{18885}{16384\sqrt{2}}\lambda^4 P^4 + \\ & + \frac{27195}{65536}\lambda^5 P^5 + \frac{855463}{2097152\sqrt{2}}\lambda^6 P^6 - \frac{5126931}{16777216}\lambda^7 P^7 - \\ & - \frac{439534125}{4294967296\sqrt{2}}\lambda^8 P^8 + \mathcal{O}(\lambda^9) \end{aligned}$$

gegeben, sie hängt nicht von der Zeit ab.

Die Abbildungen 4.7 – 4.10 zeigen Trajektorien für einige ausgewählte Fälle im MacMillan Fall. Der direkte Vergleich der Ergebnisse von Chebyshev und Taylor Approximation in den Abb. 4.7 und 4.8 fällt zugunsten letzterer aus. Bei niedriger Ordnung der Lie-Transformation – und damit gleichzeitig niedriger Approximationsordnung durch Chebyshev Polynome – sind die Abweichungen der Taylorreihe um zwei Größenordnungen geringer. Doch während eine höhere Ordnung der Lie-Transformation eine Verkleinerung des Fehlers bei der Chebyshev Approximation bewirkt, hat sie auf die Taylor Approximation bei kleinen Anfangsauslenkungen fast keine Auswirkung.

Bei größerer Anfangsauslenkung – wie in den Abb. 4.9 und 4.10 – erreicht der Fehler schon nach wenigen Umläufen der Primärkörper die Größenordnung der Auslenkung, die Methode stößt an ihre Grenzen. Dennoch ist auch hier ein Unterschied festzustellen: Die lie-transformierte Hamiltonfunktion basierend auf der Taylor Approximation weist zwar ebenfalls eine Phasenverschiebung auf, welche jedoch viel schwächer als im Fall der Chebyshev basierten Approximation ist, und teilweise – siehe Abb. 4.10 rechts für die 8. Ordnung – erst nach 100 und mehr Perioden zu der maximalen Abweichung führt.

Obwohl in Abbildung 4.5 die Chebyshev Näherung den Verlauf der Potentialfunktion auch für $|z| > \frac{1}{2}$ gut wiedergibt, kann sie im Wertebereich, der für die Lie-Transformation wichtig ist, nicht mit der Taylor Näherung mithalten. Erst mit deutlich mehr als den 8 verwendeten Approximationstermen könnte die Chebyshev Näherung mit der Taylor Näherung gleichziehen, dazu muss aber auch die Lie-Transformation zu höheren Ordnungen fortgesetzt werden.

Eine höhere Ordnung der Lie-Transformation bewirkt im MacMillan Fall also, dass die Phasenverschiebung geringer wird, d. h. der überwiegende Teil der Abweichungen zur numerischen Lösung geht auf die Rücktransformation auf die ursprüngliche Winkelvariable $q(t)$ zurück, während die Amplituden durch die ursprüngliche Wirkungsvariable $p(t)$ besser bestimmt werden.

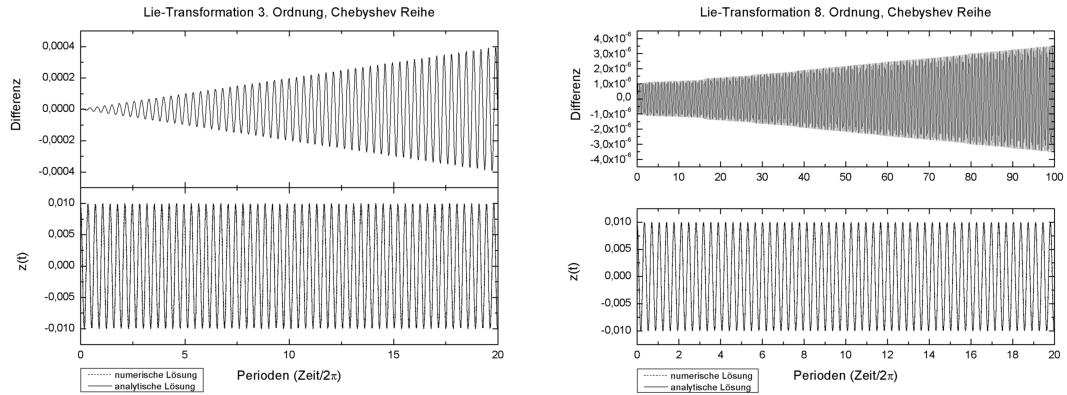


Abbildung 4.7.: Trajektorien für die Anfangsbedingungen $(z(0), \dot{z}(0)) = (0.01, 0.0)$ nach der Chebyshev Lösung (unten) in verschiedenen Ordnungen und die Differenz zur numerischen Lösung (oben) aufgetragen über mehrere Umläufe der Primärkörper.

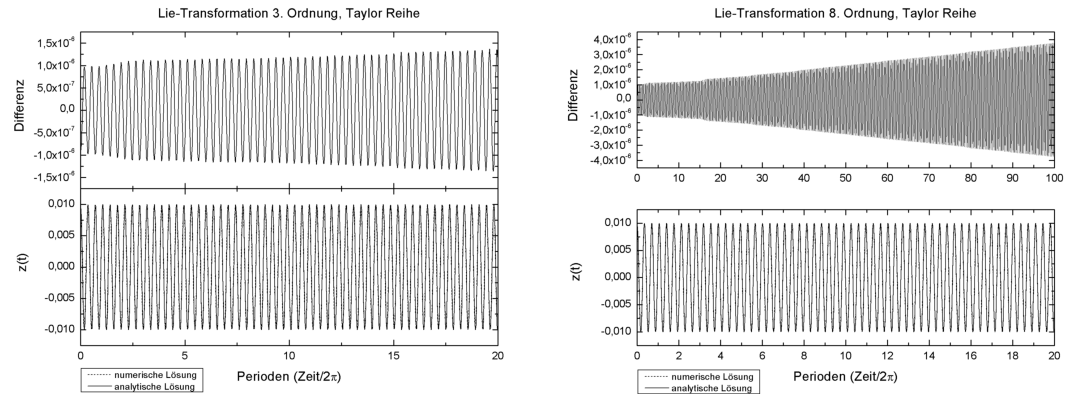


Abbildung 4.8.: Trajektorien für die Anfangsbedingungen $(z(0), \dot{z}(0)) = (0.01, 0.0)$ nach der Taylor Lösung (unten) in verschiedenen Ordnungen und die Differenz zur numerischen Lösung (oben) aufgetragen über mehrere Umläufe der Primärkörper.

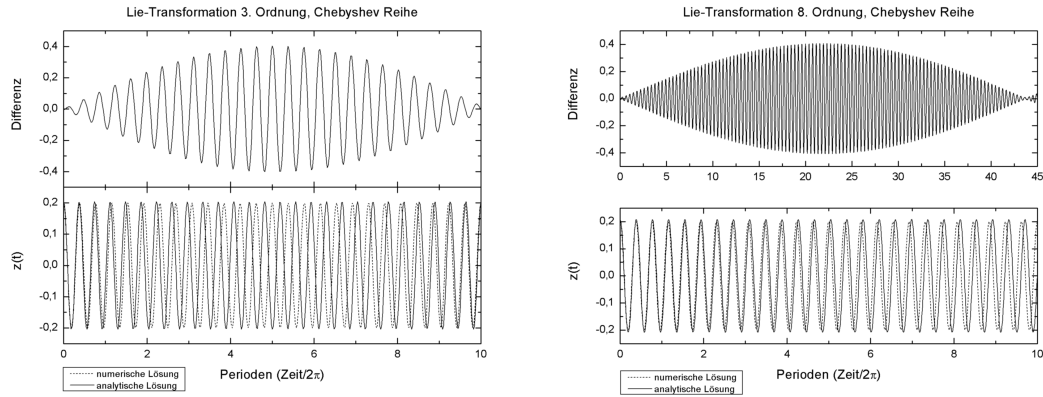


Abbildung 4.9.: Trajektorien für die Anfangsbedingungen $(z(0), \dot{z}(0)) = (0.20, 0.0)$ nach der Chebyshev Lösung (unten) in verschiedenen Ordnungen und die Differenz zur numerischen Lösung (oben) aufgetragen über mehrere Umläufe der Primärkörper.

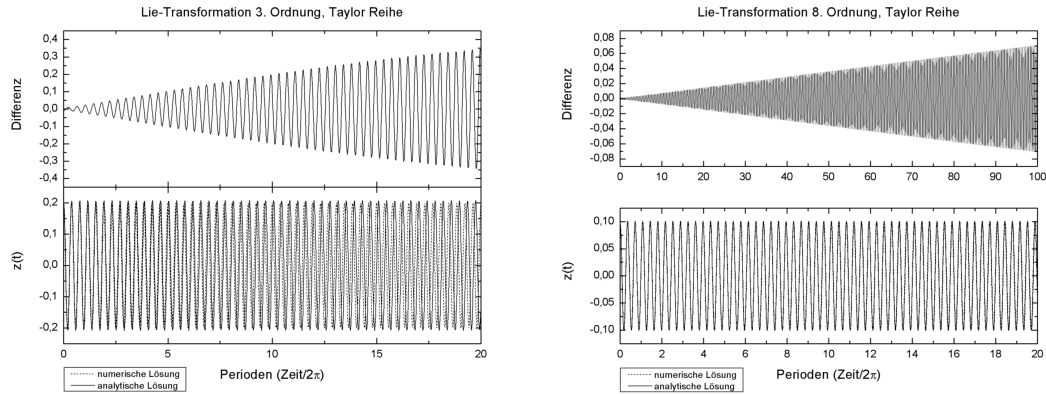


Abbildung 4.10.: Trajektorien für die Anfangsbedingungen $(z(0), \dot{z}(0)) = (0.20, 0.0)$ (links unten) bzw. $(0.10, 0.0)$ (rechts unten) nach der Taylor Lösung für verschiedene Ordnungen und jeweils die Differenz zur numerischen Lösung (oben) aufgetragen über mehrere Umläufe der Primärkörper.

4.4. Störungsrechnung für das Sitnikov Problem

Für das Sitnikov Problem ist die Hamiltonfunktion nicht mehr autonom, da explizit der zeitabhängige Abstand $r(t)$ der Primärkörper vom Schwerpunkt des Systems in der Gleichung auftritt. Dies erfordert, die Zeit t als weitere Winkelvariable zu betrachten (wegen der periodischen Vorgänge bei der Bewegung der Primärkörper). Durch eine Erweiterung des Phasenraumes um die Winkelvariable $q_2 = t$ und die dazu konjugierte Impulsvariable p_2 handelt sich nunmehr um ein System mit zwei Freiheitsgraden, $H = H(q_1, q_2, p_1, p_2)$.

Um die Hamiltonfunktion aufzustellen, benötigt man zunächst den Abstand $r(t)$ als eine Potenzreihe des Störparameters des Systems – der Exzentrizität ε .

4.4.1. Reihendarstellung für den Radius

Der zeitabhängige Radius $r(t)$ kann als *bivariates Polynom* (zweidimensionales Polynom) in den Variablen (t, ε) dargestellt werden.

