universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Fastperiodische Funktionen

Verfasser

Richard Friedrich Majer

angestrebter akademischer Grad

Magister der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat)

Wien, im April 2013

Matrikelnummer:	0247278
Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 405
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Diplomstudium Mathematik
Betreuer:	o. Univ.-Prof. Dr. Viktor LOSERT

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Im Rahmen dieser Diplomarbeit möchte ich versuchen, eine - durch die Länge einer solchen Arbeit begrenzte und dadurch gezwungenermaßen lückenhafte - Einführung in die Theorie der fastperiodischen Funktionen und ihrer möglichen Anwendungsgebiete zu geben. So meint der Autor in [Coo81], p.515, im Vorwort seiner Arbeit zum Thema der fastperiodischen Funktionen:

“Nevertheless the basic Fourier-type theorems on pointwise convergence of the Fourier series of an almost-periodic function are not generelly presented; and this omission is unfortunate, since such a study can do much to broaden and unify a student’s understanding of this part of analysis.“

Ausgehend von dem ebenfalls in [Coo81] angegebenen, illustrierenden Beispiel der Funktion

$$f(x) = \sin x + \sin \sqrt{2}x,$$

die offenbar nicht periodisch ist, werden wir das Konzept der **fastperiodischen Funktionen nach Bohr** entwickeln. Wir halten uns hier zu Beginn stark an die Vorgehensweise aus [Boh32] und entwickeln die zugrundeliegenden Konzepte auf sehr traditionelle Weise.

So lassen sich viele aus der Theorie der reinperiodischen Funktionen bekannte Resultate auf sehr natürliche Weise auf den fastperiodischen Fall übertragen. Ein großer Teil des ersten Kapitels ist den Vorarbeiten zum Beweis des Hauptsatzes gewidmet, der besagt, daß eine Funktion genau dann fastperiodisch ist, wenn sie sich gleichmäßig durch endliche trigonometrische Polynome approximieren lässt. Darüberhinaus beschäftigen wir uns mit einigen interessanten Nebenresultaten, unter Anderem im Bereich der Fourierexponenten einer fastperiodischen Funktion.

Zum Abschluss des ersten Kapitels zeigen wir auf, daß der von uns gewählte (klassische) Zugang aber keineswegs der einzig erfolgversprechende Weg ist. So betrachten wir **Familien von Translaten** $(T_x f)_{x\in G}$ von beschränkten, komplex-wertigen, stetigen Funktionen über einer topologischen Gruppe G und untersuchen, welcher Zusammenhang zwischen fastperiodischen Funktionen über einer lokalkompakten Abelschen Gruppe G und den stetigen Funktionen auf $Bohr(G)$, der Bohr-Kompaktifizierung von G, besteht.

Im zweiten Kapitel betrachten wir Verallgemeinerungen der fastperiodischen Funktionen, indem wir die im ersten Kapitel verwendete Supremumsnorm durch allgemeinere Normen ersetzen und die dadurch entstehenden Räume wie B^p oder S_l^p untersuchen. Wir zeigen auch hier wieder unterschiedliche Zugangswege auf und führen am Ende des Kapitels vor, wie sich Räume fastperiodischer Funktionen in den sehr allgemeinen Rahmen der Wiener-Amalgam-Räume einbetten lassen.

Im letzten Teil wollen wir mögliche Anwendungen der bisher dargestellten Konzepte aufzeigen. So beschäftigen wir uns mit fastperiodischen Lösungen von Systemen quasilinearer Differentialgleichungen und betrachten die Eigenschaften von Faltungsoperatoren auf den in Kapitel 2 vorgestellten Räumen.

Darüberhinaus geben wir einen kurzen Ausblick auf Themen, die im Rahmen dieser Arbeit nicht behandelt werden konnten, die aber für den Themenkomplex der Fastperiodizität von großem Interesse sind.

Kapitel 1

Fastperiodische Funktionen einer Veränderlichen

1.1 Motivation

Zur Erläuterung der Notwendigkeit einer Theorie der Fastperiodizität wollen wir das in [Boh32] vorgestellte Beispiel verwenden:

$$f(x) = e^{i\lambda_1 x} + e^{i\lambda_2 x} \qquad \text{mit } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1, \lambda_2 \neq 0$$

Für $k = 1, 2$ sind $e^{i\lambda_k x}$ offenbar periodisch mit Periode $\frac{2\pi}{|\lambda_k|}$. Jedes ganze Vielfache einer Periode ist wieder Periode. So erhält man die folgenden Mengen

$$P_k := \{0,\ \pm\frac{2\pi}{|\lambda_k|},\ \pm 2\frac{2\pi}{|\lambda_k|},\ \dots\} \qquad k = 1, 2$$

Ist nun $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ rational, das heisst ist $n_1 \frac{2\pi}{|\lambda_1|} = n_2 \frac{2\pi}{|\lambda_2|}$ für $n_k \in \mathbb{N}, n_k \neq 0$, so haben die beiden Funktionen die gemeinsame Periode $P = n_1 \frac{2\pi}{|\lambda_1|} = n_2 \frac{2\pi}{|\lambda_2|}$ und ihre Summe ist damit periodisch.

Sei jedoch nun $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ irrational. Dann ist $P_1 \cap P_2 = \{0\}$, enthält also nur ein triviales Element. Damit ist f sicher nicht periodisch. Aber sei nun $\delta > 0$. Nach dem Satz von Dirichlet-Kronecker über diophantische Approximationen existieren beliebig große Paare $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| n_1 \frac{2\pi}{|\lambda_1|} - n_2 \frac{2\pi}{|\lambda_2|} \right| < \delta$$

Sei nun $\tau \in (n_1 \frac{2\pi}{|\lambda_1|}, n_2 \frac{2\pi}{|\lambda_2|})$, dann wird der Ausdruck $|f(x+\tau) - f(x)| < \delta(|\lambda_1| + |\lambda_2|)$ sehr klein $\forall x$. Diese Überlegungen wollen wir nun im folgenden Abschnitt formalisieren.

1.2 Definition der Fastperiodizität

Der Kern unseres Zugangs zur Fastperiodizität ist der Begriff der Verschiebungszahl:

Definition 1.2.1 (Verschiebungszahl)**.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und $\varepsilon > 0$. Eine Zahl $\tau = \tau(\varepsilon)$ heißt **Verschiebungszahl** zu ε, wenn

$$|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Weiters bezeichnen wir im Folgenden die **Menge alle Verschiebungszahlen** $\tau(\varepsilon)$ von f mit

$$E(\varepsilon, f).$$

Nun stellt sich die Frage, inwieweit die Forderung nach der Existenz solcher Verschiebungszahlen bereits eine sinnvolle Klasse von Funktionen beschreibt. Zuerst wollen wir aber noch kurz erläutern, warum wir diesen Weg wählen:

Mit dem Ansatz, fastperiodische Funktionen über Verschiebungszahlen einzuführen, beschreiten wir den nach [Coo81], p.524, „beschwerlichen“ Weg:

„The original definition of H. Bohr called a function $f(x)$ almost-periodic if it is continuous and for every $\varepsilon > 0$ the set of all ε-translates is relatively dense, (...). **This definition can be rather cumbersome, as can be seen by its expression in logical notation.** (...) **The seemingly simple operation of addition, however, presents a formidable obstacle. It is by no means trivial, using Bohr's definition, that the sum of two almost-periodic functions is almost-periodic.**“

Es liegt nahe, die Existenz von unendlich vielen und darunter beliebig großen Verschiebungszahlen zu fordern. Wir werden aber sehen, daß wir allein damit noch keine abgeschlossene Klasse von Funktionen konstruieren können, wie das folgende Gegenbeispiel aus [Boh24] zeigt:

Definition 1.2.2 (Periodenartige Funktionen)**.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und τ eine Verschiebungszahl von f. Wir nennen f **periodenartig**, wenn

$$\exists c = c(f) > 0 \quad sodass \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tau \in E(\varepsilon, f)\, mit\, \tau > c.$$

Bemerkung 1.2.3. Definition 1.2.2 ist zur Forderung äquivalent, daß es unendlich viele und beliebig große Verschiebungszahlen gibt. Denn sei $T > 0$ beliebig groß gewählt, N derart, daß $Nc > T$ und sei $\tau_1 > c$ eine Verschiebungszahl zu $\frac{\varepsilon}{N}$. Dann ist $\tau = N\tau_1 > T$ und τ ist Verschiebungszahl zu ε.

Satz 1.2.4. *Die Summe zweier periodenartiger Funktionen muß nicht periodenartig sein.*

Beweis. Vergleiche [Boh24], p. 112-119. □

Wir sehen nun, daß wir noch strengere Anforderungen an die Menge der Verschiebungszahlen stellen müssen, um zu einer praktikablen Definition zu gelangen. Damit sind wir bei dem Begriff der **relativ dichten** Menge angelangt.

Definition 1.2.5 (Relativ dichte Menge)**.** Sei $E \neq \emptyset$. Wir nennen E **relativ dicht**, wenn es ein $L > 0$ gibt, sodaß

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists e \in E \quad sodass \quad e \in \left(x - \frac{L}{2}, x + \frac{L}{2}\right) \tag{1.1}$$

Bemerkung 1.2.6.

1. Diese Definition lässt sich so verstehen: eine relativ dichte Menge ist ein Menge, deren Komplement keine beliebig großen Intervalle enthält.
2. $\mathbb{Z}$ oder jede Menge der Form $\{\ldots, -2d, -d, 0, d, 2d, \ldots\}$ mit $d \in \mathbb{R}$ fest ist relativ dicht.
3. Die Menge der Quadratzahlen $\left\{\pm p^2 \,|\, p \in \mathbb{N}\right\}$ ist keine relativ dichte Menge.

Wir sind nun bereit für die Definition der Fastperiodizität nach Bohr:

Definition 1.2.7 (Fastperiodische Funktionen)**.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig. Wir nennen f **fastperiodisch**, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge der Verschiebungszahlen $E(\varepsilon, f)$ relativ dicht ist.

Bemerkung 1.2.8. Definition 1.2.7 ist offenbar zur Forderung äquivalent, eine Funktion genau dann fastperiodisch zu nennen, wenn es bei gegebenem $\varepsilon > 0$ eine Länge $L(\varepsilon) > 0$ gibt, sodaß in jedem Intervall der Länge $L(\varepsilon)$ mindestens ein Element der Menge $E(\varepsilon, f)$ liegt.

Bemerkung 1.2.9. Offensichtlich ist jede $T-$periodische Funktion f fastperiodisch: $\{\ldots, -T, 0, T, 2T, \ldots\}$ ist eine relativ dichte Menge nach Bemerkung 1.2.6. Umgekehrt ist nach Absatz 1.1 klar, daß nicht jede fastperiodische Funktion auch reinperiodisch ist.

Wir wollen nun das Hauptresultat der Theorie der (gleichmäßig) fastperiodischen Funktionen formulieren, dessen Beweis uns für einen Großteil des ersten Kapitels beschäftigen wird:

Definition 1.2.10 (Trigonometrisches Polynom)**.** Es seien $N \in \mathbb{N}$, $c_k \in \mathbb{C}$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Dann nennen wir eine Summe der Form

$$p(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{i\lambda_k x}$$

eine (komplexes) **trigonometrisches Polynom**.

Die Menge

$$H = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \,|\, \forall \varepsilon > 0 \ \exists p_\varepsilon : \quad ||g - p_\varepsilon||_\infty < \varepsilon\}$$

ist der Abschluss der trigonometrischen Polynome in C^b(dem Raum der beschränkten stetigen Funktionen) unter der Supremumsnorm. Die Elemente $g \in H$ sind offenbar stetig als gleichmäßige Grenzwerte stetiger Funktionen.

Satz 1.2.11 (Hauptsatz)**.** *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt*

$$f \ \ fastperiodisch \quad \Longleftrightarrow \quad f \in H$$

Den vollen Beweis dieses Satzes werden wir erst nach einiger Vorarbeit erbringen können. Die Richtung $f \in H \Longrightarrow f$ *fastperiodisch* jedoch lässt sich bereits durch Ableitung einiger grundlegender Eigenschaften aus der Definition 1.2.7 zeigen. Im folgenden Satz 1.2.12 fassen wir daher zusammen:

Satz 1.2.12 (Eigenschaften fastperiodischer Funktionen)**.** *Seien f, g, f_n ($n \in \mathbb{N}$) fastperiodisch und $c \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt*

1. *f ist beschränkt und gleichmäßig stetig.*
2. *Es sei $L = L(\varepsilon)$ wie in (1.1). Dann existiert eine (von ε abhängige) Zahl $\delta > 0$, sodass jedes Intervall der Länge L sogar ein Intervall der Länge δ enthält, dessen Punkte alle Verschiebungszahlen zu ε sind.*
3. *$T_a f := f(\cdot + a)$, $c\,f$ und f^2 sind fastperiodisch.*
4. *$f \pm g$ und $f \cdot g$ sind fastperiodisch.*
5. *Sei $f := \lim_{n\to\infty} f_n$. Dann ist f fastperiodisch.*

Beweis. Wir präsentieren hier nur den Beweis der Eigenschaft 4 und verweisen für die übrigen auf die Literatur: vergleiche dazu [Boh32], p. 29-31 und p. 33.

$f+g$ ist eine recht technische Angelegenheit. Die Grundidee ist es, zu gegebenem ε gemeinsame Verschiebungszahlen zu finden. Wir verwenden dazu Eigenschaft 2 und bestimmen zu gegebenem $\frac{\varepsilon}{2}$ wie folgt:

$$L_0 = \max(L_f, L_g)$$
$$\mu = \min(\delta_f, \delta_g)$$

In jedem Intervall der Länge L_0 konstruieren wir Paare von Verschiebungszahlen $\tau_f(\frac{\varepsilon}{2})$ (resp. τ_g) mit den folgenden Eigenschaften ($z, z' \in \mathbb{Z}$):

$$\tau_f = z\,\mu, \quad \tau_g = z'\,\mu$$

Aus obiger Eigenschaft folgt aber insbesondere, daß $|(z - z')\mu| < L_0$. Damit kann aber $z - z'$ nur endlich viele Werte annehmen (deren Anzahl wir ab jetzt mit N bezeichnen). Es lassen sich beliebig viele solcher Paare konstruieren, von denen wir genau N solcher Paare $\tau_f^{(n)}, \tau_g^{(n)}$ auswählen. Dann setzen wir

$$l = \max_{n=1,2,\ldots,N} |\tau_f^{(n)}|$$

Wir behaupten nun, daß jedes Intervall der Länge $L_0 + 2l$ nun eine gemeinsame Verschiebungszahl $\tau_{f,g}(\varepsilon) = \tau_f = \tau_g$ enthält.
Betrachten wir nun die beliebig gewählten Intervalle $J = (a, a + L_0 + 2l)$ und $I = (a+l, a+L_0+l)$. Aus I wählen wir $\tau_f(\frac{\varepsilon}{2}) = z\mu$ (resp. $\tau_g = z'\mu$) und nehmen dann das Paar unserer obigen Auswahl zu $n = z - z'$ zur Hand. Damit haben wir dann

$$\tau_f - \tau_g = \tau_f^{(n)} - \tau_g^{(n)}$$
$$\tau_f - \tau_f^{(n)} = \tau_g - \tau_g^{(n)}$$

und mit

$$\tau = \tau_f - \tau_f^{(n)}$$

erhalten wir unsere gesuchte gemeinsame Verschiebungszahl zu ε: Sie gehört sowohl zu f als auch zu g (als Differenz zweier zu $\frac{\varepsilon}{2}$ gehörender Verschiebungszahl) und liegt im Intervall J wegen $\tau_f \in I$, $I \subset J$ und $|\tau_f^{(n)}| \leq l$ und damit $\tau \in J$. In Kombination mit Eigenschaft 3 bekommt man dann auch $f - g$.

$f \cdot g$ folgt dann aus der bekannten Relation

$$f \cdot g = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right].$$

□

Aus den Aussagen des obigen Satzes folgt dann schon ganz natürlich eine Richtung des **Hauptsatzes**:

Satz 1.2.13. $f \in H \Longrightarrow f fastperiodisch$

Beweis. Jede periodische Funktion ist fastperiodisch, insbesondere also jede Funktion der Form $Ae^{i\,\lambda x}$ mit $A \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Nach der vierten Aussage von Satz 1.2.12 sind also auch alle endlichen Summen der Form $\sum_{n=1}^{n_0} A_n\, e^{i\,\lambda_n x}$ fastperiodisch und mit Eigenschaft 5 deren gleichmäßige Grenzwerte. Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Um im weiteren Verlauf Zugriff auf eine etwas modernere Notation zu haben, wollen wir mit dem folgenden Satz dem Beweis des Hauptsatzes etwas vorgreifen:

Satz 1.2.14 ($AP(\mathbb{R})$)**.** *Wir setzen nun $AP(\mathbb{R}) = H$. Dann ist $(AP(\mathbb{R}), ||.||)$ ein Banach-Raum mit der Norm*

$$||f|| := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$$

Beweis. Mit den Eigenschaften aus Satz 1.2.12 bleibt nur noch die Vollständigkeit von AP zu zeigen. Die folgt aber bereits daraus, daß AP als abgeschlossener Teilraum des vollständigen Raums C^b vollständig ist. □

Bemerkung 1.2.15. Die Notation des Satzes 1.2.14 ist natürlich nicht die einzige Schreibweise. In der Regel bezeichnet eine Notation der Form $AP(G)$ komplexwertige fastperiodische Funktionen über einer Gruppe G. Es lassen sich aber auch Konzepte der Fastperiodizität mit Werten in Banachräumen konstruieren. Vergleiche hierzu zum Beispiel [Zai85]. Möchte man eher die zentrale Forderung nach der Stetigkeit dieser fastperiodischen Funktionen betonen, so bezeichnet man diesen Raum als CAP. Diese Form der Notation findet man unter Anderem in [BP98].

