



universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Stochastische Prozesse in der Versicherungsmathematik

verfasst von

Verena Klambauer

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Studienkennzahl: A 405
Studienrichtung: Mathematik
Betreuer: Ao. Univ.-Prof. Dr. Franz Hofbauer

Wien, im Februar 2013

Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle bei Univ.-Prof. Dr. Franz Hofbauer für die intensive Betreuung meiner Diplomarbeit bedanken. In seinen zahlreichen Vorlesungen hat er mir einen breiten Einblick in die Welt der Stochastik vermittelt und mich mit vielen Anregungen und Ratschlägen bei der Erstellung dieser Arbeit unterstützt.

Ganz besonders möchte ich meinen Eltern und meiner Schwester danken, denn sie haben mir dieses Studium nicht nur finanziell ermöglicht, sondern mich in meinem Weg immer bestärkt. Sie sind mir stets mit Rat und Tat zur Seite gestanden - nicht zuletzt bei der Fertigstellung dieser Arbeit.

Ein großes Dankeschön gebührt auch meinem Freund und seiner Mutter, die mich bei meiner Arbeit immer motivierend begleitet haben.

Zuletzt möchte ich mich auch bei all meinen Studienkollegen bedanken, die in den letzten Jahren eine große Stütze für mich waren und zu guten Freunden geworden sind.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
Teil 1. Risikothorie	
Kapitel 1. Poissonprozesse	5
Kapitel 2. Kleine Forderungen	
2.1. Grundlagen der Risikothorie	11
2.2. Kleine Forderungen	14
Kapitel 3. Weitere Darstellungsarten der Wahrscheinlichkeit $\Psi(a)$	
3.1. Integralgleichung	19
3.2. Reihendarstellung	24
3.3. Asymptotisches Verhalten der Wahrscheinlichkeit $\Psi(a)$	26
Kapitel 4. Große Forderungen und subexponentielle Verteilungen	
4.1. Große Forderungen	31
4.2. Subexponentielle Verteilungen	37
Kapitel 5. Beispiele	
5.1. Weibullverteilung	45
5.2. Verallgemeinerte Paretoverteilung	46
5.3. Benktanderverteilung	48
5.4. Loggammaverteilung	50
Teil 2. Extremwerttheorie	
Kapitel 6. Die drei Extremwertverteilungen	
6.1. Grundlagen	55
6.2. Satz von Khintchine	58
6.3. Max-stabile Verteilungen	64
6.4. Fisher-Tippett-Theorem	68
6.5. Anwendungen des Fisher-Tippett-Theorems	76
Zusammenfassung	81
Literaturverzeichnis	83

Einleitung

Die Theorie über stochastische Prozesse ist ein wichtiges mathematisches Konzept, um Folgen von Zufallsexperimenten beschreiben zu können. Man unterscheidet zwischen stochastischen Prozessen mit diskreter und stochastischen Prozessen mit kontinuierlicher Zeit.

Unter einem stochastischen Prozess mit diskreter Zeit versteht man eine Folge von Zufallsvariablen $X_0, X_1, X_2, \dots$, wobei diese Werte in derselben Menge S annehmen. Die Menge S bezeichnet man als Zustandsraum und X_n als Zustand zum Zeitpunkt n .

Der n -malige Münzwurf ist nur eines von vielen Beispielen dafür. Der Zustandsraum besteht hier aus den beiden Ausgängen „Kopf“ und „Zahl“, das heißt $S = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$. X_n ist der Ausgang nach dem n -ten Wurf.

Unter einem stochastischen Prozess mit kontinuierlicher Zeit versteht man eine Familie von Zufallsvariablen $(X_t)_t$ mit $t \in \mathbb{R}$, wobei auch sie Werte in derselben Menge S , dem Zustandsraum, annehmen. X_t bezeichnet man als Zustand zum Zeitpunkt t .

Als Beispiel kann der Krankheitsverlauf bei einer Epidemie dienen. X_t ist die Anzahl an Erkrankten zum Zeitpunkt t . Da entweder niemand oder nur eine positive Anzahl von Personen erkrankt sein kann, ist der Zustandsraum durch $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ gegeben.

Die hierfür verwendete Literatur findet sich in [9] und [11].

Im ersten Teil untersuche ich die Anwendung der stochastischen Prozesse in der Versicherungsmathematik, und zwar im Bereich der Risikotheorie.

Dazu betrachtet man folgende vereinfachte Situation: Ein Versicherungsunternehmen besitzt Einnahmen in Form von Prämien und Ausgaben für Leistungen aus versicherten Schadensfällen. Die Schadensmeldungen treffen zu unabhängigen Zeitpunkten ein und haben eine zufällige Höhe. In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage, wie hoch das Risiko für das Versicherungsunternehmen ist, einmal zahlungsunfähig zu werden. Um dem entgegenzuwirken, werden der Deckungsbedarf berechnet und Rücklagen gebildet. Es gilt nun, die Risikowahrscheinlichkeit, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass die Rücklagen in Höhe a aufgebraucht werden, abzuschätzen. Diese wird mit $\Psi(a)$ bezeichnet. Die Anzahl der Forderungen, die in einem bestimmten Zeitintervall $(0, t]$ eintreffen, bilden einen stochastischen Prozess kontinuierlicher Zeit. Im ersten Kapitel wird zu sehen sein, dass der Poissonprozess am besten dafür geeignet ist, dieses mathematische Konzept zu beschreiben.

Abhängig davon, welche Verteilungsfunktion man für die Höhe der Forderungen benutzt, unterscheidet man kleine und große Forderungen. Dementsprechend finden sich in Kapitel 2 und Kapitel 4 Resultate, die das asymptotische Verhalten der Risikowahrscheinlichkeit beschreiben. Um diese Wahrscheinlichkeit leichter berechnen zu können, werden in Kapitel 3 eine Integral- und eine Reihendarstellung der Gegenwahrscheinlichkeit $K(a) = 1 - \Psi(a)$ gegeben.

Der Aufbau wurde, in weiten Zügen, aus [9] und [10] entnommen. Die wichtigsten Sätze und Begriffe finden sich auch in [5] und [14]. Als weitere Grundlage wurden [2] und [15] herangezogen. Die für Kapitel 3 notwendige Theorie über Erneuerungsprozesse kann in [6] und [7] nachgelesen werden.

Im zweiten Teil meiner Diplomarbeit werde ich mich mit der Anwendung stochastischer Prozesse in der Extremwerttheorie befassen.

Warum man in der Mathematik an Aussagen über extreme Ereignisse interessiert ist, zeigt folgendes Beispiel: Möchte man einen Staudamm bauen, so stellt sich relativ schnell die Frage nach dessen sinnvoller Höhe. Die Berechnungen werden sich nicht an der durchschnittlichen Höhe des Wasserstandes orientieren, sondern an der maximalen Höhe der Flut.

Eine wichtige Rolle spielen solche Fragestellungen auch für Versicherungsunternehmen bzw. Banken. In diesem Zusammenhang ist man zum Beispiel an der Wahrscheinlichkeit, wie oft dieser Staudamm in 100 Jahren überflutet wird, interessiert. Mithilfe solcher Schätzwerte können unter anderem Sicherheitsreserven festgelegt werden.

Extreme Ereignisse wie Überflutungen, Erdbeben etc. werden in der klassischen statistischen Analyse oft als „Ausreißer“ bezeichnet, teilweise sogar ganz ignoriert. Mithilfe der Extremwertverteilungen kann man heutzutage jedoch Modelle entwickeln, die das Auftreten von extremen Ereignissen gut beschreiben und vorhersagen können. Dabei kommt die Theorie über stochastische Prozesse zur Anwendung.

Angenommen, in dem oben beschriebenen Staudamm-Beispiel wird jeden Tag zur selben Zeit der Wasserstand gemessen und X_n sei der Wasserstand am Tag n . Anschließend bildet man das Maximum über $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, das mit M_n bezeichnet wird. Die Maxima $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bilden eine neue Folge von Zufallsvariablen, von der man die Grenzwertverteilung für immer größer werdendes n beschreiben möchte.

Das zentrale Resultat in diesem Abschnitt ist das Theorem von Fisher-Tippett, das sich mit der Verteilung der Maxima beschäftigt. In diesem Theorem wird gezeigt, dass die Verteilungsfunktion der Maxima gegen drei mögliche Verteilungstypen konvergiert. Abschließend werden einige Beispiele dazu angeführt.

Der Aufbau dieses Kapitels orientiert sich im Wesentlichen an [12]. Die wichtigsten Sätze kann man auch in [13] und [15] nachlesen. Weiterführende Literatur und die in diesem Teil verwendeten Begriffe finden sich [1], [3] und [4].

Teil 1

Risikotheorie

KAPITEL 1

Poissonprozesse

Der Poissonprozess ist ein stochastischer Prozess kontinuierlicher Zeit, der nach Siméon Denis Poisson benannt wurde. Er spielt unter anderem in der Versicherungsmathematik eine wichtige Rolle und wird Ausgangspunkt für die Risikothorie sein, die im weiteren Verlauf dieser Arbeit genauer behandelt wird.

In diesem Kapitel werden die wichtigsten Resultate und Eigenschaften von Poissonprozessen hergeleitet. Der Aufbau richtet sich im Wesentlichen nach [9], [10] und [14]. In manchen der nachfolgenden Beweise über Poissonprozesse werden Definitionen und Aussagen aus der elementaren Wahrscheinlichkeitstheorie verwendet. Diese Sätze werden an den entsprechenden Stellen wiederholt, jedoch nicht bewiesen. Hierfür sei auf [8] verwiesen.

Definition 1.1. Sei $\lambda > 0$. Eine Zufallsvariable X mit Wertebereich $R = \{0, 1, 2, \dots\}$ heißt **Poisson-** oder kurz **$P(\lambda)$ -verteilt**, falls die Wahrscheinlichkeitsfunktion für $k \in R$ durch

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

gegeben ist.

Die allgemeine Definition eines Poissonprozesses lautet:

Definition 1.2. Sei $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine Gewichtsfunktion und $G(t) = \int_0^t g(x)dx$ die Stammfunktion von g mit $\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = \infty$.

Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ mit kontinuierlicher Zeit heißt **Poissonprozess** mit Gewichtsfunktion g , wenn gilt:

- (a) $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$
- (b) für $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_k$ sind die Zuwächse $X_{s_1}, X_{s_2} - X_{s_1}, \dots, X_{s_k} - X_{s_{k-1}}$ unabhängig
- (c) für $s < t$ hat $X_t - X_s$ die $P(G(t) - G(s))$ -Verteilung

Der Poissonprozess ist ein gutes mathematisches Modell, um Ereignisse zu beschreiben, die unabhängig voneinander zu zufälligen Zeitpunkten eintreten. Um zu sehen, dass dies auch für das Eintreffen von Schadensmeldungen bei einer Versicherung gilt, betrachtet man das folgende

Beispiel. Hierfür werden ein Zeitintervall $(0, s]$ und eine Anzahl r von Schadensmeldungen bei einem Versicherungsunternehmen festgelegt. Jeder Schadensfall tritt zu einem zufälligen Zeitpunkt unabhängig von den anderen ein.

Sei $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine Gewichtsfunktion. Dann wird ein Zeitpunkt t umso eher gewählt, je größer $g(t)$ ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Schadensmeldung im Zeitintervall $(u, v]$ bei der Versicherung eintrifft, soll proportional zu $G(u) - G(v)$ sein.

Mit X_t wird die Anzahl der Schadensmeldungen im Intervall $(0, t]$ beschrieben. Nun wird gezeigt, dass der stochastische Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ die drei Eigenschaften des Poissonprozesses erfüllt.

Es gilt $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$, denn im Zeitintervall $(0, 0]$ meldet sich natürlich niemand. Somit ist die Eigenschaft (a) erfüllt.

Für die nächsten beiden Eigenschaften wählt man ein $k \in \mathbb{N}$ mit $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k$, wobei $s > t_k$ angenommen und $t_{k+1} = s$ gesetzt wird. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Schadensmeldung in $(t_{i-1}, t_i]$ eintrifft, ist somit $p_i = \frac{G(t_i) - G(t_{i-1})}{G(s)}$ für $1 \leq i \leq k+1$, da dann

$$\sum_{i=1}^{k+1} p_i = 1 \text{ gilt.}$$

Seien $Z_i = X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$ für $1 \leq i \leq k+1$ die Zuwächse. Der Vektor $(Z_1, Z_2, \dots, Z_{k+1})$ besitzt die Multinomialverteilung und daher folgt:

$$\mathbb{P}(Z_1 = n_1, Z_2 = n_2, \dots, Z_k = n_k, Z_{k+1} = n_{k+1}) = \frac{r!}{n_1! n_2! \dots n_k! n_{k+1}!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k} p_{k+1}^{n_{k+1}}.$$

Es gilt: $n_1 + n_2 + \dots + n_k + n_{k+1} = r$, da in dem Zeitintervall $(0, s]$ genau r Schadensfälle eintreten. Damit ist aber auch $Z_1 + Z_2 + \dots + Z_k + Z_{k+1} = r$. Da Z_{k+1} die auf r fehlende Anzahl ist, kann man es weglassen und erhält somit:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_1 = n_1, Z_2 = n_2, \dots, Z_k = n_k) &= \\ &= \frac{r!}{n_1! n_2! \dots n_k! (r - n_1 - n_2 - \dots - n_k)!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k} p_{k+1}^{(r - n_1 - n_2 - \dots - n_k)} \\ &= \frac{r!}{n_1! n_2! \dots n_k! (r - n_1 - n_2 - \dots - n_k)!} \left(\frac{G(t_1) - G(t_0)}{G(s)} \right)^{n_1} \dots \left(\frac{G(s) - G(t_k)}{G(s)} \right)^{(r - n_1 - n_2 - \dots - n_k)} \end{aligned}$$

Nun lässt man sowohl r als auch s gegen ∞ gehen, sodass $\frac{r}{G(s)}$ gegen 1 konvergiert. Da $\frac{r-k}{G(s)} \rightarrow 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{G(s) - G(t_k)}{G(s)} \right)^{G(s)} = e^{-G(t_k)}$, gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_1 = n_1, Z_2 = n_2, \dots, Z_k = n_k) &= \\ &= \frac{r(r-1) \dots (r - n_1 - \dots - n_k + 1)}{n_1! n_2! \dots n_k! G(s)^{n_1 + n_2 + \dots + n_k}} \prod_{i=1}^k (G(t_i) - G(t_{i-1}))^{n_i} \left(\left(1 - \frac{G(t_k)}{G(s)} \right)^{G(s)} \right)^{\frac{r - n_1 - n_2 - \dots - n_k}{G(s)}} \\ &\rightarrow \frac{1}{n_1! n_2! \dots n_k!} \prod_{i=1}^k (G(t_i) - G(t_{i-1}))^{n_i} e^{-G(t_k)} \\ &= \prod_{i=1}^k \frac{(G(t_i) - G(t_{i-1}))^{n_i}}{n_i!} e^{-(G(t_i) - G(t_{i-1}))} \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeiten von Poissonverteilungen mit Parameter λ sind generell gegeben durch $w_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. Wie man erkennen kann, zerfällt der Grenzwert in das Produkt

$$\mathbb{P}(Z_1 = n_1, Z_2 = n_2, \dots, Z_k = n_k) = \prod_{i=1}^k w_{\lambda_i}(n_i),$$

mit $\lambda_i = G(t_i) - G(t_{i-1})$. Das heißt, die Zuwächse $Z_1, \dots, Z_k$ sind unabhängig und $\mathbb{P}(Z_i = n) = w_{\lambda_i}(n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Die Zufallsvariablen Z_i haben die $P(\lambda_i)$ -Verteilung und erfüllen daher Eigenschaft (b) und (c).

$(X_t)_{t \geq 0}$ bildet somit einen gewichteten Poissonprozess.

Ist die Gewichtsfunktion g konstant, d.h. gilt $g(t) = \lambda$ für alle $t \in \mathbb{R}^+$, spricht man von einem homogenen Poissonprozess. Dann gilt $G(t) = \lambda t$ für $t \in \mathbb{R}^+$. Dies führt zu der folgenden

Definition 1.3. Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ mit kontinuierlicher Zeit heißt **homogener Poissonprozess** mit Parameter $\lambda > 0$, wenn gilt:

- (a) $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$
- (b) für $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_k$ sind die Zuwächse $X_{s_1}, X_{s_2} - X_{s_1}, \dots, X_{s_k} - X_{s_{k-1}}$ unabhängig
- (c) für $s < t$ hat $X_t - X_s$ die $P(\lambda(t-s))$ -Verteilung

Im weiteren Verlauf der Arbeit wird nur mit homogenen Poissonprozessen gearbeitet.

Definition 1.4. Unter **Zwischenankunftszeiten** versteht man die Zeiten zwischen aufeinander folgenden Schadensfällen bzw. die Zeiten, die zwischen den Schadensmeldungen liegen, vorausgesetzt die Versicherungsnehmer melden Schäden gleich nach Eintritt bei der Versicherung.

Dies ermöglicht eine andere Beschreibung von homogenen Poissonprozessen. Zuvor ist jedoch noch folgender Hilfssatz notwendig:

Hilfssatz 1.1. Gegeben seien die beiden Zufallsvektoren $V = (V_1, V_2, \dots, V_n)$ und $U = (U_1, U_2, \dots, U_n)$, wobei $U_1 = V_1$, $U_2 = V_2 - V_1$, ..., $U_n = V_n - V_{n-1}$ ist. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) V hat den Wertebereich $D = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : 0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n\}$ und die Wahrscheinlichkeitsdichte $g(y_1, \dots, y_n) = e^{-\lambda y_n} \lambda^n$, wobei $g : D \rightarrow [0, \infty)$.
- (b) U hat den Wertebereich $(0, \infty)^n$ und die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x_1, \dots, x_n) = e^{-\lambda(x_1 + \dots + x_n)} \lambda^n$, wobei $f : (0, \infty)^n \rightarrow [0, \infty)$.

Für den Beweis braucht man die Transformationsformel für Wahrscheinlichkeitsdichten.

Satz 1.1. Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\psi : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine injektive, stetig differenzierbare Funktion mit $\det D\psi(x) \neq 0$, $\forall x \in W$. Weiters sei ein n -dimensionaler Zufallsvektor X mit Wahrscheinlichkeitsdichte $h : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ gegeben und $h(x) = 0$ für $x \notin W$. Für $Y = \psi(X)$ ist dann

$$k(x) = \mathbf{1}_{\psi(W)}(x) h(\psi^{-1}(x)) |\det D\psi^{-1}(x)|$$

die Wahrscheinlichkeitsdichte des Zufallsvektors Y .

Beweis. Der Beweis kann in [8] nachgelesen werden. □

Damit ist der Hilfssatz leicht bewiesen:

Beweis. Um die Transformationsformel für Dichten anzuwenden, braucht man zunächst folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit kann man die lineare Transformation der Zufallsvektoren U und V wie folgt beschreiben:

$$U = AV \quad \text{und} \quad V = A^{-1}U$$

(a) $\Rightarrow$ (b) Angenommen, V hat den Wertebereich D und die Wahrscheinlichkeitsdichte g . Dann hat U den Wertebereich

$$\{Ay : y \in D\} = \{(y_1, y_2 - y_1, y_3 - y_2, \dots, y_n - y_{n-1}) : 0 < y_1 < \dots < y_n\} = (0, \infty)^n.$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte von U ergibt sich aus der Transformationsformel, indem man $\psi(x) = Ax$, $W = \psi(W) = (0, \infty)^n$, $\psi^{-1}(x) = A^{-1}x$ und $D\psi^{-1}(x) = A^{-1}$ setzt:

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(A^{-1}x) |\det(A^{-1})| = e^{-\lambda(x_1 + \dots + x_n)} \lambda^n.$$

(b) $\Rightarrow$ (a) Angenommen, U hat den Wertebereich $(0, \infty)^n$ und die Wahrscheinlichkeitsdichte f . Dann hat V den Wertebereich

$$\{A^{-1}x : x \in (0, \infty)^n\} = \{(x_1, x_1 + x_2, \dots, x_i \in (0, \infty), 1 \leq i \leq n)\} = D.$$

Auch hier folgt die Wahrscheinlichkeitsdichte von V aus der Transformationsformel mit $\psi(y) = A^{-1}y$, $W = \psi(W) = (0, \infty)^n$, $\psi^{-1}(y) = Ay$ und $D\psi^{-1}(y) = A$:

$$g(y_1, \dots, y_n) = f(Ay) |\det(A)| = e^{-\lambda y_n} \lambda^n.$$

□

Vor dem zentralen Resultat über Zwischenankunftszeiten wird an dieser Stelle die Definition der Exponentialverteilung wiederholt:

Definition 1.5. Sei $\lambda > 0$. Eine kontinuierliche Zufallsvariable X mit Wertebereich $\mathbb{R}^+$ heißt **Exponential-** oder kurz **$E(\lambda)$ -verteilt**, falls die Wahrscheinlichkeitsdichte für $x \in \mathbb{R}^+$ durch

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$$

gegeben ist.

Satz 1.2. Gegeben sei ein homogener Poissonprozess mit Parameter $\lambda > 0$. Die Zufallsvariablen V_i , wobei $1 \leq i \leq n$, stellen jeweils die Wartezeit vom Zeitpunkt 0 bis zum Eintreffen der i -ten Schadensmeldung dar.