In Gleichung (3.1.3) wurde $r(t)$ als Reihe nach aufsteigenden Vielfachen der Variable M dargestellt. Von dieser Gleichung ausgehend, geben Stumpff [30], Kap. VII.58, und Hagel [11] ein Verfahren an, den Radius auch durch Potenzen von ε auszudrücken. Die Koeffizienten $r_n(t)$ dieser Reihe sind Funktionen der Zeit, da die mittlere Anomalie wegen $M = t$ direkt durch die Zeit t ersetzt werden kann. Dazu werden die Besselfunktionen in (3.1.3) durch ihre entsprechenden Potenzreihen nach Gleichung (3.1.4) dargestellt, und die Reihenglieder so umgestellt, dass eine Potenzreihe der Art

$$r(t, \varepsilon) = \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} r_n(t) \varepsilon^n \right)$$

entsteht, die für $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_c \approx 0.663$ gültig ist.

Zum Beispiel lautet die Reihe bis zur 6. Ordnung in ε

$$\begin{aligned} r(t, \varepsilon) = & \frac{1}{2} \left[1 - \varepsilon \cos t + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2t) \right) + \right. \\ & + \varepsilon^3 \left(\frac{3}{8} \cos t - \frac{3}{8} \cos(3t) \right) + \varepsilon^4 \left(\frac{1}{3} \cos(2t) - \frac{1}{3} \cos(4t) \right) + \\ & \left. + \varepsilon^5 \left(-\frac{5}{192} \cos t + \frac{45}{128} \cos(3t) - \frac{125}{384} \cos(5t) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^6) \right]. \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

Bei der Entwicklung der Hamiltonfunktion (2.3.3) werden aber Ausdrücke der Form z^{2n}/r^{2n+1} benötigt, deshalb wird eine Reihenentwicklung für die verschiedenen negativen Potenzen für den Radius (4.4.1) genutzt.

Als ein Beispiel lautet die Reihe für $1/r$ bis zur 4. Ordnung in ε

$$\begin{aligned} r(t, \varepsilon)^{-1} = & 2 + 2\varepsilon \cos t + 2\varepsilon^2 \cos(2t) + \\ & + \varepsilon^3 \left(-\frac{1}{4} \cos t + \frac{9}{4} \cos(3t) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^4). \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

Ebenso wie für $r(t, \varepsilon)^{-1}$ kann auch für jeden Ausdruck $r(t, \varepsilon)^{-n}$ eine entsprechende Reihe bestimmt werden.

Mittels der Funktion `RadiusSeries` aus `utilfunc.m` ist es möglich, für beliebige Ordnungen in ε die entsprechenden Reihen für positive und negative Potenzen aufzustellen, was zur Bestimmung der Hamiltonfunktion des Sitnikov Problems unerlässlich ist.

4.4.2. Der linearisierte Sitnikov Fall

Bei der Entwicklung der Hamiltonfunktion des Sitnikov Problems spielen nun zwei Faktoren wesentliche Rollen: die Entwicklungsordnungen der Reihe nach den Variablen z und ε .

Für die Exzentrizität besteht die Beschränkung $|\varepsilon| < 0.663$; dabei bedeuten negative Exzentrizitäten nach Hagel [11], dass die Primärkörper in ihrer Apozentrumskonfiguration starten, d. h. bei ihrem größtmöglichen gegenseitigen Abstand $r_{\max} = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon)$, während positive Exzentrizitäten der Perizentrumskonfiguration mit minimalem gegenseitigem Abstand $r_{\min} = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon)$ entsprechen. Für die weitere Arbeit wird stets nur die letztere Konfiguration der Primärkörper verwendet – Startposition im geringsten Abstand zueinander –, obwohl bekannt ist, dass in diesem Fall die Bewegung des masselosen Körpers weniger stabil ist.

Für die maximale Auslenkung z des betrachteten Körpers muss ebenfalls die Einschränkung gelten, dass $|z| < r_{\min}$ bleiben soll. Das hat zur Folge, dass für steigende Exzentrizität der Gültigkeitsbereich schrumpft.

Um die beiden Freiheitsgrade der Entwicklung einzuschränken, beschränken wir uns zunächst darauf, den „linearisierten“ Fall in z zu untersuchen, und das Verhalten für verschiedene Exzentrizitäten zu studieren. Der Begriff „linearisierter“ Sitnikov Fall bezieht sich auf die Differentialgleichung, denn die Hamiltonfunktion enthält keinen linearen Term in der Variable z , gemeint ist hier eine Entwicklung bis zum Term z^2 und die Vernachlässigung aller höherer Potenzen.

Die Hamiltonfunktion

Die Entwicklung von (2.3.3) in niedrigster Ordnung nach z ergibt

$$H(z, \dot{z}, t) = \frac{1}{2}\dot{z}^2 - r^{-1} + \frac{1}{2}z^2 r^{-3} + \mathcal{O}(z^4). \quad (4.4.3)$$

Nach Einsetzen der Entwicklung (4.4.2) für $r(t, \varepsilon)$ und Durchführung der kanonischen Transformation, die analog zu Gleichung (4.3.3) definiert ist,

$$\begin{aligned} z(t) &= \sqrt{\frac{2p_1}{\sqrt{8}}} \sin q_1 \\ \dot{z}(t) &= \sqrt{2\sqrt{8}p_1} \cos q_1 \\ t &= q_2 \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

auf die neuen Variablen (q_1, q_2, p_1) lautet die tatsächlich betrachtete Hamiltonfunktion $\bar{H}(q_1, q_2, p_1, p_2) = H(q_1, q_2, p_1) + p_2$ bis zu $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$ in der Exzentrizität

$$\begin{aligned} H(q_1, q_2, p_1, p_2) = & 2\sqrt{2}p_1 + p_2 + \lambda\varepsilon \left[-\frac{3}{\sqrt{2}}p_1 \cos(2q_1 - q_2) - \frac{3}{\sqrt{2}}p_1 \cos(2q_1 + q_2) - \right. \\ & - 2 \cos q_2 + 3\sqrt{2}p_1 \cos q_2 \left. \right] + \lambda^2 \varepsilon^2 \left[\frac{3}{\sqrt{2}}p_1 - \frac{3}{\sqrt{2}}p_1 \cos(2q_1) - \right. \\ & - \frac{9}{2\sqrt{2}}p_1 \cos(2q_1 - 2q_2) - \frac{9}{2\sqrt{2}}p_1 \cos(2q_1 + 2q_2) - 2 \cos(2q_2) + \\ & \left. + \frac{9}{\sqrt{2}}p_1 \cos(2q_2) \right] + \mathcal{O}(\lambda^3). \end{aligned}$$

Selbstverständlich können für die Hamiltonfunktion auch höhere Ordnungen in (z, ε) berücksichtigt werden, dazu dient die Funktion `zglHamiltonianSeries`.

Lie-Transformation der Hamiltonfunktion

Die gegebene Hamiltonfunktion wurde bis zur 8. Ordnung in der Exzentrizität ε transformiert. Die resultierende vereinfachte Hamiltonfunktion ist bis zu dieser Ordnung frei von allen Winkelvariablen (Q_1, Q_2) , womit die Wirkungsvariablen (P_1, P_2) wieder zeitlich konstant sind. Interessant ist, dass nur Terme mit geraden Potenzen der Exzentrizität übrig bleiben,

$$\begin{aligned} K(P_1, P_2, \lambda) = & -2 + 2\sqrt{2}P_1 + P_2 + P_1 \left[\frac{21}{31\sqrt{2}}\lambda^2 \varepsilon^2 + \frac{89607}{238328\sqrt{2}}\lambda^4 \varepsilon^4 + \right. \\ & \left. + \frac{5468897217}{21071055136\sqrt{2}}\lambda^6 \varepsilon^6 + \frac{1476024060247065}{7451736506736128\sqrt{2}}\lambda^8 \varepsilon^8 + \mathcal{O}(\lambda^9) \right]. \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

Der Vergleich der Störungslösungen mit den numerisch integrierten Trajektorien in den Abbildungen 4.11 – 4.14 zeigt für kleine Exzentrizitäten gute Übereinstimmung, der Fehler ist hier moderat und erreicht nach 20 Perioden der Primärkörper maximal 10% der Ausgangsamplitude. Bei höheren Exzentrizitäten ab $\varepsilon \geq 0.2$ sind die Abweichungen von Anfang an bedeutend, denn die Amplituden der Schwingungen sind immer zu niedrig, dies ist eine Konsequenz der vernachlässigten Beiträge höherer Ordnungen in z . Abgesehen von den Amplituden kann die Schwingungsperiode aber gut beschrieben werden, anhand der Abbildungen sieht man deutlich die Korrelation der Differenz von numerischer und analytischer Lösung mit der Form der Trajektorie, sodass über so kurze Zeiträume keine Frequenzverschiebung feststellbar ist.

4.4.3. Der allgemeine Sitnikov Fall

Die Hamiltonfunktion

Eine durch `zglHamiltonianSeries[6, 6]` erzeugte Hamiltonfunktion berücksichtigt Terme bis $\mathcal{O}(z^{16}, \varepsilon^7)$, sie geht für $\varepsilon \rightarrow 0$ in die entsprechende Hamiltonfunktion für das

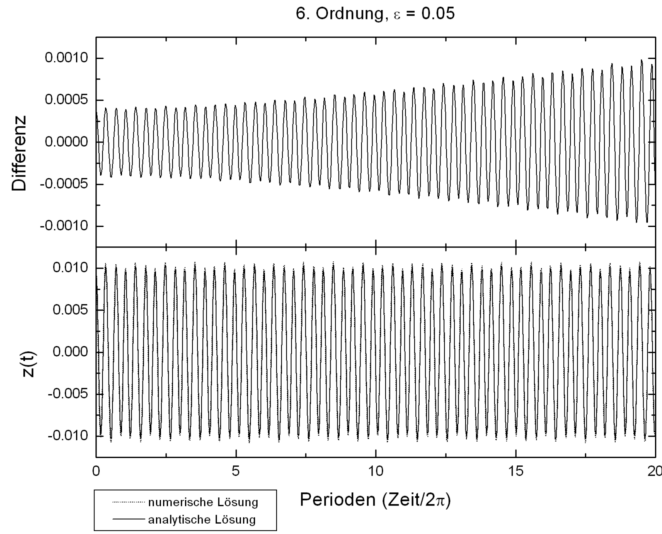


Abbildung 4.11.: Trajektorie mit den Anfangsbedingungen $(z(0), \dot{z}(0)) = (0.01, 0.0)$ für eine Exzentrizität von $\varepsilon = 0.05$ und die Differenz zur numerischen Lösung aufgetragen über mehrere Umläufe der Primärkörper.

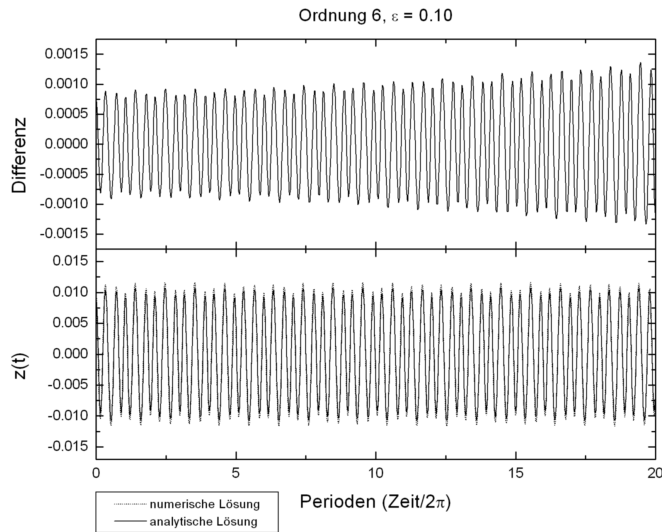


Abbildung 4.12.: Trajektorie mit den Anfangsbedingungen $(z(0), \dot{z}(0)) = (0.01, 0.0)$ für eine Exzentrizität von $\varepsilon = 0.10$ und die Differenz zur numerischen Lösung aufgetragen über mehrere Umläufe der Primärkörper.