1.3 Mittelwert und Fourierreihen

Bevor wir nun die für den Beweis der anderen Richtung des Hauptsatzes nötigen Eigenschaften fastperiodischer Funktionen präsentieren, wollen wir diese zuerst bei den reinperiodischen Funktionen kurz rekapitulieren.

Definition 1.3.1 (Mittelwert)**.** Falls der Grenzwert existiert, heißt der Wert

$$M\{f\} := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f d\mu$$

der **Mittelwert** der Funktion f.

Bemerkung 1.3.2. Wenn ein Funktionsterm verwendet werden soll, so schreiben wir

$$M_x\{f(x)\}$$

für den Mittelwert von f bezüglich der Variablen x.

Satz 1.3.3. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und periodisch mit Periode p. Dann existiert der Mittelwert $M\{f\}$ und es gilt*

$$M\{f\} = \frac{1}{p} \int_0^p f(x)dx$$

Beweis. Sei $T > 0$ und $T = mp + r$ mit $m \in \mathbb{N}$ und $0 \leq r < p$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T f(x)dx &= \frac{1}{T} \int_0^{mp} f(x)dx + \frac{1}{T} \int_{mp}^{mp+r} f(x)dx \\ &= \frac{m}{mp+r} \int_0^p f(x)dx + \frac{1}{T} \int_0^r f(x)dx \end{aligned}$$

Führt man nun den Grenzübergang $T \to \infty$ durch, so folgt $\frac{1}{T}\int_0^r f(x)dx \to 0$ (wegen $r < p$ und der daraus folgendenen Beschränktheit von $\int_0^r f(x)dx$). Weiters ist klar zu sehen, daß $\frac{m}{mp+r} \to \frac{1}{p}$ gilt, womit die Behauptung bewiesen ist. □

Definition 1.3.4 (Fourierreihe)**.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und periodisch mit Periode p. Dann nennt man die (zunächst rein formale) Reihe

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik2\pi \frac{x}{p}}$$

die zur Funktion f gehörige Fourierreihe mit den Fourierkoeffizienten c_k:

$$c_k = \frac{1}{p} \int_0^p f(y) e^{-ik2\pi\frac{y}{p}} dy$$

Im Allgemeinen wird die Fourierreihe ohne weitere Voraussetzungen nicht punktweise gegen f konvergieren. Vergleiche hierzu [Wer04], p. 148-149, Satz IV.2.10, für den allgemeinen Beweis und [dBR73] für ein Beispiel einer stetigen, periodischen Funktion mit in zumindest einem Punkt divergenter Fourierreihe. Nach dem wichtigen Resultat von Fejér gilt aber, daß die Fourierreihe einer reinperiodischen Funktion in jedem Fall summierbar ist:

Satz 1.3.5. *Sei f stetig und periodisch mit Periode p. Weiters definiere man den **n-ten Fejér-Kern** als*

$$F_n(s) = \frac{1}{n} \frac{\sin^2 n\frac{s}{2}}{\sin^2 \frac{s}{2}}$$

Weiters bezeichne $s_n(f)$ die n-te Partialsumme der Fourierreihe von f. Dann gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} s_k(f) \;=\; \frac{1}{p}\int_0^p f(\cdot)F_n(\cdot - s)ds$$

und

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} s_k(f) \;\to\; f$$

gleichmäßig. Man sagt auch, die Fourierreihe konvergiere gegen f im Sinn von Cesàro.

Beweis. Für den Beweis sei auf [Wer04], p. 149-150, verwiesen. □

Bemerkung 1.3.6. Der Fejér-Kern hat zwei wichtige (und schöne) Eigenschaften:

$$\begin{aligned} F_n &\geq 0 \\ M\{F_n\} &= 1 \end{aligned}$$

Ausserdem kann er alternativ geschrieben werden in der Form

$$F_n(s) \;=\; \sum_{j=-n}^{n}\left(1-\frac{|j|}{n}\right)e^{ijs}$$

Weiters soll hier noch eine weitere wichtige und bekannte Eigenschaft von Fourierreihen wiedergegeben werden.

Satz 1.3.7 (PARSEVALsche Gleichung)**.** *Es sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ stetig, periodisch mit Periode 2π und Fourierkoeffizienten c_n. Dann gilt die* ***PARSEVALsche Gleichung***

$$M\left\{|f|^2\right\} \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2.$$

Beweis. Vergleiche [Wer04], p. 230, Beweis von Satz V.4.9. □

Corollar 1.3.8 (Eindeutigkeitssatz)**.** *Seien f, c_k wie in Satz 1.3.7. Dann gilt der* ***Eindeutigkeitssatz***

$$c_k = 0\ \forall k\in\mathbb{N} \quad\Longleftrightarrow\quad f\equiv 0$$

Beweis. Folgt direkt aus Satz 1.3.7. Es gelte $c_k = 0\,\forall k$. Dann gilt

$$0 = \sum_{c_k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2 = M\{|f|^2\}$$

Daher muß auch f identisch verschwinden. □

Ein analoger Mittelwertsatz für fastperiodische Funktionen wird unser zentrales Mittel zur Entwicklung einer Theorie der Fourierreihen solcher Funktionen werden. Daher wollen wir diesen nun gleich in seiner schärfsten Form angeben:

Satz 1.3.9 (Mittelwertsatz)**.** *Sei f fastperiodisch. Dann existiert der Mittelwert*

$$M\{f\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)dx$$

gleichmäßig für alle $\alpha \in \mathbb{R}$. *Genauer gilt für* $T > T_0$ *mit* $T_0 := \frac{4||f||L\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\varepsilon}$

$$\left| \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)dx - M\{f\} \right| \leq \varepsilon \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Beweis. Vergleiche [Boh32], p. 34-36. □

Bemerkung 1.3.10. Die Aussage des obigen Satzes bleibt auch erhalten, wenn man den Grenzübergang $T \to -\infty$ macht.

Bemerkung 1.3.11. Wir können nun sogar noch etwas mehr über $AP(\mathbb{R})$ sagen. Definiert man nämlich

$$< f, g >_{AP(\mathbb{R})} := M\{f\overline{g}\},$$

so erhält man damit mit den bisher bekannten Eigenschaften ein semi-inneres Produkt auf $AP(\mathbb{R})$. Durch Übergang auf einen geeigneten Quotientenraum bekommt man bereits die Struktur eines Prä-Hilbertraums, dem nur die Vollständigkeit fehlt. Siehe dazu [Kat04], p. 197-198. Wir werden aber später sehen, daß der Beweis des Eindeutigkeitssatzes dann schon die bislang noch nicht gezeigte positive Definitheit liefert, womit $< \cdot, \cdot >_{AP(\mathbb{R})}$ zum inneren Produkt wird.

Mit Hilfe des Mittelwertbegriffs können wir nun die Fourierreihe einer fastperiodischen Funktion erklären:

Definition 1.3.12. Sei $f \in AP(\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Unter der (zunächst wieder rein formalen) Fourierreihe von f versteht man

$$f(x) \sim \sum_{\lambda} a_f(\lambda) e^{i\lambda x}$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$a_f(\lambda) := M_x\{f(x)e^{-i\lambda x}\}$$

Noch stärker als im reinperiodischen Fall ist hier zu sehen, daß diese Defintion ohne weitere Erklärungen nur rein formal sein kann. So ist vor allem nicht klar, wie die (scheinbar) überabzählbare Summe in Definition 1.3.12 zu verstehen ist. Aber dieses Problem wird schnell durch den folgenden Satz gelöst:

Satz 1.3.13. *Sei* $f \in AP(\mathbb{R})$ *und* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Wir definieren*

$$\Lambda_f = \{\lambda \in \mathbb{R} : a_f(\lambda) \neq 0\}.$$

Dann enthält Λ_f *höchstens abzählbar viele Elemente.*

Beweis. Man kann dies durch geschicktes Rechnen aus den Rechenregeln für Mittelwerte und den Eigenschaften von Verschiebungszahlen ableiten. Es bietet sich jedoch eine modernere Argumentationslinie an. Offenbar bildet

$$(e^{i\lambda x})_{\lambda \in \mathbb{R}}$$

ein (überabzählbares) Orthonormalsystem in $AP(\mathbb{R})$ bezüglich des inneren Produkts $< f, g >_{AP(\mathbb{R})} = M\{f\overline{g}\}$. Seien nämlich $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{ix(\lambda-\mu)}dx \;=\; \frac{1}{T}\begin{cases} \frac{e^{iT(\lambda-\mu)}-1}{i(\lambda-\mu)} & \lambda \neq \mu \\ T & \lambda = \mu \end{cases}$$

und nach dem Grenzübergang $T \to \infty$

$$M\left\{e^{i\lambda x}e^{-i\mu x}\right\} \;=\; \begin{cases} 1 & \lambda = \mu \\ 0 & \lambda \neq \mu \end{cases}$$

Dann können wir jedoch die Besselsche Ungleichung (vergleiche [Wer04], p. 228f) auf die $a(\lambda)$ anwenden und erhalten, dass jede Menge der Form

$$\Lambda_n \;=\; \left\{\lambda \in \Lambda_f : |a_f(\lambda)| \geq \frac{1}{n}\right\}$$

endlich ist. Insbesondere ist daher auch

$$\Lambda_f \;=\; \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n$$

höchstens abzählbar. □

Bemerkung 1.3.14. In der Literatur findet man statt $a_f(\lambda)$ oft auch $\sigma_f(\lambda)$. Die Menge Λ_f wird auch als das **Bohr-Spektrum** von f bezeichnet.

Da wir nun die formale Zuordnung aus Definition 1.3.12 als (höchstens) abzählbare Summe auffassen können, kann man nun die Frage nach der Konvergenz der Partialsummen dieser Reihe stellen. Hier müssen wir aber aufpassen! Denn im Gegensatz zu den Fourierreihen reinperiodischer Funktionen bietet sich keine ausgezeichnete Ordnung der Fourierkoeffizienten an. Insbesondere können sich die Fourierexponenten einer fastperiodischen Funktion auch im Endlichen häufen.

Ohne weitere Untersuchungen ist es uns aber zumindest möglich, eine umgekehrte Aussage sehr schnell zu zeigen. Ist nämlich eine Reihe der Form $\sum a_k e^{i\lambda_k x}$ gleichmäßig konvergent ($a_k \in \mathbb{C}$ und $\lambda_k \in \mathbb{R}$, λ_k paarweise verschieden), so ist sie auf jeden Fall die Fourierreihe ihrer Summe f:

Satz 1.3.15. *Seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}$, $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j \quad i \neq j$ und $\sum a_k e^{i\lambda_k x}$ konvergiere gleichmäßig (oder im quadratischen Mittel) gegen f. Dann gilt*

$$a_k = a(\lambda_k).$$

Beweis. Da $\sum a_k e^{i\lambda_k x}$ gleichmäßig konvergiert, gilt dies auch für $\sum a_k e^{i\lambda_k x}e^{-i\lambda x}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Deswegen darf die Mittelwertbildung gliedweise ausgeführt werden:

$$a(\lambda) = M\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} a_k e^{i\lambda_k x} e^{-i\lambda x}\right\} = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_k M\left\{e^{i\lambda_k x} e^{-i\lambda x}\right\}$$

Da die $e^{i\lambda x}$ ein ONS bilden, folgt die Aussage des Satzes. $\square$

Umgekehrt können wir aber nach Wahl einer Folge $(\lambda_n) \in \mathbb{R}$ jedenfalls eine fastperiodische Funktion f konstruieren, die diese Fourierkoeffizienten besitzt.

Lemma 1.3.16. *Sei (λ_n) eine beliebige Folge reeller Zahlen. Dann lässt sich eine fastperiodische Funktion f mit genau diesen λ_n als Fourierexponenten konstruieren.*

Beweis. Es genügt, eine Folge von Koeffizienten $a(\lambda_n)$ derart anzugeben, sodaß $\sum_n |a(\lambda_n)| < \infty$. Insbesondere wird $a(\lambda_n) = \frac{1}{2^n}$ dies erfüllen. Damit konvergiert die Fourierreihe $\sum_n a(\lambda_n)e^{i\lambda_n x}$ gegen ein $f \in AP(\mathbb{R})$. Nach Satz 1.3.15 ist sie dann auch die Fourierreihe ihrer Summe f. $\square$

1.4 Parsevalsche Gleichung und der Eindeutigkeitssatz

Wir wollen nun analog zur Theorie der reinperiodischen Funktionen die Parsevalsche Gleichung für fastperiodische Funktionen angeben. Wir wünschen uns ein zu den reinperiodischen Funktionen analoges Resultat der Form

$$M\left\{|f|^2\right\} = \sum_{\lambda\in\Lambda_f} |a_f(\lambda)|^2.$$

Insbesondere reicht es dafür bereits zu zeigen, daß die $(e^{i\lambda x})_{\lambda\in\mathbb{R}}$ einen dichten Teilraum von AP aufspannen.

Der folgende Satz fasst die wichtigsten Regeln zum Rechnen mit den Fourierkoeffizienten fastperiodischer Funktionen zusammen. Abgesehen vom tiefliegenden Multiplikationssatz sind die meisten Eigenschaften leicht zu zeigen.

Satz 1.4.1. *Seien im Folgenden f, g fastperiodisch mit Fourierreihe $f \sim \sum_{\lambda\in\Lambda_f} a_f(\lambda)e^{i\lambda x}$ (resp. $g \sim \sum_{\lambda'\in\Lambda_g} a_g(\lambda')e^{i\lambda' x}$) und $k \in \mathbb{C}$, $d \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

$$kf \sim \sum_{\lambda\in\Lambda_f} k a_f(\lambda)e^{i\lambda x}$$

$$e^{i\mu x} f \sim \sum_{\lambda\in\Lambda_f} a_f(\lambda-\mu)e^{ix\lambda}$$

$$T_d f(x) \sim \sum_{\lambda\in\Lambda_f} a_f(\lambda)e^{i\lambda x}e^{i\lambda k}$$

Weiters gilt der ***Additionssatz***

$$f+g \sim \sum_{\lambda\in\Lambda_{f+g}} a_{f+g}(\lambda)e^{i\lambda x}$$

$$a_{f+g}(\lambda) = a_f(\lambda) + a_g(\lambda)$$

*und zuletzt auch der **Multiplikationssatz***

$$
\begin{aligned}
f \cdot g &\sim \sum_{\lambda \in \Lambda_{f \cdot g}} a_{f \cdot g}(\lambda) e^{i\lambda x} \\
a_{f \cdot g}(\lambda) &= \sum_{\lambda' + \lambda'' = \lambda} a_f(\lambda') a_g(\lambda'') \quad \lambda' \in \Lambda_f,\, \lambda'' \in \Lambda_g.
\end{aligned}
$$

Beweis. Die ersten drei Beziehungen folgen direkt aus den bekannten Rechenregeln für Mittelwerte. Den Additionssatz bekommt man auch direkt mittels

$$M_x\{(f(x) + g(x))e^{-i\lambda x}\} = M_x\{f(x)e^{-i\lambda x}\} + M_x\{g(x)e^{-i\lambda x}\}$$

Ungleich mehr Aufwand müssten wir für den Beweis des Multiplikationssatzes betreiben. Er kann aber direkt aus den Fundamentalsätzen hergeleitet werden. □

Wir können nun zum Beweis eines der Fundamentalsätze der Theorie der fastperiodischen Funktionen schreiten: dem Eindeutigkeitssatz. Hierzu werden wir im Vorfeld einige Hilfsresultate angeben. Wir werden uns hierbei im Groben an der Arbeit von [Boh32] orientieren, wobei angemerkt sein soll, daß auch Bohr den eigentlichen Beweis dort in einer Überarbeitung von De La Vallee Poussin angibt.

Satz 1.4.2 (Die Fundamentalsätze)**.** *Es sei $f \in AP(\mathbb{R})$. Dann gilt:*

$$
\begin{aligned}
a_f(\lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad &\Longleftrightarrow \qquad f \equiv 0 \qquad (1.2) \\
M\{|f|^2\} &= \sum_{\lambda \in \Lambda_f} |a_f(\lambda)|^2
\end{aligned}
$$

Beweis. Für den Beweis verweisen wir auf [Boh32], p. 61ff. □

Satz 1.4.3 (Haupthilfssatz)**.** *Sei $f \in AP(\mathbb{R})$ und weiters gelte*

$$a_f(\lambda) = 0 \quad \forall \lambda.$$

Dann gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists T_0(\varepsilon) \quad \textit{sodass} \quad \left| \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-i\lambda x} dx \right| < \varepsilon \quad \forall T > T_0,\, \forall \lambda.$$

Beweis. Siehe [Boh32], p. 61-62. □

Definition 1.4.4 (Gleichgradige Fastperiodizität, Majorisierbarkeit)**.** Eine Menge F fastperiodischer Funktionen heisst **gleichgradig fastperiodisch**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $L = L(\varepsilon) > 0$ gibt, sodass in jedem Intervall der Länge L mindestens eine gemeinsame Verschiebungszahl τ_F aller Funktionen $f \in F$ liegt, also dass

$$|f(x + \tau_F) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall f \in F, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Eine Menge F heisst **majorisierbar** mit Majorante f, wenn zu gegebenem $\varepsilon > 0$ jede Verschiebungszahl $\tau_f(\varepsilon)$ auch eine Verschiebungszahl aller $f_n \in F$ ist. Insbesonders ist dann die Menge $\{f\} \cup F$ gleichgradig fastperiodisch.

Bemerkung 1.4.5. Wir verwenden hier die Übersetzung gleichgradig fastperiodisch für das englische *equi-almost periodic* aus [Cor61], auch in Anlehnung an den Begriff der gleichgradigen Stetigkeit. Man findet aber auch *gleichartig fastperiodisch*, zum Beispiel in [Maa50b].