Seien $U_1 = V_1$, $U_2 = V_2 - V_1$, $\dots$, $U_n = V_n - V_{n-1}$ die ersten n Zwischenankunftszeiten. Dann gilt: Die Zufallsvariablen U_i mit $1 \leq i \leq n$ sind unabhängig und $E(\lambda)$ -verteilt.

Beweis. Es seien $s_1, \dots, s_n > 0$ und $t_i = s_1 + s_2 + \dots + s_i$ mit $1 \leq i \leq n$. Weiters sei $0 < h < \min(s_1, \dots, s_n)$, sodass gilt:

$$0 < t_1 - h < t_1 < t_2 - h < t_2 < \dots < t_n - h < t_n$$

Nun betrachtet man die Zerlegung des Intervalls $(0, t_n]$ in die folgenden $2n$ Teilintervalle:

$$(0, t_n] = (0, t_1 - h] \cup (t_1 - h, t_1] \cup \dots \cup (t_{n-1}, t_n - h] \cup (t_n - h, t_n]$$

Seien $Z_1, Z_2, \dots, Z_{2n-1}, Z_{2n}$ die Anzahlen an Schadensmeldungen, die in den Intervallen $(0, t_1 - h], (t_1 - h, t_1], \dots, (t_n - h, t_n]$ bei der Versicherung eintreffen.

Wie man leicht erkennen kann, sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) Es gilt: $V_i \in (t_i - h, t_i]$ mit $1 \leq i \leq n$
- (b) Es gilt: $Z_1 = 0, Z_2 = 1, Z_3 = 0, Z_4 = 1, \dots, Z_{2n-1} = 0, Z_{2n} \geq 1$

Aus der Definition von homogenen Poissonprozessen folgt, dass die Zuwächse Z_j mit $1 \leq j \leq 2n$ unabhängig und $P(\lambda l)$ -verteilt sind, wobei l für die Länge des Intervalls steht. Damit kann man weiters zeigen:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V_i \in (t_i - h, t_i], 1 \leq i \leq n) &= \mathbb{P}(Z_1 = 0, Z_2 = 1, Z_3 = 0, Z_4 = 1, \dots) \\ &= \mathbb{P}(Z_1 = 0) \cdot \mathbb{P}(Z_2 = 1) \cdot \mathbb{P}(Z_3 = 0) \dots \mathbb{P}(Z_{2n} \geq 1) \\ &= \mathbb{P}(Z_1 = 0) \cdot \mathbb{P}(Z_2 = 1) \cdot \mathbb{P}(Z_3 = 0) \dots (1 - \mathbb{P}(Z_{2n} = 0)) \\ &= e^{-\lambda(s_1-h)} \cdot e^{-\lambda h} \cdot (\lambda h) \cdot e^{-\lambda(s_2-h)} \dots e^{-\lambda(s_n-h)} \cdot (1 - e^{-\lambda h}), \end{aligned}$$

da die Poisson-Wahrscheinlichkeiten durch $\mathbb{P}(X = k) = \frac{(\lambda l)^k}{k!} e^{-\lambda l}$ gegeben sind.

Fasst man weiter zusammen, dann folgt:

$$\begin{aligned}
 &= (\lambda h)^{n-1} \cdot e^{-(n-1)(\lambda h)} \cdot e^{-\lambda(s_1-h)-\lambda(s_2-h)-\dots-\lambda(s_n-h)} \cdot (1 - e^{-\lambda h}) \\
 &= (\lambda h)^{n-1} \cdot e^{-(n-1)(\lambda h)} \cdot e^{-\lambda(s_1+s_2+\dots+s_n-nh)} \cdot (1 - e^{-\lambda h}) \\
 &= (\lambda h)^{n-1} \cdot e^{-(n-1)(\lambda h)} \cdot e^{-\lambda(t_n-nh)} \cdot (1 - e^{-\lambda h}) \\
 &= (\lambda h)^{n-1} \cdot e^{-\lambda(t_n-nh+(n-1)h)} \cdot (1 - e^{-\lambda h}) \\
 &= (\lambda h)^{n-1} \cdot e^{-\lambda(t_n-h)} \cdot (1 - e^{-\lambda h}) \\
 &= (\lambda h)^{n-1} \cdot (e^{-\lambda(t_n-h)} - e^{-\lambda t_n}) \\
 &= (\lambda h)^{n-1} \cdot \int_{t_n-h}^{t_n} \lambda e^{-\lambda x_n} dx_n \\
 &= \int_{t_1-h}^{t_1} \dots \int_{t_n-h}^{t_n} \lambda^n e^{-\lambda x_n} dx_n dx_{n-1} \dots dx_1 \\
 &= \int_W f(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots dx_1,
 \end{aligned}$$

wobei $W = (t_1 - h, t_1] \times \dots \times (t_n - h, t_n]$ und $f(x_1, \dots, x_n) = \lambda^n e^{-\lambda x_n}$.

Da $0 < V_1 < V_2 < \dots < V_n$, ist der Wertebereich des Zufallsvektors $V = (V_1, \dots, V_n)$ durch $D = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : 0 < y_1 < \dots < y_n\}$ gegeben. Es ist leicht zu erkennen, dass $W \subseteq D$. Zusammenfassend wurde gezeigt, dass $\mathbb{P}(V \in W) = \int_W f(x) dx$ für alle Würfel W mit $W \subseteq D$ gilt. Somit ist die Funktion f die Wahrscheinlichkeitsdichte von V .

Laut dem obigen Hilfssatz hat der Zufallsvektor $U = (U_1, U_2, \dots, U_n)$ den Wertebereich $(0, \infty)^n$ und die Dichte

$$\begin{aligned}
 g(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \lambda^n e^{-\lambda(x_1+\dots+x_n)} \\
 &= \lambda \cdot e^{-\lambda x_1} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x_2} \dots \lambda \cdot e^{-\lambda x_n} \\
 &= g_1(x_1) \cdot \dots \cdot g_n(x_n).
 \end{aligned}$$

Da die Dichte $g(x)$ des Zufallsvektors in ein Produkt $g_1(x_1) \cdot \dots \cdot g_n(x_n)$ zerfällt und für jedes $1 \leq i \leq n$ die Funktion g_i die Wahrscheinlichkeitsdichte der Exponentialverteilung mit Parameter λ ist, folgt aus der elementaren Wahrscheinlichkeitstheorie:

Die Zufallsvariablen $U_1, \dots, U_n$ sind unabhängig und für jedes $1 \leq i \leq n$ besitzt U_i die $E(\lambda)$ -Verteilung. □

KAPITEL 2

Kleine Forderungen

2.1 Grundlagen der Risikothorie

Die grundlegende Idee einer Versicherung besteht in einem Risikotransfer vom Versicherungsnehmer an den Versicherer gegen Zahlung einer Prämie. Tritt nun ein versicherter Schadensfall ein, so kommt es zu Zahlungen seitens des Versicherungsunternehmens. Es wird angenommen, dass die Zeitpunkte, zu denen die Schadensfälle gemeldet werden, einen homogenen Poissonprozess mit Parameter $\lambda > 0$ bilden.

Um weitere Aussagen treffen zu können, wird zunächst die grundlegende Notation eingeführt:

- Für $t > 0$ sei N_t die Anzahl der Forderungen im Zeitintervall $(0, t]$, d.h. $(N_t)_{t \geq 0}$ ist ein homogener Poissonprozess mit Parameter $\lambda > 0$.
- Die Zufallsvariablen U_i stellen die Zwischenankunftszeiten in diesem Poissonprozess dar, d.h. es wird die Zeit vom Eintreffen der $(i - 1)$ -ten Forderung bis zum Eintreffen der i -ten Forderung betrachtet.

Aus Satz 1.2. folgt, dass diese unabhängig und $E(\lambda)$ -verteilt sind.

- Für $i \geq 1$ wird mit Y_i die Höhe der i -ten Forderung bezeichnet. Die Forderungen $Y_1, Y_2, \dots$ seien unabhängig und identisch verteilt, d.h. sie besitzen die gleiche Verteilungsfunktion F . Da Forderungen, insbesondere von Geldbeträgen, sicher positiv sind, kann man von $F(0) = 0$ ausgehen. Zu guter Letzt wird angenommen, dass die Zufallsvariablen $Y_1, Y_2, \dots$ unabhängig vom Poissonprozess sind.
- Die Prämieinnahmen der Versicherung werden pro Zeiteinheit zusammengefasst und mit $c > 0$ bezeichnet.
- Nun lässt sich der Gewinn der Versicherung in $(0, t]$ als Differenz der Einnahmen und Ausgaben folgendermaßen darstellen:

$$X_t = (c \cdot t) - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

- Die Rücklagen bilden den „Sicherheitspolster“ der Versicherung für Zeiten erhöhter Ausgaben. Dieser sei mit a bezeichnet.

Der Gewinn X_t kann auch negativ sein und somit für die Versicherung einen Verlust darstellen. Für diesen Fall stellt sich die Frage, ob die Rücklagen a groß genug sind, und mit welcher Wahrscheinlichkeit die Ausgaben die Rücklagen übersteigen.

Definition 2.1. Die folgende Wahrscheinlichkeit

$$\Psi(a) = \mathbb{P}(X_t < -a \text{ für ein } t > 0)$$

ist das Risiko, dass der Verlust die Rücklagen a der Versicherung zu irgendeinem Zeitpunkt übersteigt. Man kann $\Psi(a)$ auch als das Risiko des Versicherungsunternehmens, zu einem Zeitpunkt t zahlungsunfähig zu werden, interpretieren.

Im weiteren Verlauf der Arbeit wird das Verhalten von $\Psi(a)$ untersucht. Doch zuvor sei noch ein Resultat über den Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ angeführt. Berechnet wird der Erwartungswert $\mathbb{E}(X_t)$, d.h. der durchschnittliche Gewinn im Intervall $(0, t]$.

Der Erwartungswert der Verteilung F - die durchschnittliche Höhe der Forderungen - sei mit μ bezeichnet.

Satz 2.1. Sei $t > 0$. Dann gilt: $\mathbb{E}(X_t) = (c - \lambda\mu)t$.

Bemerkung. Folgende Eigenschaft von Erwartungswerten wird im Beweis verwendet und kann in [8] nachgelesen werden:

Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen X lässt sich auch schreiben als

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t) dt - \int_{-\infty}^0 \mathbb{P}(X \leq t) dt.$$

Angenommen, die Zufallsvariable X besitzt einen Wertebereich in $\mathbb{R}^+$. Dann ist $\mathbb{P}(X \leq t) = 0$ für $t < 0$ und aus obiger Gleichung folgt, dass $\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t) dt$ gilt.

Beweis. Für $t > 0$ sei

$$Z_t = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N_t} Y_i & \text{wenn } N_t > 0 \\ 0 & \text{wenn } N_t = 0 \end{cases}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_t > x) &\stackrel{(1)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_t > x | N_t = k) \cdot \mathbb{P}(N_t = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_k > x | N_t = k) \cdot \mathbb{P}(N_t = k) \\ &\stackrel{(2)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_k > x) \cdot \mathbb{P}(N_t = k), \end{aligned}$$

wobei in Gleichung (1) die Formel für die totale Wahrscheinlichkeit und in Gleichung (2) die Unabhängigkeit von $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_k$ und N_t verwendet wurde. Da die Zufallsvariablen $Y_1, Y_2, \dots$ und somit auch Z_t positive Werte annehmen und daher einen Wertebereich in $\mathbb{R}^+$ haben, kommt obige Bemerkung zum Tragen, und man erhält folgende Gleichungen:

$$\mathbb{E}(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_k) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_k > x) dx \quad \text{und}$$

$$\mathbb{E}(Z_t) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(Z_t > x) dx.$$

Weiters gilt, dass alle Summanden in der obigen Summe nichtnegativ sind. Daher kann man obige Gleichung von 0 bis ∞ integrieren und anschließend Summe und Integral vertauschen:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_t) &= \int_0^{\infty} \mathbb{P}(Z_t > x) dx \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_k > x) \cdot \mathbb{P}(N_t = k) dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_k) \cdot \mathbb{P}(N_t = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k\mu \cdot \mathbb{P}(N_t = k) = \mu \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(N_t = k) \\ &= \mu \mathbb{E}(N_t) = \mu\lambda t \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde verwendet, dass der Erwartungswert von N_t gleich (λt) ist. Dies gilt, da N_t die $P(\lambda t)$ -Verteilung besitzt. Da $X_t = ct - Z_t$, folgt

$$\mathbb{E}(X_t) = ct - \mathbb{E}(Z_t) = ct - \mu\lambda t = (c - \lambda\mu)t.$$

□

Voraussetzung für das Überleben des Versicherungsunternehmens ist ein positiver Durchschnittsgewinn, d.h. $\mathbb{E}(X_t)$ soll größer Null sein. Daher wird angenommen, dass $(c - \lambda\mu) > 0$ gilt. Führt man einen neuen Parameter $\rho = \frac{c}{\lambda\mu} - 1$ ein, so ist die Annahme äquivalent zu $\rho > 0$.

Für die folgende Untersuchung von $\Psi(a)$ müssen die oben eingeführten Notationen erweitert werden:

- Man setzt $V_i = Y_i - cU_i$ für $i \geq 1$. Das ist die Differenz zwischen der Höhe der i -ten Forderung und den Prämieinnahmen zwischen $(i-1)$ -ter und i -ter Schadensmeldung.

- Mit S_k wird die Summe der $V_1, \dots, V_k$ bezeichnet:

$$S_k = \sum_{i=0}^k V_i$$

Da es sich sowohl bei $Y_1, Y_2, \dots$ als auch bei $U_1, U_2, \dots$ um unabhängige Zufallsvariablen handelt, sind somit die Zufallsvariablen $V_1, V_2, \dots$ als Funktion dieser auch unabhängig.

Wie bereits oben erwähnt, sind alle Y_i , mit $i \geq 1$, identisch verteilt, d.h. sie haben eine gemeinsame Verteilungsfunktion F . Dies gilt auch für die U_i , mit $i \geq 1$, wobei jedes U_i die $\mathbb{E}(\lambda)$ -Verteilung besitzt. Somit kann man auch für alle $V_1, V_2, \dots$ eine gemeinsame Verteilungsfunktion angeben, die in weiterer Folge mit G bezeichnet wird.

- Sei $T_k = \sum_{i=0}^k U_i$ der Zeitpunkt der k -ten Forderung. Somit gilt für $k \geq 1$:

$$X_{T_k} = cT_k - \sum_{i=1}^k Y_i = - \sum_{i=0}^k V_i = -S_k$$

Nimmt man vereinfachend an, dass die Forderungen der Versicherten sofort zu Auszahlungen seitens des Versicherungsunternehmens führen, so nimmt der Prozess X_t seine Minima in den Zeitpunkten $T_1, T_2, \dots$ an. Damit folgt:

$$\begin{aligned} \Psi(a) &= \mathbb{P}(X_{T_k} < -a \quad \text{für ein } k \geq 1) \\ &= \mathbb{P}(S_k > a \quad \text{für ein } k \geq 1) \\ &= \mathbb{P}(\sup_{k \geq 1} S_k > a) \end{aligned}$$

Sei $K(a) = 1 - \Psi(a)$ die Gegenwahrscheinlichkeit, dann gilt:

$$K(a) = \mathbb{P}(\sup_{k \geq 1} S_k \leq a)$$

2.2 Kleine Forderungen

Angenommen, die Verteilungsfunktion F der Forderungen $(Y_i)_{i \geq 1}$ besitzt eine Wahrscheinlichkeitsdichte, die in weiterer Folge mit f bezeichnet wird. Da Forderungen immer positiv sind, ist $f(x) = 0$ für alle $x \leq 0$.

Definition 2.2. Man spricht von **kleinen Forderungen**, wenn ein $v > 0$ und ein $d > 0$ existieren, sodass $f(x) \leq e^{-vx}$ für jedes $x \geq d$ gilt. Mit anderen Worten: Die Wahrscheinlichkeit, dass große Forderungen bei der Versicherung eintreffen, ist gering.

Um Aussagen über das Verhalten von $\Psi(a)$ treffen zu können, braucht man die momenterzeugenden Funktionen der Zufallsvariablen Y_i, U_i und V_i für $i \geq 1$. Die allgemeine Definition von momenterzeugenden Funktionen wird an dieser Stelle wiederholt:

Definition 2.3. Für eine beliebige Zufallsvariable X sei folgende Menge gegeben:

$D_X := \{t \in \mathbb{R} : \mathbb{E}(e^{tX}) < \infty\}$. Dabei handelt es sich um die Menge aller $t \in \mathbb{R}$, für die $\mathbb{E}(e^{tX})$ existiert. Die **momenterzeugende Funktion** ist definiert durch:

$$m_X : D_X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$m_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$$

Wenn X eine Dichte f besitzt, dann gilt $m_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx$ für $t \in D_X$.

Da eine Wahrscheinlichkeitsdichte f vorausgesetzt wurde, ist die momenterzeugende Funktion der Zufallsvariablen Y_i für $i \geq 1$ durch $m_F(t) = \mathbb{E}(e^{tY_i}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx = \int_0^{\infty} e^{tx} f(x) dx$ gegeben. Liegt ein $v > 0$ wie in Definition 2.2. vor, dann gilt:

$$m_F(t) = \int_0^{\infty} e^{tx} f(x) dx \leq \int_0^d e^{tx} f(x) dx + \int_d^{\infty} e^{tx} e^{-vx} dx = \int_0^d e^{tx} f(x) dx + \int_d^{\infty} e^{x(t-v)} dx$$

Da $m_F(t)$ endlich sein soll, ist nun die Summe der beiden Integrale in der obigen Ungleichung zu betrachten. Für den ersten Summanden gilt: $\int_0^d e^{tx} f(x) dx < \infty$. Der zweite Summand ist genau dann endlich, wenn $x(t-v) < 0$. Da x positive Werte annimmt, muss $(t-v) < 0$ oder äquivalent $t < v$ sein. Damit ist $m_F(t)$ definiert für $t \in (-\infty, u)$, wobei $0 < u \leq \infty$.

Die Zufallsvariablen $U_1, U_2, \dots$ sind $E(\lambda)$ -verteilt und besitzen somit die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$ für $x \in \mathbb{R}^+$. Die momenterzeugende Funktion ist daher laut Definition durch

$$m_E(t) = \mathbb{E}(e^{tU_i}) = \int_0^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{x(t-\lambda)} dx = \frac{\lambda}{\lambda-t}$$

gegeben. Auch hier muss $m_E(t)$ endlich sein. Dies gilt genau dann, wenn $(t-\lambda) < 0$ oder äquivalent $t < \lambda$. Daraus folgt, dass $m_E(t)$ für $t \in (-\infty, \lambda)$ definiert ist. Die momenterzeugende Funktion der Zufallsvariablen $V_1, V_2, \dots$ ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} m_G(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} dG(x) = \mathbb{E}(e^{tV_i}) \\ &= \mathbb{E}(e^{tY_i - ctU_i}) = \mathbb{E}(e^{tY_i}) \cdot \mathbb{E}(e^{-ctU_i}) \\ &= m_F(t) \cdot m_E(-ct) = m_F(t) \cdot \frac{\lambda}{\lambda + ct}, \end{aligned}$$

für $t \in (-\frac{\lambda}{c}, u)$, wobei die Tatsache verwendet wurde, dass die Zufallsvariablen Y_i und U_i unabhängig sind.

Die Gestalt der momenterzeugenden Funktion m_G lässt sich aber noch näher bestimmen. Dafür wird folgender Satz aus der elementaren Wahrscheinlichkeitstheorie verwendet:

Satz 2.2. Sei X eine Zufallsvariable mit $0 \in D_X$. Dann gilt: $\mathbb{E}(X^k) = m_X^{(k)}$ für $k \geq 1$, d.h. es existieren alle Momente.

Für die Zufallsvariablen $V_1, V_2, \dots$ ist $0 \in D_{V_i} = (-\frac{\lambda}{c}, u)$. Mit Satz 2.2. folgt nun:

- (1) $m_G(0) = m_F(0) \frac{\lambda}{\lambda} = \mathbb{E}(e^0) = 1$
- (2) $m'_G(0) = \mathbb{E}(V_i) = \mathbb{E}(Y_i) - c\mathbb{E}(U_i) = \mu - \frac{c}{\lambda} = -\rho\mu < 0$
- (3) $m''_G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{tx} dG(x) > 0$ für $t \in (-\frac{\lambda}{c}, u)$

Daraus kann man schließen:

- (1) m_G geht durch den Punkt $(0|1)$
- (2) m_G hat in $(0|1)$ negativen Anstieg
- (3) m_G ist konvex auf dem Intervall $(-\frac{\lambda}{c}, u)$

Es existieren somit zwei Möglichkeiten, wie der Graph $m_G(t)$ aussehen kann. Diese sind in der folgenden Abbildung 2.1. dargestellt.