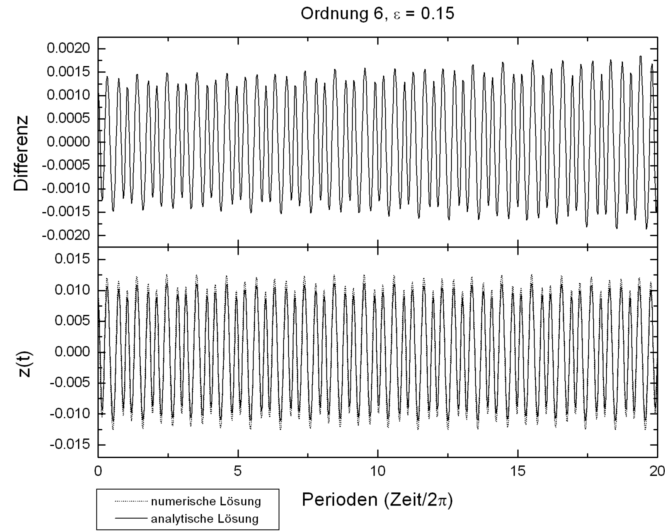


Abbildung 4.13.: Trajektorie mit den Anfangsbedingungen $(z(0), \dot{z}(0)) = (0.01, 0.0)$ für eine Exzentrizität von $\varepsilon = 0.15$ und die Differenz zur numerischen Lösung aufgetragen über mehrere Umläufe der Primärkörper.

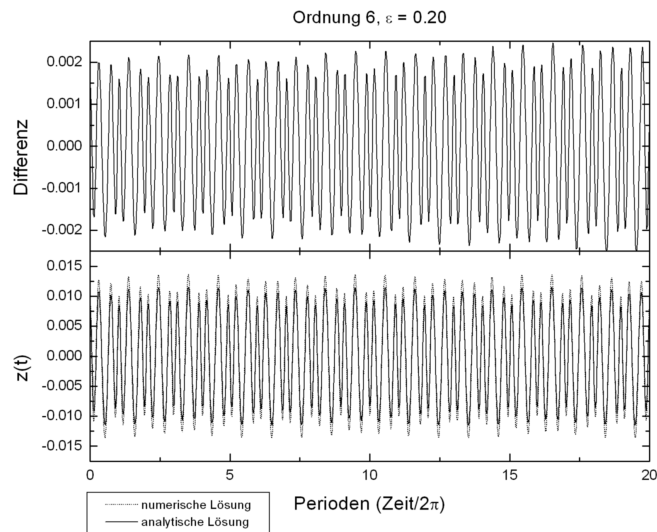


Abbildung 4.14.: Trajektorie mit den Anfangsbedingungen $(z(0), \dot{z}(0)) = (0.01, 0.0)$ für eine Exzentrizität von $\varepsilon = 0.20$ und die Differenz zur numerischen Lösung aufgetragen über mehrere Umläufe der Primärkörper.

MacMillan Problem über. Die bisher im linearisierten Fall vernachlässigten gemischten Terme $z^m \varepsilon^n$ ($m, n \in \mathbb{N}_0$) inkludiert, besteht die Hamiltonfunktion bis $\mathcal{O}(\lambda^7)$ aus 272 verschiedenen Termen, die zu transformieren sind, weshalb sie hier nicht dargestellt werden kann.

Lie-Transformation der Hamiltonfunktion

Für die erwähnte Hamiltonfunktion wurde die Lie-Transformation bis zur 6. Ordnung ausgeführt, die folgende Gleichung stellt die erhaltene Kamiltonfunktion dar, ergänzt um einige Terme höherer Ordnung ($\mathcal{O}(\lambda^7)$, $\mathcal{O}(\lambda^8)$), wie sie bereits aus den Gleichungen (4.3.9) und (4.4.5) bekannt sind.

$$\begin{aligned}
 K(P_1, P_2, \lambda) = & -2 + 2\sqrt{2}P_1 + P_2 - \frac{9}{4}P_1^2\lambda + \left(\frac{21}{31\sqrt{2}}\varepsilon^2 P_1 + \frac{47}{32\sqrt{2}}P_1^3 \right) \lambda^2 \\
 & - \left(\frac{8919}{7688}\varepsilon^2 P_1^2 + \frac{125}{1024}P_1^4 \right) \lambda^3 + \frac{9065}{131072}P_1^6 \lambda^5 - \frac{5126931}{134217728}P_1^8 \lambda^7 \\
 & + \left(\frac{89607}{238328\sqrt{2}}\varepsilon^4 P_1 + \frac{658044831}{484282496\sqrt{2}}\varepsilon^2 P_1^3 - \frac{3777}{16384\sqrt{2}}P_1^5 \right) \lambda^4 \\
 & + \left(\frac{5468897217}{21071055136\sqrt{2}}\varepsilon^6 P_1 + \frac{122209}{2097152\sqrt{2}}P_1^7 \right) \lambda^6 \\
 & + \left(\frac{1476024060247065}{7451736506736128\sqrt{2}}\varepsilon^8 P_1 - \frac{48837125}{4294967296\sqrt{2}}P_1^9 \right) \lambda^8 + \mathcal{O}(\lambda^9)
 \end{aligned} \tag{4.4.6}$$

Die erzeugende Funktion $W(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ der Transformation enthält durchgehend Terme der Art $\sin(n_1 Q_1 + n_2 Q_2)$ für positive oder negative ganze Zahlen n_1, n_2 . Diese Frequenzkombinationen bestimmen wesentlich die Anzahl der gemischten Terme, denn in jeder Ordnung kommen zu den Grundfrequenzen in W_1 weitere Frequenzen dazu. Diese verteilen sich aber nicht gleichmäßig, sondern – wie in Abbildung 4.15 zu sehen ist – nur entlang der positiven Q_1 -Achse ($n_1 \geq 0$) und auch nur für gerade Werte von n_1 . Alle Paare $(2kQ_1, 0)$ ($k \in \mathbb{N}$, $k > 0$) entsprechen Frequenzen, wie sie auch im MacMillan Fall auftreten; sie stammen von Termen, welche keine Abhängigkeit von der Exzentrizität besitzen.

Rücktransformation

Durch die Lie-Transformation sind nun die transformierte Hamiltonfunktion (4.4.6) und die erzeugenden Funktionen W_i ($i \geq 1$) bis $\mathcal{O}(\lambda^7)$ vollständig, sowie bis $\mathcal{O}(\lambda^9)$ teilweise bekannt. Als nächsten Schritt soll die Rücktransformation durchgeführt werden. Gemäß Gl. (4.1.8) kann man die ursprünglichen Variablen (q_1, q_2, p_1, p_2) als Funktionen der neuen Variablen (Q_i, P_i) ausdrücken, dabei ist Gl. (4.1.9) behilflich. Analog zu dem Vorgang,

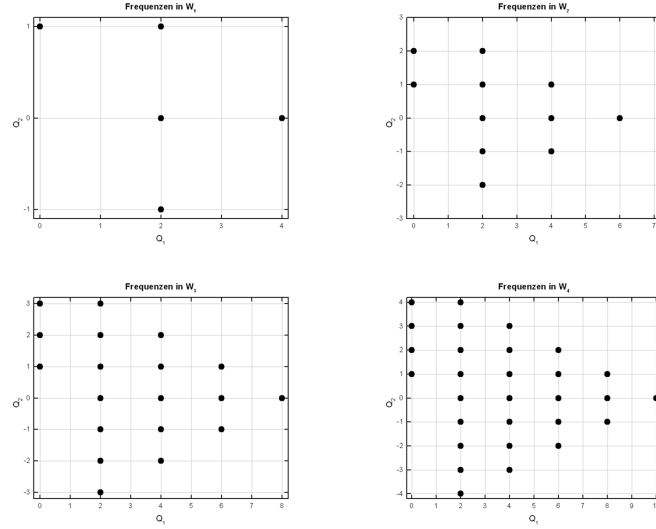


Abbildung 4.15.: Erzeugende Funktionen W_1 (links oben), W_2 (rechts oben), W_3 (links unten) und W_4 (rechts unten) und die in ihnen auftretenden Frequenzpaare (n_1Q_1, n_2Q_2) .

der auf die Gleichungen (4.1.17) führte, findet man jetzt

$$\begin{aligned} q_i &= Q_i + \lambda [Q_i, W_1] + \frac{1}{2} \lambda^2 ([[Q_i, W_1], W_1] + [Q_i, W_2]) + \mathcal{O}(\lambda^3) \\ p_i &= P_i + \lambda [P_i, W_1] + \frac{1}{2} \lambda^2 ([[P_i, W_1], W_1] + [P_i, W_2]) + \mathcal{O}(\lambda^3). \end{aligned}$$

Nach Ausführung der dazu notwendigen Operationen, vor allem die Auswertung der Poissonklammern mit Mathematica bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\lambda^7)$, ergeben sich die nachfolgend angegebenen Beziehungen für (q_1, p_1) , aus Platzgründen allerdings nur bis $\mathcal{O}(\lambda^2)$ dargestellt.

$$\begin{aligned} q_1 &= Q_1 + \lambda \left[\frac{3}{2\sqrt{2}} P_1 \sin(2Q_1) - \frac{3}{16\sqrt{2}} P_1 \sin(4Q_1) + 3\sqrt{2}\varepsilon \sin t \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{12}{31} + \frac{3}{31\sqrt{2}} \right) \varepsilon \sin(2Q_1 - t) - \left(\frac{12}{31} - \frac{3}{31\sqrt{2}} \right) \varepsilon \sin(2Q_1 + t) \right] + \mathcal{O}(\lambda^2) \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

$$\begin{aligned} p_1 &= P_1 + \lambda \left[-\frac{3}{2\sqrt{2}} P_1^2 \cos(2Q_1) + \frac{3}{8\sqrt{2}} P_1^2 \cos(4Q_1) + \left(\frac{24}{31} + \frac{3\sqrt{2}}{31} \right) \varepsilon P_1 \cos(2Q_1 - t) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{24}{31} - \frac{3\sqrt{2}}{31} \right) \varepsilon P_1 \cos(2Q_1 + t) \right] + \mathcal{O}(\lambda^2) \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

Die Lösungen der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$Q_i(t) = \int dt \frac{\partial K}{\partial P_i} + Q_i(0) = \omega t + Q_i(0)$$

$$P_i(t) = - \int dt \frac{\partial K}{\partial Q_i} + P_i(0)$$

sind nur für $i = 1$ interessant, da nur dieses Paar von Variablen für $(z(t), \dot{z}(t))$ in Frage kommt. Die Lösung für P_1 ist einfach die Konstante $P(0)$, während $Q_1(t)$ durch

$$Q_1(t) = Q(0) + t \left[2\sqrt{2} - \frac{9}{2} P_1 \lambda + \left(\frac{21}{31\sqrt{2}} \varepsilon^2 + \frac{141}{32\sqrt{2}} P_1^2 \right) \lambda^2 - \left(\frac{8919}{3844} \varepsilon^2 P_1 + \frac{125}{256} P_1^3 \right) \lambda^3 \right. \\ \left. + \left(\frac{89607}{238328\sqrt{2}} \varepsilon^4 + \frac{1974134493}{484282496\sqrt{2}} \varepsilon^2 P_1^2 - \frac{18885}{16384\sqrt{2}} P_1^4 \right) \lambda^4 \right] \quad (4.4.9)$$

gegeben ist.