Lemma 1.4.6. *Sei f die Majorante der Folge (f_n) fastperiodischer Funktionen. Dann ist die Menge $\{f, f_1, f_2, \ldots\}$ gleichgradig gleichmäßig stetig.*

Beweis. Nach der Eigenschaft 2 von Satz 1.2.12 enthält jedes Intervall $L(\varepsilon)$ bereits ein Intervall der Länge $\delta > 0$, sodass dieses Intervall in $E(\varepsilon, f)$ liegt, also alle Elemente dieses Intervalls bereits Verschiebungszahlen zu f sind. Ein solches δ der Majorante f erfüllt dann bereits die Anforderungen der gleichgradig gleichmäßigen Stetigkeit. □

Definition 1.4.7. Eine Menge F, welche sowohl gleichgradig fastperiodisch als auch gleichgradig gleichmäßig stetig ist, wird als **ausgezeichnete Menge** bezeichnet.

Bemerkung 1.4.8. Weiters gilt ein dem aus der Funktionalanalysis bekannten Satz von Arzelà-Ascoli analoges Resultat für fastperiodische Funktionen. Wenn eine ausgezeichnete Menge F auch noch für ein $M \geq 0$ der Bedingung

$$||f|| \leq M \quad \forall f \in F$$

genügt, ist der Abschluss dieser Menge bereits kompakt (in der gleichmäßigen Topologie).

Bemerkung 1.4.9. Ein naheliegendes Beispiel für eine solche ausgezeichnete Menge ist die Familie $(T_k f)_{k \in \mathbb{R}}$.

Lemma 1.4.10. *Die Aussagen, F sei majorisierbar oder F sei eine ausgezeichnete Menge sind äquivalent.*

Beweis. Leicht einzusehen ist, daß eine majorisierbare Menge F eine ausgezeichnete Menge ist. Die Umkehrung ist schwieriger zu zeigen und wir verweisen hier auf [Boc27a], Satz XIX und dessen Beweis. □

Im folgenden Satz wollen wir nun einige Resultate zusammenfassen, die uns zeigen, daß auf ausgezeichneten Mengen die gleichmäßige Topologie mit der durch Konvergenz im quadratischen Mittel induzierten Topologie zusammenfällt.

Satz 1.4.11. *Es sei F eine ausgezeichnete Menge. Dann gelten folgende Aussagen:*

- *Sei $\alpha > 0$ beliebig. Dann existiert ein nur von F und α abhängiges $\beta > 0$ derart, sodass für beliebige $f, g \in F$ gilt:*

$$M\left\{|f-g|^2\right\} \leq \beta \quad \Longrightarrow \quad ||f-g||_\infty \leq \alpha.$$

- *Aus Konvergenz im quadratischen Mittel folgt die gleichmäßige Konvergenz. Ist $(f_n) \in F$ eine Cauchyfolge fastperiodischer Funktionen bezüglich der Konvergenz im quadratischen Mittel, also gilt*

$$\lim_{n,m\to\infty} M\{|f_n - f_m|^2\} = 0,$$

dann besitzt die Folge auch einen gleichmäßigen Grenzwert f in $AP(\mathbb{R})$.

- *Sei $(g_n) \in AP(\mathbb{R})$ mit Majorante $g \in AP(\mathbb{R})$ und es gelte $M\{|g_n - f|^2\} \to 0$ für $n \to \infty$. Dann gilt auch*

$$||g_n - f||_\infty \to 0.$$

Beweis. Für den Beweis der ersten Behauptung verweisen wir auf [Boh25], Hilfssatz 2, p. 108-109. Die zweite folgt dann direkt daraus. Die dritte Behauptung folgt schließlich aus den vorangegangenen Behauptungen und dem Fakt, daß $(g, g_1, g_2, \ldots)$ schon wieder eine ausgezeichnete Menge ist. □

Bemerkung 1.4.12. Es scheint auch wichtig, kurz noch etwas näher auf den Unterschied der beiden auf den ersten Blick sehr ähnlichen Konzepte gleichgradig fastperiodisch und majorisierbar einzugehen. Wird eine Menge F von fastperiodischen Funktionen von g majorisiert, so kann man dies auch in der Form

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad E(g, \varepsilon) \subseteq E(f, \varepsilon) \qquad \forall f \in F$$

schreiben. Umgekehrt ist die Forderung, F solle gleichgradig fastperiodisch sein, aber nur äquivalent dazu, daß $\bigcap_{f \in F} E(f, \varepsilon)$ wieder eine relativ dichte Menge $\forall \varepsilon > 0$ ist.

Wir geben ein Beispiel dieses Unterschieds. Es sei F_1 die Menge aller stetigen periodischen Funktionen mit Periode 1. Es ist jedenfalls klar, daß

$$\bigcap_{f \in F_1} E(f, \varepsilon) \supseteq \mathbb{Z}$$

gilt, der Durchschnitt also relativ dicht ist. F_1 ist daher gleichgradig fastperiodisch. Da sich diese Funktionen aber im Intervall $[0, 1]$ nahezu beliebig verhalten können, ist es einzusehen, daß es keine weiteren gemeinsamen Verschiebungszahlen gibt, also sogar wegen der Beliebigkeit von ε Gleichheit mit $\mathbb{Z}$ herrscht. Jetzt kann $\mathbb{Z}$ aber nicht Menge der Verschiebungszahlen einer fastperiodischen Funktion sein, da dies der Eigenschaft widerspricht, daß jedes Intervall der Länge L nicht nur eine, sondern bereits ein ganzes nichtleeres Teilintervall von Verschiebungszahlen, enthält. Also ist F_1 nicht majorisierbar.

1.5 Beweis des Hauptsatzes

Wir haben nun die nötigen Werkzeuge zur Hand, die andere Richtung des Hauptsatzes zu beweisen, daß nämlich jede fastperiodische Funktion gleichmäßig durch eine Folge trigonometrischer Polynome approximiert werden kann. Wie im reinperiodischen Fall reichen hier die Partialsummen der Fourierreihe (im allgemeinen Fall) **nicht** aus. Allerdings können wir die gesuchten Polynome daraus konstruieren.

Beweis. Zum Beweis des Hauptsatzes wird es ausreichen, für jede fastperiodische Funktion f eine von f majorisierte Folge (p_n) von trigonometrischen Polynomen anzugeben, die im quadratischen Mittel gegen f konvergiert. Dann wird diese Folge nämlich nach Satz 1.2.12 sogar gleichmäßig gegen f streben, womit die Behauptung bewiesen wäre.

Wir folgen damit der Beweisführung in [Boh32], p. 70ff. Wir suchen zu Beginn eine Vorgehensweise, die es uns ermöglicht, die Menge der Fourierexponenten Λ_f sukzessive zu erfassen und damit die von f majorisierte Folge von Polynomen zu konstruieren.

Es sei nun f eine fastperiodische Funktion mit Exponentenmenge Λ_f. Für diese Menge können wir eine (abzählbare) Basis $\beta_1, \beta_2, \ldots$ angeben, deren Zahlen dann alle $\mathbb{Q}$ linear unabhängig sind, wenn wir $\mathbb{R}$ als Vektorraum über $\mathbb{Q}$ auffassen.
Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir nun

$$E_k = \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \,|\, \lambda = \frac{\omega_1}{k!}\beta_1 + \frac{\omega_2}{k!}\beta_2 + \ldots + \frac{\omega_k}{k!}\beta_k,\ \omega_i \in \mathbb{Z},\ |\omega_i| \leq kk! \right\}.$$

Die Nützlichkeit dieser auf den ersten Blick recht willkürlich gewählten Menge wird bei Betrachtung ihrer Eigenschaften offenbar. Leicht einzusehen ist, daß die Mengen E_k eine aufsteigende Folge von Mengen bilden, das heisst es gilt [1]

$$E_k \subset E_{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Weiters ist jede Menge E_k endlich, da es ja wegen der Beschränktheit der ω_i nur endlich viele Koeffizienten gibt. Und zuletzt ist klar, daß jedes λ spätestens ab einem gewissen k_0 in dieser Folge von Mengen auftritt.

Als nächstes führen wir nach einer Methode von Bochner einen zusammengesetzten Fejér-Kern ein. Seien $k, (\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ wie oben. Dann bezeichne

$$K_k(s) = F_{kk!}\left(\frac{\beta_1}{k!}s\right) F_{kk!}\left(\frac{\beta_2}{k!}s\right) \cdots F_{kk!}\left(\frac{\beta_k}{k!}s\right)$$

den zusammengesetzten Fejér-Kern. Als endliches Produkt von Fejér-Kernen ist klar, daß $K_k(s) \geq 0$. Wir verwenden nun die andere Schreibweise für Fejér-Kerne aus 1.3.5 und stellen damit den zusammengesetzten Kern in folgender Form dar:

$$K_k(s) = \sum_{\omega_1=-kk!}^{kk!} \cdots \sum_{\omega_k=-kk}^{kk!} \left(1 - \frac{|\omega_1|}{kk!}\right) \cdots \left(1 - \frac{|\omega_k|}{kk!}\right) e^{-is(\frac{\omega_1}{k!}\beta_1 + \ldots + \frac{\omega_k}{k!}\beta_k)}$$

Für

$$\lambda = \sum_{j=1}^{k} \frac{\omega_j}{k!}\beta_j \in E_k$$

schreiben wir

$$\xi_{k,\lambda} = \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{|\omega_i|}{kk!}\right),$$

wobei wir $\xi_{k,\lambda} = 0$ setzen für $\lambda \notin E_k$. Tritt λ das erste Mal in E_{k_0} auf, so gilt nach unserer Konstruktion der E_k sicher $\lambda \in E_k \, \forall k \geq k_0$. Geht man nun zu $k \to \infty$ über, so haben wir wegen der Eindeutigkeit der Darstellung bezüglich einer Basis jedenfalls $\omega_k = 0 \; \forall k > k_0$. Die übrigen Koeffizienten werden beim

[1] Lässt sich ein fixes Λ_{i_0} in E_k mit Koeffizienten $\omega_1, \ldots, \omega_k$ darstellen, so wählt man beim Übergang auf E_{k+1} $\omega_i' = (k+1)\omega_i$ für $1 \leq i \leq k$ und $\omega_{k+1}' = 0$.

Übergang von E_{k_0} zu E_k mit $\frac{k!}{k_0!}$ multipliziert. Der Bruchterm in der Definition der $\xi_{k,\lambda}$ verschwindet daher im Grenzübergang und damit $\xi_{k,\lambda} \to 1$ für $k \to \infty$.

Aus dieser Schreibweise heraus lässt sich auch leicht der Mittelwert $M\{K_k\}$ angeben. Aufgrund der linearen Unabhängigkeit der β_i ist der Exponent genau dann gleich 0, wenn alle $\omega_i = 0$ sind. Daher sieht man $M\{K_k\} = 1 \quad \forall k$.

Weiters treten im Exponenten nun genau diejenigen $\lambda \in \mathbb{R}$ auf, die in E_k liegen. Deswegen gilt dann

$$K_k(s) = \sum_{\lambda \in E_k} \xi_{k,\lambda}\, e^{-i\,\lambda s}.$$

Die Funktionen der Form

$$s_k(x) = \sum_{\lambda \in E_k} \xi_{k,\lambda} a_f(\lambda) e^{i\lambda x}$$

ergeben dann schon die geforderte Folge von Funktionen. Um den Beweis zu vollenden, ist noch zu zeigen, daß die s_k im quadratischen Mittel gegen f konvergieren und von f majorisiert werden:

Für die Konvergenz im Mittel ziehen wir die Parseval'sche Formel zu Hilfe und erhalten:

$$M\{|f - s_k|^2\} \;=\; \sum_{\lambda \in E_k} (1 - \xi_{k,\lambda})|a_f(\lambda)|^2 + \sum_{\lambda \notin E_k} (1 - \underbrace{\xi_{k,\lambda}}_{=0})|a_f(\lambda)|^2$$

Wegen

$$\sum_{\lambda \notin E_k} (1 - \xi_{k,\lambda})|a_f(\lambda)|^2 = \sum_{\lambda \notin E_k} |a_f(\lambda)|^2 \leq \sum_{\lambda \in \Lambda_f} |a_f(\lambda)|^2 < \infty$$

kann man k_0 sicher so groß wählen, sodass $\sum_{\lambda \notin E_{k_0}} (1 - \xi_{k_0,\lambda})|a_f(\lambda)|^2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Wegen $\xi_{k,\lambda} \to 1$ bei $k \to \infty$ kann man auch k_1 derart wählen, sodass $\sum_{\lambda \in E_{k_1}} (1 - \xi_{k_1,\lambda})|a_f(\lambda)|^2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Damit folgt die Behauptung für $k > k_1, k_2$.

Es bleibt nun noch zu zeigen, daß jede Verschiebungszahl $\tau_\varepsilon(f)$ gleichzeitig Verschiebungszahl zu s_k ist. Hier zeigen wir zunächst, daß sich (analog zum Fall der reinperiodischen Funktionen) diese „Partialsummen" durch Faltung mit dem zusammengesetzten Fejér-Kern darstellen lassen:

$$s_k(x) \;=\; M_s\{f(x+s)K_k(s)\}$$

Das ergibt sich direkt durch einsetzen:

$$\begin{aligned} s_k(x) &= \sum_{\lambda \in E_k} \xi_{k,\lambda}\; a_f(\lambda) e^{i\lambda x} \\ &= \sum_{\lambda \in E_k} \xi_{k,\lambda}\; M_s\left\{f(x+s)e^{-i\lambda s}\right\} \\ &= M_s\left\{f(x+s) \sum_{\lambda \in E_k} \xi_{k,\lambda}\; e^{-i\lambda s}\right\} \;=\; M_s\{f(x+s)\,K_k(s)\} \end{aligned}$$

Sei nun τ_ε eine beliebige zu f gehörige Verschiebungszahl. Wir betrachten

$$\begin{aligned} s_k(x+\tau) - s_k(x) &= M_s\left\{f(x+s+\tau)\,K_k(s)\right\} - M_s\left\{f(x+s)\,K_k(s)\right\} \\ &= M_s\left\{\underbrace{[f(x+s+\tau)-f(x+s)]}_{\leq \varepsilon \quad nach\ Vorauss.}\,K_k(s)\right\} \\ &\leq \varepsilon\,\underbrace{M\left\{K_k\right\}}_{=1} = \varepsilon \end{aligned}$$

Damit haben wir die Voraussetzungen für die Anwendung des dritten Teils von Satz 1.4.11 geschaffen, was den Beweis des Hauptsatzes beschließt. □

1.6 Resultate über Verschiebungszahlen

Es lassen sich noch weitere interessante Resultate zu Verschiebungszahlen angeben, die über das bereits erwähnte hinausgehen. Allen voran gibt es einen direkten Zusammenhang zwischen den Verschiebungszahlen $\tau_f(\varepsilon)$ einer fastperiodischen Funktion f und ihren Fourierexponenten $\lambda \in \Lambda_f$.

Satz 1.6.1. *Sei $f \in AP(\mathbb{R})$ und seien $n_0 \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$ beliebig. Dann gibt es ein von n_0 und δ abhängiges $\varepsilon > 0$ derart, sodass für alle $\lambda \in \Lambda_f$ gilt:*

$$\tau \in E(f,\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad \left|e^{i\,\lambda\tau} - 1\right| < \delta. \tag{1.3}$$

Beweis. Nach [Boh25], p. 106. Wir müssen zu gegebenem n_0 und δ ein ε konstruieren, sodass jede zu diesem ε gehörige Verschiebungszahl $\tau_f(\varepsilon)$ auch die Ungleichungen der rechten Seite von (1.3) erfüllt. Wir definieren dazu zuerst $A := \min_{\lambda\in\Lambda_{n_0}} |a_f(\lambda)|$, wobei Λ_n die (endliche) Teilmenge der Fourierexponenten von f ist, deren Fourierkoeffizienten Betrag $\geq \frac{1}{n}$ haben. Klarerweise ist $A > 0$. Wir behaupten nun

$$\varepsilon = \frac{A}{2}\delta$$

genüge diesen Anforderungen. Sei nun also $\tau = \tau_f(\varepsilon) \in E(\varepsilon, f)$. Dann gilt nach den Rechenregeln für Mittelwerte für $\lambda \in \Lambda_n$

$$\left|M_x\left\{[f(x+\tau) - f(x)]\,e^{-i\,\lambda\tau}\right\}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\underbrace{M_x\left\{f(x+\tau)e^{-i\,\lambda\tau}\right\}}_{=a_f(\lambda)e^{i\,\lambda\tau}} - \underbrace{M_x\left\{f(x)e^{-i\,\lambda\tau}\right\}}_{=a_f(\lambda)}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\left(e^{i\,\lambda\tau} - 1\right)\right| < \frac{\varepsilon}{|a_f(\lambda)|} \leq \frac{\varepsilon}{A}$$

und mit $\frac{\varepsilon}{A} < \delta$ folgt die Behauptung. □

Satz 1.6.2. *Sei f wie im obigen Satz und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existieren $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ und $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ derart, sodass*

$$\left|e^{i\,\lambda\tau} - 1\right| < \delta \quad \forall\lambda \in \Lambda_{n_0} \quad \Longrightarrow \quad \tau = \tau_f(\varepsilon) \in E(f,\varepsilon)$$

Beweis. Nach [Boh25], p.105. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Durch Anwendung von Satz 1.4.11 erhalten wir ein ε' mit

$$M_x\left\{|f(x+\tau)-f(x)|^2\right\} \le \varepsilon' \quad \Longrightarrow \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+\tau)-f(x)| \le \varepsilon.$$

Sei nun also τ beliebig derart, daß es die Ungleichungen der Voraussetzung erfüllt. Damit erhalten wir bei passender Wahl von großem n_0 und kleinem $\delta(n_0)$ und unter Anwendung des vorangegangen Satzes

$$\begin{aligned}
M_x\left\{|f(x+\tau)-f(x)|^2\right\} &= \sum_{\lambda\in\Lambda_f} \left|a_f(\lambda)(e^{i\,\lambda\tau}-1)\right|^2 \\
&= \sum_{\lambda\in\Lambda_{n_0}} \left|a_f(\lambda)(e^{i\,\lambda\tau}-1)\right|^2 + \sum_{\lambda\in\Lambda_f\setminus\Lambda_{n_0}} \left|a_f(\lambda)(e^{i\,\lambda\tau}-1)\right|^2 \\
&\le \delta^2 \sum_{\lambda\in\Lambda_{n_0}} |a_f(\lambda)|^2 + 4 \sum_{\lambda\in\Lambda_f\setminus\Lambda_{n_0}} |a_f(\lambda)|^2.
\end{aligned}$$

Beide Terme auf der rechten Seite können beliebig klein gemacht werden, also insbesonders auch $< \varepsilon'$. Damit ist aber dann τ auch Verschiebungszahl von f und die Behauptung bewiesen. □

1.7 Konvergenzresultate

Nachdem wir das Thema der Konvergenz der Fourierreihe einer fastperiodischen Funktion bislang stark vernachlässigt haben, widmen wir uns hier einigen Resultaten zu diesem Thema. Direkt aus der Parsevalschen Gleichung bekommt man das erste zentrale Ergebnis, welches wir ja implizit schon in weiten Teilen der Ausführungen verwendet haben.