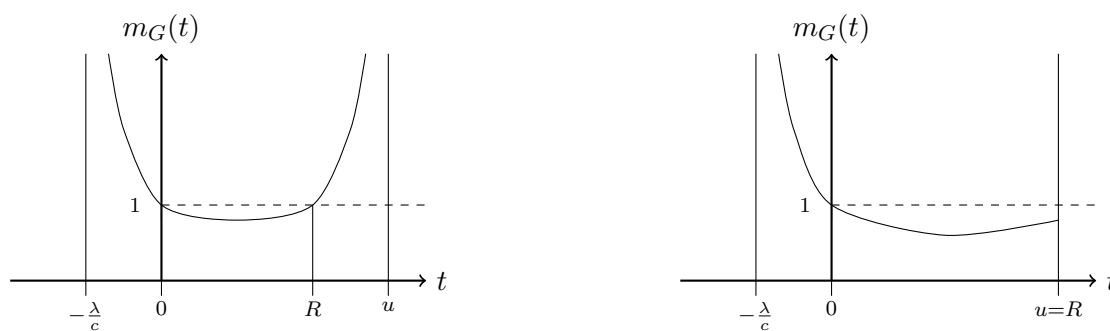


Abbildung 2.1: Darstellungen von $m_G(t)$

Sei $R = \sup\{r \in (0, u) : m_G(r) \leq 1\}$. Dieser Parameter existiert, da die Menge nicht leer ist.

Behauptung: Weiters ist $R < \infty$.

Für $u < \infty$ ist diese Aussage trivial.

Für $u = \infty$ folgt die Behauptung wegen $\lim_{t \rightarrow \infty} m_G(t) = \infty$. Dies gilt, da es ein $\alpha > 0$ mit $F(\alpha) < 1$ und $1 - G(0) = \mathbb{P}(V_i > 0) \geq \mathbb{P}(Y_i > \alpha)\mathbb{P}(U_i \leq \frac{\alpha}{c}) = (1 - F(\alpha))(1 - e^{-\frac{\lambda\alpha}{c}}) > 0$ gibt. Wegen $G(0) < 1$ existieren a und b aus $\mathbb{R}^+$ mit $0 < a < b$ und $G(b) - G(a) > 0$. Daraus folgt, dass $m_G(t) \geq \int_a^b e^{tx} dG(x) \geq e^{ta} (G(b) - G(a))$. Mit $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{tx} = \infty$ für $x > 0$ ergibt sich:
 $\lim_{t \rightarrow \infty} m_G(t) \geq \lim_{t \rightarrow \infty} e^{ta} (G(b) - G(a)) = \infty$.

Mit Hilfe des Parameters R ist nun eine Abschätzung der Wahrscheinlichkeit $\Psi(a)$ möglich.

Satz 2.3. Es gilt $\Psi(a) \leq e^{-Ra}$ für $a > 0$.

Beweis. Zunächst definiert man folgende Wahrscheinlichkeiten: $\Psi_n(a) = \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k \leq n} S_k > a\right)$ für $n \geq 1$. Da die Ereignisse $\left\{\max_{1 \leq k \leq n} S_k > a\right\}$ für $n \rightarrow \infty$ monoton wachsend gegen das Ereignis $\left\{\sup_{k \geq 1} S_k > a\right\}$ streben, folgt aus dem Stetigkeitssatz: $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n(a) = \Psi(a)$. Daher ist es ausreichend, eine Abschätzung für $\Psi_n(a)$ zu geben.

Sei $r \in (0, u)$ mit $m_G(r) \leq 1$. Für alle $a > 0$ erhält man mit Hilfe der Markov-Ungleichung:

$$\Psi_1(a) = \mathbb{P}(S_1 > a) = \mathbb{P}(V_1 > a) \leq \frac{1}{e^{ra}} \mathbb{E}(e^{rV_1}) = e^{-ra} m_G(r) \leq e^{-ra}$$

Die weiterführende Idee besteht darin, einen Induktionsbeweis zu führen. Daher wird angenommen, dass $\Psi_n(a) \leq e^{-ra}$ für $a > 0$ gilt.

Für den Induktionsschritt ist $\Psi_{n+1}(a) \leq e^{-ra}$ zu zeigen. Dazu schreibt man $\Psi_{n+1}(a)$ als Summe

$$\Psi_{n+1}(a) = \mathbb{P}(S_1 > a) + \mathbb{P}\left(S_1 \leq a, \max_{2 \leq k \leq n+1} S_k > a\right)$$

und schätzt beide Summanden separat ab.

- (1) Es gilt: $\mathbb{P}(S_1 > a) = \mathbb{P}(V_1 > a) = \int_a^\infty dG(x) \leq \int_a^\infty e^{-r(a-x)} dG(x)$. Die letzte Ungleichung folgt daraus, dass $e^{-r(a-x)} \geq 1$ für $x \in [a, \infty)$ ist.
- (2) Für die Abschätzung des zweiten Summanden definiert man $\tilde{S}_k := \sum_{i=2}^k V_i$ für $k \geq 2$ und bezeichnet mit H die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable $\max_{1 \leq k \leq n} S_k$. Angenommen man bildet dieses Maximum aus den Zufallsvariablen $V_2, V_3, \dots, V_{n+1}$, so erhält man $\max_{2 \leq k \leq n+1} \tilde{S}_k$. Da $V_2, V_3, \dots$ unabhängige und gleichverteilte Zufallsvariablen sind, besitzt auch $\max_{2 \leq k \leq n+1} \tilde{S}_k$ die Verteilungsfunktion H .

Im nächsten Schritt wird die Verteilungsfunktion des Zufallsvektors $\left(V_1, \max_{2 \leq k \leq n+1} \tilde{S}_k\right)$ ermittelt. Da V_1 und $\max_{2 \leq k \leq n+1} \tilde{S}_k$ voneinander unabhängig sind, ist diese durch

$$(x, y) \mapsto G(x)H(y)$$

gegeben. Für $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq a, y > a - x\}$ erhält man:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(S_1 \leq a, \max_{2 \leq k \leq n+1} S_k > a\right) &= \mathbb{P}\left(V_1 \leq a, V_1 + \max_{2 \leq k \leq n+1} \tilde{S}_k > a\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left(V_1, \max_{2 \leq k \leq n+1} \tilde{S}_k\right) \in B\right) = \int_{-\infty}^a \int_{a-x}^\infty dH(y) dG(x) \\ &= \int_{-\infty}^a \mathbb{P}\left(\max_{2 \leq k \leq n+1} \tilde{S}_k > a - x\right) dG(x) = \int_{-\infty}^a \Psi_n(a - x) dG(x) \end{aligned}$$

$$\leq \int_{-\infty}^a e^{-r(a-x)} dG(x),$$

wobei in der letzten Ungleichung die Induktionsannahme verwendet wurde.

Mit Hilfe der beiden Abschätzungen kann man nun den Induktionsschritt zu Ende führen:

$$\begin{aligned} \Psi_{n+1}(a) &\leq \int_{-\infty}^a e^{-r(a-x)} dG(x) + \int_a^{\infty} e^{-r(a-x)} dG(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r(a-x)} dG(x) \\ &= e^{-ra} \int_{-\infty}^{\infty} e^{rx} dG(x) = e^{-ra} m_G(r) \leq e^{-ra}, \end{aligned}$$

wobei auch hier verwendet wurde, dass $m_G(r) \leq 1$ ist. Zusammenfassend wurde gezeigt, dass $\Psi_n(a) \leq e^{-ra}$ für $a > 0$ und alle $n \geq 1$ gilt.

Da laut Definition $R = \sup\{r > 0 : m_G(r) \leq 1\}$ ist, folgt: $\Psi(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n(a) \leq e^{-Ra}$. $\square$

Dieser Satz liefert eine gewünschte Abschätzung für die Risikowahrscheinlichkeit. Er besagt, dass $\Psi(a)$ bei einer Erhöhung der Rücklagen a exponentiell abnimmt, wobei der Parameter $R > 0$ Einfluss auf die Geschwindigkeit der Abnahme hat.

KAPITEL 3

Weitere Darstellungsarten der Wahrscheinlichkeit $\Psi(a)$

3.1 Integralgleichung

Für die weitere Untersuchung der Risikowahrscheinlichkeit $\Psi(a)$ betrachtet man deren Gegenwahrscheinlichkeit $K(a) = 1 - \Psi(a)$. Definiert man M als das Supremum über alle S_k mit $k \geq 1$, so gilt $K(a) = \mathbb{P}(M \leq a)$.

Nun kann das Problem auftreten, dass M als Supremum von unendlich vielen Zufallsvariablen selber den Wert ∞ annimmt. Da $V_1, V_2, \dots$ unabhängige und gleich verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert $\mu - \frac{c}{\lambda} = -\rho\mu < 0$ sind, kommt das starke Gesetz der großen Zahl zur Anwendung:

$$\mathbb{P}\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} S_k = -\rho\mu\right) = 1$$

Da $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} S_k = -\rho\mu$ gilt, folgt somit $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = -\infty$ und daraus auch $M = \sup_{k \geq 1} S_k < \infty$. Damit wurde gezeigt, dass $\mathbb{P}(M < \infty) = 1$ gilt und M eine echte Zufallsvariable ist. K hat daher die Eigenschaften einer Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Der nächste Satz beinhaltet eine Integralgleichung für die Verteilungsfunktion K .

Satz 3.1. *Sei*

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu}(1 - F(x)) & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

gegeben. Dann ist h eine Wahrscheinlichkeitsdichte und für die Verteilungsfunktion K folgt:

$$K(a) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} + \frac{\lambda\mu}{c} \int_0^a K(a-y)h(y)dy$$

für alle $a > 0$.

Beweis. Da F eine Verteilungsfunktion ist, gilt $0 \leq F(x) \leq 1$ und somit ist h größer oder gleich Null. Der Erwartungswert von F ist wieder durch μ gegeben, das heißt

$$\mu = \int_0^\infty (1 - F(x)) dx. \text{ Daraus folgt:}$$

$$\int_{-\infty}^\infty h(x) dx = \int_0^\infty h(x) dx = \int_0^\infty \frac{1}{\mu} (1 - F(x)) dx = 1$$

Die Funktion h erfüllt somit alle Bedingungen einer Wahrscheinlichkeitsdichte.

Für den nächsten Teil des Beweises definiert man $\tilde{S}_k = V_2 + V_3 + \dots + V_k$ für $k \geq 2$ und $\tilde{M} = \sup_{k \geq 2} \tilde{S}_k$. Da die Zufallsvariablen $V_2, V_3, \dots$ unabhängig sind und alle die gleiche Verteilung G haben, besitzt $\tilde{M} = \sup_{k \geq 2} \tilde{S}_k$ wie $M = \sup_{k \geq 1} S_k$ die Verteilungsfunktion K . Aufgrund der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen $\tilde{M}, Y_1$ und U_1 ist die Verteilungsfunktion des Zufallsvektors $(\tilde{M}, Y_1, U_1)$ durch $(x, y, z) \mapsto K(x)F(y)L(z)$ gegeben, wobei L für die Verteilungsfunktion der $E(\lambda)$ -Verteilung steht.

Mit $u > 0$ und $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \leq u + cz, x \leq u - y + cz\}$ erhält man:

$$\begin{aligned} K(u) &= \mathbb{P}(M \leq u) = \mathbb{P}\left(S_1 \leq u, \sup_{k \geq 2} S_k \leq u\right) \\ &= \mathbb{P}(V_1 \leq u, V_1 + \tilde{M} \leq u) \\ &= \mathbb{P}(Y_1 - cU_1 \leq u, Y_1 - cU_1 + \tilde{M} \leq u) \\ &= \mathbb{P}((\tilde{M}, Y_1, U_1) \in B) \\ &= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^{u+cz} \int_{-\infty}^{u-y+cz} dK(x) dF(y) dL(z) \\ &= \int_0^\infty \int_0^{u+cz} K(u - y + cz) dF(y) \lambda e^{-\lambda z} dz \end{aligned}$$

Indem man eine neue Integrationsvariable $t = u + cz$ einführt, folgt weiter:

$$= \int_u^\infty \int_0^t K(t - y) dF(y) \lambda e^{-\frac{\lambda}{c}(t-u)} \frac{1}{c} dt$$

Definiert man nun für $u \geq 0$ und $t \geq 0$ die Funktion $g(u, t) = \frac{\lambda}{c} e^{-\frac{\lambda}{c}(t-u)} \int_0^t K(t - y) dF(y)$, so gilt:

$$K(u) = \int_u^\infty g(u, t) dt.$$

Für $s \neq 0$ erhält man:

$$\begin{aligned}
 \frac{K(u+s) - K(u)}{s} &= \frac{1}{s} \left(\int_{u+s}^{\infty} g(u+s, t) dt - \int_u^{\infty} g(u, t) dt \right) \\
 &= \frac{1}{s} \int_u^{\infty} g(u+s, t) dt - \frac{1}{s} \int_u^{u+s} g(u+s, t) dt - \frac{1}{s} \int_u^{\infty} g(u, t) dt \\
 &= -\frac{1}{s} \int_u^{u+s} g(u+s, t) dt + \frac{1}{s} \int_u^{\infty} (g(u+s, t) - g(u, t)) dt
 \end{aligned}$$

Weiters besteht folgende Beziehung:

$$\begin{aligned}
 g(u+s, t) &= \frac{\lambda}{c} e^{-\frac{\lambda}{c}(t-u-s)} \int_0^t K(t-y) dF(y) \\
 &= \frac{\lambda}{c} e^{-\frac{\lambda}{c}(t-u) + \frac{\lambda}{c}s} \int_0^t K(t-y) dF(y) \\
 &= e^{\frac{\lambda}{c}s} g(u, t)
 \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\int_u^{u+s} g(u+s, t) dt = e^{\frac{\lambda}{c}s} \int_u^{u+s} g(u, t) dt$$

und aufgrund der rechtsseitigen Stetigkeit von $t \mapsto g(u, t)$ gilt

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \int_u^{u+s} g(u+s, t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} e^{\frac{\lambda}{c}s} \frac{1}{s} \int_u^{u+s} g(u, t) dt = g(u, u).$$

Man erhält auch folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{s} (g(u+s, t) - g(u, t)) &= \frac{1}{s} \left(e^{\frac{\lambda}{c}s} g(u, t) - g(u, t) \right) \\
 &= \frac{1}{s} \left(\left(e^{\frac{\lambda}{c}s} - 1 \right) g(u, t) \right)
 \end{aligned}$$

und somit

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_u^{\infty} \frac{1}{s} (g(u+s, t) - g(u, t)) dt = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left(e^{\frac{\lambda}{c}s} - 1 \right) \int_u^{\infty} g(u, t) dt = \frac{\lambda}{c} \int_u^{\infty} g(u, t) dt.$$

Damit ist es möglich, die Ableitung der Funktion K an der Stelle u anzugeben:

$$\begin{aligned} K'(u) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(u+s) - K(u)}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{s} \int_u^{u+s} g(u+s, t) dt + \frac{1}{s} \int_u^{\infty} (g(u+s, t) - g(u, t)) dt \right) \\ &= -g(u, u) + \frac{\lambda}{c} \int_u^{\infty} g(u, t) dt = -g(u, u) + \frac{\lambda}{c} K(u) \end{aligned}$$

Um die letzte Gleichung weiter zu vereinfachen, kann man $g(u, u)$ partiell integrieren. Dafür wird wieder angenommen, dass F eine Wahrscheinlichkeitsdichte f besitzt.

$$\begin{aligned} g(u, u) &= \frac{\lambda}{c} \int_0^u K(u-y) dF(y) \\ &= \frac{\lambda}{c} K(u-y) (F(y) - 1) \Big|_0^u + \frac{\lambda}{c} \int_0^u K'(u-y) (F(y) - 1) dy \\ &= \frac{\lambda}{c} K(0) (F(u) - 1) - \frac{\lambda}{c} K(u) (F(0) - 1) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u K'(u-y) (F(y) - 1) dy \\ &= \frac{\lambda}{c} K(0) (F(u) - 1) + \frac{\lambda}{c} K(u) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u K'(u-y) (F(y) - 1) dy \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt setzt man dieses Ergebnis in die Ableitung der Verteilungsfunktion K ein und ersetzt $(F(y) - 1)$ durch $-\mu h(y)$:

$$\begin{aligned} K'(u) &= -g(u, u) + \frac{\lambda}{c} K(u) \\ &= \frac{\lambda}{c} K(0) \mu h(u) - \frac{\lambda}{c} K(u) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u K'(u-y) \mu h(y) dy + \frac{\lambda}{c} K(u) \\ &= \frac{\lambda \mu}{c} \left(K(0) h(u) + \int_0^u K'(u-y) h(y) dy \right) \end{aligned}$$

Integriert man obige Gleichung von 0 bis a und vertauscht die Integrale im zweiten Summanden, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
K(a) - K(0) &= \frac{\lambda\mu}{c} \left(K(0) \int_0^a h(u) du + \int_0^a \int_0^u K'(u-y) h(y) dy du \right) \\
&= \frac{\lambda\mu}{c} \left(K(0) \int_0^a h(u) du + \int_0^a \int_y^a K'(u-y) du h(y) dy \right) \\
&= \frac{\lambda\mu}{c} \left(K(0) \int_0^a h(u) du + \int_0^a (K(a-y) - K(0)) h(y) dy \right) \\
&= \frac{\lambda\mu}{c} \int_0^a K(a-y) h(y) dy
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis entspricht im Wesentlichen der gesuchten Formel, jedoch muss noch der Wert von $K(0)$ bestimmt werden. Dazu wird $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a K(a-y) h(y) dy$ berechnet. Dies erfolgt in zwei Schritten:

- Abschätzung nach oben: Da K eine Verteilungsfunktion und somit $K(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist, gilt:

$$\int_0^a K(a-y) h(y) dy \leq \int_0^a h(y) dy \leq \int_0^\infty h(y) dy = 1,$$

wobei die letzte Gleichung aus der Tatsache folgt, dass h eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

- Abschätzung nach unten: Die wesentliche Eigenschaft, die hier einfließt, ist die Monotonie der Verteilungsfunktion K :

$$\begin{aligned}
\int_0^a K(a-y) h(y) dy &= \int_0^{\frac{a}{2}} K(a-y) h(y) dy + \int_{\frac{a}{2}}^a K(a-y) h(y) dy \\
&\geq \int_0^{\frac{a}{2}} K(a-y) h(y) dy \\
&\geq \int_0^{\frac{a}{2}} K\left(\frac{a}{2}\right) h(y) dy
\end{aligned}$$

Da sowohl $\lim_{x \rightarrow \infty} K(x) = 1$ als auch $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x h(y) dy = 1$ gilt, folgt

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{a}{2}} K\left(\frac{a}{2}\right) h(y) dy = \lim_{a \rightarrow \infty} K\left(\frac{a}{2}\right) \int_0^{\frac{a}{2}} h(y) dy = 1$$

und damit

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a K(a-y) h(y) dy \geq 1.$$

Zusammenfassend wurde gezeigt, dass $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a K(a-y) h(y) dy = 1$.

Wenn man nun in obiger Gleichung a gegen ∞ gehen lässt, erhält man $1 - K(0) = \frac{\lambda\mu}{c}$ oder äquivalent $K(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c}$, womit die gesuchte Formel bewiesen ist. $\square$

3.2 Reihendarstellung

In diesem Abschnitt wird mit Hilfe der Integralgleichung eine Reihendarstellung für $K(a)$ angegeben und anschließend bewiesen.

Satz 3.2. *Gegeben sei*

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu}(1 - F(x)) & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

und $H(t) = \int_{-\infty}^t h(x) dx$ für $t \in \mathbb{R}$.

Setzt man $H_1(t) = H(t)$ und $H_{k+1}(t) = H_k * H(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H_k(t-y) dH(y)$ für $k \geq 1$ und $t \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$K(a) = \frac{\rho}{\rho+1} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\rho)^k} H_k(a) \right) \text{ mit } a > 0.$$

Beweis. Zunächst definiert man $q := \frac{1}{1+\rho} = \frac{\lambda\mu}{c}$. Da laut Voraussetzung $\rho > 0$ gilt, ist $q < 1$. Weiters bezeichnet man die Wahrscheinlichkeitsdichten von H_k mit h_k , wobei $k \geq 1$. Aufgrund der Tatsache, dass die Dichten für negative Werte gleich Null sind, folgt:

$$\begin{aligned} h_{k+1}(x) &= \int_0^x h_k(x-y) h(y) dy \\ &= \int_0^x h_k(y) h(x-y) dy \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt wird für $a > 0$ per Induktion nach k folgende Gleichung gezeigt:

$$K(a) = (1 - q)(1 + qH_1(a) + q^2H_2(a) + \dots + q^{k-1}H_{k-1}(a)) + q^k \int_0^a K(a - y)h_k(y)dy \quad (3.1)$$

Für $k = 1$ ergibt der Induktionsanfang:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \cdot 1 + q \int_0^a K(a - y)h_1(y)dy &= \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) + \frac{\lambda\mu}{c} \int_0^a K(a - y)h(y)dy \\ &= K(a), \end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt aus Satz 3.1. folgt.

Angenommen, die Gleichung wurde für k bereits gezeigt.