Nachdem Gleichung (4.4.9) mit den Gleichungen (4.4.7) und (4.4.8) verknüpft wurde, erhält man die aus der Störungsrechnung gewonnene analytische Lösung für $(z(t), \dot{z}(t))$ durch Einsetzen der gefundenen Ausdrücke in die Gleichung (4.4.4).

Die Ergebnisse der Rücktransformation stellen die Abbildungen 4.16 – 4.21 dar. Mit der durch die Gleichungen (4.4.7), (4.4.8) und (4.4.9) gegebenen Lösung wurden verschiedene Anfangsbedingungen aus dem Bereich $0 < z \leq 0.25$ und $0 < \varepsilon \leq 0.20$ untersucht, jeweils für eine Anfangsgeschwindigkeit von $\dot{z} = 0$ und mit minimalem gegenseitigen Abstand der Primärkörper zum Zeitpunkt $t = 0$.

Für einen Fall wie in Abbildung 4.16, keine nennenswerte Exzentrizität ($\varepsilon = 0.01$) und nur sehr geringe Anfangsamplitude von $z_0 = 0.01$, ist die analytische Lösung in sehr guter Übereinstimmung mit der numerischen Lösung, der Fehler bleibt auch nach über mehr als 100 Perioden kleiner als 1%. Bei Erhöhung sowohl der Exzentrizität als auch der Anfangsamplitude auf das Zehnfache in Abbildung 4.17 tritt jedoch früh eine Phasenverschiebung auf, und auch die Amplituden sind systematisch zu niedrig, obwohl der Verlauf der einhüllenden Kurve der Punkte maximaler Auslenkung mit der numerischen Lösung übereinstimmt.

Ein interessanter Sonderfall in positiver Hinsicht ist in Abbildung 4.18 zu sehen: bei einer Exzentrizität von $\varepsilon = 0.05$ für den relativ hohen Wert von $z_0 = 0.2$ (es muss $z/r < 1$ gelten, $r(t = 0) = 0.475$) beschreibt die analytische Lösung die Trajektorie über einen kurzen Zeitraum (etwa die abgebildeten 20 Perioden) ausgezeichnet. Die Abweichung zur numerischen Lösung ist weniger als 10%, und auch die Amplituden werden bedeutend besser beschrieben, als dies selbst für die gleiche Exzentrizität aber die Wahl $z_0 = 0.1$ der Fall ist.

Bei der Wahl $z_0 = 0.2$ und $\varepsilon = 0.2$ versagt die analytische Lösung, in Abbildung 4.19 ist zu sehen, dass nach nicht einmal einer Periode der Primärkörper bedeutende Abweichungen zur numerischen Lösung bestehen. Analog zum linearisierten Fall (Abb. 4.14) können für solche Exzentrizitäten die Amplituden nicht korrekt beschrieben werden, dazu kommt hier noch eine Phasenverschiebung hinzu.

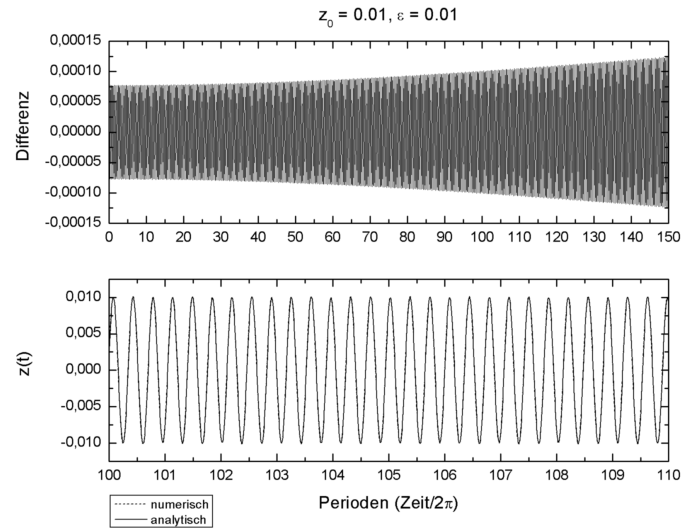


Abbildung 4.16.: Trajektorie mit den Anfangsbedingungen $(z(0), \dot{z}(0)) = (0.01, 0.0)$ für eine Exzentrizität von $\varepsilon = 0.01$ und die Differenz zur numerischen Lösung aufgetragen über mehrere Umläufe der Primärkörper.

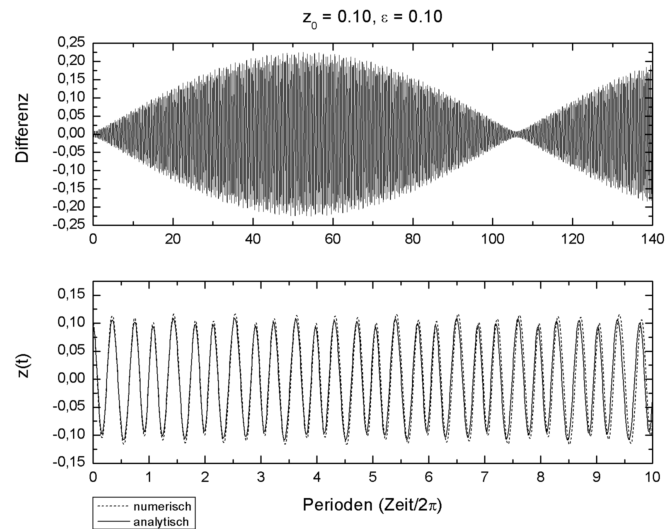


Abbildung 4.17.: Trajektorie mit den Anfangsbedingungen $(z(0), \dot{z}(0)) = (0.10, 0.0)$ für eine Exzentrizität von $\varepsilon = 0.10$ und die Differenz zur numerischen Lösung aufgetragen über mehrere Umläufe der Primärkörper.

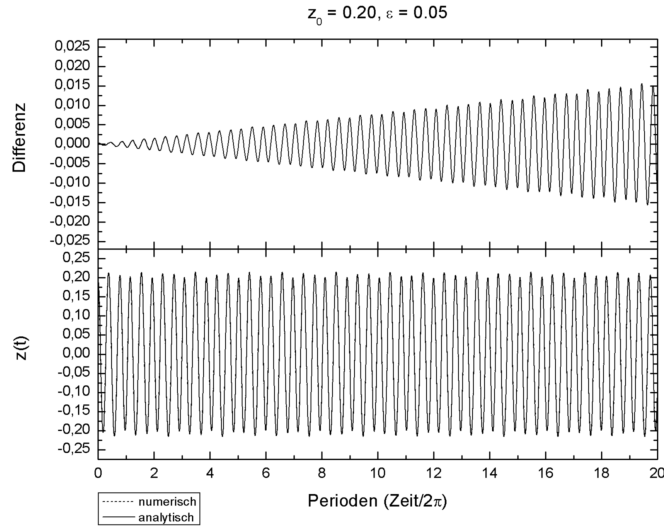


Abbildung 4.18.: Trajektorie mit den Anfangsbedingungen $(z(0), \dot{z}(0)) = (0.20, 0.0)$ für eine Exzentrizität von $\varepsilon = 0.05$ und die Differenz zur numerischen Lösung aufgetragen über mehrere Umläufe der Primärkörper.

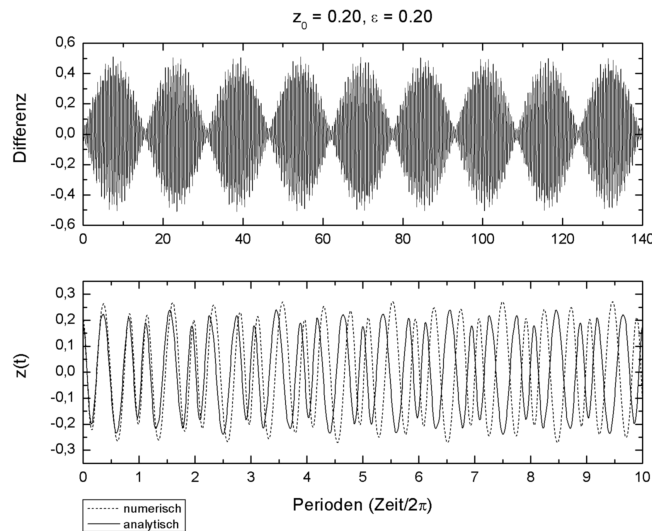


Abbildung 4.19.: Trajektorie mit den Anfangsbedingungen $(z(0), \dot{z}(0)) = (0.20, 0.0)$ für eine Exzentrizität von $\varepsilon = 0.20$ und die Differenz zur numerischen Lösung aufgetragen über mehrere Umläufe der Primärkörper.

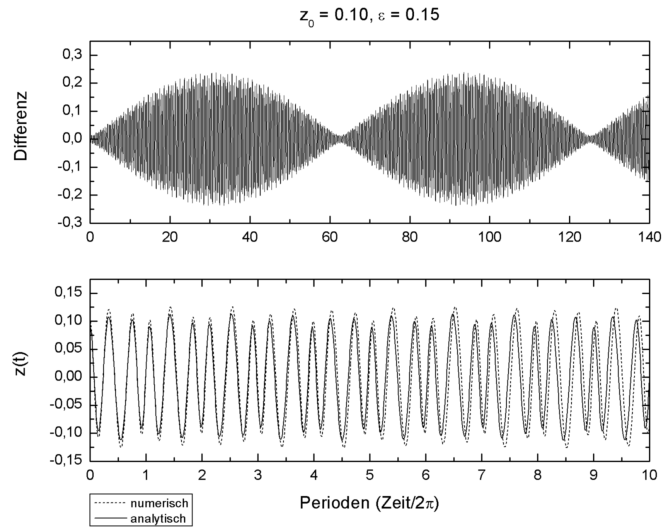


Abbildung 4.20.: Trajektorie mit den Anfangsbedingungen $(z(0), \dot{z}(0)) = (0.10, 0.0)$ für eine Exzentrizität von $\varepsilon = 0.15$ und die Differenz zur numerischen Lösung aufgetragen über mehrere Umläufe der Primärkörper.

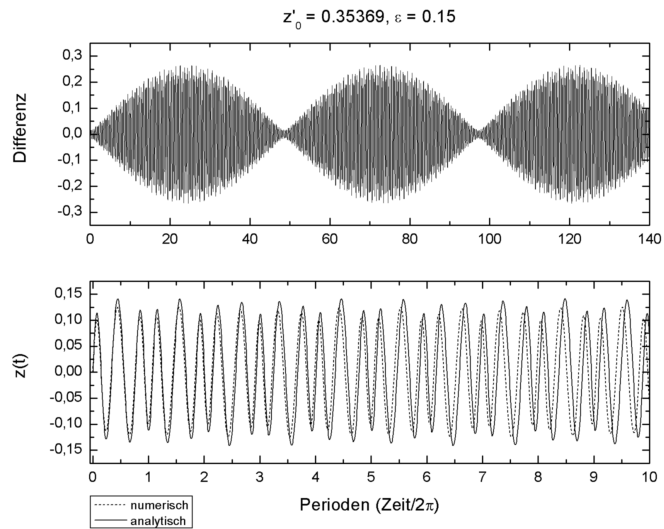


Abbildung 4.21.: Trajektorie mit den Anfangsbedingungen $(z(0), \dot{z}(0)) = (0.0, 0.35367)$ für eine Exzentrizität von $\varepsilon = 0.15$ und die Differenz zur numerischen Lösung aufgetragen über mehrere Umläufe der Primärkörper.