Lemma 1.7.1. *Sei f fastperiodisch. Dann gilt*

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_f} |a_f(\lambda)|^2 < \infty$$

Beweis. Mit f ist auch $|f|$ und damit auch $|f|^2$ fastperiodisch. Daher existiert der Mittelwert und ist nach der Parsevalschen Gleichung

$$M\{|f|^2\} = \sum_{\lambda\in\Lambda_f} |a_f(\lambda)|^2.$$

□

In unserem Beweis des Hauptsatzes haben wir eine Folge von (Fejér-) Polynomen der Form $s_k(x) = \sum_{n=1}^{k} \xi_{k,n} A_n e^{i\,\Lambda_n x}$ mit $\lim_{k\to\infty} \xi_{k,\lambda} = 1 \quad \forall n$ konstruiert, die gleichmäßig gegen f konvergieren.

Lemma 1.7.2. *Es sei f fastperiodisch. Gilt $a_f(\lambda) > 0 \quad \forall\lambda$, dann gilt sogar $\sum_\lambda |a_f(\lambda)| < \infty$, das heisst die Fourierreihe konvergiert absolut und gleichmäßig gegen f.*

Beweis. Man betrachte $x = 0$ und wende die Polynome aus dem Beweis des Hauptsatzes an. □

Weiters gibt es ein leicht abzuleitendes Resultat, wenn die Fourierexponenten linear unabhängig sind.

Lemma 1.7.3. *Es seien die Fourierexponenten $\lambda \in \Lambda_f$ linear unabhängig. Dann gilt $\sum_{\lambda\in\Lambda_f} |a_f(\lambda)| < \infty$.*

Beweis. Zuerst ordnen wir die Fourierexponenten durch die bekannten endlichen Mengen der Form Λ_k und bezeichnen mit A_n die Fourierkoeffizienten dieser Ordnung der Fourierexponenten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$. Dann setzen wir $x = 0$ und ω_n derart, sodass

$$A_n = |A_n| e^{i\omega_n}.$$

Weiters seien $k, n_0 \in \mathbb{N}$ beliebig und wir setzen

$$K_k'(s) = F_k(\lambda_1 s + \omega_1) F_k(\lambda_2 s + \omega_2) \cdots F_k(\lambda_{n_0} s + \omega_{n_0})$$

und erhalten durch Ausmultiplizieren einen Term der Form

$$K_k'(s) = 1 + \frac{k-1}{k}\left[e^{-i\omega_1} e^{-i\lambda_1 s} + \ldots + e^{-i\omega_{n_0}} e^{-i\lambda_{n_0} s}\right] + P(s)$$

wobei in dem Restterm $P(s)$ sämtliche λ_n Terme mit positivem Vorzeichen sowie sämtliche Linearkombinationen daraus auftreten. Nun bilden wir bei $x = 0$ den Mittelwert und bemerken zuerst, daß wegen der Eigenschaften des Fejér-Kerns jedenfalls gilt, daß $M\{f\, K_k'\} \leq ||f||_\infty$. Weiters haben wir

$$\begin{aligned} M\left\{f\, K_k'\right\} &= \frac{k-1}{k}\left[A_1 e^{-i\omega_1} + \ldots + A_{n_0} e^{-i\omega_{n_0}}\right] \\ &= \frac{k}{k-1}\left[|A_1| + \ldots + |A_{n_0}|\right] \end{aligned}$$

und damit

$$|A_1| + \ldots + |A_{n_0}| \leq \frac{k}{k-1} ||f||_\infty.$$

Aus der Beliebigkeit von n_0 folgt nun die Behauptung. Wenn wir dann weiters noch den Grenzübergang $k \to \infty$ durchführen, erhalten wir sogar

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| \; = \sum_{\lambda\in\Lambda_f} |a_f(\lambda)| \; = \; ||f||_\infty.$$

□

Weitere interessante Konvergenzresultate lassen sich in den Arbeiten [Bre70], [Bre66] und [Coo81] finden. Wir wollen davon einige Interessante im Folgenden angeben. Um diese Ergebnisse zu erhalten, ist es notwendig, die Verteilung der Fourierkoeffizienten von f zu betrachten. Das folgende Lemma liefert uns eine hinreichende Bedingung für die gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe gegen f unter der Annahme, daß sich Λ_f nur bei ∞ häuft.

Lemma 1.7.4. *Es sei f fastperiodisch und die (monoton wachsend angeordnete) Folge $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ der Fourierkoeffizienten von f häufe sich nur im Unendlichen. Weiters sei f Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $a \in (0,1)$. Gilt dann*

$$\lambda_n^{-a} \ln \frac{\lambda_{n+1} + \lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \to 0 \quad n \to \infty, \tag{1.4}$$

so konvergiert die Fourierreihe von f gleichmäßig auf $\mathbb{R}$.

Beweis. Siehe [Bre70], p. 1212ff. □

Das obige Resultat kann man auch so formulieren, daß die Lücken zwischen aufeinanderfolgenden Fourierexponenten $\lambda_{n+1} - \lambda_n$ nicht zu klein werden dürfen im Vergleich zu den λ_n.

Dieses Resultat ist bereits scharf: ersetzt man den Grenzwert 0 in (1.4) durch eine Konstante $C > 0$, so kann man bereits fastperiodische Funktionen konstruieren, deren Fourierreihe in zumindest einem Punkt divergiert. Dieses und andere Divergenzresultate finden sich in [Bre66].

Lemma 1.7.5. *Es gibt eine Funktion f wie aus Lemma 1.7.4 mit*

$$\lambda_n^{-a} \ln \frac{\lambda_{n+1} + \lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \to C > 0 \quad n \to \infty,$$

deren Fourierreihe bei $x = 0$ divergiert.

Bemerkung 1.7.6. Satz 2 aus [Bre70] gibt ein analoges Resultat für fastperiodische Funktionen, deren Fourierexponenten einen einzigen endlichen Häufungswert aufweisen. Im Gegensatz zu der im obigen Lemma geforderten Lipschitz-Stetigkeit werden dort aber Anforderungen an das Spektrum von f gestellt. Heuristisch gesprochen wird gefordert, daß das Spektrum ausserhalb einer Umgebung des Häufungswert einfach dünn genug werde (im Sinne lakunärer Reihen).

1.8 Fastperiodische Funkionen über topologischen Gruppen

Wir haben bislang die Theorie der fastperiodischen Funktionen auf sehr traditionelle Weise mit dem Zugang von Bohr entwickelt. Wir wollen nun aber den modernen Zugang mittels der Methoden der harmonischen Analyse betrachten und für lokalkompakte Gruppen herleiten. Wir beginnen mit einigen notwendigen Definitionen.

Definition 1.8.1 (Topologische Gruppe)**.** Sei G eine Gruppe mit additiv geschriebener Gruppenoperation

$$+ : G \times G \to G.$$

Ist diese Gruppe gleichzeitig ein topologischer Raum und sind sowohl die Gruppenoperation $+$ als auch die Inversion stetig, so spricht man von einer **topologischen Gruppe**.

Wir können nun auch schon Funktionen über solchen Gruppen betrachten. Im Speziellen betrachten wir mit

$$\mathfrak{B}(G) := \{f : G \to \mathbb{C} \,|\, ||f||_\infty < \infty\}$$

den Raum der beschränkten komplex-wertigen Funktionen über G. Versehen mit der Supremumsnorm ist $(\mathfrak{B}(G), ||\cdot||_\infty)$ ein Banachraum. Jetzt haben wir auch schon genug Definitionen, um Fastperiodizität in diesem Rahmen zu definieren.

Definition 1.8.2. Sei G eine (topologische) Gruppe. Wir nennen f fastperiodisch, wenn $\overline{(f(\cdot + a))_{a\in G}}$ kompakt in $\mathfrak{B}(G)$ ist. Die Menge aller stetigen fastperiodischen Funktionen über G bezeichnen wir mit $AP(G)$.

Bemerkung 1.8.3. Wir haben für G sehr wenig vorausgesetzt. Insbesondere haben wir in der Definition nicht die Kommutativität gefordert. Es zeigt sich aber, daß diese Forderung nicht notwendig ist und die Mengen

$$\overline{(f(\cdot + a))_{a\in G}}$$
$$\overline{(f(b + \cdot))_{b\in G}}$$

die gleiche Klasse von Funktionen definieren. Vergleiche dazu [HR79], p. 246-247, Theorem (18.1).

Bemerkung 1.8.4. Wir haben in unserer Definition von $AP(G)$ explizit nur stetige Funktionen zugelassen. Dies ist nicht unbedingt notwendig, da sich auch fastperiodische Funktionen über Gruppen betrachten lassen, die nur die diskrete Topologie zulassen.

Diese Definition ist außerordentlich wichtig, da sie einen auf den ersten Blick gänzlich anderen Zugang zu den fastperiodischen Funktionen ermöglicht, nämlich das sogenannte **Kriterium von Bochner**.

Lemma 1.8.5 (Kriterium von Bochner)**.** *f ist genau dann fastperiodisch, wenn $(f(\cdot + x))_{x\in\mathbb{R}}$ relativ kompakt in $(C^b, ||\cdot||_\infty)$ ist.*

Für fastperiodische Funktionen auf G gelten jedenfalls analoge Eigenschaften wie für Bohrsche fastperiodische Funktionen. Insbesondere ist $AP(G)$ abgeschlossen unter Addition und Multiplikation und unter Translation. Wir haben nun die Mittel in der Hand, für $AP(G)$ den Mittelwert zu definieren.

Satz 1.8.6. *Sei G eine topologische Gruppe. Dann existiert eine eindeutig bestimmte, translationsinvariante nicht-negative Abbildung*

$$M : AP(G) \to \mathbb{C}.$$

*Diese Abbildung M bezeichnen wir als **Mittelwert** von f.*

Beweis. Vergleiche [HR79], p. 250-253, Theorem (18.8), (18.9). □

Bislang haben wir allerdings nur die Existenz einer solchen Abbildung. Wünschenswert ist aber doch eine Integraldarstellung. Dafür müssen wir uns aber zuerst überlegen, welche Anforderungen an die zugrundeliegende Gruppe G zu stellen sind, damit ein Integralbegriff überhaupt sinnvoll zu formulieren ist. Hier liefert uns die klassische harmonische Analyse mit dem **Haar-Maß** auf lokalkompakten Gruppen das nötige Werkzeug.

Satz 1.8.7. *Sei G eine lokalkompakte Gruppe, das heißt jedes Element $x \in G$ besitze eine kompakte Umgebung in G. Dann existiert ein (bis auf Skalierung) eindeutiges, linkes translationsinvariantes Borel-Maß μ auf G. $\mu(G) < \infty$ gilt genau dann wenn G kompakt ist.*

Beweis. Vergleiche [Dei02], p. 89ff. □

Bemerkung 1.8.8. Die Unterscheidung in links-translationsinvariant und rechts-translationsinvariant ist notwendig, da damit zwei voneinander verschiedene Maße definiert werden. Auf sogenannten **unimodularen** Gruppen stimmen linkes und rechtes Haarmaß allerdings überein. Zu diesen zählen jedenfalls alle abelschen lokalkompakten Gruppen. Zu den weiteren Details der Konstruktion des Haarmaßes und des darauf aufbauenden Integrals sei auf [HR79], p. 117ff, verwiesen.

Satz 1.8.9. *Sei G eine lokalkompakte, Abelsche Gruppe. Es sei darüberhinaus σ-kompakt, das heisst G sei die abzählbare Vereinigung kompakter Mengen. Dann existiert eine aufsteigende Folge präkompakter Mengen (H_i) derart, sodass für $f \in AP(G)$ gilt:*

$$M\{f\} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mu(H_n)} \int_{H_n} f(x)d\mu(x).$$

Beweis. Der Satz in der vorliegenden Form ist schon eine starke Verkürzung der Resultate zu diesem Thema. In [HR79], p. 252ff, Theorem (18.10) wird bereits gezeigt, daß wenn für eine lokalkompakte (nicht-Abelsche) Gruppe G eine aufsteigende Folge präkompakter Mengen mit endlichen Maß existiert und diese der Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu((x + H_n) \cap H_n')}{\mu(H_n)}$$

für alle $x \in G$ genügen, für alle $f \in AP(G)$ bereits die Integraldarstellung des Mittelwerts existiert. Ist G dann darüber hinaus σ-kompakt und Abelsch, so kann die Existenz einer solchen (in der englischen Literatur auch als *absorbing compact exhaustion* bezeichneten) Mengenfolge mit Theorem (18.14) gezeigt werden. □

Bemerkung 1.8.10. Setzt man beispielsweise $G = \mathbb{R}$ und $H_n = (-n, n)$, so bekommt man die klassische Definition des Mittelwerts für $f \in AP(\mathbb{R})$.

Im Kontext der lokalkompakten abelschen Gruppen ersetzen wir auch die Approximation durch endliche trigonometrische Polynome durch ein allgemeineres Konzept. Es sei $\hat{G}$ die duale Gruppe zu G, das heisst die (lokalkompakte) Gruppe der normierten stetigen linearen Funktionale auf G. Die Elemente von $\hat{G}$ heißen auch **Charaktere** von G.

Lemma 1.8.11. *Sei G lokalkompakt und Abelsch mit dualer Gruppe $\hat{G}$ und es sei $f \in AP(G)$. Zu f existiert eine höchstens abzählbare Menge von Charakteren mit der Eigenschaft, daß es für jedes $\varepsilon > 0$ es eine endliche Menge von Charakteren $\xi_1, \dots, \xi_N$ und komplexer Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ gibt, sodass*

$$||f(x) - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e^{2\pi i \xi_j(x)}||_\infty < \varepsilon.$$

Beweis. Vergleiche [AK43], p. 477-478. □

Hier auf die Theorie der Fourierreihen über kompakten Gruppen einzugehen, würde den Rahmen bei weitem sprengen. Wir verweisen daher auf die ausführlichen Darstellungen in [HR70], p. 328ff. Gleichzeitig wollen wir aber noch einen anderen, mit unseren Überlegungen in diesem Abschnitt verwandten Zugang aufzeigen. Es ist nämlich leicht einzusehen, daß für eine kompakte Gruppe G

$$AP(G) = C(G)$$

gilt, daß also jede stetige Funktion bereits fastperiodisch ist. Das legt eine Verbindung zwischen fastperiodischen Funktionen auf einer lokalkompakten Gruppe G und den stetigen Funktionen auf einer noch zu definierenden kompakten Gruppe H nahe. Dies wollen wir nun formalisieren.

Satz 1.8.12. *Es sei G eine lokalkompakte Gruppe. Dann existiert eine (bis auf Isomorphie) eindeutige kompakte Gruppe H und ein stetiger Homomorphismus $\phi : G \to H$ derart, sodass es für jede kompakte Gruppe H' und jeden stetigen Homomorphismus $\phi' : G \to H'$ einen eindeutigen, stetigen Homomorphismus $\mu : H \to H'$ mit $\phi' = \mu \circ \phi$ gibt.*

Beweis. Für den Beweis verweisen wir auf [Dix77], p. 333-334. □

Das im obigen Satz definierte H wird auch als **Bohr-Kompaktifizierung** von G bezeichnet. Was diese nun mit den fastperiodischen Funktionen auf G zu tun hat, zeigt der folgende Satz.

Satz 1.8.13. *Es sei G lokalkompakt mit Bohrkompaktifizierung H. Ist $f \in AP(G)$, dann existiert eine stetige Funktion $g : H \to \mathbb{C}$ mit $f = g \circ \phi$. Weiters ist f der gleichmäßige Grenzwert von Linearkombinationen der Koeffizienten endlich-dimensionaler stetiger irreduzibler unitärer Darstellungen von G.*

Beweis. Vergleiche [Dix77], p. 335-336. □

Dieser Satz liefert uns das gewünschte Resultat. Eine fastperiodische Funktion auf G entspricht einer stetigen Funktion auf der Bohrkompaktifierzung von G. Desweiteren erhalten wir auch die allgemeine Formulierung des Konzepts der Fourierreihen im nicht-abelschen Fall.

Ist G lokalkompakt und abelsch mit dualer Gruppe $\hat{G}$, so kann man die Konstruktion der Bohrkompaktifierzung auch sehr direkt angeben. Ersetzt man die gleichmäßige Topologie von $\hat{G}$ mit der diskreten, erhält man wieder eine lokalkompakte Gruppe. Deren duale Gruppe wollen wir mit

$$H = \hat{\hat{G}}_d$$

bezeichnen. Nach dem Satz von Pontryagin ist H eine kompakte Gruppe, in die G stetig und dicht eingebettet ist. Diese ist dann schon die gesuchte Bohr-Kompaktifizierung.