Um die Formel für $k + 1$ zu erhalten, muss zuerst Folgendes bewiesen werden:

$$\int_0^a K(a - y)h_k(y)dy = (1 - q)H_k(a) + q \int_0^a K(a - y)h_{k+1}(x)dx$$

Dafür wird die Formel aus Satz 3.1. auf $K(a - y)$ angewendet und das Ergebnis

$$K(a - y) = 1 - q + q \int_0^{a-y} K(a - y - z)h(z)dz \text{ eingesetzt:}$$

$$\int_0^a K(a - y)h_k(y)dy = \int_0^a (1 - q)h_k(y)dy + \int_0^a q \int_0^{a-y} K(a - y - z)h(z)dz h_k(y)dy$$

Führt man die neue Integrationsvariable $x = z + y$ ein, so folgt weiter:

$$= (1 - q)H_k(a) + q \int_0^a \int_y^a K(a - x)h(x - y)h_k(y)dx dy$$

Im nächsten Schritt vertauscht man die Integrale:

$$\begin{aligned} &= (1 - q)H_k(a) + q \int_0^a K(a - x) \int_0^x h(x - y)h_k(y)dy dx \\ &= (1 - q)H_k(a) + q \int_0^a K(a - x)h_{k+1}(x)dx. \end{aligned}$$

Der Induktionsschritt erfolgt nun relativ schnell:

$$\begin{aligned}
 K(a) &= (1-q) \left(1 + \sum_{i=1}^{k-1} q^i H_i(a) \right) + q^k \int_0^a K(a-y) h_k(y) dy \\
 &= (1-q) \left(1 + \sum_{i=1}^{k-1} q^i H_i(a) \right) + q^k \left((1-q) H_k(a) + q \int_0^a K(a-x) h_{k+1}(x) dx \right) \\
 &= (1-q) \left(1 + \sum_{i=1}^{k-1} q^i H_i(a) \right) + (1-q) q^k H_k(a) + q^{k+1} \int_0^a K(a-x) h_{k+1}(x) dx \\
 &= (1-q) \left(1 + \sum_{i=1}^k q^i H_i(a) \right) + q^{k+1} \int_0^a K(a-x) h_{k+1}(x) dx
 \end{aligned}$$

Da K eine Verteilungsfunktion und h eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist, gilt weiters folgende Abschätzung:

$$0 \leq q^k \int_0^a K(a-y) h_k(y) dy \leq q^k \int_0^a h_k(y) dy \leq q^k$$

und somit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(q^k \int_0^a K(a-y) h_k(y) dy \right) = 0.$$

Bildet man in Formel (3.1) den Limes für $k \rightarrow \infty$, so erhält man:

$$K(a) = (1-q) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} q^k H_k(a) \right).$$

□

3.3 Asymptotisches Verhalten der Wahrscheinlichkeit $\Psi(a)$

In diesem Abschnitt wird das zentrale Resultat der Theorie über Erneuerungsprozesse, der sogenannte „Erneuerungssatz“, zu Hilfe gezogen, um eine Abschätzung für das asymptotische Verhalten der Risikowahrscheinlichkeit $\Psi(a)$ anzugeben.

Unter Erneuerungsprozessen versteht man stochastische Prozesse, die die fortlaufende Erneuerung von Maschinen, Werkzeugen, Glühlampen etc. beschreiben. Die Zwischenankunftszeiten („Lebensdauer“) sind unabhängig und identisch verteilt.

Definition 3.1. Eine Verteilungsfunktion F bezeichnet man als **Lebensdauerverteilung**, wenn $F(t) = 0$ für $t < 0$ und $F(0) < 1$.

Sei $(Z_i)_{i \geq 1}$ eine Folge von Zufallsvariablen, die unabhängig sind und alle die Lebensdauer-
 erteilung F haben. Sie stellen somit die Zwischenankunftszeiten dar.

Weiters sei $Y_0 = 0$ und $Y_n = \sum_{i=1}^n Z_i$ für $n \geq 1$. Der Prozess $(Y_n)_{n \geq 0}$ heißt **Erneuerungsprozess mit Lebensdauer-
 erteilung F** , wobei Y_n den n -ten Erneuerungszeitpunkt angibt.
 Folgende Begriffe werden im Erneuerungssatz verwendet und werden daher an dieser Stelle
 wiederholt:

Definition 3.2. Eine Funktion f heißt **regulär**, wenn $\lim_{x \downarrow y} f(x)$ und $\lim_{x \uparrow y} f(x)$ für alle y existieren.

Eine Funktion f heißt **linksregulär**, wenn zusätzlich gilt: $\lim_{x \uparrow y} f(x) = f(y)$ für alle y .

Eine Funktion f heißt **rechtsregulär**, wenn zusätzlich gilt: $\lim_{x \downarrow y} f(x) = f(y)$ für alle y .

Definition 3.3. Eine Gleichung der Form $A(t) = a(t) + \int_{-\infty}^t A(t-x) dF(x)$ heißt **Erneuerungsgleichung**, wobei F eine Lebensdauer-
 erteilung ist, und die Funktionen A und a auf $\mathbb{R}^+$ definiert sind.

Die letzte Definition, die für den Erneuerungssatz relevant ist, behandelt die Gitter-
 erteilung:

Definition 3.4. Eine Verteilungsfunktion F nennt man **Gittererteilung**, wenn ein
 $d > 0$ und $c_n \geq 0$ für $n \in \mathbb{Z}$ existieren, sodass $F(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \mathbb{1}_{[nd, \infty)}(t)$ gilt. Dabei wird d als
 Gitterweite und c_n als Sprunghöhe im Punkt nd bezeichnet.

Satz 3.3 (Erneuerungssatz). Gegeben seien eine Lebensdauer-
 erteilung F mit
 $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) < \infty$ und eine Funktion $a : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, die eine endliche Linearkombination
 von positiven, monoton fallenden, rechtsregulären Funktionen a_i mit $\int_0^{\infty} a_i(x) dx < \infty$ ist.
 Ist die Funktion $A : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf kompakten Intervallen beschränkte Lösung der
 Erneuerungsgleichung $A(t) = a(t) + \int_{-\infty}^t A(t-x) dF(x)$, dann unterscheidet man folgende
 zwei Fälle:

- Wenn F keine Gittererteilung ist, dann gilt: $\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} a(x) dx$.
- Wenn F eine Gittererteilung mit Gitterweite d ist, dann gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} A(nd) = \frac{d}{\mu} \sum_{i=0}^{\infty} a(id)$.

Der Beweis wird hier nicht angeführt. Dieser findet sich zum Beispiel in [6], [7] und [9].
 Um den Erneuerungssatz anwenden können, wird auf die Integraldarstellung der Verteilungs-
 funktion K aus Satz 3.1. zurückgegriffen:

$$K(a) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} + \frac{\lambda\mu}{c} \int_0^a K(a-y) h(y) dy$$

Daraus folgt für die Risikowahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned}\Psi(a) &= 1 - K(a) \\ &= 1 - 1 + \frac{\lambda\mu}{c} - \frac{\lambda\mu}{c} \int_0^a (1 - \Psi(a - y)) h(y) dy \\ &= \frac{\lambda\mu}{c} - \frac{\lambda\mu}{c} \int_0^a h(y) dy + \frac{\lambda\mu}{c} \int_0^a \Psi(a - y) h(y) dy\end{aligned}$$

Da h eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist, gilt $\int_0^\infty h(y) dy = 1$. Somit kann man obige Gleichung weiter umformulieren:

$$\begin{aligned}\Psi(a) &= \frac{\lambda\mu}{c} \int_0^\infty h(y) dy - \frac{\lambda\mu}{c} \int_0^a h(y) dy + \frac{\lambda\mu}{c} \int_0^a \Psi(a - y) h(y) dy \\ &= \frac{\lambda\mu}{c} \int_a^\infty h(y) dy + \frac{\lambda\mu}{c} \int_0^a \Psi(a - y) h(y) dy\end{aligned}$$

Im weiteren Verlauf wird der Fall der kleinen Forderungen behandelt. Es wird zusätzlich angenommen, dass ein $R > 0$ mit $m_G(R) = 1$ existiert. Dies ist äquivalent zu $m_G(R) = m_F(R) \frac{\lambda}{\lambda + cR} = 1$ und damit $m_F(R) = \frac{\lambda + cR}{\lambda}$. Setzt man für die momenterzeugende Funktion von F weiter ein, so folgt:

$$\int_0^\infty e^{Ry} f(y) dy = \frac{\lambda + cR}{\lambda}$$

Nun kann man mit Hilfe partieller Integration berechnen:

$$\int_0^\infty R e^{Ry} (1 - F(y)) dy = -1 + \int_0^\infty e^{Ry} dF(y) = \frac{cR}{\lambda},$$

wobei $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{Rt} (1 - F(t)) = 0$ wegen $e^{Rt} (1 - F(t)) \leq \int_t^\infty e^{Ry} dF(y)$ gilt.

Als Nächstes definiert man die Funktion $g(y) = \begin{cases} \frac{\lambda\mu}{c} e^{Ry} h(y) & \text{für } y \geq 0 \\ 0 & \text{für } y < 0 \end{cases}$.

Man kann zeigen, dass es sich dabei um eine Wahrscheinlichkeitsdichte handelt:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty g(y)dy &= \frac{\lambda\mu}{c} \int_0^\infty e^{Ry} h(y)dy \\ &= \frac{\lambda\mu}{c} \int_0^\infty e^{Ry} \frac{1}{\mu} (1 - F(y))dy \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{Ry} (1 - F(y))dy \\ &= \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{c}{\lambda} = 1\end{aligned}$$

Für $t \geq 0$ sei weiters $A(t) = e^{Rt}\Psi(t)$. Verwendet man die obige Gleichung für $\Psi(t)$, so folgt:

$$A(t) = \frac{\lambda\mu}{c} e^{Rt} \int_t^\infty h(y)dy + \int_0^t A(t-y)g(y)dy,$$

womit eine Erneuerungsgleichung für $A(t)$ gefunden wurde. Der Erneuerungssatz besagt nun:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \frac{1}{\eta} \int_0^\infty a(x)dx,$$

wobei $a(x) = \frac{\lambda\mu}{c} e^{Rx} \int_x^\infty h(y)dy$ und $\eta = \int_0^\infty yg(y)dy$.

Nun sollen die beiden Integrale $\int_0^\infty a(x)dx$ und $\int_0^\infty yg(y)dy$ genauer berechnet werden:

- Indem man die Integrationsreihenfolge vertauscht und das innere Integral ausrechnet, folgt:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty a(x)dx &= \frac{\lambda\mu}{c} \int_0^\infty \int_x^\infty e^{Rx} h(y)dydx \\ &= \frac{\lambda\mu}{c} \int_0^\infty \int_0^y e^{Rx} h(y)dx dy \\ &= \frac{\lambda\mu}{c} \int_0^\infty \frac{1}{R} (e^{Ry} - 1) h(y)dy.\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass es sich bei g und h um Wahrscheinlichkeitsdichten handelt, kann man weiters schließen:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty a(x)dx &= \frac{1}{R} \int_0^\infty g(y)dy - \frac{\lambda\mu}{cR} \int_0^\infty h(y)dy \\ &= \frac{1}{R} \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right)\end{aligned}$$

- Für das nächste Integral verwendet man die momenterzeugende Funktion $m_F(x) = \int_0^\infty e^{xy}dF(y)$ der Verteilungsfunktion F . Laut Definition des Parameters R gilt $m_F(R) = \frac{\lambda+cR}{\lambda}$. Weiters wird angenommen, dass die Ableitung $m'_F(R)$ existiert und endlich ist. Somit gilt:

$$m'_F(R) = \int_0^\infty ye^{Ry}dF(y)$$

Mit Hilfe der partiellen Integration folgt:

$$m'_F(R) = \int_0^\infty e^{Ry}(1 + Ry)(1 - F(y))dy,$$

wobei $\lim_{t \rightarrow \infty} te^{Rt}(1 - F(t)) = 0$ wegen $te^{Rt}(1 - F(t)) \leq \int_t^\infty ye^{Ry}dF(y)$ gilt.

Zieht man weiters die Defintion von g zu Hilfe, so erhält man:

$$\frac{\lambda}{c}m'_F(R) = \int_0^\infty g(y)dy + R \int_0^\infty yg(y)dy$$

Da g eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist und somit $\int_0^\infty g(y)dy = 1$, kann man obige Gleichung folgendermaßen umformen:

$$\int_0^\infty yg(y)dy = \frac{\lambda}{Rc}m'_F(R) - \frac{1}{R}$$

Zusammenfassend wurde für das asymptotische Verhalten der Wahrscheinlichkeit $\Psi(a)$ gezeigt:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} e^{Ra}\Psi(a) = \lim_{a \rightarrow \infty} A(a) = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda m'_F(R) - c}.$$

KAPITEL 4

Große Forderungen und subexponentielle Verteilungen

4.1 Große Forderungen

In diesem Kapitel werden die sogenannten **großen Forderungen** behandelt, d.h. die Verteilungsfunktion der Forderungen strebt nun langsamer als exponentiell gegen Null. Ziel ist es, weitere Aussagen über das asymptotische Verhalten der Risikowahrscheinlichkeit $\Psi(a)$ zu treffen. Dafür braucht man jedoch eine Definition, die als Arbeitsgrundlage geeignet ist:

Definition 4.1. Gegeben sei eine Verteilungsfunktion F mit $F(0) = 0$. Man setzt

$F_1(t) = F(t)$ und definiert $F_n(t) = F_{n-1} * F(t)$ für $n \geq 2$.

F heißt **subexponentiell**, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- $F(x) < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$ und
- $\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F_2(x)}{1 - F(x)} \leq 2$.

Hilfssatz 4.1. Gegeben sei eine subexponentielle Verteilungsfunktion F und $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine Konstante $d > 0$, sodass für alle $x \in \mathbb{R}^+$ und $k \geq 1$ folgende Abschätzung gilt:

$$\frac{1 - F_k(x)}{1 - F(x)} \leq d(1 + \varepsilon)^k$$

Beweis. Man definiert $\alpha_n = \sup_{x \geq 0} \frac{1 - F_n(x)}{1 - F(x)}$ für $n \geq 1$. Wie man leicht erkennen kann, ist $\alpha_1 = 1$.

Da F laut Voraussetzung subexponentiell ist, gilt

$$\begin{aligned} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x) - F_2(x)}{1 - F(x)} &= \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F_2(x) - 1 + F(x)}{1 - F(x)} \\ &= \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F_2(x)}{1 - F(x)} - 1 \leq 1. \end{aligned}$$

Damit existiert ein $c > 0$, sodass $\frac{F(x)-F_2(x)}{1-F(x)} < (1 + \varepsilon)$ für alle $x \geq c$. Zieht man nun die Definition der Faltung von Verteilungsfunktionen zu Hilfe, so folgt weiters:

$$1 - F_{n+1}(x) = 1 - F(x) + F(x) - F_{n+1}(x) = 1 - F(x) + \int_0^x (1 - F_n(x-y)) dF(y)$$

Dividiert man diese Gleichung durch $(1 - F(x))$, erhält man

$$\frac{1 - F_{n+1}(x)}{1 - F(x)} = 1 + \int_0^x \frac{1 - F_n(x-y)}{1 - F(x)} dF(y).$$

Im nächsten Schritt bildet man das Supremum:

$$\alpha_{n+1} \leq 1 + \sup_{0 \leq x \leq c} \int_0^x \frac{1 - F_n(x-y)}{1 - F(x)} dF(y) + \sup_{x \geq c} \int_0^x \frac{1 - F_n(x-y)}{1 - F(x-y)} \frac{1 - F(x-y)}{1 - F(x)} dF(y)$$

Aufgrund der Monotonie von F , der Definition von α_n und der Tatsache, dass $F_n(x-y) \geq 0$ ist, folgt:

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &\leq 1 + \sup_{0 \leq x \leq c} \int_0^x \frac{1}{1 - F(c)} dF(y) + \sup_{x \geq c} \int_0^x \alpha_n \frac{1 - F(x-y)}{1 - F(x)} dF(y) \\ &= 1 + \sup_{0 \leq x \leq c} \frac{F(x)}{1 - F(c)} + \alpha_n \sup_{x \geq c} \frac{F(x) - F_2(x)}{1 - F(x)} \\ &\leq 1 + \frac{F(c)}{1 - F(c)} + \alpha_n(1 + \varepsilon) \end{aligned}$$

Indem man $b = 1 + \frac{F(c)}{1-F(c)}$ setzt, wurde $\alpha_{n+1} \leq b + \alpha_n(1 + \varepsilon)$ für alle $n \geq 1$ gezeigt.

Per Induktion folgt nun für alle $k \geq 1$

$$\alpha_k \leq b \sum_{i=0}^{k-1} (1 + \varepsilon)^i = b \frac{(1 + \varepsilon)^k - 1}{1 + \varepsilon - 1} \leq \frac{b}{\varepsilon} (1 + \varepsilon)^k.$$

Mit $d = \frac{b}{\varepsilon}$ hat man die gesuchte Ungleichung gefunden. □

Hilfssatz 4.2. *Gegeben sei wieder eine subexponentielle Verteilungsfunktion F . Dann gilt für alle $n \geq 1$*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F_n(x)}{1 - F(x)} = n.$$

Beweis. Folgende Gleichung wurde im letzten Beweis gezeigt: $\frac{1 - F_{n+1}(x)}{1 - F(x)} = 1 + \int_0^x \frac{1 - F_n(x-y)}{1 - F(x)} dF(y)$.

Diese wird in Folge verwendet, um die Aussage des Hilfssatzes per Induktion zu zeigen.

Für $n = 2$ gilt

$$\frac{1 - F_2(x)}{1 - F(x)} = 1 + \int_0^z \frac{1 - F(x - y)}{1 - F(x)} dF(y) + \int_z^x \frac{1 - F(x - y)}{1 - F(x)} dF(y).$$

Da sowohl $\frac{1 - F(x - y)}{1 - F(x)} \geq 1$ für $y \geq 0$ als auch $\frac{1 - F(x - y)}{1 - F(x)} \geq \frac{1 - F(x - z)}{1 - F(x)}$ für $y \geq z$ gilt, folgt

$$\frac{1 - F_2(x)}{1 - F(x)} \geq 1 + F(z) + \frac{1 - F(x - z)}{1 - F(x)} (F(x) - F(z)).$$

Indem man $z = x$ setzt, erhält man $\frac{1 - F_2(x)}{1 - F(x)} \geq 1 + F(x)$ und damit $\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F_2(x)}{1 - F(x)} \geq 2$. Zusammen mit der Voraussetzung ergibt sich :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F_2(x)}{1 - F(x)} = 2$$

Das nächste Resultat wird im weiteren Verlauf des Beweises benötigt:

Man wählt $z > 0$ und $x > z$ so groß, dass auch $F(x) > F(z)$ gilt. Verwendet man obige Ungleichungen, so folgt:

$$1 \leq \frac{1 - F(x - z)}{1 - F(x)} \leq \left(\frac{1 - F_2(x)}{1 - F(x)} - 1 - F(z) \right) \frac{1}{F(x) - F(z)}$$

Da $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F_2(x)}{1 - F(x)} = 2$, ist $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F(x - z)}{1 - F(x)} = 1$ für alle $z > 0$.

Angenommen, die Aussage wurde für n bereits gezeigt, d.h. es gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F_n(x)}{1 - F(x)} = n$$

Für den Induktionsschritt sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Mittels der Induktionsannahme findet man ein $c > 0$, sodass für alle $x > c$

$$n - \varepsilon < \frac{1 - F_n(x)}{1 - F(x)} < n + \varepsilon$$

gilt. Des Weiteren definiert man für $x > c$

$$U(x) = \int_0^{x-c} \frac{1 - F(x - y)}{1 - F(x)} dF(y) \quad \text{und} \quad V(x) = \int_{x-c}^x \frac{1 - F(x - y)}{1 - F(x)} dF(y).$$

Betrachtet man zunächst das zweite Integral, so kann man sehen, dass

$$0 \leq V(x) \leq \int_{x-c}^x \frac{1}{1 - F(x)} dF(y) = \frac{F(x) - F(x - c)}{1 - F(x)} = \frac{1 - F(x - c)}{1 - F(x)} - 1$$

gilt. Daraus folgt mithilfe des oben gezeigten Grenzwertes: $\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = 0$.

Für das erste Integral zieht man die zu Beginn des Beweises angeführte Gleichung zu Hilfe. Somit ist für $x > c$:

$$\frac{1 - F_{n+1}(x)}{1 - F(x)} = 1 + \int_0^{x-c} \frac{1 - F_n(x-y)}{1 - F(x-y)} \frac{1 - F(x-y)}{1 - F(x)} dF(y) + \int_{x-c}^x \frac{1 - F_n(x-y)}{1 - F(x-y)} \frac{1 - F(x-y)}{1 - F(x)} dF(y)$$

Für $n = 1$ erhält man:

$$\frac{1 - F_2(x)}{1 - F(x)} = 1 + U(x) + V(x)$$

Bildet man den Grenzwert für $x \rightarrow \infty$, so folgt $\lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = 1$, da $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F_2(x)}{1 - F(x)} = 2$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = 0$.