Die Abbildungen 4.20 und 4.21 sollten als ein Paar aufgefasst werden. Während erstere für $\varepsilon = 0.15$ die Anfangsbedingung $(z_0, \dot{z}_0) = (0.1, 0.0)$ zeigt, stellt letztere den zu dem selben Wert der Hamiltonfunktion ($H(t = 0)$) gehörenden Fall $(0.0, 0.35367)$ bei gleicher Exzentrizität dar. Der offensichtlichste Unterschied ist, dass im ersten Fall die Amplituden erneut systematisch zu niedrig sind und die analytische Lösung hinter der numerischen Lösung zurückbleibt, während im anderen Fall die Amplituden systematisch zu hoch sind und die analytische der numerischen Lösungskurve vorausseilt.

Allgemein kann man an den bisher gezeigten Beispielen beobachten, dass mit zunehmender Exzentrizität die Schwebungen in den Differenzenkurven immer kürzere Periodendauern haben. Gut zu beobachten ist das anhand der Abbildungen 4.17 und 4.20, welche die selbe Anfangsbedingung $(z_0, \dot{z}_0) = (0.1, 0.0)$ für $\varepsilon = 0.10$ und $\varepsilon = 0.15$ zeigen. Bereits diese kleine Erhöhung der Exzentrizität reicht aus, um den ersten Schwingungsknoten von ca. 105 auf nur mehr ca. 65 Perioden der Primärkörper zu senken.

4.5. Störungsrechnung für die T-Gleichung

Zum Abschluss soll noch die T-Gleichung untersucht werden, eine von Wodnar [31] hergeleitete alternative Formulierung des Sitnikov Problems.

Der Zweck dieses Abschnittes ist es zu untersuchen, ob die geschlossene Formulierung – die Abhängigkeit von $r(t)$ wurde eliminiert – Vorteile gegenüber der Formulierung als z-Gleichung bietet.

4.5.1. Der allgemeine Fall

Die Hamiltonfunktion

Ausgehend von Gleichung (2.4.5) wird die Potenzreihenentwicklung der Hamiltonfunktion nach den Parametern T und ε gesucht. Die nullte Ordnung kann durch die kanonische Transformation

$$\begin{aligned} T(\varphi) &= \sqrt{\frac{2p_1}{\sqrt{8}}} \sin q_1 \\ T'(\varphi) &= \sqrt{2\sqrt{8}p_1} \cos q_1 \\ \varphi &= q_2 \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

auf die Form eines Harmonischen Oszillators gebracht werden, d. h.

$$H_0 = 2\sqrt{2}p_1 + p_2.$$

Das System ist zweidimensional, die Hamiltonfunktion in den Variablen (q_1, q_2, p_1, p_2) wird für die Zwecke der Lie-Transformation durch die Funktion `tglHamiltonianSeries` erstellt. Die gefundene Hamiltonfunktion bis zur 4. Ordnung in λ , d. h. $\mathcal{O}(T^{12}, \varepsilon^5)$, hat Ähnlichkeit zur Hamiltonfunktion der z-Gleichung, wenn auch gewisse Koeffizienten der

gemischten Terme $T^m \varepsilon^n$ differieren. Es wurde auch überprüft, dass für $\varepsilon \rightarrow 0$ die gefundene Hamiltonfunktion tatsächlich in die korrekte Hamiltonfunktion für den MacMillan Fall übergeht.

Da in Gleichung (2.4.5) in Analogie zu (2.4.2) ebenfalls ein Term der Art

$$\left(\frac{1}{4} + T^2\right)^{-1/2}$$

vorkommt, wäre es möglich diesen durch Chebyshev Polynome zu approximieren, doch nach den Erfahrungen im MacMillan Fall bleibt die Taylorreihe die erste Wahl.

Lie-Transformation der Hamiltonfunktion

Nach Ausführung der Lie-Transformation und Elimination der Terme mit Winkelvariablen (Q_1, Q_2) bleibt die folgende Kamiltonfunktion (transformierte Hamiltonfunktion) übrig

$$\begin{aligned} K(P_1, P_2, \lambda) = & -2 + 2\sqrt{2}P_1 + P_2 - \frac{9}{4}P_1^2\lambda + \left(-\varepsilon^2 + \frac{21}{31\sqrt{2}}\varepsilon^2 P_1 + \frac{47}{32\sqrt{2}}P_1^3\right)\lambda^2 \\ & - \left(\frac{135}{3844}\varepsilon^2 P_1^2 + \frac{125}{1024}P_1^4\right)\lambda^3 + \left(-\frac{3}{4}\varepsilon^4 + \frac{89607}{238328\sqrt{2}}\varepsilon^4 P_1 - \right. \\ & \left. - \frac{53245085}{484282496\sqrt{2}}\varepsilon^2 P_1^3 - \frac{3777}{16384\sqrt{2}}P_1^5\right)\lambda^4 + \mathcal{O}(\lambda^5). \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

Im direkten Vergleich zu Gl. (4.4.6) fällt bei Gl. (4.5.2) auf, dass jeweils in der 2. und 4. Ordnung ein allein stehender Term $\propto \varepsilon^2, \varepsilon^4$ auftaucht, der bei der z-Gleichung nicht vorkommt.

Die Rücktransformation auf die ursprünglichen Variable $T(\varphi)$ erlaubt den Vergleich der Störungslösung mit numerisch berechneten Vergleichslösungen. Es wird wieder angenommen, dass zum Anfangszeitpunkt ($t = 0$ bzw. hier $\varphi = 0$) die Primärkörper in ihrem Perizentrum sind, d. h. den geringsten gegenseitigen Abstand haben. Der masselose Körper wird ohne Anfangsgeschwindigkeit ($T'(0) = 0$) „fallen gelassen“, die Anfangsposition und Exzentrizität werden variiert.

Abbildung 4.22 zeigt den Fall $(T(0), T'(0)) = (0.1, 0.0)$ mit Exzentrizität $\varepsilon = 0.05$. Im betrachteten Intervall folgt die analytische der numerischen Lösung recht gut, trotzdem nimmt die Differenz zwischen ihnen fast linear zu.

In Abbildung 4.23 wurde bei identischen Anfangsbedingungen die Exzentrizität auf $\varepsilon = 0.15$ erhöht, und wieder ist festzustellen, dass die Differenz zur numerischen Lösung zunächst linear anwächst, bevor die Kurve abflacht. Die Amplituden der analytischen Lösung sind sogar größer als die numerisch bestimmten Amplituden, ganz im Gegensatz zu der z-Gleichung, wo bei vergleichbarer Exzentrizität (siehe Abbildung 4.20) die Amplituden zu niedrig sind, allerdings sind die Anfangspositionen in z und T nicht direkt vergleichbar.

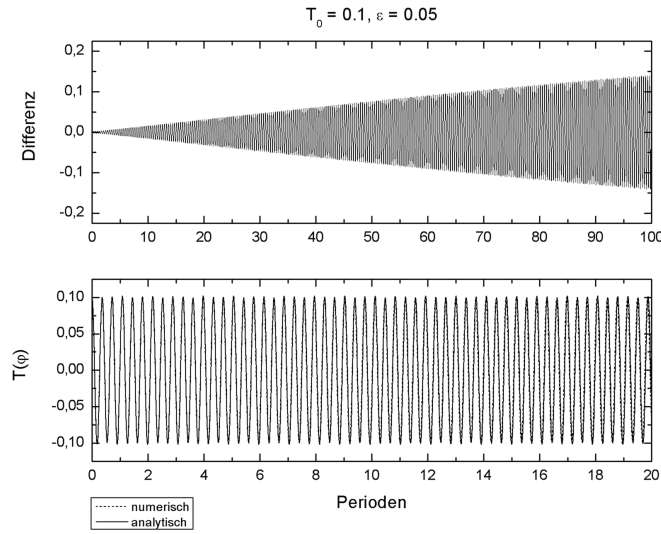


Abbildung 4.22.: Trajektorie mit den Anfangsbedingungen $(T(0), T'(0)) = (0.10, 0.0)$ für eine Exzentrizität von $\varepsilon = 0.05$ und die Differenz zur numerischen Lösung aufgetragen über mehrere Umläufe der Primärkörper.

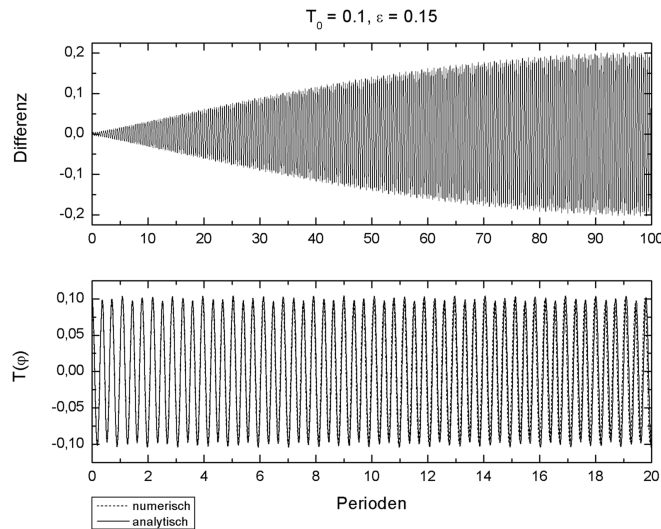


Abbildung 4.23.: Trajektorie mit den Anfangsbedingungen $(T(0), T'(0)) = (0.10, 0.0)$ für eine Exzentrizität von $\varepsilon = 0.15$ und die Differenz zur numerischen Lösung aufgetragen über mehrere Umläufe der Primärkörper.

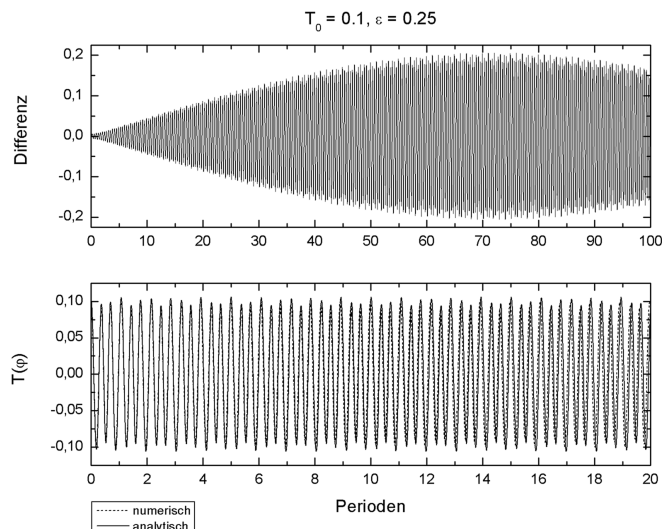


Abbildung 4.24.: Trajektorie mit den Anfangsbedingungen $(T(0), T'(0)) = (0.10, 0.0)$ für eine Exzentrizität von $\varepsilon = 0.25$ und die Differenz zur numerischen Lösung aufgetragen über mehrere Umläufe der Primärkörper.