Kapitel 2

Verallgemeinerungen

2.1 Vorbemerkungen

Wir wollen nun den im vorigen Kapitel vorgestellten Begriff der Fastperiodizität verallgemeinern. In der Arbeit [Boh28] gibt Bohr hier bereits zwei mögliche Herangehensweisen vor. Die erste besteht darin, die in 1.2.7 gegebene Definition zu erweitern, indem wir einzelne Forderungen, wie zum Beispiel die Stetigkeit, abschwächen. Eine andere Methode ist es, anstatt der gleichmäßigen Konvergenz einen anderen Konvergenzbegriff einzuführen. Wir werden uns im folgenden primär an letzterem Weg orientieren, aber auch noch einen weiteren Zugang zu diesem Themenkomplex aufzeigen. So lassen sich nach [HGF81] die gleichmäßig fastperiodischen Funktionen (und ihre Verallgemeinerungen) im Kontext der Wiener-Amalgam-Räume betrachten. Wir werden dieses Thema aber nur streifen und auch nur unter den für den Zweck dieser Arbeit relevanten Einschränkungen.

Während wir im ersten Kapitel der Notation von Bohr aus seinen Originalarbeiten folgten, werden wir das hier aufgeben und eine etwas „modernere" Schreibweise heranziehen. Vorausschicken wollen wir, daß wenn wir, wenn wir bei L^p, S^p und dergl. von Funktionenräumen sprechen, eigentlich von Räumen von Äquivalenzklassen von Funktionen zu reden haben. Ausserdem wollen wir wo es notwendig erscheint die aus dem vorigen Kapitel bekannten Funktionen nunmehr als „gleichmäßig fastperiodische Funktionen" bezeichnen.

Der Hauptsatz des ersten Kapitels hat dann genau den Zusammenhang zwischen den Fastperiodizittseigenschaften und dem Konvergenzbegriff hergestellt, indem gezeigt wurde, daß beide Herangehensweisen dieselbe Klasse von Funktionen liefern. Die Hauptarbeit dieses Kapitels wird darin bestehen, äquivalente Sätze für die verschiedenen Verallgemeinerungen zu finden.

Wir wiederholen kurz einige Bezeichnungen aus dem vorangegangenen Kapitel: mit C^b bezeichnen wir den Raum der beschränkten stetigen Funktionen, $AP(\mathbb{R})$ bezeichne die fastperiodischen Funktionen nach Bohr und mit L^p für $1 \leq p \leq \infty$ die bekannten Lebesgue-Räume. Weiters sei (mit $K \subset \mathbb{R}$, K kompakt)

$$L^p_{loc} = \{f| \left(\int_K |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \}$$

den Raum der lokal p-integrierbaren Funktionen und mit

$$P = \{p(x) \mid \sum_{endl.} A_n e^{i\,\Lambda_n x}\}$$

bezeichnen wir die Menge der endlichen trigonometrischen Polynome.

Bemerkung 2.1.1. An dieser Stelle sollte auch noch auf eine Besonderheit der im folgenden Teil verwendeten Notation hingewiesen werden. Während zum Beispiel in der wichtigen Arbeit [BF44] mit S^p der Raum aller Funktionen bezeichnet wird, für die die Norm $||.||_{S^p}$ endlich ist, meinen wir damit bereits konkret die S^p-fastperiodischen Funktionen (als Abschluss der endlichen trigonometrischen Polynome unter obiger Norm).

2.2 Die Räume S_l^p, W^p und B^p

Wir wollen mit der Verallgemeinerung von Stepanoff beginnen. Sei daher nun $1 \leq p < \infty$ und $l > 0$. Für $f \in L_{loc}^p$ definieren wir mit

$$||f||_{S_l^p} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left[\frac{1}{l}\int_x^{x+l} |f(s)|^p ds\right]^{\frac{1}{p}}.$$

eine Norm und damit den Banachraum BS_l^p der beschränkten Stepanoff-Funktionen. Sicherlich liegt jede stetige Funktion in L_{loc}^p (und damit in BS_l^p), insbesondere also auch die gleichmäßig fastperiodischen Funktionen. Damit können wir die fastperiodischen Funktionen nach Stepanoff definieren. Dabei werden wir o.B.d.A. vorerst $l = 1$ setzen und damit in der Notation auch weglassen. Siehe dazu [Boh28], p. 360. Insbesondere ist jede $S_l^p-fastperiodische$ Funktion ohnehin $S^p - fastperiodisch.$; vergleiche hierzu [Bes32], p. 77.

Definition 2.2.1. Wir bezeichnen eine Funktion $f \in L_{loc}^p$ als **Stepanoff-fastperiodisch**, wenn es $\forall\varepsilon > 0$ eine relativ dichte Menge $E_{S^p}(f,\varepsilon)$ gibt, sodass

$$\forall\tau \in E_{S^p}(f,\varepsilon): \quad ||f(x+\tau) - f(x)||_{S^p} < \varepsilon$$

Mit S^p bezeichnen wir den Raum aller Stepanoff-fastperiodischen (S-f.p.) Funktionen.

Satz 2.2.2. *Der Raum S^p entsteht als Abschluss der trigonometrischen Polynome unter der Norm $||.||_{S_l^p}$ und ist ein Banachraum.*

Beweis. Wir begnügen uns hier (nach [BF44], p.51-53) die Vollständigkeit zu zeigen, das heisst jede Cauchyfolge in S^p konvergiert und hat ihren Grenzwert in S^p. Sei daher $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Damit ist es möglich, eine Folge $(n_v)_{v\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen so zu wählen, sodass

$$||f_n - f_m||_{S^p} \leq \frac{1}{2^v} \quad n, m \geq n_v$$

Insbesondere gilt dann dann auch

$$||f_{n_v} - f_{n_{v+1}}||_{S^p} \leq \frac{1}{2^v}$$

Um zu zeigen, daß die Cauchyfolge konvergiert, konstruieren wir

$$g_q(x) = \sum_{v=1}^{q} |f_{n_{v+1}}(x) - f_{n_v}(x)|.$$

Die Folge $g_1, g_2, \ldots$ bildet dann eine aufsteigende Folge nicht-negativer Funktionen. Weiters gilt $||g_q||_{S^p} < 1 \quad \forall q$. Insbesondere ist nach der Definition von $||.||_{S^p}$ damit $\lim_{q\to\infty} g_q(x) < \infty$ für fast alle x. Damit ist $\sum_{v=1}^{\infty} |f_{n_{v+1}} - f_{n_v}|$ absolut konvergent und also auch (f_n) konvergent für fast alle x.

Sei nun also $f = \lim_{v\to\infty} f_{n_v}$. Wollen zeigen, daß $f \in S^p$. Sei dafür $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir können dann v_0, m_0 und $(n_v)_{v\in\mathbb{N}}$ derart wählen, sodass

$$\int_x^{x+1} |f_{n_v}(y) - f_m(y)|^p dy \; < \; \varepsilon \qquad \forall v \geq v_0, \forall m \geq m_0.$$

Wir haben oben schon gezeigt, daß $f_{n_v}(x) \to f(x)$ für fast alle x. Insbesondere können wir hier dann das Lemma von Fatou anwenden und erhalten

$$\int_x^{x+1} |f(y) - f_m(y)|^p dy \; < \; \lim_{v\to\infty} \int_x^{x+1} |f_{n_v}(y) - f_m(y)|^p dy \; \leq \varepsilon^p$$

und damit dann auch das gewünschte Resultat

$$||f - f_m||_{S^p} \; < \; \varepsilon.$$

$\square$

Daß die Stepanoffschen Funktionen noch recht „nahe“ an den fastperiodischen liegen, zeigt uns das folgende Lemma:

Lemma 2.2.3 (Bochner)**.** *Sei $f \in S^p$ und gleichmäßig stetig. Dann ist f fastperiodisch (im Sinne von Bohr).*

Beweis. Nach [Bes32], p. 81-82.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. f ist gleichmäßig stetig, daher $\exists \delta = \delta(\frac{\varepsilon}{4})$ mit $0 < \delta < \frac{1}{2}$, sodass

$$|x - x'| \leq \delta \implies |f(x) - f(x')| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Sei nun $\tau \in E_{S^p}(f, \varepsilon\delta)$ und angenommen, es gibt x_0 derart, sodass

$$|f(x_0 + \tau) - f(x_0)| > \varepsilon.$$

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f wäre dann auch

$$|f(x + \tau) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta].$$

Wegen $x_0 - \delta + 1 > x_0 + \delta$ haben wir dann

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f(x + \tau) - f(x)| dx \; < \; \int_{x_0-\delta}^{x_0-\delta+1} |f(x + \tau) - f(x)| dx.$$

Insbesondere ist der linke Term der Ungleichung auch noch größer als $2\varepsilon\delta$, also auch größer $\varepsilon\delta$. Das ist aber ein Widerspruch zu der Annahme, daß $\tau \in E_{S^p}(f, \varepsilon\delta)$. Also gilt

$$|f(x+\tau) - f(x)| \leq \varepsilon$$

und damit auch $\tau \in E(f, \varepsilon)$, womit wegen der Beliebigkeit von τ die Behauptung gezeigt ist. □

Bevor wir zum anderen „Extrem", namentlich den Besicovitch-fastperiodischen Funktionen übergehen, führen wir die dazwischenliegende Klasse der Weyl-fastperiodischen Funktionen ein. Wir beginnen mit der Definition der Norm für den später anzugebenden Funktionenraum:

Definition 2.2.4. Sei $f \in L^p_{loc}$. Wir definieren dann:

$$||f||_{W^p} = \lim_{l\to\infty} ||f||_{S^p_l} = \lim_{l\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left[\frac{1}{l}\int_x^{x+l} |f(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Im Gegensatz zu den Funktionen von Stepanoff liefert uns diese Definition nur dann eine Norm, wenn wir den zugrundeliegenden Funktionenraum bereits passend einschränken! Sei nämlich f zum Beispiel eine beschränkte Funktion mit kompaktem Träger. Dann ist $||f||_{W^p} = 0$, aber $f \neq 0$. Wir nehmen also in den folgenden Betrachtungen stillschweigend an, daß f aus einer geeigneten Grundmenge (z.B. trigonometrische Polynome) ist.

Zuerst ist dann natürlich die Frage nach der Existenz des Grenzwertes auf der rechten Seite zu stellen.

Lemma 2.2.5. *Ist $||f||_{S^p_l} < \infty$ für alle $l > 0$, so existiert der Grenzwert $\lim_{l\to\infty} ||f||_{S^p_l}$.*

Beweis. Hier argumentieren wir wie in [Bes32], p. 72-73, indem wir zuerst o.B.d.A. $p = 1$ annehmen. Es reicht, den Fall zu betrachten, daß $||f||_{S_l} < \infty \ \forall l > 0$. Denn ist $||f||_{S_{l_0}} = \infty$ für ein gewisses l_0, so ist es das auch $\forall l$.
Seien nun $l_0, l > 0$ beliebig und $n \in \mathbb{N}$ derart, sodass

$$(n-1)l_0 < l \leq nl_0$$

Wir bemerken, daß jedenfalls immer

$$||f||_{S_{nl_0}} \leq ||f||_{S_{l_0}}$$

gilt wegen

$$||f||_{S_{nl_0}} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left[\frac{1}{nl_0}\int_x^{x+nl_0} |f(t)|dt\right] \leq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\left[\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{l_0}\int_{x+il_0}^{x+(i+1)l_0} |f(t)|dt\right]}_{=||f||_{S_{l_0}}}$$

$$\leq ||f||_{S_{l_0}},$$

womit wir auch unsere ansonsten geltende Annahme von $l = 1$ verspätet gerechtfertigt haben. Weiters gilt wegen

$$l \leq nl_0 \implies \int_x^{x+l} |f(t)|dt \leq \int_x^{x+nl_0} |f(t)|dt$$

bereits

$$||f||_{S_l} \leq \frac{nl_0}{l}||f||_{S_{nl_0}} \leq \frac{l+l_0}{l}||f||_{S_{nl_0}} \leq \left(1+\frac{l_0}{l}\right)||f||_{S_{l_0}}$$

und damit folgt aufgrund der Beliebigkeit von l_0 und wegen

$$\limsup_{l\to\infty} ||f||_{S_l} \leq \liminf_{l_0\to\infty} ||f||_{S_{l_0}} = \liminf_{l\to\infty} ||f||_{S_l}$$

die Behauptung. □

Nun geben wir die Definition der fastperiodischen Funktionen nach Weyl.

Definition 2.2.6. Eine Funktion f heißt **Weyl-fastperiodisch** (W^p-f.p.), wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $l > 0$ derart gibt, sodass $E_{S_l^p}(f,\varepsilon)$ relativ dicht ist.

Hier zeigt sich auch der Unterschied zwischen der Klasse S^p und W^p. Bei der Ersten setzt man nur die Existenz eines beliebigen $l > 0$ voraus und kann es auch nach den oben ausgeführten Überlegungen generell als $l = 1$ voraussetzen. Bei den Weyl-fastperiodischen Funktionen hingegen variiert l mit ε. Das gibt uns aber bereits ein Kriterium in die Hand, wann eine W^p-fastperiodische Funktion auch S^p-fastperiodisch ist, nämlich dann, wenn $\limsup_{\varepsilon\to 0} l(\varepsilon) < \infty$.
Sei f W^p-fastperiodisch, $l = \limsup_{\varepsilon\to\infty} l(\varepsilon) < \infty$, $l_0 \leq l$ und $\tau \in E_{S_{l_0}^p}(f,\varepsilon)$. Wegen $||.||_{S_l^p} \leq ||.||_{S_{l_0}^p}$ ist dann auch $\tau \in E_{S_l^p}(f,\varepsilon)$ und damit f S^p-fastperiodisch.

Bevor wir nun zum Hauptsatz der Weylschen fastperiodischen Funktionen kommen, müssen wir noch etwas mehr Vorarbeit leisten und das folgende Lemma beweisen. Dabei fällt auf, daß wir im Gegensatz zu unserer ursprünglichen Definition von $||\cdot||_{W^p}$ im Beweis des folgenden Lemmas von einer Norm sprechen. Dies ist nach einer passenden Einschränkung des Definitionsbereichs erlaubt. Für die Details dazu verweisen wir auf [BF44].

Lemma 2.2.7. *Sei $f \in W^p$. Dann gilt*

$$\begin{gathered} ||f||_W < \infty \\ \forall\varepsilon > 0\ \exists l = l(\varepsilon) > 0,\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \quad ||f(x+x') - f(x)||_{S_l} < \varepsilon \quad \forall |x'| < \delta \end{gathered}$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß W-fastperiodische Funktionen eine endliche $||.||_W$ Norm besitzen. Sei $f \in W^p$ und $\varepsilon = 1$. Wegen $||.||_{S_l} \leq ||.||_{S_{l'}}$ bei $l' \leq l$ reicht es ein $l_0 > 0$ und ein $C > 0$ derart zu konstruieren, sodass

$$||f||_{S_{l_0}} \leq C.$$

Wir wählen l_0 derart, sodass $E_{S_{l_0}}(f,1)$ relativ dicht ist und setzen $L = L(1)$. Damit gibt es für alle x ein $\tau \in E_{S_{l_0}}(f,1)$ mit $x+\tau \in (0,L)$. Nun bekommt man über schon ähnlich ausgeführte Abschätzungen

$$\begin{aligned}\frac{1}{l_0}\int_x^{x+l_0}|f(t)|dt &\leq \underbrace{\frac{1}{l_0}\int_x^{x+l_0}|f(t)-f(t+\tau)|dt}_{\leq 1 \quad nachVorauss.}+\frac{1}{l_0}\underbrace{\int_x^{x+l_0}|f(t+\tau)|dt}_{x\mapsto x+\tau}\\ &\leq 1+\frac{1}{l_0}\underbrace{\int_{x+\tau}^{x+\tau+l_0}|f(t)|dt}_{x+\tau\in(0,L)}\\ &\leq 1+\frac{1}{l_0}\int_0^{L+l_0}|f(t)|dt =: C,\end{aligned}$$

womit der erste Teil des Beweises abgeschlossen ist.

Wir wollen nun die zweite Aussage des Satzes zeigen. Diese entspricht einer Art „gleichmäßigen Stetigkeit" für W-fastperiodische Funktionen. Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen l_0 derart, sodass $E_{S_{l_0}}(f, \frac{\varepsilon}{3})$ relativ dicht ist und setzen $L = L(\frac{\varepsilon}{3})$. In einer zum ersten Teil völlig analogen Rechnungen gelangen wir dann für $t' > 0$ beliebig zu

$$\frac{1}{l_0}\int_x^{x+l_0}|f(t+t')-f(t)|dt \leq \frac{2\varepsilon}{3}+\frac{1}{l_0}\int_0^{L+l_0}|f(t+t')-f(t)|dt.$$

Für das verbleibende Integral auf der rechten Seite lässt sich dann ein $\delta > 0$ derart finden, sodass für $|t'| < \delta$

$$\frac{1}{l_0}\int_0^{L+l_0}|f(t+t')-f(t)|dt \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

womit auch die zweite Behauptung gezeigt ist. □

Wir haben nun genug Vorarbeit für den Hauptsatz der W^p-fastperiodische Funktionen geleistet.

Satz 2.2.8. *Der Raum $W^p = \{f \;\; W^p - fastperiodisch\}$ bezeichnet den (unvollständigen) Vektorraum aller W^p-fastperiodischen Funktionen. Er entsteht durch den Abschluss der trigonometrischen Polynome unter der Norm $||.||_{W^p}$.*

Beweis. Vergleiche [BF44], p. 82ff. □

Bemerkung 2.2.9. Es ist wichtig im Kopf zu behalten, daß es sich bei W^p um **keinen Banachraum** handelt. Denn er ist nicht vollständig, wie wir im Folgenden sehen werden.

Satz 2.2.10 (Unvollständigkeit von W^p)**.** *W^p ist unvollständig.*

Beweis. Wir zeigen die Unvollständigkeit von W^p durch die Konstruktion einer Cauchyfolge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Weyl-fastperiodischen Funktionen, die keinen Grenzwert in W^p hat. Wir übernehmen dafür die Konstruktion eines Gegenbeispiels aus [BF44], p. 58-61.