Da $\frac{1 - F_n(x-y)}{1 - F(x-y)} \leq \frac{1}{1 - F(c)}$ für $x - c \leq y \leq x$ ist und c entsprechend gewählt wurde, kann man für alle $x > c$ folgende Abschätzung angeben:

$$1 + (n - \varepsilon)U(x) < \frac{1 - F_{n+1}(x)}{1 - F(x)} < 1 + (n + \varepsilon)U(x) + \frac{1}{1 - F(c)}V(x)$$

Somit gilt:

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F_{n+1}(x)}{1 - F(x)} \geq 1 + n - \varepsilon \quad \text{und} \quad \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F_{n+1}(x)}{1 - F(x)} \leq 1 + n + \varepsilon$$

Da man ε beliebig klein wählen kann, ist $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F_{n+1}(x)}{1 - F(x)} = n + 1$ gezeigt. $\square$

Satz 4.1. Gegeben sei

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu}(1 - F(x)) & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Dann ist h eine Wahrscheinlichkeitsdichte, und bei $H(t) = \int_{-\infty}^t h(x)dx$ handelt es sich um eine Verteilungsfunktion, für die $H(0) = 0$ gilt.

Ist H subexponentiell, so gilt $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\Psi(a)}{1 - H(a)} = \frac{1}{\rho}$.

Beweis. Wie bereits in Satz 3.1. gezeigt, erfüllt h die Eigenschaften einer Wahrscheinlichkeitsdichte.

Weiters ist H eine Verteilungsfunktion mit $H(0) = 0$, da $h(x) = 0$ für alle $x < 0$ gilt.

Um den letzten Teil des Satzes zu beweisen, zieht man die Aussage aus Satz 3.2. zu Hilfe.

Für $a > 0$ gilt

$$K(a) = \frac{\rho}{\rho + 1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1 + \rho)^k} H_k(a) \right), \quad \text{wobei } H_0(a) = 1 \text{ ist.}$$

Für die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\rho)^k}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\rho)^k} = \frac{1+\rho}{\rho}.$$

Dividiert man durch $\frac{1+\rho}{\rho}$, so erhält man

$$\frac{\rho}{1+\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\rho)^k} = 1.$$

Somit gilt weiters

$$\begin{aligned} \frac{\Psi(a)}{1-H(a)} &= \frac{1-K(a)}{1-H(a)} \\ &= \frac{1}{1-H(a)} \frac{\rho}{1+\rho} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\rho)^k} (1-H_k(a)) \right) \\ &= \frac{\rho}{1+\rho} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\rho)^k} \frac{1-H_k(a)}{1-H(a)}. \end{aligned}$$

Man wählt ein $\varepsilon \in (0, \rho)$. Da die Bedingungen aus Hilfssatz 4.1. erfüllt sind, existiert eine Konstante $d > 0$, sodass für alle $a > 0$ und $k \geq 1$

$$\frac{1-H_k(a)}{1-H(a)} \leq d(1+\varepsilon)^k$$

gilt. Da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\rho)^k} d(1+\varepsilon)^k < \infty$ ist, kann man Grenzwert und Summe vertauschen. Laut Voraussetzung ist H subexponentiell und daher kann Hilfssatz 4.2. angewendet werden:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\Psi(a)}{1-H(a)} &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{\rho}{1+\rho} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\rho)^k} \frac{1-H_k(a)}{1-H(a)} \right) \\ &= \frac{\rho}{1+\rho} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\rho)^k} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1-H_k(a)}{1-H(a)} \\ &= \frac{\rho}{1+\rho} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{1}{(1+\rho)^k} = \frac{1}{\rho} \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung besitzt Gültigkeit aufgrund folgender Tatsache:

Differenziert man $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ für $|x| < 1$, so erhält man $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$. □

Im nächsten Schritt betrachtet man alle Forderungen, die innerhalb eines bestimmten Zeitintervalls bei einem Versicherungsunternehmen eintreffen und versucht, deren asymptotisches Verhalten näher zu beschreiben. Dafür ist folgende Definition notwendig:

Definition 4.2. Sei $t > 0$. Dann wird durch

$$Z_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

die Summe aller Forderungen im Zeitintervall $[0, t]$ definiert.

Der nächste Satz widmet sich dem asymptotischen Verhalten von $\mathbb{P}(Z_t > x)$.

Satz 4.2. Gegeben sei eine subexponentielle Verteilungsfunktion F . Dann gilt für alle $t > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(Z_t > x)}{1 - F(x)} = \lambda t.$$

Beweis. Wie schon im Beweis von Satz 2.1. gezeigt wurde, gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_t > x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_k > x) \cdot \mathbb{P}(N_t = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (1 - F_k(x)) p_k, \end{aligned}$$

wobei $p_k = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$. Die Summe beginnt hier mit $k = 1$, da für $k = 0$ der Summand wegfällt. Das folgt aus der Tatsache, dass die leere Summe gleich 0 und somit nicht größer als x ist. Nun dividiert man in obiger Gleichung beide Seiten durch $(1 - F(x))$:

$$\frac{\mathbb{P}(Z_t > x)}{1 - F(x)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - F_k(x)}{1 - F(x)} p_k$$

Da F als subexponentiell vorausgesetzt wurde, kann man Hilfssatz 4.1. anwenden. Es existiert daher eine Konstante $d > 0$ mit $\frac{1 - F_k(x)}{1 - F(x)} \leq d 2^k$ für alle $k \geq 1$ und $x \in \mathbb{R}^+$. Im nächsten Schritt sollen Grenzwert und Summe vertauscht werden. Dies ist möglich, da

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} d 2^k p_k &= d \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \\ &= d e^{2\lambda t} e^{-\lambda t} = d e^{\lambda t} < \infty, \end{aligned}$$

d.h. endlich ist. Mit Hilfssatz 4.2. folgt für $t > 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(Z_t > x)}{1 - F(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - F_k(x)}{1 - F(x)} p_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} k \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F_k(x)}{1 - F(x)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = (\lambda t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \\ &= \lambda t e^{\lambda t} e^{-\lambda t} = \lambda t. \end{aligned}$$

□

4.2 Subexponentielle Verteilungen

Im vorherigen Teil wurden subexponentielle Verteilungsfunktionen vorausgesetzt und untersucht, welche Eigenschaften diese besitzen. Damit konnten auch weitere Aussagen über die Risikowahrscheinlichkeit $\Psi(a)$ getroffen werden. Der nächste Schritt wird darin bestehen, hinreichende Bedingungen dafür zu finden, wann eine Verteilungsfunktion subexponentiell ist.

Definition 4.3. Gegeben sei eine Verteilungsfunktion F mit

$$F(t) \begin{cases} < 1 & \text{für } t \geq 0 \\ = 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

Für $s > 0$ sei $F_s(t) = \frac{F(s+t)-F(s)}{1-F(s)}$ definiert, und mit

$$g(s) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{F_s(t)}{t}$$

wird die Ausfallrate zum Zeitpunkt s bezeichnet. Dabei wird vorausgesetzt, dass dieser Grenzwert existiert.

Besitzt F eine Wahrscheinlichkeitsdichte f , so existiert der Wert $g(s)$, wenn f in s stetig ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} g(s) &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{F_s(t)}{t} \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{(F(s+t) - F(s)) / t}{1 - F(s)} = \frac{f(s)}{1 - F(s)} \end{aligned}$$

Bemerkung. Ist die Ausfallrate eine monoton wachsende Funktion, so kann man sagen, dass das System „altert“. Ist $g(s)$ konstant in jedem Punkt s , „altert“ das System jedoch nicht. In der Praxis besitzen somit realistische Verteilungsfunktionen eine monoton wachsende Ausfallrate.

Der nächste Satz gibt an, wie sich die Verteilungsfunktion bzw. die Wahrscheinlichkeitsdichte mithilfe der Ausfallrate berechnet lässt.

Satz 4.3. Gegeben sei eine Verteilungsfunktion F mit

$$F(t) \begin{cases} < 1 & \text{für } t \geq 0 \\ = 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

Weiters wird angenommen, dass F eine Wahrscheinlichkeitsdichte f besitzt. Sei $g(s)$ die Ausfallrate und $G(t) = \int_0^t g(s) ds$.

Dann gilt für $t > 0$

$$F(t) = 1 - e^{-G(t)} \quad \text{und} \quad f(t) = G(t)e^{-G(t)}.$$

Beweis. Es gilt $F(0) = 0$, da es sich bei F um eine Lebensdauerverteilung handelt, die eine Dichte besitzt.

Im nächsten Schritt zieht man die Definition von $G(t)$ zu Hilfe und setzt weiter ein:

$$\begin{aligned} G(t) &= \int_0^t g(s) ds = \int_0^t \frac{f(s)}{1 - F(s)} ds \\ &= -\log(1 - F(t)) + \log(1 - F(0)) \\ &= -\log(1 - F(t)), \end{aligned}$$

woraus $F(t) = 1 - e^{-G(t)}$ folgt.

Wenn man das letzte Resultat differenziert, erhält man $f(t) = g(t)e^{-G(t)}$. □

Um die nachfolgenden Sätze beweisen zu können, ist folgende Überlegung notwendig: Sei $F_2(t) = F * F(t)$ die Faltung zweier Verteilungsfunktionen. Nun verwendet man die im Beweis von Hilfssatz 4.1. gezeigte Formel, und setzt für die Verteilungsfunktion F und die Wahrscheinlichkeitsdichte f ein:

$$\begin{aligned} \frac{1 - F_2(x)}{1 - F(x)} - 1 &= \frac{1}{1 - F(x)} \int_0^x (1 - F(x - y)) dF(y) \\ &= e^{G(x)} \int_0^x e^{-G(x-y)} f(y) dy \\ &= \int_0^x e^{G(x) - G(x-y) - G(y)} g(y) dy \end{aligned}$$

Satz 4.4. Gegeben sei eine Verteilungsfunktion F , die eine Wahrscheinlichkeitsdichte f besitzt und die dazugehörige Ausfallsrate g .

Wenn F subexponentiell ist und $g(x)$ für $x \rightarrow \infty$ monoton fallend gegen Null konvergiert, dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{yg(x)} f(y) dy = 1.$$

Beweis. Aufgrund der Voraussetzung, dass $g(x)$ für $x \rightarrow \infty$ eine monoton fallende Funktion ist, kann man folgende Abschätzung machen:

$$\frac{1 - F_2(x)}{1 - F(x)} - 1 \geq \int_0^x e^{yg(x) - G(y)} g(y) dy \geq \int_0^x e^{-G(y)} g(y) dy = \int_0^x f(y) dy = F(x)$$

Da F eine Verteilungsfunktion ist, gilt ja $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$. Berücksichtigt man zusätzlich die Tatsache, dass F subexponentiell und daher $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-F_2(x)}{1-F(x)} = 2$ ist, folgt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{yg(x)-G(y)} g(y) dy = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{yg(x)} f(y) dy = 1.$$

□

Als Nächstes wird die Umkehrung dieses Satzes gezeigt.

Satz 4.5. *Gegeben sei eine Verteilungsfunktion F mit einer Wahrscheinlichkeitsdichte f und die dazugehörige Ausfallrate g .*

Angenommen, es existiert eine Konstante $d > 0$, sodass g auf dem Intervall $[d, \infty)$ monoton fallend ist und für $x \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert. Gilt weiters $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{yg(x)} f(y) dy = 1$, dann ist F subexponentiell.

Beweis. Auch hier geht man wieder von folgender Gleichung aus:

$$\frac{1 - F_2(x)}{1 - F(x)} - 1 = \int_0^x e^{G(x)-G(x-y)-G(y)} g(y) dy.$$

Im nächsten Schritt wird der Integrationsbereich $[0, x]$ in die Teilintervalle $[0, \frac{x}{2}]$ und $[\frac{x}{2}, x]$ zerteilt. Man erhält dadurch

$$\frac{1 - F_2(x)}{1 - F(x)} - 1 = \int_0^{\frac{x}{2}} e^{G(x)-G(x-y)-G(y)} g(y) dy + \int_0^{\frac{x}{2}} e^{G(x)-G(t)-G(x-t)} g(x-t) dt,$$

wobei im letzten Integral y durch $x-t$ substituiert wurde. Definiert man an dieser Stelle

$$u_x(y) = e^{G(x)-G(x-y)-G(y)} g(y) \mathbf{1}_{[0, \frac{x}{2})}(y) \quad \text{und} \quad v_x(y) = e^{G(x)-G(x-y)-G(y)} g(x-y) \mathbf{1}_{[0, \frac{x}{2})}(y),$$

so lässt sich die obige Gleichung schreiben als

$$\frac{1 - F_2(x)}{1 - F(x)} - 1 = \int_0^\infty u_x(y) dy + \int_0^\infty v_x(y) dy.$$

Aus $x \geq 2d$ und da $0 \leq y \leq \frac{x}{2}$, folgt $d \leq \frac{x}{2} \leq x-y \leq x$. Damit kann man weiters schließen, dass $0 \leq G(x) - G(x-y) \leq yg(x-y) \leq yg(\frac{x}{2})$ ist. Für diese Ungleichung wurde auch der Umstand berücksichtigt, dass die Funktion g auf $[d, \infty)$ monoton fallend ist.

Zusammenfassend kann man für $x \geq 2d$ und $0 \leq y \leq \frac{x}{2}$ sehen:

$$0 \leq G(x) - G(x - y) \leq yg\left(\frac{x}{2}\right)$$

Wie bereits aus Satz 4.3. bekannt ist, gilt $f(y) = e^{-G(y)}g(y)$. Damit lässt sich für $u_x(y)$ mit $x \geq 2d$ folgende Abschätzung geben:

$$f(y)\mathbb{1}_{[0, \frac{x}{2})}(y) \leq u_x(y) \leq e^{yg(\frac{x}{2})}f(y)\mathbb{1}_{[0, \frac{x}{2})}(y)$$

Daraus erhält man weiters für $x \geq 2d$:

$$\int_0^{\frac{x}{2}} f(y)dy \leq \int_0^{\infty} u_x(y)dy \leq \int_0^{\frac{x}{2}} e^{yg(\frac{x}{2})} f(y)dy$$

Nun bildet man die Grenzwerte des linken und rechten Integrals in dieser Ungleichungskette. Da f eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist, folgt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{x}{2}} f(y)dy = \int_0^{\infty} f(y)dy = 1.$$

Laut Voraussetzung gilt weiters

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{x}{2}} e^{yg(\frac{x}{2})} f(y)dy = 1.$$

Somit wurde gezeigt, dass $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} u_x(y)dy = 1$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Man wähle $c > d$ so groß, dass $\int_c^{\infty} f(y)dy < \frac{\varepsilon}{2}$. Mithilfe der obigen Abschätzung erhält man für $x \geq 2c$

$$\int_0^c f(y)dy \leq \int_0^c u_x(y)dy \leq \int_0^c e^{yg(\frac{x}{2})} f(y)dy \leq e^{cg(\frac{x}{2})} \int_0^c f(y)dy.$$

Da $g(\frac{x}{2})$ für $x \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert, gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^c u_x(y)dy = \int_0^c f(y)dy$.

Daraus kann man weiter folgern, dass $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_c^{\infty} u_x(y)dy = 1 - \int_0^c f(y)dy = \int_c^{\infty} f(y)dy$.

Aufgrund obiger Ungleichung und der Tatsache, dass $e^{-G(y)} \mathbf{1}_{[0, \frac{x}{2}]}(y) \leq 1$, kann man auch eine Abschätzung für $v_x(y)$ angeben

$$\int_0^c v_x(y) dy \leq \int_0^c e^{yg(\frac{x}{2})} g(x-y) dy \leq ce^{cg(\frac{x}{2})} g(x-c),$$

wobei $x \geq c + d$. Da $\int_c^\infty f(y) dy < \frac{\varepsilon}{2}$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} ce^{cg(\frac{x}{2})} g(x-c) = 0$ ist, gibt es ein x_0 , sodass

$$\int_c^\infty u_x(y) dy < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \int_0^c v_x(y) dy < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $x \geq x_0$ gelten. Für $y \geq d$ kann man noch folgende Ungleichung angeben:

$$0 \leq v_x(y) \leq u_x(y),$$

da $g(x-y) \leq g(y)$ aus $d \leq y \leq \frac{x}{2}$ und der Tatsache, dass g monoton fallend auf $[d, \infty)$ ist, folgt.

Zusammenfassend erhält man für $x \geq x_0$:

$$0 \leq \int_0^\infty v_x(y) dy \leq \int_c^\infty u_x(y) dy + \int_0^c v_x(y) dy < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Somit ist $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^\infty v_x(y) dy = 0$ gezeigt.

Aus $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^\infty u_x(y) dy = 1$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^\infty v_x(y) dy = 0$ folgt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F_2(x)}{1 - F(x)} = 2.$$

Damit wurde gezeigt, dass F subexponentiell ist. □

Auch im nächsten Satz werden hinreichende Bedingungen an eine Verteilungsfunktion F gestellt, um zu prüfen, ob diese subexponentiell ist. Der Satz wird in der Literatur auch oft als „Satz von Pitmann“ bezeichnet.

Satz 4.6. *Gegeben sei eine Verteilungsfunktion F mit einer Wahrscheinlichkeitsdichte f und die dazugehörige Ausfallrate g .*

Angenommen, es existiert eine Konstante $d > 0$, sodass g auf dem Intervall $[d, \infty)$ monoton fallend ist und für $x \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert.

Besitzt die Funktion $w : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$, definiert durch $w(x) = e^{xg(x)} f(x)$, endliches Integral, so ist F subexponentiell.

Beweis. Ziel ist es, Satz 4.5. anzuwenden. Dazu muss man lediglich zeigen, dass

$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{yg(x)} f(y) dy = 1$ ist. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Man wählt nun ein $c > d$ so, dass

$$\int_c^\infty w(y) dy < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{und} \quad \int_c^\infty f(y) dy < \frac{\varepsilon}{3}$$

gilt. Da $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ ist, gibt es ein $x_0 > c$ mit $e^{cg(x)} - 1 < \frac{\varepsilon}{3}$ für $x \geq x_0$. Es folgt

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x e^{yg(x)} f(y) dy - \int_0^\infty f(y) dy \right| &\leq \int_0^c (e^{yg(x)} - 1) f(y) dy + \int_c^x e^{yg(x)} f(y) dy + \int_c^\infty f(y) dy \\ &\leq \int_0^c (e^{cg(x)} - 1) f(y) dy + \int_c^x e^{yg(y)} f(y) dy + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} \int_0^c f(y) dy + \int_c^x w(y) dy + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Somit wurde gezeigt, dass $\int_0^x e^{yg(x)} f(y) dy = \int_0^\infty f(y) dy = 1$. Aus Satz 4.5. folgt, dass F subexponentiell ist. $\square$

Für den nächsten Satz wird angenommen, dass die Verteilungsfunktion F mit $F(0) = 0$ einen endlichen Erwartungswert besitzt, d.h. $\mu = \int_0^\infty (1 - F(x)) dx < \infty$.

Gegeben sei die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu}(1 - F(x)) & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

und die dazugehörige Verteilungsfunktion $H(t) = \int_{-\infty}^t h(x) dx$. Nun soll geprüft werden, ob H subexponentiell ist.

Satz 4.7. Gegeben sei eine Verteilungsfunktion F und die dazugehörige Ausfallsrate g . Angenommen, es existiert eine Konstante $d > 0$, sodass g auf dem Intervall $[d, \infty)$ monoton fallend ist und für $x \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert.

Weiters sei $G(t) = \int_0^t g(s) ds$. Die Verteilungsfunktion H ist subexponentiell, wenn eine der beiden Eigenschaften erfüllt ist:

(a) Es existiert eine Konstante $L > 0$, sodass $xg(x) \leq L$ für alle $x \geq 0$ gilt.

(b) Es ist sowohl $\lim_{x \rightarrow \infty} xg(x) = \infty$ als auch $\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{xg(x)}{G(x)} < 1$ erfüllt.

Beweis. Da $F(x) = 1 - e^{-G(x)}$ ist, gilt $h(x) = \frac{1}{\mu}e^{-G(x)}$ für $x \geq 0$. Für die Ausfallsrate $\tilde{g}$ von H erhält man:

$$\begin{aligned}\tilde{g}(x) &= \frac{h(x)}{1 - H(x)} = \frac{\frac{1}{\mu}e^{-G(x)}}{\int_x^\infty h(y)dy} \\ &= \frac{e^{-G(x)}}{\int_x^\infty e^{-G(y)}dy} = \frac{e^{-G(x)}}{K(x)},\end{aligned}$$

mit $K(x) := \int_x^\infty e^{-G(y)}dy$. Weiters folgt für $x \geq d$

$$\begin{aligned}K(x) &\geq \int_x^\infty \frac{g(y)}{g(x)}e^{-G(y)}dy = \frac{1}{g(x)} \int_x^\infty g(y)e^{-G(y)}dy \\ &= \frac{1}{g(x)}(1 - F(x)) = \frac{1}{g(x)}e^{-G(x)}.\end{aligned}$$

Mithilfe dieser Ungleichung sieht man, dass

$$\tilde{g}(x) \leq g(x) \quad \text{und} \quad \tilde{g}'(x) = \frac{1}{K(x)^2} \left(-g(x)e^{-G(x)}K(x) + e^{-2G(x)} \right) \leq 0$$

gilt. Das heißt, $\tilde{g}$ ist auf dem Intervall $[d, \infty)$ ebenfalls monoton fallend und konvergiert für $x \rightarrow \infty$ gegen Null.