Durch die weitere Erhöhung der Exzentrizität auf $\varepsilon = 0.25$, wie in Abbildung 4.24 gezeigt, führt die auftretende Phasenverschiebung im Zusammenhang mit den überhöhten Amplituden zu einer raschen Abweichung von numerischer und analytischer Lösung. Bereits nach den gezeigten 20 Perioden sind die beiden Kurven deutlich außer Phase, das Differenzbild zeigt Abweichungen an, welche von der selben Größenordnung sind wie die Anfangsamplitude.

Bei Betrachtung der Differenzbilder ist wieder der selbe Effekt erkennbar, der schon bei der z -Gleichung auftrat: Je höher die Exzentrizität wird, umso kürzer sind die Perioden der Schwebungen.

Für die Lie-Transformation wurden nur Terme bis $\mathcal{O}(\varepsilon^5)$ in der Hamiltonfunktion berücksichtigt. Allerdings stellt sich aus dem Restglied der Taylorentwicklung für die Hamiltonfunktion der T -Gleichung heraus, dass Terme bis zu $\mathcal{O}(\varepsilon^{10})$ berücksichtigt werden müssen, um Fehler höchstens der Größenordnung 10^{-6} zu begehen. Dies erscheint zu hoch, um noch für eine Lie-Transformation in Frage zu kommen.

Kapitel 5.

Zusammenfassung

Die durchgeführte Arbeit zum Thema „Störungsrechnung mit Lie-Reihen“ behandelt einen Spezialfall des eingeschränkten Dreikörperproblems mit den Methoden der Lie-Reihen. Das Modell des Sitnikov Problems wurde in drei verschiedenen Beschreibungen, als MacMillan Fall für kreisförmige Umlaufbahnen der Primärkörper, sowie als die zueinander äquivalenten Fälle z-Gleichung und T-Gleichung für elliptische Umlaufbahnen der Primärkörper, untersucht.

Zunächst wurden Lie-Reihen dazu verwendet, die Bewegungsgleichung des Problems mit einem Lie-Integrator numerisch zu lösen. Dabei konnte mittels drei hergeleiteten Rekursionsformeln die Lösung als Lie-Reihe bis zu beliebigen Ordnungen angegeben werden. Der angegebene Lie-Integrator wurde dann mit Standardverfahren zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen aus der Literatur verglichen. Bei fester Schrittweite kann der Lie-Integrator im Vergleich zu den anderen Methoden gut bestehen, er erlaubt eine flexible Wahl der Konsistenzordnung und zeigt ein gutes Verhalten bei der Energieerhaltung. Außerdem wurden Ansätze aufgezeigt, wie man den vorliegenden Lie-Integrator durch eine Schrittweitensteuerung ergänzt um eine weitere Erhöhung der Genauigkeit zu erreichen.

Der Schwerpunkt bei der Anwendung von Lie-Reihen lag im Rahmen der Lie-Transformationen zur Durchführung der Störungsrechnung für das Sitnikov Problem. Da die Lie-Transformationen gewisse Vorteile gegenüber anderen Methoden der Störungsrechnung besitzen, unter anderem die problemlose Hin- und Rücktransformation, konnten explizite analytische Lösungen in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen angegeben werden.

Ein wichtiges Hilfsmittel zur Durchführung dieser Arbeit war das Computer-Algebra-System Mathematica, mit dessen Hilfe Methoden zur automatischen Berechnung von Lösungen der Transformationsgleichungen erstellt wurden. Damit wurde es erst möglich, unter Ausnutzung der symbolischen Operationen, tief verschachtelte Poissonklammern und unzählige partielle Ableitungen von Funktionen zu berechnen. Auch die Lösung von großen Gleichungssystemen für die Koeffizienten in den erzeugenden Funktionen geschah auf diese Weise.

Die Störungsrechnung wurde schrittweise vom einfachsten Fall, dem linearisierten MacMillan Fall, bis hin zur vollen nichtlinearen Hamiltonfunktion zur z-Gleichung aufgebaut.

Im MacMillan Fall konnte die Lie-Transformation bis zur 8. Ordnung im formalen Parameter λ durchgeführt werden. Diese Lösungen beschreiben das Verhalten des Systems, wenn die Exzentrizität $\varepsilon = 0$ gesetzt wird. Im Vergleich zu der 1911 durch MacMillan angegebenen Lösung kann damit dieser Sonderfall für höhere Ordnungen beschrieben

werden. Bei der Entwicklung der Hamiltonfunktion in eine Potenzreihe nach λ wurde festgestellt, dass die Taylorentwicklung besser mit den numerischen Lösungen übereinstimmt als die Chebyshev Entwicklung. Je höher die Transformationsordnung gewählt wurde, umso länger stimmte die analytische mit der numerischen Lösung überein. Es war aber auch bemerkbar, dass ab der vierten Ordnung fast keine Verbesserung der Störungslösung mehr festgestellt werden konnte. Hauptsächlich waren die Abweichungen zur numerischen Lösung auf eine Phasenverschiebung zurückzuführen, welche die rücktransformierten Terme der Winkelvariable $q(t)$ betrifft.

Für die z-Gleichung wurde zunächst ein „linearisierter“ Fall untersucht, alle Terme mit höheren Potenzen als z^2 wurden ausgeschlossen, sodass der Einfluss der Exzentrizität bis zur 8. Ordnung in λ (entsprechend ε^8) studiert werden konnte. Anhand des Vergleichs mit numerischen Lösungen war zu erkennen, dass die Amplituden meist zu niedrig ausfallen, dafür aber die Kreisfrequenz der Bewegung gut übereinstimmt.

Unter Berücksichtigung weiterer Ordnungen in z wurde die bis zur 6. Ordnung in λ entwickelte Hamiltonfunktion mit allen bis dahin enthaltenen gemischten z, ε Termen untersucht. Nach Ausführung der Rücktransformation wurden Ausdrücke für den zeitlichen Verlauf von $(z(t), \dot{z}(t))$ erstellt, welche zum Teil in dieser Arbeit angegeben, zum Teil aus Platzgründen nur auf dem beigelegten Datenträger enthalten sind. Diese Lösungen erreichen für $|z| \leq 0.1$ und $\varepsilon \leq 0.1$ noch eine ausreichend gute Übereinstimmung für 20 – 30 Perioden der Primärkörper. Bei höheren Werten für z bzw. ε treten dagegen starke Abweichungen in den Amplituden auf, damit verbunden stimmen die Frequenzen auch nicht, allerdings stellt der Fall $z = 0.2, \varepsilon = 0.05$ eine interessante Ausnahme dar, hier stimmen die Amplituden besser überein.

Die Untersuchung der T-Gleichung bis zur 4. Ordnung in λ bestätigt, dass für moderate Werte von T und ε diese relativ niedrige Ordnung ausreicht, um für mindestens 20 Perioden der Primärkörper zufrieden stellende Störungslösungen zu erhalten. Die Hamiltonfunktion der T-Gleichung lässt sich bedeutend einfacher nach der Exzentrizität entwickeln als für die z-Gleichung, bei letzterer sind umfangreiche Umformungen von Fourierreihen und Besselfunktionen notwendig. Als eine mögliche Folge der einfacheren Struktur der Entwicklung gelingt es für die T-Gleichung bis $\varepsilon = 0.15$ annehmbare Lösungen zu finden.

Manchmal war es aus Platzgründen unausweichlich, gewisse Formeln oder Ergebnisse von Lie-Transformationen nur auszugsweise in die Arbeit aufzunehmen. An vielen Stellen wird auch nur auf eine bestimmte Funktion verwiesen, die zum Beispiel erst eine Hamiltonfunktion erstellt, und danach die Lie-Transformation für diese durchführt. In solchen Fällen habe ich mich bemüht, die für das Verständnis notwendigen Mittel auf dem dieser Arbeit beiliegenden Datenträger beizulegen. Alle erwähnten Funktionen, das Package für die Lie-Transformation mit Mathematica und die damit erzeugten transformierten Hamiltonfunktionen sind darauf enthalten.

Anhang A.

Ergänzungen zum Lie-Integrator

A.1. Beziehung zwischen Lie-Reihe und Taylorreihe

Die Differentialgleichung zweiten Grades für das mathematische Pendel mit $g/l = 1$, $m = \omega = 1$ lautet

$$\ddot{x}(t) = -\sin x(t).$$

Ihre formale Lösung stellt die Taylorreihe

$$x(t) = x(t_0) + \tau \dot{x}(t_0) + \frac{1}{2} \tau^2 \ddot{x}(t_0) + \frac{1}{6} \tau^3 x^{(3)}(t_0) + \frac{1}{24} \tau^4 x^{(4)}(t_0) + \mathcal{O}(\tau^5)$$

für $\tau = t - t_0$ dar, die Ziffern in hochstehenden Klammern zeigen die dritte bzw. vierte Ableitung von $x(t)$ nach t an.

Die erste und zweite Ableitung in der Taylorreihe sind aus der obigen Differentialgleichung bereits bekannt, die höheren Ableitungen lassen sich leicht aus ihnen berechnen. Zur Abkürzung wird überall das Argument weggelassen und statt $x^{(k)}(t_0)$ nur x geschrieben. Die neue Variable $u(t) = \dot{x}(t)$ ist eine Geschwindigkeitsvariable, $(x(t), u(t))$ beschreiben die zeitliche Entwicklung des gegebenen Systems.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u \\ \ddot{x} &= -\sin x \\ x^{(3)} &= -\dot{x} \cos x = -u \cos x \\ x^{(4)} &= \dot{x}^2 \sin x + \sin x \cos x = u^2 \sin x + \sin x \cos x \\ &\vdots \end{aligned} \tag{A.1.1}$$

Der D -Operator zu der obigen Differentialgleichung lautet

$$D = u \frac{\partial}{\partial x} - \sin x \frac{\partial}{\partial u},$$

wobei üblicherweise anstatt (x, u) neue Variablen (ξ, η) verwendet werden, um anzudeuten, dass es sich nicht um $(x(t), u(t))$ handelt, sondern um die Anfangswerte $(x(0), u(0))$.

Die verschiedenen Ableitungen können über den D -Operator – allein aus den Anfangswerten $(x(0), u(0))$ – aufeinander aufbauend, schrittweise numerisch ausgewertet werden. Dies ist bei Kenntnis einer entsprechenden Rekursionsformel bis zu jeder beliebigen Ordnung möglich!

Zum Vergleich mit der Taylorreihe werden einige wenige Ausdrücke der Lie-Reihe bestimmt:

$$\begin{aligned} D^1 x &= u \\ D^2 x &= -\sin x \\ D^3 x &= -u \cos x \\ D^4 x &= u^2 \sin x + \sin x \cos x \\ &\vdots \end{aligned} \tag{A.1.2}$$

Aus dem Vergleich von Gl. (A.1.1) mit Gl. (A.1.2) ergibt sich die exakte Übereinstimmung der Ausdrücke, somit wurde gezeigt, dass die Lie-Reihe eine fortgesetzte Taylorreihenentwicklung der Differentialgleichung darstellt.

A.2. Gültigkeit der Rekursionsformeln

Um die Gültigkeit der in den Gleichungen (3.2.12) angegebenen Rekursionsformeln für den Lie-Integrator zu zeigen, soll ein Vergleich der Rekursionsformeln mit der Taylorreihe bzw. direkt mit dem Ergebnis des D -Operators aus Gl. (3.2.11) durchgeführt werden.