Sei dazu (m_i) eine Folge natürlicher Zahlen ≥ 2 und weiters

$$h_i = \prod_{j=1}^{i} m_j.$$

Wir definieren für $v = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & vh_n - \frac{1}{2} \leq x \leq vh_n + \frac{1}{2} \\ 0 & sonst \end{cases}$$

$$F_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x).$$

Sowohl die (f_n) als auch die (F_n) sind offensichtlich nicht-negativ, beschränkt und periodisch mit Periode h_i. Insbesondere existiert daher der Mittelwert der f_i und ist

$$M\{f_i(x)^p\} = \frac{1}{h_i}.$$

Damit können wir bereits zeigen, daß (F_i) eine Cauchyfolge ist. Sei vorerst o.B.d.A. $n > m$.

$$||F_n - F_m||_{W^p} = || \sum_{i=m+1}^{n} f_i||_{W^p} \leq \sum_{i=m+1}^{n} \left(\frac{1}{h_i}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{i=m+1}^{n} \left(\frac{1}{2^i}\right)^{\frac{1}{p}}$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite kann für geeignete Wahl von n, m beliebig klein gemacht werden. Damit ist (F_n) eine Cauchyfolge.

Wollen nun durch Widerspruch zeigen, daß (F_n) nicht in W^p konvergiert. Angenommen, F wäre ein passender Kandidat mit

$$\lim_{n\to\infty} F_n = F.$$

Sei weiters o.B.d.A. $p = 1$. Wegen $F \in W^p$ haben wir sicher $||F||_{S^p} < C$ für ein $C > 0$. Wählen nun $N > C$ und betrachten zunächst die Differenz von F_n und F in einer Umgebung der Türme (wie sie in [BF44] bezeichnet werden) der F_n um die Vielfachen der h_n, die wir wie folgt bezeichnen wollen:

$$I_m^{h_n} = \left(mh_n - \frac{1}{2}, mh_n + \frac{1}{2}\right).$$

Auf einem solchen Intervall bekommen wir aber sicher für m fest und $n \geq N$:

$$\int_{I_m^{h_n}} |F_n(x) - F(x)|\, dx \geq \underbrace{\int_{I_m^{h_n}} F_n(x)dx}_{=N} - \underbrace{\int_{I_m^{h_n}} |F(x)|dx}_{<C} > N - C$$

Weiters gilt (wegen Satz 2.2.17)

$$||F||_{B^p} \leq ||F||_{W^p}.$$

und mit

$$J_m^{h_n} = \left(-(m+\frac{1}{2})h_n, (m+\frac{1}{2})h_n\right)$$

unter der Voraussetzung von $n \geq N$

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{1}{(2m+1)h_n} \int_{J_m^{h_n}} |F_n(x) - F(x)| dx \;\leq\; ||F_n - F||_{B^p}.$$

In jedem Intervall $J_m^{h_n}$ können $(2m+1)$ Intervalle $I_m^{h_n}$ untergebracht werden. Das ergibt insbesondere (wenn man alle Bestandteile der F_n, die nicht bei den Türmen liegen, weglässt)

$$\frac{1}{h_N}(N - C) \leq \limsup_{m\to\infty} \frac{1}{(2m+1)h_n} \int_{J_m^{h_n}} |F_n(x) - F(x)| dx$$

Dabei ist die linke Seite eine (wenn auch kleine) positive Zahl und unabhängig von n, was ein Widerspruch zur Annahme der Konvergenz ist. □

Am anderen Ende der Skala findet sich eine weitere Klasse fastperiodischer Funktionen. Bei unserem bisherigen Vorgehen stellt sie sich als die allgemeinste dar. Wie aus dem ersten Kapitel bekannt, existiert der Mittelwert $M\{f\}$, wenn $f \in AP$. Insbesondere existiert dann auch $M\{|f|^p\}^{\frac{1}{p}}$ und ermöglicht daher die folgende Definition:

Definition 2.2.11. Es sei $f \in L^p_{loc}$. Dann definieren wir die Abbildung[1]

$$||f||_{B^p} \;=\; \overline{M}\{|f|^p\}^{\frac{1}{p}} \;=\; \limsup_{T\to\infty} \left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Bemerkung 2.2.12. Ist f bereits aus AP, so gilt, daß

$$||f||_{B^p} \;=\; M\{|f|^p\}^{\frac{1}{p}}.$$

Bemerkung 2.2.13. Es ist wichtig zu betonen, daß der in obiger Definition verwendete Limes superior **nicht** einfach durch den Limes ersetzt werden kann, wie das folgende Beispiel aus [Mar96] zeigt. Es wird gezeigt, daß sich zum Beispiel im Fall $p = 1$ jedenfalls lokal-integrierbare Funktion x, y derart konstruieren lassen, sodass $M\{|x|\}$ und $M\{|y|\}$ existieren, aber nicht $M\{|x + y|\}$.

Beweis. Es seien für $q, z \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$

$$x(t) \;=\; \begin{cases} 1 & t \in [z, z+1),\, z\, gerade \\ 0 & sonst \end{cases}$$

$$y(t) \;=\; \begin{cases} 1 & t \in [2q+1, 2(q+1)) \subset [n!, (n+1)!),\, n \geq 2,\, n\, gerade \\ 1 & t \in [2q+1, 2(q+1)) \subset [-(n+1)!, -n!),\, n \geq 2,\, n\, gerade \\ -1 & t \in [2q, 2q+1)) \subset [n!, (n+1)!),\, n \geq 2,\, n\, ungerade \\ -1 & t \in [2q, 2q+1)) \subset [-(n+1)!, -n!),\, n \geq 2,\, n\, ungerade \\ 0 & sonst \end{cases}$$

[1] Auch hier müssen wir vorsichtig sein und können den Normcharakter der Abbildung nur bei geeigneter Grundmenge bekommen!

Durch Nachrechnen erhält man

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|dt &\to \frac{1}{2}\\ \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|y(t)|dt &\to \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Es ist offensichtlich, daß $0 \leq x(t) + y(t) \leq 1$ gilt und damit natürlich auch $0 \leq \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[x(t)+y(t)]dt \leq 1$. Weiters ist $x(t)+y(t) = 1$ für $t \in [n!, (n+1)!)$ für n gerade (resp. $t \in [-(n+1)!, -n!)$) und 0 sonst. Wir betrachten nun den Grenzübergang $T \to \infty$. Hierbei betrachten wir aber nur Werte $T = n!$ mit $n \in \mathbb{N}$ und führen eine Fallunterscheidung durch, je nachdem, ob n gerade oder ungerade ist. Für n gerade erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{1}{2(n!)}\int_{-n!}^{n!}|x(t)+y(t)|dt &= \frac{2\left[(n-1)! - (n-2)! + (n-3)! - (n-4)! + \ldots + 1\right]}{2(n!)}\\ &\leq \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}\end{aligned}$$

und für ungerades n:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2(n!)}\int_{-n!}^{n!}|x(t)+y(t)|dt &= \frac{2\left[(n)! - (n-1)! + (n-2)! - (n-3)! + \ldots + 1\right]}{2(n!)}\\ &\geq \frac{(n-1)!(n-1)}{n!} = \frac{n-1}{n}.\end{aligned}$$

Insgesamt also $\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)+y(t)|dt = 1$ und $\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)+y(t)|dt = 0$, daher existiert der Mittelwert $M\{|x+y|\}$ nicht. □

Um hier einen analogen Satz wie 2.2.2 beweisen zu können, fehlt noch eine Definition. Es zeigt sich nämlich, daß der Begriff der relativ dichten Menge nicht mehr ausreichend ist.

Definition 2.2.14. Eine Menge $E \subset \mathbb{R}$ heisst **zufriedenstellend gleichmäßig**[2], wenn ein $L > 0$ derart existiert, sodass[3]

$$\frac{\max_{x_0}\#(E\cap[x_0, x_0+L])}{\min_{x_1}\#(E\cap[x_1, x_1+L])} < 2,$$

daß also die maximale Anzahl von Elementen von E in einem Intervall der Länge L dividiert durch die minimale Anzahl kleiner als 2 ist.

Ein einfaches Beispiel einer solche Menge ist $\mathbb{Z}$ mit $L > 1$ beliebig. Weiters ist klar, daß eine zufriedenstellend-gleichmäßige Menge relativ dicht ist. Insbesondere ist eine solche Menge abzählbar.

[2] *Satisfactorily uniform set.* Vgl. [Bes32], p.77-78.
[3] Mit $\# : 2^{\mathbb{R}} \to \mathbb{N}_0$ sei die Anzahl der Elemente der Menge X bezeichnet

Satz 2.2.15. *Sei $f \in L^p_{loc}$. f heisst* ***Besicovitch-fastperiodisch*** *(B^p-f.p.), wenn $\forall \varepsilon > 0$ es eine zufriedenstellend gleichmäßige Menge $E(f, \varepsilon)$ derart gibt, sodass $\forall c > 0$*

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(x+\tau_i) - f(x)|^p dx < \varepsilon^p$$
$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \left[\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n} \frac{1}{c}\int_{x}^{x+c} |f(x+\tau_i) - f(x)|^p dx\right] dx < \varepsilon^p.$$

Mit B^p bezeichnen wir den Raum aller B^p-fastperiodischen Funktionen. Er ensteht durch die Vervollständigung von AP unter der Norm $||.||_{B^p}$.

Beweis. Der Beweis dieses Satzes ist sehr aufwendig. Wir werden ihn daher an dieser Stelle hier nicht angeben, sondern verweisen auf [Bes32], p. 91-96, 100-104. □

Satz 2.2.16. *B^p ist ein Banachraum.*

Beweis. Vgl. [BF44], p. 54ff. □

Interessant ist natürlich nun, welcher Zusammenhang zwischen diesen neu vorgestellten Arten von Fastperiodizität besteht. Diesen liefert uns der folgende Satz:

Satz 2.2.17. *Es seien $1 \leq p, q \leq \infty$, $p \leq q$. Dann gilt:*

$$S^q \subset S^p, \quad W^q \subset W^p, \quad B^q \subset B^p$$
$$AP \subset S^p \subset W^p \subset B^p$$

Beweis. $S^q \subset S^p$, $W^q \subset W^p$ und $B^q \subset B^p$ ergeben sich direkt aus $||.||_{S^p} \leq ||.||_{S^q}$ (resp. die anderen Normen). Auch daß AP in jeder der drei Verallgemeinerungen enthalten ist, ist per Definition klar. $S^p \subset W^p$ ist auch leicht einzusehen: existiert das Supremum bereits für ein Intervall der Länge 1, so sicherlich auch auf jedem größeren Intervall und damit nach 2.2.5 auch im Grenzübergang. Ausserdem ergibt sich

$$||.||_{W^p} \leq ||.||_{S^p} \quad \forall f \in S^p.$$

Für $W^p \subset B^p$ reicht es zu zeigen, daß für $f \in W^p$ der Mittelwert $M\{f\}$ existiert. Sei $p = 1$ und P ein trigonometrisches Polynom derart, sodass $||f - P||_{S^p_{l_0}} < \frac{\varepsilon}{8}$ für ein $l_0 = l_0(\varepsilon)$. Weiters gibt es sicher ein $T_0 > l_0$ derart, sodass $\forall T > T_0$ gilt:

$$\left|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} P(t)dt\right| - M\{P\} < \frac{\varepsilon}{4}$$
$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(t) - P(t)|dt \leq 2\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{l_0}\int_{x-\frac{l_0}{2}}^{x+\frac{l_0}{2}} |f(t) - P(t)|dt < \frac{\varepsilon}{4}$$

und damit dann $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)dt - M\{P\} < \frac{\varepsilon}{2}$. Durch Wahl von $T_1, T_2 > T_0$ erhält man dann

$$\left| \frac{1}{2T_1}\int_{-T_1}^{T_1} f(t)dt - \frac{1}{2T_2}\int_{-T_2}^{T_2} f(t)dt \right| < \varepsilon$$

und erhält damit die Existenz von $M\{f\}$. Daraus folgt dann direkt die Existenz von

$$\overline{M}\{|f|^p\}^{\frac{1}{p}} = \limsup_{T\to\infty} \left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} = ||f||_{B^p}.$$

$\square$

Bemerkung 2.2.18. Am Ende des ersten Kapitels haben wir gezeigt, daß fastperiodische Funktionen auf einer lokalkompakten Gruppe G den stetigen Funktionen auf ihrer Bohr-Kompaktifizierung $Bohr(G)$ entsprechen. Ein analoges Resultat lässt sich für Elemente von B^p angeben: so entspricht jedes $f \in B^p$ einem $f' \in L^p(Bohr(G))$. Für Details sei auf [ABG06] verwiesen.

Interessant ist natürlich, ob wir die „schöne" Eigenschaft der gleichmäßig fastperiodischen Funktionen, daß das Produkt zweier fastperiodischer Funktionen wieder fastperiodisch ist, übertragen können. Dies ist leider in dieser Allgemeinheit nicht möglich. Es zeigt sich aber, daß die trigonometrischen Polynome bei dieser Überlegung eine Rolle spielen:

Lemma 2.2.19 (Multiplikative Struktur von S^p, W^p, B^p)**.** *Sei f aus S^p (respektive W^p oder B^p) und sei g ein trigonometrisches Polynom. Dann ist fg auch in S^p (respektive W^p oder B^p).*

Beweis. Wir zeigen das Lemma für B^p. Die Beweise der anderen Fälle laufen analog. Sei also $f \in B^p$, $g, r \in P$ und $\varepsilon > 0$.

$$\exists r \in P: \quad ||f - r||_{B^p} < \frac{\varepsilon}{||g||_\infty}$$

Jedenfalls ist rg wieder ein trigonometrisches Polynom. Wegen

$$\begin{aligned} ||fg - gr||_{B^p}^p &\leq \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \underbrace{|g|^p}_{\leq ||g||_\infty^p} \; |f(t) - r(t)|^p dx \\ &\leq ||g||_\infty^p \underbrace{\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(t) - r(t)|^p dx}_{< \left(\frac{\varepsilon}{||g||_\infty}\right)^p} < \varepsilon^p \end{aligned}$$

folgt dann aus dem Hauptsatz 2.2.15, daß $fg \in B^p$. $\square$

2.3 Fourierreihen, Parsevalsche Gleichung und der Satz von Riesz-Fischer

Die (formale) Existenz der Fourierreihe zeigt das folgende Lemma:

Lemma 2.3.1. *Es sei* $\lambda \in \mathbb{R}$ *und* $f \in B^p$. $a_f(\lambda) = M_t\{f(t)e^{-i\lambda t}\}$ *existiert für alle* λ *und ist für höchstens abzählbar viele* λ *von 0 verschieden. Wir bezeichnen mit* Λ_f *wieder die Menge der Fourierexponenten mit* $a_f(\lambda) \neq 0$.

Beweis. Sei $f \in B$. Nach dem Lemma 2.2.19 ist damit auch $f(t)e^{-i\lambda t} \in B$. Daher existiert der Mittelwert $M_t\{f(t)e^{-i\lambda t}\}$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Nach dem Hauptsatz für B^p gibt es trigonometrisches Polynome g_n und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, sodass

$$||f - g_n||_B < \varepsilon \quad \forall n > n_0.$$

Daher $g_n \overset{B}{\to} f$, also insbesondere auch $M_t\{g_n(t)e^{-i\lambda t}\} \to M_t\{f(t)e^{-i\lambda t}\}$. Für festes n ist $M_t\{g_n(t)e^{-i\lambda t}\}$ nur für endlich viele λ ungleich 0. Damit folgt die Behauptung. □

Das zentrale Resultat ist hier wieder die Summierbarkeit der Fourierreihe analog zum Fall von AP.

Satz 2.3.2. *Sei* $f \in B^p$. *Dann gilt*

$$||f - M_t\{f(x+t)K_k(t)\}||_{B^p} \to 0 \quad k \to \infty.$$

Auch die verallgemeinerten fastperiodischen Funktionen werden durch ihre Fourierreihe „eindeutig" bestimmt:

Satz 2.3.3 (Eindeutigkeitssatz). *Es seien* $f, g \in B^p$ *und beide besitzen die selbe Fourierreihe. Dann gilt*

$$||f - g||_{B^p} = 0$$

Beweis. Da nach Vorraussetzung f, g dieselbe Fourierreihe haben, kann man zur Summierung der Reihen auch denselben zusammengesetzten Fejér-Kern $K_k(s)$ benutzen. Damit haben wir dann direkt die Behauptung des Satzes:

$$\begin{aligned} ||f - g||_{B^p} \leq\ & \underbrace{||f - M_t\{f(x+t)K_k(t)||_{B^p}}_{\to 0} \\ & + \underbrace{||M_t\{f(x+t)K_k(t)\} - M_t\{g(x+t)K_k(t)\}||_{B^p}}_{=0} \\ & + \underbrace{||M_t\{g(x+t)K_k(t)\} - g||_{B^p}}_{\to 0} \end{aligned}$$

□

Die „Eindeutigkeit" aus dem vorangegangen Satz ist hier natürlich bezüglich der verwendeten Norm zu verstehen. Während sich zwei Repräsentanten einer Äquivalenzklasse in S^p höchstens auf einer Nullmenge unterscheiden, gilt diese Einschränkung für W^p und B^p nicht mehr: hier können sie sich sogar auf einer Menge von unendlichem Maß unterscheiden! Siehe dazu [Bes32], p. 74.