Daher genügt es laut Satz 4.6. zu zeigen, dass das Integral $\int_0^\infty \frac{1}{\mu}e^{x\tilde{g}(x)}e^{-G(x)}dx$ endlich ist. Angenommen, die Eigenschaft

(a) ist erfüllt, dann ist folgende Abschätzung gültig:

$$\int_d^\infty \frac{1}{\mu}e^{x\tilde{g}(x)}e^{-G(x)}dx \leq \int_d^\infty \frac{1}{\mu}e^{xg(x)}e^{-G(x)}dx \leq \frac{1}{\mu}e^L K(d) < \infty.$$

Es ist auch $\int_0^d \frac{1}{\mu}e^{x\tilde{g}(x)}e^{-G(x)}dx < \infty$, weil der Integrand $\frac{1}{\mu}e^{x\tilde{g}(x)}e^{-G(x)}$ stetig und daher auf $[0, d]$ beschränkt ist.

Fasst man nun zusammen, wurde $\int_0^\infty \frac{1}{\mu}e^{x\tilde{g}(x)}e^{-G(x)}dx < \infty$ gezeigt.

(b) ist erfüllt. Es existiert daher ein $\alpha \in (0, 1)$ und ein $c \geq d$ so, dass $xg(x) < \alpha G(x)$ für $x \geq c$ gilt.

Aufgrund der Voraussetzung ist $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{2}{(1-\alpha)yg(y)} = 0$. Daher gibt es eine Konstante $b \geq c$ mit der Eigenschaft, dass $\frac{2}{y} \leq (1-\alpha)g(y)$ für alle $y \geq b$ gilt.

Im nächsten Schritt integriert man beide Seiten von b nach x und erhält somit

$$2\log(x) - 2\log(b) \leq (1 - \alpha)(G(x) - G(b)) \text{ für alle } x \geq b.$$

Äquivalent dazu ist $2\log(x) \leq (1 - \alpha)G(x) + B$, wobei $B := 2\log(b) - (1 - \alpha)G(b)$.

Diese Resultate kann man verwenden, um zu zeigen, dass

$$\int_b^\infty \frac{1}{\mu} e^{x\tilde{g}(x)} e^{-G(x)} dx \leq \int_b^\infty \frac{1}{\mu} e^{-(1-\alpha)G(x)} dx \leq \int_b^\infty \frac{1}{\mu} e^{B-2\log(x)} dx = \frac{1}{\mu} e^B \int_b^\infty \frac{1}{x^2} dx < \infty.$$

Auch hier ist $\int_0^b \frac{1}{\mu} e^{x\tilde{g}(x)} e^{-G(x)} dx < \infty$, weil der Integrand stetig und daher auf $[0, b]$ beschränkt ist.

Zusammenfassend wurde $\int_0^\infty \frac{1}{\mu} e^{x\tilde{g}(x)} e^{-G(x)} dx < \infty$ gezeigt.

□

KAPITEL 5

Beispiele

Die Theorie über subexponentielle Verteilungen und deren Eigenschaften soll in diesem Kapitel anhand von Beispielen verdeutlicht werden. Für verschiedene Verteilungsfunktionen kann man mit Satz 4.6. überprüfen, ob sie subexponentiell sind. Satz 4.7. gibt Aufschluss darüber, ob die dazugehörige Funktion H subexponentiell ist. Mittels Satz 4.1. kann man asymptotische Resultate für die Risikowahrscheinlichkeit $\Psi(a)$ geben, wie man im Beispiel der Weibull- und der verallgemeinerten Paretoverteilung sehen kann.

5.1 Weibullverteilung

Die Weibullverteilung hat folgende Verteilungsfunktion:

$$F(x) = 1 - e^{-\gamma x^\beta},$$

wobei $\gamma > 0$ ist und $\beta \in (0, 1)$ angenommen wird. Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist durch

$$f(x) = \gamma \beta x^{\beta-1} e^{-\gamma x^\beta}$$

gegeben. Die Ausfallsrate berechnet sich wie folgt:

$$g(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{\gamma \beta x^{\beta-1} e^{-\gamma x^\beta}}{1 - (1 - e^{-\gamma x^\beta})} = \gamma \beta x^{\beta-1}.$$

Da von $\beta \in (0, 1)$ ausgegangen wurde, ist die Funktion g monoton fallend und $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$. Um Satz 4.6. anwenden zu können, muss man noch zeigen, dass das Integral der Funktion

$$w(x) = e^{xg(x)} f(x)$$

endlich ist.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} e^{xg(x)} f(x) dx &= \int_0^{\infty} e^{x\gamma\beta x^{\beta-1}} \gamma\beta x^{\beta-1} e^{-\gamma x^{\beta}} dx = \int_0^{\infty} \gamma\beta x^{\beta-1} e^{\gamma\beta x^{\beta} - \gamma x^{\beta}} dx \\
 &= \gamma\beta \int_0^{\infty} x^{\beta-1} e^{-\gamma(1-\beta)x^{\beta}} dx \\
 &= \left(-\frac{1}{1-\beta}\right) \cdot \left(e^{-\gamma(1-\beta)x^{\beta}}\right) \Big|_0^{\infty} \\
 &= \left(-\frac{1}{1-\beta}\right) \cdot \frac{1}{e^{\gamma(1-\beta)x^{\beta}}} \Big|_{x=\infty} + \frac{1}{1-\beta} \cdot \frac{1}{e^0} \\
 &= \frac{1}{1-\beta} < \infty
 \end{aligned}$$

Damit folgt, dass die Weibullverteilung für $\gamma > 0$ und $\beta \in (0, 1)$ subexponentiell ist.

Weiters soll gezeigt werden, dass die Verteilungsfunktion H ebenfalls subexponentiell ist.

Dazu kann man Satz 4.7.(b) verwenden. Es wird überprüft, ob die Eigenschaften

$\lim_{x \rightarrow \infty} xg(x) = \infty$ und $\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{xg(x)}{G(x)} < 1$ erfüllt sind:

- Da $xg(x) = \gamma\beta x^{\beta}$ mit $\beta \in (0, 1)$ ist, folgt $\lim_{x \rightarrow \infty} xg(x) = \infty$.
- Als Nächstes betrachtet man $\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{xg(x)}{G(x)}$. Aus Satz 4.3. ist bekannt, dass

$$\begin{aligned}
 G(x) &= -\log(1 - F(x)) = -\log(e^{-\gamma x^{\beta}}) \\
 &= -(-\gamma x^{\beta}) = \gamma x^{\beta}
 \end{aligned}$$

gilt und somit

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\gamma\beta x^{\beta}}{\gamma x^{\beta}} = \limsup_{x \rightarrow \infty} \beta = \beta < 1.$$

Da H subexponentiell ist, findet Satz 4.1. Anwendung. Für Forderungen, die eine Weibullverteilung mit $\gamma > 0$ und $\beta \in (0, 1)$ haben, besagt dieser, dass $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\Psi(a)}{1-H(a)} = \frac{1}{\rho}$ ist. Jedoch lässt sich H in diesem Fall nicht genau berechnen.

5.2 Verallgemeinerte Paretoverteilung

Die verallgemeinerte Paretoverteilung besitzt die Verteilungsfunktion

$$F(x) = 1 - \left(1 + \gamma\alpha x^{\beta}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

und die Dichtefunktion

$$f(x) = \gamma \beta x^{\beta-1} \left(1 + \gamma \alpha x^\beta\right)^{-\frac{(1+\alpha)}{\alpha}},$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma > 0$ sind. Somit ergibt sich für die Ausfallsrate g :

$$g(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{\gamma \beta x^{\beta-1} \left(1 + \gamma \alpha x^\beta\right)^{-\frac{(1+\alpha)}{\alpha}}}{\left(1 + \gamma \alpha x^\beta\right)^{-\frac{1}{\alpha}}} = \frac{\gamma \beta x^{\beta-1}}{1 + \gamma \alpha x^\beta}$$

Um die Monotonie von g zu untersuchen, berechnet man die Ableitung g' mithilfe der Quotientenregel:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\gamma \beta (\beta - 1) x^{\beta-2} (1 + \gamma \alpha x^\beta) - \gamma \beta x^{\beta-1} \gamma \alpha \beta x^{\beta-1}}{(1 + \gamma \alpha x^\beta)^2} \\ &= \frac{\gamma \beta (\beta - 1) x^{\beta-2} (1 + \gamma \alpha x^\beta) - \gamma^2 \alpha \beta^2 x^{2(\beta-1)}}{(1 + \gamma \alpha x^\beta)^2} \\ &= \frac{\gamma \beta^2 x^{\beta-2} - \gamma \beta x^{\beta-2} - \gamma^2 \alpha \beta x^{2(\beta-1)}}{(1 + \gamma \alpha x^\beta)^2} \\ &= \frac{\gamma \beta x^{\beta-2} (\beta - 1 - \gamma \alpha x^\beta)}{(1 + \gamma \alpha x^\beta)^2} \end{aligned}$$

Nun unterscheidet man zwei Fälle:

- Für $\beta \leq 1$ setzt man $d = 0$.
- Für $\beta > 1$ setzt man $d = \left(\frac{\beta-1}{\gamma \alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}$.

Somit ist $g'(x) \leq 0$ für $x > d$ und die Ausfallsrate g daher auf $[d, \infty)$ monoton fallend.

Weiters sieht man, dass $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ ist. Mit $xg(x) = \frac{\gamma \beta x^\beta}{1 + \gamma \alpha x^\beta} \leq \frac{\beta}{\alpha}$ für alle $x \geq 0$, folgt

$$\int_0^\infty e^{xg(x)} f(x) dx \leq \int_0^\infty e^{\frac{\beta}{\alpha}} f(x) dx = e^{\frac{\beta}{\alpha}} < \infty.$$

Aus Satz 4.6. folgt, dass die verallgemeinerte Paretoverteilung subexponentiell ist.

Um zu zeigen, dass die Verteilungsfunktion H subexponentiell ist, genügt es Eigenschaft (a) aus Satz 4.7. zu verwenden. Das heißt, man sucht eine Konstante $L > 0$ mit $xg(x) \leq L$ für alle $x \geq 0$. Wie bereits oben gezeigt wurde, gilt

$$xg(x) = \frac{\gamma \beta x^\beta}{1 + \gamma \alpha x^\beta} \leq \frac{\beta}{\alpha}, \quad \forall x \geq 0.$$

Man setzt $L = \frac{\beta}{\alpha} > 0$ und daraus folgt, dass H subexponentiell ist.

Die verallgemeinerte Paretoverteilung ist auch ein gutes Beispiel dafür, wie man mithilfe von Satz 4.1. das asymptotische Verhalten von $\Psi(a)$ beschreiben kann.

Für $\alpha \in (0, 1)$ berechnet man den Erwartungswert wie folgt:

$$\begin{aligned}\mu &= \int_0^{\infty} (1 - F(x)) \, dx = \int_0^{\infty} (1 + \gamma\alpha x)^{-\frac{1}{\alpha}} \, dx \\ &= \frac{1}{\gamma(\alpha - 1)} (1 + \gamma\alpha x)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\gamma(1 - \alpha)}\end{aligned}$$

Damit ergibt sich weiter für $x \geq 0$

$$h(x) = \frac{1}{\mu} (1 - F(x)) = \gamma(1 - \alpha)(1 + \gamma\alpha x)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

und daraus

$$H(t) = \int_0^t h(x) \, dx = \gamma(1 - \alpha) \int_0^t (1 + \gamma\alpha x)^{-\frac{1}{\alpha}} \, dx = 1 - (1 + \gamma\alpha t)^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}}.$$

Man sieht, dass es sich bei H ebenfalls um eine verallgemeinerte Paretoverteilung handelt. Da bereits gezeigt wurde, dass verallgemeinerte Paretoverteilungen subexponentiell sind, gilt dies auch für H .

Satz 4.1. besagt nun, dass

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\Psi(a)}{1 - H(a)} = \lim_{a \rightarrow \infty} \Psi(a) (1 + \gamma\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} = \frac{1}{\rho}$$

gilt. Betrachtet man den Fall $\alpha = \frac{1}{2}$, so folgt daraus

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \Psi(a) \left(1 + \frac{\gamma}{2}a\right) = \frac{1}{\rho},$$

d.h. $\Psi(a)$ konvergiert für $a \rightarrow \infty$ wie $\frac{2}{\rho(2+\gamma a)}$ gegen Null. Die Konvergenzgeschwindigkeit ist langsamer als bei einer Exponentialfunktion.

5.3 Benktanderverteilung

Für die Benktanderverteilung ist die Verteilungsfunktion für $x \geq 1$ gegeben durch

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{\frac{\alpha}{\beta}} x^{-(1-\beta)} e^{-\frac{\alpha x^{\beta}}{\beta}} & \text{für } x \geq 1 \\ 0 & \text{für } x < 1 \end{cases}$$

und die Wahrscheinlichkeitsdichte durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{\alpha}{\beta}} x^{-(1-\beta)} e^{-\frac{\alpha x^\beta}{\beta}} \left(\frac{\alpha}{x^{1-\beta}} + \frac{1-\beta}{x} \right) & \text{für } x \geq 1 \\ 0 & \text{für } x < 1 \end{cases},$$

wobei $\alpha > 0$ und $\beta \in (0, 1)$. Die Ausfallsrate g berechnet sich wie folgt:

$$g(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \begin{cases} \left(\frac{\alpha}{x^{1-\beta}} + \frac{1-\beta}{x} \right) & \text{für } x \geq 1 \\ 0 & \text{für } x < 1 \end{cases}.$$

Die Funktion g ist somit auf dem Intervall $[1, \infty)$ monoton fallend und konvergiert für $x \rightarrow \infty$ gegen Null. Um Satz 4.6. anwenden zu können, benötigt man für $x \geq 1$

$$xg(x) = (\alpha x^\beta + (1 - \beta))$$

und berechnet damit

$$\begin{aligned} e^{xg(x)} f(x) &= e^{(\alpha x^\beta + (1-\beta))} e^{\frac{\alpha}{\beta}} x^{-(1-\beta)} e^{-\frac{\alpha x^\beta}{\beta}} \left(\frac{\alpha}{x^{1-\beta}} + \frac{1-\beta}{x} \right) \\ &= e^{\frac{\alpha}{\beta}} e^{1-\beta} e^{\frac{-\alpha(1-\beta)x^\beta}{\beta}} \left(\frac{\alpha}{x^{2-2\beta}} + \frac{1-\beta}{x^{2-\beta}} \right). \end{aligned}$$

Mithilfe einer geeigneten Konstante k kann man folgende Abschätzung machen:

$$e^{xg(x)} f(x) \leq k e^{\frac{-\alpha(1-\beta)x^\beta}{\beta}},$$

woraus folgt, dass

$$\int_0^\infty e^{xg(x)} f(x) dx < \infty,$$

d.h. endlich ist. Satz 4.6. besagt nun, dass die Benktanderverteilung subexponentiell ist.

An dieser Stelle stellt sich wieder die Frage, ob die Verteilungsfunktion H ebenfalls subexponentiell ist. Dazu verwendet man Satz 4.7.(b) und überprüft die beiden Eigenschaften:

- Wie bereits oben gezeigt wurde, gilt $xg(x) = (\alpha x^\beta + (1 - \beta))$.
Daraus folgt: $\lim_{x \rightarrow \infty} xg(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\alpha x^\beta + (1 - \beta)) = \infty$.

- Als Nächstes möchte man $\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{xg(x)}{G(x)} < 1$ zeigen. Dazu berechnet man zuerst:

$$\begin{aligned} G(x) &= -\log(1 - F(x)) = -\log\left(e^{\frac{\alpha}{\beta}} x^{-(1-\beta)} e^{-\frac{\alpha x^\beta}{\beta}}\right) \\ &= -\frac{\alpha}{\beta} + \log(x^{1-\beta}) + \frac{\alpha x^\beta}{\beta} \\ &= \frac{\alpha}{\beta}(x^\beta - 1) + \log(x^{1-\beta}) \end{aligned}$$

Es folgt weiters

$$\begin{aligned} \frac{xg(x)}{G(x)} &= \frac{\alpha x^\beta + (1 - \beta)}{\frac{\alpha}{\beta}(x^\beta - 1) + \log(x^{1-\beta})} \\ &\leq \frac{\alpha x^\beta + (1 - \beta)}{\frac{\alpha}{\beta}(x^\beta - 1)}. \end{aligned}$$

Für $x \rightarrow \infty$ erhält man

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha x^\beta + (1 - \beta)}{\frac{\alpha}{\beta}(x^\beta - 1)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha x^\beta}{\frac{\alpha}{\beta}(x^\beta - 1)} + \frac{(1 - \beta)}{\frac{\alpha}{\beta}(x^\beta - 1)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\beta x^\beta}{x^\beta - 1} + \frac{\beta(1 - \beta)}{\alpha(x^\beta - 1)} \right) \\ &= \beta < 1. \end{aligned}$$

Damit wurde $\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{xg(x)}{G(x)} \leq \beta < 1$ gezeigt.

Aus Satz 4.7. folgt, dass H subexponentiell ist.

5.4 Loggammaverteilung

Die Loggammaverteilung hat den Wertebereich $(1, \infty)$ und besitzt folgende Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} (\log x)^{\beta-1} x^{-\alpha-1} & \text{für } x \geq 1 \\ 0 & \text{für } x < 1 \end{cases},$$

wobei $\alpha > 0$ und $\beta > 1$. Die Ausfallsrate lässt sich wie folgt berechnen:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{K(x)} & \text{für } x \geq 1 \\ 0 & \text{für } x < 1 \end{cases}, \quad \text{wobei } K(x) = \int_x^\infty f(y) dy.$$

Für $x \geq 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
 K(x) &= \int_x^\infty \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} (\log y)^{\beta-1} y^{-\alpha-1} dy \\
 &\geq \int_x^\infty \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} (\log x)^{\beta-1} y^{-\alpha-1} dy \\
 &= \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} (\log x)^{\beta-1} \frac{1}{\alpha} x^{-\alpha} \\
 &= \frac{x}{\alpha} f(x).
 \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt leitet man sowohl die Ausfallsrate g als auch die Dichtefunktion f ab:

$$g'(x) = \frac{(f'(x)K(x) + f(x)^2)}{K(x)^2} \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} \left((\beta-1) \frac{1}{x} (\log x)^{\beta-2} x^{-\alpha-1} + (\log x)^{\beta-1} (-\alpha-1) x^{-\alpha-2} \right) \\
 &= \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} \left(\frac{(\beta-1)}{x} \frac{(\log x)^{\beta-1}}{(\log x)} x^{-\alpha-1} - (\alpha+1) \frac{x^{-\alpha-1}}{x} (\log x)^{\beta-1} \right) \\
 &= \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} x^{-\alpha-1} (\log x)^{\beta-1} \left(\frac{\beta-1}{x \log x} - \frac{\alpha+1}{x} \right) \\
 &= f(x) \left(\frac{\beta-1}{x \log x} - \frac{\alpha+1}{x} \right).
 \end{aligned}$$

Setzt man $d = e^{\beta-1}$, so ist $f'(x) < 0$ für alle $x > d$ und

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= \frac{(f'(x)K(x) + f(x)^2)}{K(x)^2} \\
 &\leq \frac{(f'(x) \frac{x}{\alpha} f(x) + f(x)^2)}{K(x)^2} \\
 &= \frac{(f(x) \left(\frac{\beta-1}{x \log x} - \frac{\alpha+1}{x} \right) \frac{x}{\alpha} f(x) + f(x)^2)}{K(x)^2} \\
 &= \frac{f(x)^2}{K(x)^2} \left(\frac{\beta-1}{\alpha \log x} - \frac{\alpha+1}{\alpha} + 1 \right) < 0,
 \end{aligned}$$

d.h. die Ausfallsrate g ist monoton fallend auf $[d, \infty)$. Weiters gilt die folgende Abschätzung für $x \geq 1$:

$$xg(x) = x \frac{f(x)}{K(x)} \leq x \frac{f(x)}{\frac{x}{\alpha} f(x)} = \alpha.$$

Aus diesem Ergebnis folgt, dass $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ und

$$\int_0^{\infty} e^{xg(x)} f(x) dx = \int_1^{\infty} e^{xg(x)} f(x) dx \leq \int_1^{\infty} e^{\alpha} f(x) dx = e^{\alpha} < \infty.$$

Satz 4.6. besagt nun, dass die Loggammaverteilung subexponentiell ist.

Um zu zeigen, dass die Verteilungsfunktion H auch subexponentiell ist, verwendet man Satz 4.7.(a). Gesucht ist eine Konstante $L > 0$ mit $xg(x) \leq L$ für alle $x \geq 0$. Wie bereits oben bewiesen wurde, gilt $xg(x) \leq \alpha$ für alle $x \geq 1$, wobei $\alpha > 0$ ist. Indem man die Konstante $L = \alpha$ wählt, ist die Voraussetzung von Satz 4.7. erfüllt, und H ist subexponentiell.

Teil 2

Extremwerttheorie

KAPITEL 6

Die drei Extremwertverteilungen

6.1 Grundlagen

Sei $X_1, X_2, \dots$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten - kurz i.i.d. (engl: independent and identically distributed) - Zufallsvariablen mit einer gemeinsamen Verteilungsfunktion F .

Definition 6.1. *Das Maximum der ersten n Zufallsvariablen wird mit*

$$M_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

bezeichnet, wobei $n \in \mathbb{N}$.

Weiters kann man relativ leicht die Verteilungsfunktion von M_n angeben, die im Folgenden mit F_{M_n} bezeichnet wird.