Das Prinzip ist folgendes: Zunächst wird aus Gl. (2.3.2) die Taylorreihe bis zu einer beliebigen Ordnung n aufgestellt. Falls die Rekursionsformeln korrekt sind, sollten die Koeffizienten der so erhaltenen Reihe für alle Potenzen von t übereinstimmen. Dieser Koeffizientenvergleich ist natürlich durch die schnell anwachsende Anzahl von Termen manuell kaum durchführbar, also wird Mathematica dazu verwendet.

Die Aufgabe wird in drei Teile aufgespalten:

1. Die Funktion `SitnikovTaylorSeries` erstellt die Taylorreihe, sie dient als Referenz für die beiden anderen Methoden. Basierend auf den benötigten Anfangsbedingungen (z, u) werden alle Terme durch diese beiden Größen ausgedrückt.
2. Die Funktion `SitnikovLieSeries` dient dazu, die Lie-Reihe durch oftmalige Anwendung des D -Operators aus Gl. (3.2.11) auf die Variable ξ aufzustellen, diese Methode sollte – wie oben gezeigt – bis zur gewählten Ordnung konsistent mit der Taylorreihe sein.
3. Zuletzt werden die Rekursionsformeln (3.2.12) mittels der Funktion `SitnikovLieRecursion` direkt angewendet.

Die so aufgestellten Reihen werden von `CompareSeries` verglichen, wobei für jede Ordnung festgehalten wird, ob sie mit dem entsprechenden Ausdruck der Taylorreihe übereinstimmt. Dank der leistungsfähigen Vergleichsroutinen für symbolische Ausdrücke von Mathematica ist sichergestellt, dass nur absolut identische Ausdrücke als solche identifiziert werden, und daher die Reihen tatsächlich übereinstimmen, wenn dies so angezeigt wird.

Als ein Beispiel sollen die Referenz-Terme bis zur 4. Ordnung dargestellt werden:

$$z(t) = z + t u - t^2 \left(\frac{z}{2(r^2 + z^2)^{3/2}} \right) + t^3 \left(\frac{u z^2}{2(r^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{u}{6(r^2 + z^2)^{3/2}} \right) + \\ + t^4 \left(-\frac{z^3}{8(r^2 + z^2)^4} - \frac{5 u^2 z^3}{8(r^2 + z^2)^{7/2}} + \frac{z}{24(r^2 + z^2)^3} + \frac{3 u^2 z}{8(r^2 + z^2)^{5/2}} \right)$$

Auf diese Weise wurde bis zur 12. Ordnung gezeigt, dass die Rekursionsformeln konsistent mit der Taylorreihe sind; der für die numerischen Rechnungen verwendete Lie-Reihen Integrator unterstützt deshalb auch höchstens eine Rekursionstiefe bis zu 12 Stufen.

Anhang B.

Ergänzungen zur Lie-Transformation

B.1. Das Package `lietrafo.m`

Im Folgenden wird zunächst eine kurze Beschreibung zu den einzelnen untergeordneten Funktionen aus `lietrafo.m` gegeben. Daran anschließend folgt der Quelltext für `lietrafo.m` in möglichst kompakter Form, d. h. auf das Notwendigste reduziert und ohne Kommentare.

B.1.1. Beschreibung

- **ConstructSeries** erzeugt den Ansatz für die Funktionen H , K und W in den gegebenen Störparametern bis zu der gewählten Ordnung.
- **FindCoefficient** Aus der angegebenen Hamiltonfunktion werden die einzelnen Ordnungen der Störparameter extrahiert und den H_i im Ansatz zugeordnet.
- **CreatePBList** erzeugt bis zur maximalen Transformationsordnung eine Liste aller Poissonklammerausdrücke, welche platzsparend nur jene Terme enthält, die für eine bestimmte Ordnung neu hinzukommen. Aus den vorhergehenden Listenelementen lassen sich alle weiteren notwendigen Poissonklammern rekonstruieren.
- **CombinePoissonBrackets** Durch die Funktionsweise von **CreatePBList** ist diese Funktion notwendig, welche die Poissonklammern für die erforderliche Ordnung kombinieren kann.
- **ConstructGeneratingFunction** Die Funktion stellt den Ansatz mit unbekannten Koeffizienten für eine Liste von Winkelfunktionen der Winkelvariablen für die erzeugende Funktion in der aktuellen Ordnung auf.
- **SolveGenFuncCoefficient** Löst das Gleichungssystem für die unbekannten Koeffizienten in der erzeugenden Funktion.

B.1.2. Quelltext

```

1 BeginPackage["LieTrafo`"]
2
3 LieTransform::usage =
4 "LieTransform[hamiltonian, param, actions, angles, order]"
5
6 ReverseTransform::usage =
7 "ReverseTransform[symbvar, genfuncs, param, ord, actions, angles]"
8
9 RemainderFunction::usage =
10 "RemainderFunction[trafosol, param, actions, angles, ord]"
11
12 Begin["`Private`"]
13
14 LieDerivList = {};
15 GenFuncParamList = {};
16
17 LieTransform[hamiltonfkt_, param_, actions_List, angles_List,
18 ord_Integer] :=
19 Module[
20 {HamiltonianH, HamH, KamiltonianK, KamK, GeneratingFunctionW, GenW},
21
22 Clear[foo, LieDerivList, GenFuncParamList, GenFuncCoeffA];
23
24 HamiltonianH = ConstructSeries[HamH, param, 0, ord];
25 KamiltonianK = ConstructSeries[KamK, param, 0, ord];
26 GeneratingFunctionW = ConstructSeries[GenW, param, 1, ord];
27 LieDerivList = CreatePBLList[foo, GenW, ord, actions, angles];
28 Map[
29 (HamH[#] = FindCoefficient[hamiltonfkt, param, #])&,
30 Range[0, ord]
31 ];
32 KamK[0] = HamH[0];
33 Map[
34 ApplyGeneratingFunction[#, LieDerivList, HamH, KamK, GenW, actions,
35 angles]&,
36 Range[1, ord]
37 ];
38 {KamiltonianK, GeneratingFunctionW}
39 ]
40
41 ApplyGeneratingFunction[ord_Integer, pbrackets_List, HHname_, KKname_,
42 GFname_, actions_List, angles_List] :=
43 Module[
44 {pbderiv},
45
46 pbderiv = TrigReduce[CombinePoissonBrackets[ord, pbrackets, HHname]];
47 GenFuncParamList = MapThread[
48 {#1, #2}&,
49 {Map[GenFuncCoeffA[ord, #]&, Range[Length[#]]], #}& @
50 Cases[pbderiv, Cos[___] | Sin[___], {0, Infinity}]
51 ];
52 GFname[ord] = ConstructGeneratingFunction[GenFuncParamList];
53 KKname[ord] = Collect[
54 (pbderiv + Poisson[HHname[0], GFname[ord], angles, actions]/ord),
55 (Cos[___] | Sin[___])
56 ];
57 Map[
58 (GenFuncCoeffA[ord, #] = SolveGenFuncCoefficient[KKname[ord],
59 Part[GenFuncParamList, #]]&,
60 Range[Length[GenFuncParamList]]
61 ];
62 ]

```

```

60 RemainderFunction[trafosol_List, param_, actions_List, angles_List,
ord_Integer] :=
61   Block[
62     {HamiltonianH, HamH, RemainderF, RemF, GeneratingFunctionW, GenW,
regeln, P0, Q0},
63
64     HamiltonianH = ConstructSeries[HamH, param, 0, ord];
65     RemainderF = ConstructSeries[RemF, param, 0, ord];
66     GeneratingFunctionW = ConstructSeries[GenW, param, 1, ord];
67     regeln = Map[
68       Apply[Rule, #]&,
69       MapThread[
70         {#1, #2}&,
71         {Flatten[Transpose[{actions, angles}]], Flatten[MapThread[
72           Integrate[-D[First[trafosol], #2], t] + P0,
73           Integrate[D[First[trafosol], #1], t] + Q0]&,
74           {actions, angles}]}
75       ]
76     ];
77     Map[
78       Block[
79         {tmp = ReplaceRepeated[Coefficient[Last[trafosol], param, #],
regeln]},
80         {HamH[#] = -D[tmp, t], GenW[#+1] = tmp}&,
81         Range[0, ord]
82       ];
83     LieDerivList = CreatePBLIST[foo, GenW, ord, actions, angles];
84     RemF[0] = HamH[0];
85     Map[
86       {RemF[#] = TrigReduce[CombinePoissonBrackets[#, LieDerivList,
HamH]]&,
87       Range[1, ord]
88     ];
89     ReplaceAll[RemainderF, param->1]
90   ]
91
92 ReverseTransform[symbvar_, genfuncs_, param_, ord_Integer, actions_List,
angles_List] :=
93   Module[
94     {pblist, gfW},
95
96     Map[
97       {gfW[#+1] = Coefficient[genfuncs, param, #]}&,
98       Range[0, ord]
99     ];
100    pblist = CreatePBLIST[symbvar, gfW, ord, actions, angles];
101    ReplaceAll[
102      Inner[Times, pblist, Map[Power[param, #]&, Range[0, ord]], Plus],
103      LieTrafo`Private`PB[a____] -> PoissonMulti[a]
104    ]
105  ]
106
107 CombinePoissonBrackets[ord_Integer, pbrackets_List, name_] :=
108   ReplaceAll[
109     Apply[
110       Plus,
111       Map[
112         ReplaceAll[Part[pbrackets, (1+#)], foo -> (name[ord-#])]&,
113         Range[0, ord]
114       ]
115     ],
116     PB[a____] -> PoissonMulti[a]

```

```

117 ]
118
119 ConstructGeneratingFunction[elimlist_List] :=
120   Apply[
121     Plus,
122     Map[
123       If[FreeQ[#, Sin], ReplaceAll[#, Cos->Sin], ReplaceAll[#,
124         Sin->Cos]]&,
125     Apply[Times, elimlist, 1]
126   ]
127
128 ConstructSeries[name_, param_, offset_Integer, ord_Integer] :=
129   Sum[Power[param, k]*name[k+offset], {k, 0, ord-offset}]
130
131 CreatePBList[f_, name_, ord_Integer, actions_List, angles_List] :=
132   Map[(LieDeriv[f, name, #, actions, angles]/Factorial[#])&, Range[0,
133     ord]]
134 FindCoefficient[hamiltonfkt_, param_, ord_Integer] :=
135   TrigReduce[Coefficient[hamiltonfkt, param, ord]]
136
137 LieDeriv[f_, name_, n_Integer, pars_] := LieDeriv[f, name, n, pars] =
138   Sum[Binomial[n-1, k] * PB[LieDeriv[f, name, n-1-k, pars],
139     LieDerivGenFunc[name, k], pars], {k, 0, n-1}]
139 LieDeriv[f_, name_, 0, pars_] := LieDeriv[f, name, 0, pars] =
140   f
141 LieDerivGenFunc[name_, k_Integer] := LieDerivGenFunc[name, k] =
142   Factorial[k] * name[k+1]
143
144 PB[a_ + b_, c_, d_] :=
145   PB[a, c, d] + PB[b, c, d]
146 PB[a_, c_Integer * b_, d_] :=
147   c * PB[a, b, d]
148 PB[c_Integer * a_, b_, d_] :=
149   c * PB[a, b, d]
150 PB[a_, b_ /; Head[b] != List, d_] :=
151   PB[a, {b}, d]
152 PB[HoldPattern[PB[a_, b_, d_]], c_, d_] :=
153   PB[a, Join[b, {c}], d]
154
155 Poisson[f_, g_, var1_List, var2_List] :=
156   Apply[Plus, MapThread[(D[f, #1]*D[g, #2]-D[f, #2]*D[g, #1])&, {var1,
157     var2}]]
158 PoissonMulti[f_, g_List, actions_List, angles_List] :=
159   Fold[Poisson[#1, #2, angles, actions]&, f, g]
160
161 SolveGenFuncCoefficient[elimeq_, params_List] :=
162   If[# == {} || # == {}, 0, Last[Last[Flatten[#]]]]& @
163     Solve[Coefficient[elimeq, Last[params]] == 0, First[params],
164       InverseFunctions->False]
165
166 EndPackage[]
167

```

B.2. Chebyshev Approximation von Funktionen

Definition 13 Die Chebyshev Polynome sind die orthogonalen Polynome

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$$

mit der Eigenschaft $|T_n(x)| \leq 1$.