Im Fall $p = 2$ lässt sich noch ein weiteres Resultat, nämlich die Parsevalsche Gleichung, übertragen:

Satz 2.3.4 (Parsevalsche Gleichung)**.** *Sei $f \in B^2$. Dann gilt*

$$||f||_{B^2} = \sum_{\lambda \in \Lambda_f} |a_f(\lambda)|^2$$

Beweis. Nach Satz 2.3.2 gilt

$$||f - M_t\{f(x+t)K_k(t)\}||_{B^2} \to 0 \quad k \to \infty,$$

also $M_t\{f(x+t)K_k(t)\} \overset{B^2}{\to} f$ und damit auch $M_t\{|f(x+t)|K_k(t)\} \overset{B^2}{\to} |f|$.
Seien nämlich p, r trigonometrische Polynome und $\varepsilon > 0$, sodass $||f - p|| < \frac{\varepsilon}{2} \Longrightarrow ||\,|f| - |p|\,|| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann wähle r so, daß $||\,|p| - r|| < \frac{\varepsilon}{2}$ ist. Dann ist $||\,|f| - r|| \leq ||\,|f| - |p|\,|| + ||\,|p| - r|| < \varepsilon$.
Also existiert $M\{|f|^2\}$ und man erhält mit

$$M\{|f|^2\} = \lim_{k \to \infty} \sum_{\lambda \in E_k} \xi_{k,\lambda} |a_f(\lambda)|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda_f} |a_f(\lambda)|^2$$

die Behauptung. □

Weiters erhalten wir den Satz von Riesz-Fischer, der zeigt, daß wenn die Reihe $\sum_n |A_n|^2$ konvergiert, dann auch jede Reihe der Form $\sum_n A_n e^{i\Lambda_n x}$ eine Fourierreihe einer B^2-fastperiodischen Funktion ist.

Satz 2.3.5 (Riesz-Fischer)**.** *Seien $\Lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $\sum_n |A_n|^2 < \infty$. Dann tritt jede Reihe der Form $\sum_n A_n e^{i\Lambda_n x}$ als Fourierreihe einer B^2-fastperiodischen Funktion auf.*

Beweis. Vgl. [Bes32], p. 110-112. □

2.4 Wiener-Amalgam-Räume

Wir wollen uns in diesem Absatz kurz damit beschäftigen, daß man die oben vorgestellten Räume als Spezialfall einer größeren Klasse von Räumen auffassen kann. Diese sogenannten **Wiener-Amalgam-Räume** wurden zuerst in der Dissertation von Wiener eingeführt, um dem Problem zu begegnen, daß über das lokale Verhalten von Elementen von L^p nichts ausgesagt werden kann. So hat jede Umordnung einer L^p Funktion die gleiche L^p Norm. Siehe dazu [Hei90], p. 2.
Wir definieren nun den Amalgam-Raum $W(L^p, L^q)$ durch die Norm

$$||f||_{W(L^p,L^q)} = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\int_n^{n+1} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}}$$

wobei wir L^p als die **lokale Komponente** und L^q als die **globale Komponente** bezeichnen. Diese Amalgam-Räume sind bereits wieder Banachräume. Die Theorie kann wesentlich allgemeiner gefasst werden, indem für die Komponenten geeignete (allgemeinere) Banachräume eingesetzt werden. Dies würde

aber hier wieder den Rahmen unserer Ausführungen sprengen[4]. Wir setzen deswegen fürs Erste als globale Komponente auf L^∞ und betrachten die sich für verschiedene Wahlen der lokalen Komponente ergebende Räume.
Es ergibt sich dann bereits die neue Norm

$$||f||_{W(L^p,L^\infty)} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \left(\int_n^{n+1} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right|$$

was für den Fall $p \neq \infty$ ja schon (fast) unserer Definition von S^p entspricht. Man muß natürlich beachten, daß wie im Fall von S^p allein die Norm nicht die Fastperiodizitäts-Eigenschaften liefert! Ebenso ist es einzusehen, daß der Fall $p = \infty$ genau den Fall der fastperiodischen Funktionen nach Bohr abdeckt, also dem Raum AP entspricht. Wir wollen nun aber durchaus die Ergebnisse etwas allgemeiner formulieren und lassen daher für die lokale Komponente nun einen geeigneten[5] Banachraum B zu und definieren damit die sog. **B-Fastperiodizität**[6].

Definition 2.4.1. Es bezeichne $T_y f$ die Translation auf B. f heißt B-fastperiodisch. wenn die Menge aller Translationen $(T_y f)$ relativ kompakt in $W(B, L^\infty)$ ist.

Diese Definition ist dem Umstand geschuldet, daß eine Herleitung der Fastperiodizität über relativ dichte Mengen von Verschiebungszahlen nur für Banachräume über $\mathbb{R}^n$ funktioniert. In diesem Fall gibt uns der folgende Satz auch die Äquivalenz dieser Definitionen (also das Kriterium von Bochner). Grundsätzlich funktioniert obige Definition aber auch bei Banachräumen über einer beliebigen lokalkompakten, abelschen Gruppe G.

Satz 2.4.2. *Es sei $f \in W(B, L^\infty)$. Dann ist äquivalent:*

- *f ist B-fastperiodisch*
- *f kann in der Norm von $W(B, L^\infty)$ mit trigonometrischen Polynomen approximiert werden.*
- *Die Faltung agiert kompakt auf $W(B, L^\infty)$. Das heisst $\forall g \in L^1$ gilt: $T_g f = g * f$ ist ein kompakter Operator.*
- *Ist B über $\mathbb{R}^n$, dann $\forall \varepsilon > 0$ gilt: $\exists K \subset \mathbb{R}^n$, K kompakt, sodass*

$$\forall y \in \mathbb{R}^n : \exists x \in y + K \text{ sodass } ||T_x f - f||_{W(B,L^\infty)} < \varepsilon$$

Beweis. Vgl. [HGF81], p. 323-324. □

Der vorangegangene Satz liefert uns dann auch eine natürliche Verallgemeinerung der Fastperiodizität auf $\mathbb{R}^n$. Es bleibt zu sagen, daß mit der Möglichkeit, für B auch geeignete Räume von Distributionen oder Maßen zu wählen, einer Verallgemeinerung der Fastperiodizität wenig Grenzen gesetzt sind!

[4]Für Details vgl. [Hei90], [HGF81].
[5]Für die genauen Anforderungen vergleiche [HGF81].
[6]Wobei B hier NICHT für die fastperiodische Funktionen im Sinne von Besicovitch steht.

Kapitel 3

Anwendungen und Ausblick

3.1 Fastperiodische Lösungen von quasilinearen Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt wollen wir ein Resultat aus [Cor61] über die Existenz und Eindeutigkeit von fastperiodischer Lösungen gewisser System quasilinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen vorstellen und auch seinen Beweis präsentieren. Zuvor bringen wir jedoch ein Resultat, daß auch unabhängig von seiner nachfolgenden Anwendung im Beweis von Interesse ist und sich damit beschäftigt, wann die Stammfunktion einer fastperiodischen Funktion wieder fastperiodisch ist.

Lemma 3.1.1. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ fastperiodisch und es sei*

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Gilt

$$||F||_\infty < \infty,$$

so ist F fastperiodisch.

Beweis. Aus [Cor61], p. 88-90. O.B.d.A. sei f reell und $\varepsilon > 0$. Wir konstruieren nun aus den Verschiebungszahlen von f Verschiebungszahlen von F. Nach Voraussetzung ist F beschränkt, also gibt es Konstanten c, C mit

$$c \leq ||F||_\infty \leq C$$

und Punkte x_1, x_2 (wir nehmen o.B.d.A. $x_1 < x_2$ an) mit

$$F(x_1) < c + \frac{\varepsilon}{6}, \quad F(x_2) > C - \frac{\varepsilon}{6}.$$

Seien weiters

$$d = |x_1 - x_2|, \quad L = L\left(\frac{\varepsilon}{6}\right), \quad \tau \in E\left(f, \frac{\varepsilon}{6d}\right).$$

Zu zeigen ist

$$E\left(f, \frac{\varepsilon}{2(L+d)}\right) \subset E(F, \varepsilon).$$

Dazu setzt man im ersten Schritt $z_1 = x_1 + \tau$, $z_2 = x_2 + \tau$. Durch Einsetzen

$$\begin{aligned}
F(z_2) - F(z_1) &= \int_0^{z_2} f(t)dt - \int_0^{z_1} f(t)dt \\
&= \int_0^{x_2} f(t)dt + \int_{x_2}^{x_2+\tau} f(t)dt - \int_0^{x_1} f(t)dt - \int_{x_1}^{x_1+\tau} f(t)dt \\
&= F(x_2) - F(x_1) + \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} [f(t+\tau) - f(t)]\, dt}_{<(x_2-x_1)\,\frac{\varepsilon}{6d}} \\
&\geq F(x_2) - F(x_1) - d\frac{\varepsilon}{6d} > C - c - \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

erhält man die folgenden Bedingungen

$$F(z_1) < c + \frac{\varepsilon}{2} \quad F(z_2) > C - \frac{\varepsilon}{2},$$

wobei solche Punktepaare in jedem Intervall der Länge $L+d$ konstruiert werden können. Sei nun $x \in \mathbb{R}$ beliebig und

$$\tau' \in E\left(f, \frac{\varepsilon}{2(L+d)}\right).$$

Wir wählen dann z_2 wie oben mit $x - z_2 < L + d$ (respektive $z_1 - x < L + d$) und erhalten nach Einsetzen in die Definition von $F(x)$

$$\begin{aligned}
F(x+\tau') - F(x) &= \int_0^{z_2+\tau'} f(t)dt + \int_{z2+\tau'}^{x+\tau'} f(t)dt - \int_0^{z_2} f(t)dt - \int_{z_2}^{x} f(t)dt \\
&= \underbrace{F(z_2+\tau')}_{\leq C \quad nach\,Vorauss.} - \underbrace{F(z_2)}_{>C+\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\int_{z_2}^{x} [f(t+\tau') - f(t)]\, dt}_{<(x-z_2)\,\frac{\varepsilon}{2(L+d)}} \\
&< C - C + \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{(x-z_2)}_{<L+d} \frac{\varepsilon}{2(L+d)} < \varepsilon
\end{aligned}$$

und durch eine analoge Rechnung mit Abschätzungen für z_1 (man verwendet dann c)

$$|F(x+\tau') - F(x)| < \varepsilon,$$

was den Beweis vollendet. □

Ausgehen werden wir von der Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2A\frac{dy}{dx} + By = f(x) + \mu g(x, y)$$

mit $A, B \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$, f fastperiodisch und g genüge einer Lipschitz-Bedingung. Bekanntermaßen lässt sich eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung transformieren:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} &= y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} &= -By_1 - 2Ay_2 + f(x) + \mu g(x, y_1, y_2).\end{aligned}$$

Wir werden das Problem allgemeiner lösen:

Definition 3.1.2. Ein System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung der Form

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i + f_i(x) + \mu g_i(x, y_1, \ldots, y_n)$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $a_{ij} \in \mathbb{C}$ bezeichen wir als **quasilinear**. Das zugehörige System

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j + f_i(x)$$

bezeichnen wir als das **erzeugende System** des ursprünglichen Systems von Gleichungen.

An die Matrix $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ werden wir dann noch weitere Anforderungen stellen. Im Moment aber halten wir noch fest, daß es für beliebige quadratische Matrizen der Ordnung n möglich ist, eine invertierbare Matrix $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ derart zu finden, sodass durch

$$BAB^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & \ldots & \gamma_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

A in eine obere Dreiecksmatrix transformiert wird, wobei die λ_i die Eigenwerte von A bezeichnen und $\gamma_{ij} \in \mathbb{C}$ durch die Wahl von B bestimmt werden. Wir wollen diese Transformation nun auf unser quasilineares Gleichungssystem anwenden und benennen unsere neuen gesuchten Lösungen mit $z_i(x)$. Damit erhalten wir dann

$$\frac{dz_i}{dx} = \lambda_i z_i + \sum_{i+1 \leq j \leq n} \gamma_{ij} z_j + f_i^*(x)$$

und können (bei von nun an als invertierbar vorausgesetzten A) die Funktionen $f_i^*(x)$ durch

$$A \begin{pmatrix} f_1^*(x) \\ \ldots \\ f_n^*(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \ldots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

eindeutig bestimmen. Sind die f_i hier schon fastperiodisch, so gilt daselbe auch für f_i^* als endliche Summe fastperiodischer Funktionen. Damit setzen wir von nun an voraus, daß die Matrix des quasilinearen Systems bereits obere Dreiecksgestalt besitzt und hyperbolisch ist, also $Re\,\lambda_i \neq 0 \quad 1 \leq i \leq n$. Diese Bedingung stellt sicher, daß - wie wir später noch zeigen werden - eine eindeutig bestimmte fastperiodische Lösung des erzeugenden Systems $y_i^{(0)}$ existiert und wir darüber hinaus eine Konstante $K = K(A)$ derart angeben können, sodass

$$||y_i^{(0)}||_\infty \;\leq\; K \max_j ||f_j||_\infty \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Weiters wollen wir noch eine allgemeine Lipschitz-artige Bedingung formulieren, die wir dann im weiteren an die Funktionen $g_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ stellen werden. Es bezeichne dazu $y_i^{(0)}$ eine beschränkte Lösung des erzeugenden Systems. Sei dazu $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ fest. Wir definieren

$$\overline{\Lambda} \;=\; \left\{ (x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) \mid \left| y_i(x) - y_i^{(0)}(x) \right| \leq a \quad \forall x \in \mathbb{R},\, 1 \leq i \leq n \right\}.$$

Die g_i sind auf $\overline{\Lambda}$ stetig. Seien die $g_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ darüberhinaus fastperiodisch in x seien und gebe es ein $L > 0$ derart, sodass in $\overline{\Lambda}$

$$|g_i(x, y_1, \ldots, y_n) - g_i(x, z_1, \ldots, z_n)| \;\leq\; L \sum_{j=1}^{n} |y_j - z_j| \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Wir fordern im obigen Text, *g sei fastperiodisch in x*. Nun haben wir dies bislang so nicht defnieret und wollen das nachholen:

Definition 3.1.3. Sei $f(x, y)$ stetig. Wir nennen f **fastperiodisch in** x **gleichmäßig in** y, wenn für $\varepsilon > 0$ gilt

$$\tau \in E\,(f, \varepsilon) \implies |f(x + \tau, y) - f(x, y)| < \varepsilon \quad \forall y,$$

wir also die Menge $E(f, \varepsilon)$ unabhängig von y wählen können.

Für solche **von einem Parameter abhängige fastperiodische Funktionen** gelten die meisten wesentlichen Eigenschaften wie für die im ersten Kapitel eingeführten fastperiodischen Funktionen. Für Details sei auf [Cor61], Kapitel II, verwiesen.

Ein für uns wichtiges Ergebnis ist aber, daß unsere Funktionen $g_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ auf $\overline{\Lambda}$ beschränkt sind.[1] Damit sind wir nun bereit, das wichtige Resultat dieses Abschnitts zu formulieren.

Satz 3.1.4. *Es sei ein quasilineares System gew. DGL der Form*

$$\frac{dy_i}{dx} \;=\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i + f_i(x) + \mu g_i(x, y_1, \ldots, y_n)$$

gegeben mit $f_i \in AP(\mathbb{R})$. *Die Matrix* $A = (a_{ij})$ *habe obere Dreiecksgestalt und* $Re\,a_{ii} \neq 0 \quad 1 \leq i \leq n$. *Weiters sollen die* g_i *wie oben eine Lipschitz-Bedingung auf* $\overline{\Lambda}$ *für* $a > 0$ *und* $L > 0$ *erfüllen. Dann gibt es für ausreichend kleines* μ *eine eindeutig bestimmte fastperiodische Lösung* y_i *und*

$$y_i(x) \overset{\mu \to 0}{\longrightarrow} y_i^{(0)}(x).$$

[1] [Cor61], p. 52, Thm. 2.2.

Beweis. Nach [Cor61], p. 99ff. Wir betrachten zuerst das erzeugende System

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i + f_i(x)$$

und zeigen dafür die Existenz einer fastperiodischen Lösung. Dazu zeigen wir im ersten Schritt, dass es in jedem Fall eine beschränkte Lösung gibt und weisen dann nach, daß jede beschränkte Lösung schon in $AP(\mathbb{R})$ liegt. A hat nach Voraussetzung obere Dreiecksgestalt. Daher ergibt sich

$$\frac{dy_n}{dx} = \lambda_n y_n + f_n(x) \Longrightarrow y_n(x) = e^{\lambda_n x} \left[C + \int_0^x e^{-\lambda_n t} f_n(t) dt \right]$$

für eine gewisse Konstante C. Es stellt sich nun die Frage, ob C derart gewählt werden kann, daß wir eine beschränkte Lösung bekommen. Wir nehmen daher im weiteren zuerst an, daß $\alpha_n = Re\,\lambda_n > 0$. Wir behaupten,

$$C = -\int_0^{\infty} e^{-\lambda_n t} f_n(t) dt$$

erfüllt diese Anforderung.[2] Einsetzen ergibt

$$y_n(x) = -\int_x^{\infty} e^{(x-t)\lambda_n} f_n(t) dt$$

die gesuchte beschränkte Lösung wegen

$$\begin{aligned} |y_n(x)| &\le \int_x^{\infty} \left| e^{(x-t)\lambda_n} \right| \underbrace{|f_n(t)|}_{\le ||f_n||_\infty} dt \\ &\le ||f_n||_\infty \, e^{\alpha_n x} \left[\underbrace{\lim_{y\to\infty} -\frac{e^{-\alpha_n y}}{\alpha_n}}_{\to 0} + \frac{e^{-\alpha_n x}}{\alpha_n} \right] \le \frac{||f_n||_\infty}{\alpha_n} \end{aligned}$$

und durch weiteres Einsetzen für τ beliebig

$$|y_n(x+\tau) - y_n(x)| \le \frac{1}{\alpha_n} \sup_{t\in\mathbb{R}} |f_n(t+\tau) - f_n(t)|$$

woraus dann

$$E\left(f_n, \varepsilon|\alpha_n|\right) \subset E\left(y_n, \varepsilon\right)$$

folgt. Analog rechnet man für $\alpha_n < 0$.