Lemma 6.1. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$F_{M_n}(x) = F^n(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Es gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F_{M_n}(x) &= \mathbb{P}(M_n \leq x) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x) \\ &\stackrel{(1)}{=} \mathbb{P}(X_1 \leq x) \cdot \mathbb{P}(X_2 \leq x) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(X_n \leq x) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \leq x) \\ &\stackrel{(2)}{=} \prod_{i=1}^n F(x) \\ &= F^n(x) \end{aligned}$$

Bei (1) verwendet man die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen und bei (2) die Tatsache, dass $\mathbb{P}(X_i \leq x) = F(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $i \in \{1, \dots, n\}$. □

Die zentrale Frage in diesem Kapitel ist jene nach der Grenzwertverteilung von M_n . Dazu sind noch folgende Definitionen wichtig:

Definition 6.2. Der *rechte Randpunkt* einer Verteilung F ist definiert als

$$x_R = \sup\{x \mid F(x) < 1\} \quad (\leq \infty).$$

Das heißt: $F(x) < 1$ für alle $x < x_R$ und $F(x) = 1$ für alle $x \geq x_R$.

Definition 6.3. Gegeben seien die Zufallsvariablen X_n für $n \geq 1$ und X mit den Verteilungsfunktionen F_n und F . Die Folge X_n **konvergiert in Verteilung** gegen X , falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, in denen F stetig ist.

Ohne eine Skalierung der M_n ist das Grenzwertverhalten leicht festzustellen.

Für $x < x_R$ folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(M_n \leq x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) = 0.$$

Wenn $x_R < \infty$ folgt für $x \geq x_R$

$$\mathbb{P}(M_n \leq x) = F^n(x) = 1.$$

Somit gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(M_n \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x < x_R \\ 1 & \text{wenn } x \geq x_R \end{cases}$$

Das heißt, die Folge $(M_n)_{n \geq 1}$ konvergiert in Verteilung gegen die Konstante $x_R \leq \infty$. Das ist äquivalent zur Konvergenz von M_n gegen x_R in Wahrscheinlichkeit, d.h. für jedes $\varepsilon \geq 0$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|M_n - x_R| > \varepsilon) = 0$$

Da die Folge $(M_n)_{n \geq 1}$ monoton wachsend ist, folgt auch die fast sichere Konvergenz von M_n :

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = x_R\right) = 1$$

Dies bietet aber noch nicht genug Information, daher versucht man Aussagen über normierte und zentrierte Maxima zu treffen.

Die Problemstellung lautet daher wie folgt:

Unter welchen Bedingungen und geeigneten Folgen $(a_n)_{n \geq 1}$ in $(0, \infty)$ und $(b_n)_{n \geq 1}$ in $\mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{(M_n - b_n)}{a_n} \leq x \right) = G(x)$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$, in dem G stetig ist?

Mit Hilfe des obigen Lemmas kann man dies noch umformulieren:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\frac{(M_n - b_n)}{a_n} \leq x \right) &= \mathbb{P} (M_n \leq a_n x + b_n) \\ &= F^n(a_n x + b_n) \end{aligned}$$

Das heißt, es sind Folgen $(a_n)_{n \geq 1}$ in $(0, \infty)$ und $(b_n)_{n \geq 1}$ in $\mathbb{R}$ und eine Verteilungsfunktion G gesucht, sodass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = G(x)$$

für alle Stetigkeitspunkte $x \in \mathbb{R}$ von G gilt.

Bemerkung. *Der Einfachheit halber wird in weiterer Folge die Menge der Stetigkeitspunkte einer Verteilungsfunktion H mit $\mathcal{C}(H)$ bezeichnet.*

Da in diesem Kapitel die nicht-ausgeartete Verteilungsfunktion eine wichtige Rolle spielt, wird deren Definition an dieser Stelle wiederholt:

Definition 6.4. *Eine Verteilungsfunktion F heißt **ausgeartet**, wenn ein $a \in \mathbb{R}$ existiert mit $F(x) = \mathbb{1}_{[a, \infty)}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Das heißt, die zugrunde liegende Zufallsvariable nimmt genau einen Wert an.*

*Gilt dies nicht, so spricht man von einer **nicht-ausgearteten** Verteilungsfunktion.*

6.2 Satz von Khintchine

Das Ziel in diesem Abschnitt ist die Formulierung und der Beweis des Satzes von Khintchine. Dieser Satz spielt eine wichtige Rolle, um das Fisher-Tippett-Theorem beweisen zu können.

Satz 6.1 (von Khintchine). *Sei $(F_n)_{n \geq 1}$ eine Folge von Verteilungsfunktionen und G eine nicht-ausgeartete Verteilungsfunktion. Es seien $(a_n)_{n \geq 1}$ bzw. $(b_n)_{n \geq 1}$ Folgen in $(0, \infty)$ bzw. in $\mathbb{R}$, sodass Folgendes gilt:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(a_n x + b_n) = G(x) \quad \forall x \in \mathcal{C}(G) \quad (6.1)$$

Für eine nicht-ausgeartete Verteilungsfunktion G_ und Folgen $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ in $(0, \infty)$ und $(\beta_n)_{n \geq 1}$ in $\mathbb{R}$ sind dann äquivalent:*

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\alpha_n x + \beta_n) = G_*(x)$, für alle Stetigkeitspunkte x von G_* .
- (b) Es existieren Konstanten $a \in (0, \infty)$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{a_n} = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_n - b_n}{a_n} = b$.

Weiters gilt:

$$G_*(x) = G(ax + b) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (6.2)$$

Mithilfe dieses Satzes lassen sich in Abhängigkeit von bereits bekannten Konstantenfolgen $(a_n)_{n \geq 1}$ und $(b_n)_{n \geq 1}$ alle weiteren Folgen $(\tilde{a}_n)_{n \geq 1}$ in $(0, \infty)$ und $(\tilde{b}_n)_{n \geq 1}$ in $\mathbb{R}$ bestimmen, für die $F_n(\tilde{a}_n x + \tilde{b}_n)$ gegen eine nicht-ausgeartete Verteilungsfunktion konvergiert.

Um diesen Satz zu beweisen, sind noch einige Resultate über inverse Funktionen nötig.

Definition 6.5. *Sei $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine (nicht notwendig streng) monoton wachsende, rechtsseitig stetige Funktion. Auf dem offenen Intervall $(\inf \varphi, \sup \varphi)$ sei die **inverse Funktion** definiert durch*

$$\varphi^{-1}(y) := \inf M_y,$$

wobei M_y gegeben ist durch $M_y := \{u \mid \varphi(u) \geq y\}$ für jedes $y \in (\inf \varphi, \sup \varphi)$.

Bemerkung. *Der Definitionsbereich von φ^{-1} kann auch ein halboffenes oder abgeschlossenes Intervall sein, je nachdem, ob $\inf\{\varphi(x)\}$ oder $\sup\{\varphi(x)\}$ für ein endliches $x \in \mathbb{R}$ angenommen wird.*

Hilfssatz 6.1. *Sei $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (nicht notwendig streng) monoton wachsend und rechtsseitig stetig und M_y wie in Definition 1.5. Dann gilt: $M_y = [\inf M_y, \infty)$.*

Beweis. Da φ monoton wachsend ist, ist M_y ein nach oben unbeschränktes Intervall.

Es existieren $u_n \in M_y$ mit $u_n \downarrow \inf M_y$. Wegen $u_n \in M_y$ gilt $\varphi(u_n) \geq y$, und da φ rechtsseitig stetig ist, folgt, dass auch $\varphi(\inf M_y) \geq y$, also $\inf M_y \in M_y$.

Damit ergibt sich: $M_y = [\inf M_y, \infty)$. □

Einige wichtige Eigenschaften von inversen Funktionen werden zusammengefasst im folgenden

Lemma 6.2. *Sei $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine (nicht notwendig streng) monoton wachsende, rechtsseitig stetige Funktion.*

(i) *Für Konstanten $a > 0$, b und c aus $\mathbb{R}$ und $H(x) = \varphi(ax + b) - c$ gilt*

$$H^{-1}(y) = a^{-1} (\varphi^{-1}(y + c) - b)$$

(ii) *Für φ^{-1} wie oben definiert, gilt:*

- $\varphi^{-1}(\varphi(x)) \leq x \quad \forall x \text{ mit } \varphi(x) \in (\inf\{\varphi(x)\}, \sup\{\varphi(x)\})$
- $\varphi(\varphi^{-1}(y)) \geq y \quad \forall y \text{ mit } y \in (\inf\{\varphi(x)\}, \sup\{\varphi(x)\})$

(iii) *Wenn φ^{-1} stetig ist, dann ist $\varphi^{-1}(\varphi(x)) = x$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.*

(iv) *Sei G eine nicht-ausgeartete Verteilungsfunktion, dann existieren y_1 und y_2 mit $y_1 < y_2$, sodass gilt:*

$$G^{-1}(y_1) < G^{-1}(y_2).$$

Beweis. (i) Die inverse Funktion ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} H^{-1}(y) &= \inf\{x \mid \varphi(ax + b) - c \geq y\} \\ &= a^{-1} (\inf\{(ax + b) \mid \varphi(ax + b) \geq y + c\} - b) \\ &= a^{-1} (\inf\{z \mid \varphi(z) \geq y + c\} - b) \\ &= a^{-1} (\varphi^{-1}(y + c) - b) \end{aligned}$$

(ii) Es sei φ^{-1} wie oben definiert.

- Wegen $\varphi(x) \geq \varphi(x)$ gilt $x \in M_{\varphi(x)}$ und daher $\varphi^{-1}(\varphi(x)) = \inf M_{\varphi(x)} \leq x$.
- Sei $z = \varphi^{-1}(y)$, d.h. $z = \inf M_y$. Laut Hilfssatz 6.1. gilt $z \in M_y$ und somit $\varphi(z) \geq y$.

(iii) Aus (ii) ist bereits $\varphi^{-1}(\varphi(x)) \leq x$ bekannt.

Angenommen, es gilt strikte Ungleichung: $\varphi^{-1}(\varphi(x)) < x$, d.h. $\inf M_{\varphi(x)} < x$. Daher existiert ein $z \in M_{\varphi(x)}$ mit $z < x$ und $\varphi(z) \geq \varphi(x)$. Da φ monoton wachsend ist, folgt Gleichheit: $\varphi(z) = \varphi(x)$.

Für $y = \varphi(z) = \varphi(x)$ gilt $z \in M_y$ und somit $\varphi^{-1}(y) \leq z$.

Für $y > \varphi(z) = \varphi(x)$ gilt $x \notin M_y$. Aus dem Hilfssatz 6.1. folgt $x < \inf M_y = \varphi^{-1}(y)$. Da $z < x$, hat φ^{-1} eine Sprungstelle in $\varphi(x)$. Das ist aber ein Widerspruch zur Stetigkeit von φ^{-1} . Daraus folgt nun die behauptete Gleichheit: $\varphi^{-1}(\varphi(x)) = x$.

(iv) Da G nicht-ausgeartet ist, existieren $\tilde{x}_1$ und $\tilde{x}_2$ mit $\tilde{x}_1 < \tilde{x}_2$, sodass $0 < G(\tilde{x}_1) = y_1 < G(\tilde{x}_2) = y_2 \leq 1$. Seien $x_1 = G^{-1}(y_1)$ und $x_2 = G^{-1}(y_2)$.

Wegen $x_2 = \inf M_{y_2}$ und $\tilde{x}_1 \notin M_{y_2}$ folgt aus dem Hilfssatz 6.1., dass $\tilde{x}_1 < x_2$ ist, und dies ist äquivalent zu $\tilde{x}_1 < G^{-1}(y_2)$.

Aus (ii) folgt $\tilde{x}_1 \geq G^{-1}(G(\tilde{x}_1)) = G^{-1}(y_1)$. Damit ist $G^{-1}(y_1) < G^{-1}(y_2)$ gezeigt. $\square$

Hilfssatz 6.2. *Ist H eine Verteilungsfunktion, dann ist H höchstens in abzählbar vielen Punkten unstetig.*

Beweis. Sei U_n die Menge aller Punkte $x \in \mathbb{R}$ mit $(H(x) - H(x-)) \geq \frac{1}{n}$, d.h. alle Punkte mit Sprunghöhe $\geq \frac{1}{n}$, wobei $n \in \mathbb{N}$. Da H monoton wachsend ist, ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ die Menge aller Unstetigkeitsstellen von H . Jede Menge U_n kann maximal n Elemente enthalten und ist somit abzählbar. Daraus folgt, dass auch die Vereinigung abzählbar ist. $\square$

Hilfssatz 6.3. *Sind H_1 und H_2 Verteilungsfunktionen, sodass $H_1(x) = H_2(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, in denen sowohl H_1 als auch H_2 stetig sind, dann gilt $H_1(x) = H_2(x)$ bereits für alle $x \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Seien U_1 und U_2 die Unstetigkeitsstellen von H_1 bzw. H_2 . Dann ist $U_1 \cup U_2$ abzählbar.

Sei nun $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Es gibt $x_n \notin U_1 \cup U_2$ mit $x_n \downarrow x$. Damit folgt

$$H_1(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} H_1(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} H_2(x_n) = H_2(x).$$

$\square$

Korollar 6.1. *Wenn G eine nicht-ausgeartete Verteilungsfunktion ist und $a > 0$, $\alpha > 0$, b und β Konstanten aus $\mathbb{R}$ sind, sodass $G(ax + b) = G(\alpha x + \beta)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, dann folgt*

$$a = \alpha \text{ und } b = \beta.$$

Beweis. Man wähle $y_1 < y_2$ und $-\infty < x_1 < x_2 < \infty$ nach Lemma 6.2.(iv) so, dass $x_1 = G^{-1}(y_1)$ und $x_2 = G^{-1}(y_2)$ gilt. Mithilfe Punkt (i) des obigen Lemmas kann man nun die Inversen von $G(ax + b)$ und $G(\alpha x + \beta)$ bilden:

$$a^{-1} (G^{-1}(y) - b) = \alpha^{-1} (G^{-1}(y) - \beta).$$

Wendet man dies auf y_1 und y_2 an, erhält man folgende Gleichungen:

$$(I) \quad a^{-1}(x_1 - b) = \alpha^{-1}(x_1 - \beta) \quad \text{für } y = y_1$$

$$(II) \quad a^{-1}(x_2 - b) = \alpha^{-1}(x_2 - \beta) \quad \text{für } y = y_2$$

Durch weitere Umformung ergibt sich:

$$(I) \quad a^{-1}x_1 - a^{-1}b = \alpha^{-1}x_1 - \alpha^{-1}\beta$$

$$(II) \quad a^{-1}x_2 - a^{-1}b = \alpha^{-1}x_2 - \alpha^{-1}\beta$$

Subtraktion der Gleichung (II) von Gleichung (I) führt zu:

$$a^{-1}(x_1 - x_2) = \alpha^{-1}(x_1 - x_2).$$

Da $(x_1 - x_2) \neq 0$ ist, sieht man mittels Division, dass

$$a = \alpha \quad \text{und} \quad b = \beta.$$

□

Ein weiteres Lemma ist für den Beweis des Satzes von Khintchine hilfreich.

Lemma 6.3. *Seien F_n für $n \geq 1$ und G Verteilungsfunktionen, sodass für alle Stetigkeitspunkte x von G gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = G(x).$$

Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ gilt, dann gilt auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(y_n) = G(y)$$

für alle Punkte $y \in \mathcal{C}(G)$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da G in y stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $G(y + \delta) - G(y) < \varepsilon$ und $G(y) - G(y - \delta) < \varepsilon$. Seien $u \in [y - \delta, y)$ und $v \in (y, y + \delta]$ Stetigkeitspunkte von G .

Es gilt $G(v) - G(y) < \varepsilon \Leftrightarrow G(v) < G(y) + \varepsilon$ und $G(y) - G(u) < \varepsilon \Leftrightarrow G(u) > G(y) - \varepsilon$, da G monoton wachsend ist.

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(u) = G(u)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(v) = G(v)$ existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$, sodass $F_n(u) > G(y) - \varepsilon$ und $F_n(v) < G(y) + \varepsilon$ für alle $n \geq n_1$.

Da $u < y < v$, existiert ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $y_n \in (u, v)$ für $n \geq n_2$.

Sei $n_0 := \max(n_1, n_2)$. Für $n \geq n_0$ gilt:

$$F_n(y_n) \leq F_n(v) < G(y) + \varepsilon \quad \text{und} \quad F_n(y_n) \geq F_n(u) > G(y) - \varepsilon$$

d.h. $|F_n(y_n) - G(y)| < \varepsilon$ und somit $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(y_n) = G(y)$. □

Mit diesen Resultaten kann man nun den Satz von Khintchine beweisen.

Beweis von Satz 6.1. Man setzt folgende Abkürzungen

$$\begin{aligned}\alpha_n' &:= \frac{\alpha_n}{a_n} > 0 \\ \beta_n' &:= \frac{\beta_n - b_n}{a_n} \in \mathbb{R} \\ F_n'(x) &:= F_n(a_n x + b_n)\end{aligned}$$

Somit kann man (6.1) schreiben als

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n'(x) = G(x), \quad (6.3)$$

die Aussage (a) als

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n'(\alpha_n' x + \beta_n') = G_*(x), \quad (6.4)$$

da $F_n(\alpha_n x + \beta_n) = F_n(\alpha_n' a_n x + \beta_n' a_n + b_n) = F_n(a_n(\alpha_n' x + \beta_n') + b_n) = F_n'(\alpha_n' x + \beta_n')$
und die Aussage (b) als

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n' = a \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n' = b. \quad (6.5)$$

(b) $\Rightarrow$ (a) Angenommen es gibt Konstanten $a \in (0, \infty)$ und $b \in \mathbb{R}$, sodass $\alpha_n' \rightarrow a$ und $\beta_n' \rightarrow b$. Nach Voraussetzung gilt auch (6.1) oder in der vereinfachten Notation (6.3):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n'(x) = G(x) \quad \forall x \in \mathcal{C}(G)$$

Mit $y_n := \alpha_n' x + \beta_n'$ und $y := ax + b$ sind die Bedingungen von Lemma 6.3. erfüllt, und es ergibt sich:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n'(\alpha_n' x + \beta_n') = G(ax + b) =: G_*(x)$$

für alle Punkte $x \in \mathcal{C}(G_*)$. Somit erhält man sowohl Aussage (a) als auch (6.2):

$G_*(x) = G(ax + b)$ für alle $x \in \mathcal{C}(G_*)$ bzw. für alle $(ax + b) \in \mathcal{C}(G)$.

Aus Hilfssatz 6.3. folgt mit $H_1(x) = G_*(x)$ und $H_2(x) = G(ax + b)$, dass $G_*(x) = G(ax + b)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(a) $\Rightarrow$ (b) Laut Voraussetzung gilt nun Aussage (a) bzw. mittels einfacher Notation:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n'(\alpha_n' x + \beta_n') = G_*(x)$$

für alle Punkte $x \in \mathcal{C}(G_*)$. Da G_* nicht-ausgeartet ist, gibt es ein Intervall (u, v) mit $0 < G_*(x) < 1$ für $u < x < v$. Man wählt zwei Punkte x_1 und x_2 in (u, v) mit $x_1 \neq x_2$, sodass G_* in x_1 und x_2 stetig ist.

Behauptung:

Die Folge $(\alpha'_n x_1 + \beta'_n)_{n \geq 1}$ ist beschränkt.

Angenommen diese Aussage gilt nicht. Dann würde eine Folge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ existieren, sodass $\lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha'_{n_k} x_1 + \beta'_{n_k}) = \pm \infty$. Sei $G_*(x_1) < \alpha < 1$ und $w \in \mathbb{R}$ so, dass $G(w) > \alpha$ und G in w stetig ist. Es gibt ein n_0 so, dass $F'_n(w) > \alpha$ für $n \geq n_0$. Dies folgt aus (6.3).

Weiters sei k_0 so, dass $\alpha'_{n_k} x_1 + \beta'_{n_k} > u$ für $k \geq k_0$ und k_0 auch so groß, dass $n_{k_0} \geq n_0$.

Dann gilt für alle $k \geq k_0$:

$$F'_{n_k}(\alpha'_{n_k} x_1 + \beta'_{n_k}) \geq F'_{n_k}(u) > \alpha$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F'_n(\alpha'_n x_1 + \beta'_n) = G_*(x_1) < \alpha$$

Auf gleiche Weise kann man zeigen, dass $(\alpha'_n x_2 + \beta'_n)_{n \geq 1}$ beschränkt ist.

Somit ist auch die Folge $((\alpha'_n x_1 + \beta'_n) - (\alpha'_n x_2 + \beta'_n)) = (\alpha'_n (x_1 - x_2))$ beschränkt. Daraus folgt die Beschränktheit von $(\alpha'_n)_{n \geq 1}$. Da $(\alpha'_n x_1 + \beta'_n)$ beschränkt ist, muss es auch $(\beta'_n)_{n \geq 1}$ sein.

Der Satz von Bolzano-Weierstraß besagt, dass es Konstanten a und b aus $\mathbb{R}$ sowie eine Folge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gibt mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha'_{n_k} = a \text{ und } \lim_{k \rightarrow \infty} \beta'_{n_k} = b.$$

Es folgt wieder aus Lemma 6.3. für alle Punkte $(ax + b) \in \mathcal{C}(G)$, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F'_{n_k}(\alpha'_{n_k} x + \beta'_{n_k}) = G(ax + b).$$

Da nach (6.4) $G_*(x) = G(ax + b)$ eine Verteilungsfunktion ist, muss $a > 0$ sein. Sonst wäre G_* konstant oder entartet.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha'_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta'_n = b$.