Die ersten beiden Chebyshev Polynome können direkt aus der gegebenen Definition bestimmt werden, sie lauten

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x.$$

Durch die Rekursionsformel

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

können alle weiteren Chebyshev Polynome für ganzzahliges $n \geq 2$ bestimmt werden.

Auf Grund der Orthogonalität gilt für das Skalarprodukt zweier Chebyshev Polynome die folgende Normierung

$$\langle T_m(x), T_n(x) \rangle = \int_{-1}^1 dx \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & \dots & m \neq n \\ \frac{\pi}{2} & \dots & m = n \neq 0 \\ \pi & \dots & m = n = 0. \end{cases}$$

Für die Approximation einer Funktion $f(x)$ dient der Ansatz

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n T_n(x).$$

Nach Bestimmung der Koeffizienten mittels

$$c_n = \frac{\langle f(x), T_n(x) \rangle}{\langle T_n(x), T_n(x) \rangle}$$

werden die Chebyshev Polynome durch die Basis $\{1, x, x^2, \dots, x^d\}$ bis zur maximalen Approximationsordnung d ausgedrückt.

Anhang C.

Danksagung

Mein Dank gilt Herrn Prof. Dr. R. Dvorak für seine fortwährende Unterstützung. Wann immer ich seinen fachlichen Rat benötigt habe, hat er mir jederzeit bereitwillig geholfen, und stets betreute er mich mit großer Aufmerksamkeit und viel Geduld.

Ebenfalls sehr dankbar bin ich Herrn C. Lhotka für viele aufschlussreiche Diskussionen und Hinweise, die diese Arbeit bereichert haben. Meinen Kollegen, Frau B. Funk und Herr R. Schwarz, verdanke ich hilfreiche Ratschläge besonders zur Erstellung von Grafiken und wertvolle Hinweise bei der Beseitigung von Fehlern in dieser Arbeit.

Ohne die stetige Aufmunterung und Motivation durch meine Eltern und ihre bedingungslose Unterstützung wäre diese Arbeit wohl noch heute nicht fertig. Ich danke euch von ganzem Herzen!

Literaturverzeichnis

- [1] H. Bucerius and M. Schneider. *Himmelsmechanik II*, volume 144/144a of *B I Hochschultaschenbücher*. Bibliographisches Institut, Mannheim, 2nd edition, 1967.
- [2] J. Candy and W. Rozmus. A Symplectic Integration Algorithm for Separable Hamiltonian Functions. *Journal of Computational Physics*, 92:230–256, 1991.
- [3] J. M. A. Danby and T. M. Burkardt. The solution of Kepler’s equation. I. *Celestial Mechanics*, 31:95–107, 1983.
- [4] A. Deprit. Canonical Transformation Depending on a Small Parameter. *Celestial Mechanics*, 1:12–30, 1969.
- [5] P. Deuffhard and F. Bornemann. *Numerische Mathematik II. Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen*. de Gruyter Lehrbuch. de Gruyter, Berlin, 1st edition, 1994.
- [6] R. Dvorak. Numerical results to the Sitnikov-problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 56:71–80, 1993.
- [7] R. Dvorak and F. Freistetter. *Orbit Dynamics, Stability and Chaos in Planetary Systems*, volume 683 of *Lecture Notes in Physics*. Springer, 1st edition, 2005.
- [8] B. Érdi. *Égi Mechanika*. Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar. Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.
- [9] S. Ferraz-Mello. *Canonical Perturbation Theories: Degenerate Systems and Resonance*, volume 345 of *Astrophysics and Space Library*. Springer, 1st edition, 2007.
- [10] W. Gröbner and H. Knapp. *Contributions to the method of Lie Series*, volume 802 of *B I Hochschulschriften*. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1st edition, 1967.
- [11] J. Hagel. A new analytic approach to the Sitnikov problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 53:267–292, 1992.
- [12] J. Hagel and C. Lhotka. A High Order Perturbation Analysis of the Sitnikov Problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 93:201–228, 2005.
- [13] J. Hagel and T. Trenkler. A Computer-Aided Analysis of the Sitnikov Problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 56:81–98, 1993.
- [14] A. Hanslmeier and R. Dvorak. Numerical Integration with Lie Series. *A&A*, 132:203–207, 1984.

- [15] K. Jänich. *Funktionentheorie*. Springer-Lehrbuch. Springer, 6th edition, 2003.
- [16] J. Kovalevsky. *Introduction to Celestial Mechanics*, volume 7 of *Astrophysics and space science library*. Reidel, Dordrecht, 1st edition, 1967.
- [17] A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman. *Regular and stochastic motion*, volume 38 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer Verlag, New York, 1st edition, 1983.
- [18] J. Liu and Y.-S. Sun. On the Sitnikov problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 49:285–302, 1990.
- [19] W. D. MacMillan. An integrable case in the restricted problem of three bodies. *The Astronomical Journal*, 27:11–13, 1911.
- [20] J. Martinez Alfaro and C. Chiralt. Invariant rotational curves in Sitnikov’s Problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 55:351–367, 1993.
- [21] A. H. Nayfeh. *Perturbation Methods*. Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience Publication, New York, 1st edition, 1973.
- [22] E. W. Ng. A general algorithm for the solution of Kepler’s equation for elliptic orbits. *Celestial Mechanics*, 20:243–249, 1979.
- [23] W. H. Press, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling. *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 2nd edition, 1993.
- [24] F. Scheck. *Theoretische Physik 1. Mechanik*. Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag, 8th edition, 2007.
- [25] C. E. Siewert and E. E. Burniston. An Exact Analytical Solution of Kepler’s Equation. *Celestial Mechanics*, 6:294–304, 1972.
- [26] K. Sitnikov. The Existence of Oscillatory Motions in the Three-Body Problem. *Soviet Physics Doklady*, 5:647–+, 1961.
- [27] G. R. Smith. A simple, efficient starting value for the iterative solution of Kepler’s equation. *Celestial Mechanics*, 19:163–166, 1979.
- [28] I. N. Sneddon. *Spezielle Funktionen der mathematischen Physik*, volume 54 of *B I Hochschultaschenbücher*. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1st edition, 1963.
- [29] J. Stoer and R. Bulirsch. *Introduction to Numerical Analysis*, volume 12 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, 2nd edition, 1993.
- [30] K. Stumpff. *Himmelsmechanik I*, volume 40 of *Hochschulbücher für Physik*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1st edition, 1959.

- [31] K. Wodnar. New Formulations Of The Sitnikov Problem. In A. E. Roy, editor, *Proceedings of a NATO Advanced Study Institute on Predictability, Stability, and Chaos in N-Body Dynamical Systems*, volume 272 of *NATO ASI series. Series B, Physics*, pages 457–466, 1990.
- [32] K. Wodnar. Analytical Approximations for Sitnikov’s Problem. In A. E. Roy, editor, *From Newton to Chaos: Understanding and Coping with Chaos in N-Body Dynamical Systems*, volume 336 of *NATO ASI series. Series B, Physics*, pages 513–523, 1995.
- [33] H. Yoshida. Construction of higher order symplectic integrators. *Physics Letters A*, 150:262–268, 1990.
- [34] H. Yoshida. Recent Progress in the Theory and Application of Symplectic Integrators. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 56:27–43, 1993.

Index

A

Ähnlichkeitstransformation, 63
Anomalie
 exzentrische, 10
 mittlere, 11
 wahre, 6
Apozentrum, 6

B

Baker-Campbell-Hausdorff, 53
Bessel, 27
Besselfunktionen, 25
Besselsche DGL, 27
bivariates Polynom, 84
Brahe, 5
Butcher-Tabelle, 43

C

Cauchy, 41
Chebyshev Polynome, 77

D

D-Operator, 45
Dreikörperproblem, 1
 eingeschränktes, 17

E

eingeschränktes Dreikörperproblem,
 17
Erhaltungsgröße, 12
erzeugende Funktion, 15
 Lie-, 63
Euler, 47
exzentrische Anomalie, 10

F

Frobenius-Ansatz, 27

Funktion

 erzeugende, 15
 Hamilton-, 12
 Lagrange-, 11

H

Hamilton-Jacobi-Theorie, 11
Halley, 38
Hamilton-Jacobi DGL, 16
Hamiltonformalismus, 11
Hamiltonfunktion, 12
Harmonischer Oszillator, 61, 75

I

Impulse
 verallgemeinerte, 12

K

kanonische Transformation, 14
 infinitesimale, 63
Kepler, 5
Keplersche Gesetze, 5
Keplersche Gleichung, 10
Konsistenzordnung, 42, 47, 53
Koordinaten
 verallgemeinerte, 12
 zyklische, 14
Kutta, 42

L

Lagrange, 1
Lagrangeformalismus, 11
Lagrangefunktion, 11
Laurentreihe, 28
Legendretransformation, 11
Lie, 1, 44
Lie-Ableitung, 64

- Lie-erzeugende Funktion, 63
 - Lie-Reihe, 46, 65
 - Liouville, 52
- M
 - MacMillan, 17
 - mittlere Anomalie, 11
- N
 - N-Körper-Problem, 1
 - Newton, 5, 33
 - Newton-Raphson Methode, 33
 - numerische Exzentrizität, 5
- P
 - Perizentrum, 6
 - Phasenraum, 12
 - Poincaré, 1
 - Poissonklammer, 16
 - Polynom
 - Chebyshev, 77
 - bivariates, 84
 - Prinzip der kleinsten Wirkung, 13
- R
 - Raphson, 33
 - reduzierte Masse, 8
 - Runge, 42
 - Runge-Kutta Verfahren, 42
 - eingebettetes, 44
 - klassisches, 43
- S
 - Sitnikov, 17
 - Sticky-Orbits, 60
 - Surface of Section, 54
 - symplektische Form, 52
- T
 - Transformation
 - infinitesimale, 63
 - kanonische, 14
 - Legendre-, 11
- V
 - Verallgemeinerte Impulse, 12
 - Verallgemeinerte Koordinaten, 12
 - kanonisch konjugierte, 12
 - Wirkung-Winkel, 66
- W
 - wahre Anomalie, 6
 - Wirkung
 - Prinzip der kleinsten, 13
 - Wirkung-Winkel Variablen, 66, 75
- Z
 - Zweikörperproblem, 1
 - zyklische Koordinaten, 14