Wir haben in unseren Anforderungen an A den Fall $\alpha_n = 0$ eigentlich explizit ausgeschlossen. Es zeigt sich aber, daß wenn eine beschränkte Lösung des erzeugenden Systems existiert, diese immer fastperiodisch sind, selbst wenn $Re\,\lambda_n = 0$. Um hier dann die Fastperiodizität von z_n zu zeigen, ist das Lemma 3.1.1 auf

$$\int_0^x e^{-i\,\beta t} f_n(t) dt$$

[2] Die Existenz des uneigentlichen Integrals bei $t \ge 0$ ist klar wegen $|e^{-\lambda_n t} f_n(t)| \le e^{-\alpha_n t} ||f_n||_\infty$.

mit $\beta = Im\,\lambda_n$ anzuwenden. Wir haben jetzt nur für y_n gerechnet. Geht man dann im nächsten Schritt auf $n-1$ zurück, so erhält man

$$y_{n-1}(x) \;=\; \lambda_{n-1}y_{n-1}(x) + \gamma_{n-1,\,n}\,y_n(x) + f_{n-1}(x),$$

wobei $\gamma_{n-1,\,n}\,y_n(x)+f_{n-1}(x)$ wieder fastperiodisch ist und man daher eine fastperiodische Lösung auch für y_{n-1} konstruieren kann. Durch sukzessivzes Einsetzen erhält man so die vollständige Lösung $y_i^{(0)}$ des erz. Systems.

Wir kehren nun zu unserem System der Form

$$\gamma_{n-1,\,n}\,y_n(x) + f_{n-1}(x) + \mu g_i(x, y_1, \ldots, y_n)$$

zurück und wollen dafür eine Folge von Approximationen $y_i^{(k)}$ konstruieren, die gleichmäßig in x gegen eine Lösung y_i konvergiert. Wir defnieren dazu die k-te Approximation durch

$$\frac{dy_i^{(k)}}{dx} \;=\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j^{(k)} + f_i(x) + \mu g_i(x, y_1^{(k-1)}, \ldots, y_n^{(k-1)})$$

und die Differenz $y_i^{(k)} - y_i^{(0)}$

$$\frac{d[y_i^{(k)} - y_i^{(0)}]}{dx} \;=\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left[y_j^{(k)} - y_j^{(0)}\right] + \mu g_i(x, y_1^{(k-1)}, \ldots, y_n^{(k-1)}).$$

Das ist wieder ein System in der Form eines erzeugenden Systems, besitzt daher eine eindeutige fastperiodische Lösung $y_i^{(k)} - y_i^{(0)}$, für die weiters noch ein $K = K(A)$ existiert, sodass

$$|y_i^{(k)}(x) - y_i^{(0)}(x)| \;\leq\; K \max_{1\leq i\leq n} ||\mu\, g_i(x, y_1^{(k-1)}, \ldots, y_n^{(k-1)})||_\infty,$$

wobei das Maximum deswegen existiert, da die g_i auf $\overline{\Lambda}$ beschränkt sind.[3] Wählt man μ nun derart, daß

$$|\mu| \;\leq\; \frac{a}{K\, \max_{1\leq i\leq n} ||g_i(x, y_1^{(k-1)}, \ldots, y_n^{(k-1)})||_\infty}$$

so liegt auch $(x, y_1^{(k)}, \ldots, y_n^{(k)})$ in $\overline{\Lambda}$. Klarerweise ist $y_n^{(k)} \in AP(\mathbb{R})$ und durch sukzessives Rückwärtseinsetzen jedes $y_i^{(k)}$.

Wir müssen nun noch die Konvergenz der Approxmationen nachweisen. Wir betrachten daher die Differenz $y_i^{(k+1)} - y_i^{(k)}$ und erhalten, da ja nach Voraussetzung für g_i eine Lipschitz-Bedingung gilt:

$$|y_i^{(k+1)}(x) - y_i^{(k)}(x)| \;\leq\; |\mu|KL \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \sup_y |y_j^{(k)}(y) - y_j^{(k-1)}(y)|}_{\leq n\, \max_j |y_j^{(k)}(y) - y_j^{(k-1)}(y)|} \tag{3.1}$$

[3] Wir haben hier implizit eine Induktion über k durchgeführt, wo wir angenommen haben, daß der Graph von $y_i^{(k-1)}$ bereits in $\overline{\Lambda}$ liegt, was wir für $k=0$ ja per Voraussetzung schon wissen.

Nimmt man nun

$$|\mu| < \min\left\{\frac{a}{KM}, \frac{1}{KLn}\right\}$$

an, so liegen die $y_i^{(k)}$ jedenfalls in $\overline{\Lambda}$ und gleichzeitig konvergieren die $y_i^{(k)}$ gleichmäßig in x. Wir bezeichnen dann

$$y_i = \lim_{k\to\infty} y_i^{(k)}$$

als die Lösung des quasilinearen Systems. y_i ist als gleichmäßiger Limes fastperiodischer Funktionen wieder fastperiodisch.

Uns fehlt nun noch der Nachweis der Eindeutigkeit der Lösung. Sei z_i eine andere Lösung. Durch Einsetzen von z_i in Gleichung (3.1) anstelle von $y_i^{(k)}$ liefert dann, dass

$$z_i = \lim_{k\to\infty} y_i^{(k)},$$

womit auch die Eindeutigkeit gezeigt ist. □

3.2 Ein Resultat zur Interpolation mittels fastperiodischer Funktionen

Ein (kurioseres) Resultat im Bereich der Interpolation mittels fastperiodischer Funktionen wird in [Har61] vorgestellt. Wir werden die beiden Sätze ohne ihre Beweise angeben und für die Details auf die Originalpublikation verweisen.

Satz 3.2.1. *Es gibt eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den Werten 0 oder 1 derart, sodass*

$$f(n^k) \neq a_n \qquad \forall n > 0, \forall f \in AP(\mathbb{R}).$$

Dieser Satz lässt sich sogar noch derart verschärfen, daß wir die Stützstellen der Interpolation und die gewünschte(n) fastperiodischen Funktionen anhand der Menge ihrer Fourierkoeffizienten vorgeben können und trotzdem eine Folge von 0 und 1 finden werden, sodass die Interpolation nicht gelingt:

Satz 3.2.2. *Es sei Λ eine abzählbare Menge, $\alpha_n \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann kann eine Folge a_n von 0,1 gewählt werden, sodass keine fastperiodische Funktion mit Fourierexponenten in Λ die Bedingung*

$$f(\alpha_n) = a_n \qquad \forall n$$

erfüllen kann.

3.3 Faltungsoperatoren

In diesem Abschnitt wollen wir als letzten Anwendungsfall Faltungsoperatoren auf Räumen fastperiodischer Funktionen untersuchen. Dafür wiederholen wir kurz die Definition der Faltung:

Definition 3.3.1. Es sei $f \in L^1$, $g \in L^p$ mit $1 \leq p \leq \infty$. Dann ist die Funktion

$$(f * g)(x) = \int f(y)g(x-y)dy$$

wohl definiert und wird **Faltung** von f und g genannt.

Definition 3.3.2. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig, $u \in L^p$ und $\phi \in L^1$. Dann definieren wir den **Faltungsoperator** A durch

$$Au = \lambda u + \phi * u$$

Es ist einfach zu sehen, daß ein solches A stetig auf AP wirkt. Sei $u \in AP$. Die Menge der Translationen ist nach dem Kriterium von Bochner $(T_y u)$ relativ kompakt. Aufgrund der Stetigkeit und Translationsinvarianz von A ist dann auch $(T_y(Au))$ wieder relativ kompakt und damit $Au \in AP$.

Diese Aussage lässt sich leicht auf S^p und B^p ausdehnen[4]. Wir wollen nun noch kurz zeigen, daß sich die in Bezug auf fastperiodische Funktionen schönen Eigenschaften von Faltungsoperatoren auch auf ihre Inversen (wo sie existieren) ausdehnen. Ein Ergebnis dazu liefert uns Satz 3.1[5] aus [BP98].

Satz 3.3.3. *Sei A ein Faltungsoperator, $\hat{\phi}$ die Fouriertransformierte von ϕ und $1 \leq p < \infty$. Weiters bezeichne*

$$a(\xi) = \lambda + \hat{\phi}(\xi) \tag{3.2}$$

das Symbol des Faltungsoperators. Dann ist äquivalent:

- $a(\xi) \neq 0 \quad \forall \xi \in \bar{\mathbb{R}}$
- *A ist invertierbar auf AP und S^p.*

Beweis. Vgl. [BP98], p. 5-6. □

3.4 Ausblick

Natürlich kann eine solche Arbeit nicht das riesige Gebiet der fastperiodischen Funktionen abdecken und so müssen viele interessante und wichtige Resultate unterwähnt bleiben. Wir wollen in diesem Ausblick nur noch etwas über den Tellerrand blicken und weiterführende Quellen angeben.

So werden in den Arbeiten [Upt56] und [Lov50] sogar verschärfte Varianten der gleichmäßigen Fastperiodizität entwickelt, die z.B. auch die Beschränktheit der (verallgemeinerten) totalen Variation der Funktion f fodern.

Auch weitere Anwendungen lassen sich aufzeigen, so unter Anderem in [uVL85] auf die Ergodentheorie oder in [PI87] auf die Kontrolltheorie linearer Systeme. Jedenfalls zeigt sich, daß die fastperiodischen Funktionen in all ihren Ausprägungen ein weiterhin reichhaltiges Gebiet darstellen und längst nicht in Vergessenheit geraten sind.

[4] Vgl. [BP98], Lemmata 2,3.
[5] Wir geben diesen Satz nur verkürzt wieder. Siehe [BP98], p. 5.

Literaturverzeichnis

[ABG06] J. Andres, A.M. Bersani, and R.F. Grande. Hierarchy of almost-periodic function spaces. *Rendiconti di Matematica*, 26:121–188, 2006.

[AK43] Hirotada Anzai and Shizuo Kakutkni. Bohr compactifications of a locally compact Abelian group I. *Proc. Imp. Acad.*, 19(8):476–480, 1943.

[AP71] Luigi Amerio and Giovanni Prouse. *Almost-Periodic Functions and Functional Equations*. The University Series in Higher Mathematics. Van Nostrand Reinhold Company, 1971.

[Bes32] A.S. Besicovitch. *Almost Periodic Functions*. Cambridge University Press, 1932.

[BF44] Harald Bohr and Erling Folner. On some types of functional spaces. *Acta Mathematica*, 76:31–155, 1944.

[Boc27a] Salomon Bochner. Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. I.Teil. Funktionen einer Variablen. *Mathematische Annalen*, 96:119–147, 1927.

[Boc27b] Salomon Bochner. Properties of Fourier series of almost-periodic functions. *London Math. Soc.*, 26:433 ff., 1927.

[Boh24] Harald Bohr. Zur Theorie der fast periodischen Funktionen. *Acta Math.*, 45, 1924.

[Boh25] Harald Bohr. Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. II. Zusammenhang der fastperiodischen Funktionen mit Funktionen von unendlich vielen Variablen; gleichmässige Approximation durch trigonometrische Summen. *Acta Mathematica*, 46:101–214, 1925.

[Boh28] Harald Bohr. Über die Verallgemeinerungen fastperiodischer Funktionen. *Mathematische Annalen*, 100:357–366, 1928.

[Boh32] Harald Bohr. Fastperiodische Funktionen. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, I/5:417–516, 1932.

[BP98] Giordano Bruno and Alexander Pankov. On Convolution Operators in the Spaces of Almost Periodic Functions and L^p Spaces. 1998.

[Bre66] E.A. Bredihina. The divergence of Fourier series of almost periodic functions. *Soviet Math. Dokl.*, 7:1530–1533, 1966.

[Bre70] E.A. Bredihina. Best possible criteria for the convergence of Fourier series of almost periodic functions. *Soviet Math. Dokl.*, 11:1211–1214, 1970.

[CL06] Guy Cohen and Viktor Losert. On hartman almost periodic functions. *Studia Mathematica*, 173:81–101, 2006.

[Coo81] Roger L. Cooke. Almost-periodic functions. *The American Mathematical Monthly*, 88(7):515–526, 1981.

[Cor61] C. Corduneanu. *Almost Periodic Functions*. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics. Interscience Publishers, 1961.

[dBR73] Paul du Bois-Reymond. Über die Fourierschen Reihen. *Nachr. Kön. Ges. Wiss. Göttingen*, 21:571–582, 1873.

[Dei02] Anton Deitmar. *A First Course in Harmonic Analysis*. Universitext. Springer, 2002.

[Dix77] Jacques Dixmier. *C*-Algebras*. North-Holland Publishing Company, 1977.

[Els05] Jürgen Elstrodt. *Maß- und Integrationstheorie*. Springer, 2005.

[Fin69] A.M. Fink. Compact families of almost periodic functions and an application of the schauder fixed-point theorem. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 17, 1969.

[Fol54] Erling Folner. On the dual spaces of the Besicovitch almost periodic spaces. *Matematisk-fysiske Meddelelser*, 29, 1954.

[Har61] S. Hartman. On interpolation by almost periodic functions. *Colloquium Mathematicae*, 8:99–101, 1961.

[Hei90] Christopher Edward Heil. *Wiener Amalgam spaces in generalized harmonic analysis and wavelet theory*. 1990.

[HGF81] Hans Georg Feichtinger. Strong almost periodicity and Wiener type spaces. *Constructive Function Theory*, pages 321–327, 1981.

[HR70] Edwin Hewitt and Kenneth A. Ross. *Abstract Harmonic Analysis*, volume II. Springer, 1970.

[HR79] Edwin Hewitt and Kenneth A. Ross. *Abstract Harmonic Analysis*, volume I of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, second edition, 1979.

[Kat04] Yitzhak Katznelson. *An Introduction to Harmonic Analysis*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, third edition edition, 2004.

[Lov50] E. Love. More-than-uniform almost periodicity. *J. London Math. Soc.*, 26:14–25, 1950.

[Maa50a] Wilhelm Maak. *Fastperiodische Funktionen*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, 1950.

[Maa50b] Wilhelm Maak. Summierung der Fourierreihen gleichartig fastperiodischer Funktionen auf Gruppen. *Mathematische Zeitschrift*, 52(1), 1950.

[Mar96] Jorge Mari. A Counterexample in Power Signals Space. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41:115–116, 1996.

[Pan96] Alexander Pankov. Almost periodic functions, Bohr compactifications and differential equations. *Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano*, 66:149–158, 1996.

[PI87] G. Da Prato and A. Ichikawa. Optimal control of linear systems with almost periodic inputs. *SIAM J. Control and Optimization*, 25, 1987.

[Upt56] C.J.F. Upton. Riesz almost periodicity. *J. London Math. Soc.*, 31:407–426, 1956.

[Upt77] C. J. F. Upton. On continuous classes of almost periodic functions. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 35:159–179, 1977.

[uVL85] A. Bellow und V. Losert. The weighted pointwise ergodic theorem and the individual ergodic theorem along subsequences. *Trans. Am. Math. Soc.*, 288(1), 1985.

[Wer04] Dirk Werner. *Funktionalanalysis*. Springer, 2004.

[Zai85] Samuel Zaidmann. *Almost-periodic functions in abstract spaces*. Research Notes in Mathematics. Pitman Advanced Publishing Program, 1985.

RICHARD FRIEDRICH MAJER

ZUR PERSON

Geboren in Linz (AT), 28. Dezember 1983

Adresse Fliegerschulweg 5, A-4810 Gmunden

Email richard.majer@gmail.com

Mobil (M) +43 (699) 11787034

ANSTELLUNGEN

2011–heute **Wissenschaftlicher Mitarbeiter**

Oberösterreichisches Laserzentrum

Mitarbeit in diversen wissenschaftlichen Projekten in theoretischer und praktischer Hinsicht. Entwicklung von Simulationen zum Laserschneiden und Laser-unterstützen Biegen. Antragserstellung und Projekteinreichung bei FFG, ACCM.
Referenz: Prof. Dr. Dieter Schuöcker · +43 (7612) 67659 · lz@ooelz.at

2003-heute **IT-Technik, Leitung EDV**

Dr. Majer Maschinenbau GmbH

Betreuung und Planung sämtlicher EDV/IT Projekte.
Helpdesk-Tätigkeiten, Entwicklung von Software (PHP, C++), Datenbankadministration.
Referenz: Dr. Verena Majer +43 (7612) 67966 · verena.majer@majer.co.at

AUSBILDUNG

2003-2013 **Universität Wien**

Studium der Mathematik.
Diplomarbeitsthema: *Fastperiodische Funktionen*
Beschreibung: Eine Einführung in die Theorie der fastperiodischen Funktionen sowie potentieller Anwendungen.
Betreuer: o. Univ.-Prof. Dr. Viktor Losert

1994-2002 **HIB Schloss Traunsee**

AHS Matura

Besuch des Gymnasiums an der HIB Schloss Traunsee.

1990-1994 **Volksschule Gschwandt**

Volkschule

Besuch der Volksschule in Gschwandt.

12. April 2013

Abstract (Deutsch)

Die vorliegende Arbeit soll eine Einführung in das weitläufige Gebiet der fastperiodischen Funktionen geben. Dabei werden im ersten Kapitel zuerst über den klassischen Zugang von Bohr mittels Verschiebungszahlen zentrale Resultate für $AP(\mathbb{R})$ bewiesen und dann der moderne Zugang über die Methoden der harmonischen Analyse vorgestellt.
Das zweite Kapitel widmet sich Verallgemeinerungen der gleichmäßigen Fastperiodizität wie den fastperiodischen Funktionen von Weyl oder Stepanoff. Abschliessend wird gezeigt, wie sich diese Konzepte in den sehr allgemeinen Rahmen der Wiener-Amalgam-Räume einbetten lassen.
Im dritten und letzten Teil werden schließlich mehrere Anwendungen fastperiodischer Funktionen präsentiert, wie zum Beispiel auf Systeme quasilinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Abstract (Englisch)

This thesis is meant as an introduction to the wide area of almost periodic functions. In the first chapter, we use Bohr's classical methods involving translation numbers to prove several key facts about uniform almost periodic functions on the real line. We then show how this approach corresponds to the modern one using techniques from harmonic analysis.
The second chapter is devoted to the study of several well-known generalizations of uniform almost periodicity, e.g. those introduced by Weyl or Stepanoff, and hint at how they can be embedded into the large and powerful framework of Wiener-Amalgam-spaces.
The last chapter contains several applications of almost periodic functions, e.g. to certain systems of quasilinear ordinary differential equations.