Angenommen, es gäbe eine andere Folge $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha'_{m_k} = a'$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta'_{m_k} = b'$. Dann würde man

$$G(a'x + b') = G_*(x) = G(ax + b)$$

erhalten. Nach Korollar 6.1. ist $a' = a$ und $b' = b$.

Daher ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha'_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta'_n = b$, und es gilt Aussage (6.2): $G_*(x) = G(ax + b)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. $\square$

6.3 Max-stabile Verteilungen

Das zentrale Resultat in diesem Abschnitt ist der Satz, der die möglichen Grenzwertverteilungen für Maxima von i.i.d. Folgen charakterisiert. Ausgangspunkt sind folgende Definitionen:

Definition 6.6. Sei G eine nicht-ausgeartete Verteilungsfunktion. Diese heißt **max-stabil**, falls für jedes $n = 2, 3, \dots$ Konstanten $a_n > 0$ und b_n aus $\mathbb{R}$ existieren, sodass

$$G^n(a_n x + b_n) = G(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

gilt.

Definition 6.7. Eine Verteilungsfunktion F gehört zum **maximalen Anziehungsbereich** einer Verteilungsfunktion G , wenn Konstanten $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$ existieren, sodass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = G(x) \quad \forall x \in \mathcal{C}(G) \quad (6.6)$$

gilt. Man schreibt dann $F \in \mathcal{D}(G)$.

In dem folgenden Theorem wird unter anderem gezeigt, dass die Grenzwertverteilungen G , die in (6.6) auftreten, mit der Klasse der max-stabilen Verteilungen übereinstimmen.

Theorem 6.1. (i) Eine nicht-ausgeartete Verteilungsfunktion G ist max-stabil genau dann, wenn es eine Folge $(F_n)_{n \geq 1}$ von Verteilungsfunktionen und Folgen $(a_n)_{n \geq 1}$ in $(0, \infty)$ und $(b_n)_{n \geq 1}$ in $\mathbb{R}$ gibt, sodass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(a_{nk}x + b_{nk}) = G^{\frac{1}{k}}(x), \quad (6.7)$$

für jedes $k = 1, 2, \dots$ und $x \in \mathcal{C}(G)$.

(ii) Wenn G nicht-ausgeartet ist, ist $\mathcal{D}(G)$ genau dann nicht leer, wenn G max-stabil ist. Dann folgt: $G \in \mathcal{D}(G)$. Insbesondere stimmt die Klasse von Verteilungsfunktionen, die als Grenzwert in (6.7) auftreten, mit der Klasse der max-stabilen Verteilungsfunktionen überein.

Beweis. (i) $(\Rightarrow)$ Sei nun G max-stabil, das heißt $G^n(a_n x + b_n) = G(x)$ für alle $n \geq 1$ und $x \in \mathbb{R}$, wobei $a_n > 0$ und b_n Konstanten aus $\mathbb{R}$ sind. Mit $F_n := G^n$ gilt

$$F_n(a_{nk}x + b_{nk}) = \left(G^{nk}(a_{nk}x + b_{nk}) \right)^{\frac{1}{k}} = G^{\frac{1}{k}}(x).$$

Damit folgt auch schon die Aussage, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(a_{nk}x + b_{nk}) = G^{\frac{1}{k}}(x) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

($\Leftarrow$) Es wird vorausgesetzt, dass G nicht-ausgeartet ist. Dann ist es auch $G^{\frac{1}{k}}$ für $k \in \mathbb{N}$ nicht. Laut Voraussetzung gilt für alle $k \geq 1$ und $x \in \mathcal{C}(G)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(a_{nk}x + b_{nk}) = G^{\frac{1}{k}}(x).$$

Für $k = 1$ erhält man:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(a_nx + b_n) = G(x),$$

wobei $x \in \mathcal{C}(G)$. Setzt man nun $c_n := a_{nk}$, $d_n := b_{nk}$ und $G_* := G^{1/k}$, dann folgt für $x \in \mathcal{C}(G_*)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(c_nx + d_n) = G_*(x).$$

Somit sind die Bedingungen des Satzes von Khintchine erfüllt, und es folgt für geeignete Konstanten $\alpha_k > 0$ und β_k aus $\mathbb{R}$, dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$G_*(x) = G^{\frac{1}{k}}(x) = G(\alpha_kx + \beta_k).$$

Da somit $G(x) = G^k(\alpha_kx + \beta_k)$ gilt, ist G max-stabil.

(ii) ($\Rightarrow$) Sei $\mathcal{D}(G) \neq 0$ und F eine Verteilungsfunktion mit $F \in \mathcal{D}(G)$. Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_nx + b_n) = G(x)$$

für geeignete Konstanten $a_n > 0$ und b_n aus $\mathbb{R}$ und $x \in \mathcal{C}(G)$. Damit folgt bereits

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^{nk}(a_{nk}x + b_{nk}) = G(x)$$

und somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_{nk}x + b_{nk}) = G^{\frac{1}{k}}(x).$$

Man sieht, dass die Bedingung (6.7) für $F_n := F^n$ erfüllt ist, und daher ist G nach (i) max-stabil.

($\Leftarrow$) Angenommen, G ist max-stabil, d.h. $G^n(a_nx + b_n) = G(x)$ für alle $n \geq 1$ und $x \in \mathbb{R}$, wobei $a_n > 0$ und b aus $\mathbb{R}$ Konstanten sind. Dann folgt sofort, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G^n(a_nx + b_n) = G(x)$$

für $x \in \mathbb{R}$ gilt und somit ist $G \in \mathcal{D}(G)$.

□

Korollar 6.2. Sei G eine max-stabile Verteilungsfunktion. Dann existieren reelle Funktionen

$$a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$b : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R},$$

mit $G^s(a(s)x + b(s)) = G(x)$ für $s > 0$ und $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Da G max-stabil ist, existieren Konstanten a_n in $(0, \infty)$ und b_n aus $\mathbb{R}$, sodass

$$G^n(a_n x + b_n) = G(x), \text{ für alle } n \geq 1.$$

Im Folgenden wird mit $\lceil \cdot \rceil$ die obere Gauß-Klammer bezeichnet. Somit gilt auch:

$$G^{\lceil ns \rceil}(a_{\lceil ns \rceil} x + b_{\lceil ns \rceil}) = G(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und $s > 0$.

Aufgrund der Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lceil ns \rceil} = \frac{1}{s}$$

folgt

$$G^n(a_{\lceil ns \rceil} x + b_{\lceil ns \rceil}) = (G^{\lceil ns \rceil}(a_{\lceil ns \rceil} x + b_{\lceil ns \rceil}))^{\frac{n}{\lceil ns \rceil}} = G^{\frac{n}{\lceil ns \rceil}}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G^{\frac{1}{s}}(x).$$

Für $s = 1$ und $x \in \mathbb{R}$ erhält man:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G^n(a_n x + b_n) = G(x)$$

Setzt man nun $\alpha_n := a_{\lceil ns \rceil}$, $\beta_n := b_{\lceil ns \rceil}$ und $G_* := G^{\frac{1}{s}}$, dann folgt $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G^n(\alpha_n x + \beta_n) = G_*(x)$$

Damit sind die Voraussetzungen des Satzes von Khintchine erfüllt, und es existieren in Abhängigkeit von s geeignete Konstanten $a(s) \in (0, \infty)$ und $b(s) \in \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{\lceil ns \rceil}}{a_n} = a(s) \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{\lceil ns \rceil} - b_n}{a_n} = b(s).$$

Daraus ergeben sich die folgenden Funktionen

$$a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, s \mapsto a(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{\lceil ns \rceil}}{a_n} \text{ und } b : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto b(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{\lceil ns \rceil} - b_n}{a_n},$$

die der gewünschten Bedingung $G(a(s)x + b(s)) = G^{\frac{1}{s}}(x) \Leftrightarrow G^s(a(s)x + b(s)) = G(x)$ für jedes x aus $\mathbb{R}$ und $s > 0$ entsprechen. $\square$

Folgende Definition ist im Bereich der Extremwerttheorie weit verbreitet:

Definition 6.8. Seien H_1 und H_2 Verteilungsfunktionen. Man sagt, H_1 und H_2 sind **vom selben Typ**, falls geeignete Konstanten $a > 0$ und b aus $\mathbb{R}$ existieren mit

$$H_2(x) = H_1(ax + b), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung. (i) Mit dieser Definition kann man max-stabile Verteilungsfunktionen auch folgendermaßen charakterisieren:

Eine nicht-ausgeartete Verteilungsfunktion G heißt max-stabil, wenn die Verteilungsfunktion G^n für jedes $n = 2, 3, \dots$ vom selben Typ ist wie G .

(ii) Aus dem Satz von Khintchine kann man weiters folgern:

Sei $(F_n)_{n \geq 1}$ eine Folge von Verteilungsfunktionen und gilt sowohl

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(a_n x + b_n) = G_1(x), \quad \forall x \in \mathcal{C}(G_1)$$

als auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\alpha_n x + \beta_n) = G_2(x), \quad \forall x \in \mathcal{C}(G_2)$$

für nicht-ausgeartete Verteilungsfunktionen G_1 und G_2 , dann sind G_1 und G_2 vom selben Typ.

Damit ist die Grenzwertverteilung von normierten und zentrierten Maxima, d.h. von $\left(\frac{M_n - b_n}{a_n}\right)$ für $n \rightarrow \infty$, eindeutig bestimmt bis auf „Typ-Gleichheit“ - sofern diese existiert.

Korollar 6.3. Seien H_1 und H_2 zwei nicht-ausgeartete Verteilungsfunktionen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) H_1 und H_2 sind vom selben Typ.

(ii) Es gilt: $\mathcal{D}(H_1) = \mathcal{D}(H_2)$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Da H_1 und H_2 vom selben Typ sind, existieren Konstanten $a > 0$ und b aus $\mathbb{R}$, sodass $H_2(x) = H_1(ax + b)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, gilt. Sei nun $F \in \mathcal{D}(H_1)$. Das heißt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = H_1(x), \quad \forall x \in \mathcal{C}(H_1).$$

Indem man $\alpha_n := \frac{a}{a_n}$ und $\beta_n := \frac{b}{a_n} + b_n$ setzt, ist die Aussage (b) des Satzes von Khintchine erfüllt, und daraus folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(\alpha_n x + \beta_n) = H_2(x), \quad \forall x \in \mathcal{C}(H_2),$$

wobei $H_2(x) = H_1(ax + b)$ ist. Somit gilt: $F \in \mathcal{D}(H_2)$.

Analog kann man zeigen, dass $F \in \mathcal{D}(H_2)$ die Aussage $F \in \mathcal{D}(H_1)$ impliziert.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $F \in \mathcal{D}(H_1)$ und $F \in \mathcal{D}(H_2)$. Das heißt, es gibt geeignete Konstanten $a_n > 0$, $\alpha_n > 0$, b_n und β_n aus $\mathbb{R}$, sodass gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = H_1(x) \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(\alpha_n x + \beta_n) = H_2(x).$$

Aus dem Satz von Khintchine folgt, dass $H_2(x) = H_1(ax + b)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, und somit sind H_1 und H_2 vom selben Typ. $\square$

6.4 Fisher-Tippett-Theorem

Mit Hilfe des Fisher-Tippett-Theorems kann man die „Extremwertverteilungen“, d.h. die nicht-ausgearteten Verteilungen G , die als Grenzwert in

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = G(x), \forall x \in \mathcal{C}(G)$$

für geeignete Folgen $(a_n)_{n \geq 1}$ in $(0, \infty)$ und $(b_n)_{n \geq 1}$ in $\mathbb{R}$ auftreten, genau beschreiben.

Der Satz besagt, dass Extremwertverteilungen bis auf Typgleichheit die Form der Fréchet-, Gumbel- oder Weibull-Verteilung haben.

Der Beweis erfolgt in zwei Schritten. Der erste Schritt wurde bereits im obigen Abschnitt gezeigt: Aus Theorem 6.1. ist bekannt, dass die Extremwertverteilungen genau die max-stabilen Verteilungen sind.

Im nächsten Schritt wird gezeigt, dass jede max-stabile Verteilung bis auf Typgleichheit mit einer von drei möglichen Verteilungen übereinstimmt. Dies wird bereits im nächsten Satz bewiesen.

Dafür ist jedoch noch folgender Hilfssatz nötig:

Hilfssatz 6.4. *Sei G eine nicht-ausgeartete, max-stabile Verteilungsfunktion. Gegeben sei folgende Funktion:*

$$\psi : D \rightarrow \mathbb{R},$$

$$x \mapsto -\log(-\log G(x))$$

mit dem Definitionsbereich $D = \{x \in \mathbb{R} : G(x) \in (0, 1)\}$. Dann besitzt diese eine inverse Funktion ψ^{-1} im Sinne der Definition 6.5. auf $\mathbb{R}$.

Beweis. Damit eine inverse Funktion gemäß Definition 6.5. existiert, muss ψ drei Eigenschaften erfüllen:

- (1) ψ muss (nicht notwendig streng) monoton wachsend sein
- (2) ψ muss eine rechtsseitig stetige Funktion sein
- (3)
 - $\inf_{x \in D} \psi(x) = -\infty$
 - $\sup_{x \in D} \psi(x) = \infty$

Nun ist nachzuweisen, dass ψ die obigen Eigenschaften besitzt:

- (1) G ist als nicht-ausgeartete Verteilungsfunktion monoton wachsend. Die Logarithmus-Funktion ist selbst streng monoton wachsend. Somit ist ψ (nicht notwendig) streng monoton wachsend.

(2) G ist rechtsseitig stetig und der Logarithmus sogar stetig. Damit ist ψ als Verknüpfung rechtsseitig stetig.

- (3) • Die Aussage $\inf_{x \in D} \psi(x) = -\infty$ ist bewiesen, sobald gezeigt ist, dass es kein kleinstes Element $\tilde{x}$ in D gibt mit $G(\tilde{x}) > 0$. Dann folgt sofort:

$$\inf_{x \in D} G(x) = 0 \text{ und somit } \inf_{x \in D} \psi(x) = -\infty.$$

Angenommen, es existiert ein $\tilde{x} \in D$ mit $G(\tilde{x}) > 0$, sodass für Folgen $(x_n)_{n \geq 1}$ mit $x_n \uparrow \tilde{x}$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} G(x_n) = 0$.

Da G max-stabil ist, folgt für $n = 2$ und geeignete Konstanten $a > 0$ und b aus $\mathbb{R}$:

$$G^2(ax + b) = G(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Nun werden drei Fälle unterschieden:

Für $a\tilde{x} + b < \tilde{x}$ gilt

$$0 < G(\tilde{x}) = G^2(a\tilde{x} + b) = 0,$$

und somit liegt ein Widerspruch vor.

Für $a\tilde{x} + b > \tilde{x} \Leftrightarrow \tilde{x} > \frac{\tilde{x}-b}{a}$ gilt

$$0 < G^2(\tilde{x}) = G^2\left(a \cdot \frac{\tilde{x}-b}{a} + b\right) = G\left(\frac{\tilde{x}-b}{a}\right) = 0.$$

Auch hier gibt es einen Widerspruch.

Für $a\tilde{x} + b = \tilde{x}$ gilt:

$$G^2(\tilde{x}) = G^2(a\tilde{x} + b) = G(\tilde{x}) > 0.$$

Damit diese Gleichung gültig ist, müsste $G(\tilde{x}) = 1$ und somit ausgeartet sein. Auch dies ist ein Widerspruch.

Daher kann D kein kleinstes Element $\tilde{x}$ mit den oben geforderten Eigenschaften enthalten, und die Aussage $\inf_{x \in D} G(x) = 0$ ist gezeigt.

- Um $\sup_{x \in D} \psi(x) = \infty$ zu zeigen, geht man analog vor. Es wird bewiesen, dass

$$\sup_{x \in D} G(x) = 1 \text{ und damit } \sup_{x \in D} \psi(x) = \infty \text{ gilt.}$$

Angenommen, es existiert ein $x' \notin D$ mit $G(x') = 1$, sodass für Folgen $(x_n)_{n \geq 1}$ mit $x_n \uparrow x'$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} G(x_n) < 1$.

Aufgrund der Max-Stabilität gilt wieder:

$$G^2(ax + b) = G(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Auch hier werden drei Fälle unterschieden:

Für $ax' + b < x'$ gilt

$$1 = G(x') = G^2(ax' + b) < 1,$$

und somit liegt ein Widerspruch vor.

Für $ax' + b > x' \Leftrightarrow x' > \frac{x'-b}{a}$ gilt

$$1 = G^2(x') = G^2\left(a \cdot \frac{x'-b}{a} + b\right) = G\left(\frac{x'-b}{a}\right) < 1,$$

und auch diese Gleichung stellt einen Widerspruch dar.

Für $ax' + b = x'$ wählt man eine Folge x_n mit $x_n \uparrow x'$ und es folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G^2(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} G^2(ax_n + b) = \lim_{n \rightarrow \infty} G(x_n) < 1.$$

Auch hier müsste G ausgeartet sein, was aber erneut einen Widerspruch zur Voraussetzung darstellt.

Somit kann die Menge D kein größtes Element x' mit den obigen Eigenschaften enthalten, und daher gilt $\sup_{x \in D} G(x) = 1$.

Zusammenfassend wurde gezeigt, dass ψ auf $\mathbb{R}$ eine inverse Funktion ψ^{-1} besitzt. □

Satz 6.2. *Sei G eine nicht-ausgeartete Verteilungsfunktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) G ist max-stabil

(b) G hat bis auf Typ-Gleichheit die Gestalt von einer der drei folgenden Verteilungsfunktionen:

(i) **Gumbel-Verteilung:**

$$\Lambda(x) = \exp(-e^{-x}), \text{ für } x \in (-\infty, \infty)$$

(ii) **Fréchet-Verteilung:** Für $\alpha > 0$ ist

$$\Phi_\alpha(x) = \exp(-x^{-\alpha}) \cdot \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}) & \text{wenn } x > 0 \end{cases}$$

(iii) **Weibull-Verteilung:** Für $\alpha > 0$ ist

$$\Psi_\alpha(x) = \exp(-(-x)^\alpha) \cdot \mathbb{1}_{(-\infty, 0)}(x) + \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^\alpha) & \text{wenn } x < 0 \\ 1 & \text{wenn } x \geq 0 \end{cases}$$

Beweis. $(b) \Rightarrow (a)$: In diesem Schritt ist zu zeigen, dass die Gumbel-, Fréchet- und Weibull-Verteilung max-stabil sind, d.h. für jedes $n = 2, 3, \dots$ soll es Konstanten $a_n > 0$ und b_n aus $\mathbb{R}$ geben mit

$$G^n(a_n x + b_n) = G(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

ad (i): Wählt man für die Konstanten $a_n = 1$ und $b_n = \log(n)$, so gilt $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geq 2$:

$$\Lambda(x + \log(n))^n = (\exp(-e^{-x-\log(n)}))^n = \left(\exp\left(-\frac{e^{-x}}{n}\right)\right)^n = (\exp(-e^{-x})) = \Lambda(x).$$

Das heißt, die Gumbel-Verteilung ist max-stabil.

ad (ii): Wählt man in diesem Fall für die Konstanten $a_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$ und $b_n = 0$, so gilt $\forall x \in \mathbb{R}$ und $\forall n \geq 2$:

$$\begin{aligned}\Phi_\alpha \left(n^{1/\alpha} x \right)^n &= \left(\exp \left(- \left(n^{1/\alpha} x \right)^{-\alpha} \right) \right)^n \cdot \mathbb{1}_{(0, \infty)}(n^{1/\alpha} x) \\ &= \left(\exp \left(- \frac{x^{-\alpha}}{n} \right) \right)^n \cdot \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x) \\ &= \left(\exp(-x^{-\alpha}) \right) \cdot \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x) = \Phi_\alpha(x)\end{aligned}$$

Somit ist auch die Fréchet-Verteilung max-stabil.

ad (iii): Hier wählt man für die Konstanten $a_n = n^{-\frac{1}{\alpha}}$ und $b_n = 0$. Dann gilt $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \geq 2$:

$$\begin{aligned}\Psi_\alpha(n^{-1/\alpha}x)^n &= \left(\exp \left(- \left(- (n^{-1/\alpha}x) \right)^\alpha \right) \right)^n \cdot \mathbb{1}_{(-\infty, 0)}(n^{-1/\alpha}x) + \mathbb{1}_{[0, \infty)}(n^{-1/\alpha}x) \\ &= \left(\exp \left(- \left((-x)^\alpha n^{-1} \right) \right) \right)^n \cdot \mathbb{1}_{(-\infty, 0)}(x) + \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x) \\ &= \left(\exp(-(-x)^\alpha) \right) \cdot \mathbb{1}_{(-\infty, 0)}(x) + \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x) = \Psi_\alpha(x)\end{aligned}$$

Auch die Weibull-Verteilung ist max-stabil.

(a) $\Rightarrow$ (b): In diesem Beweisschritt wird auf die Funktionalgleichung von Korollar 6.2.

$$G^s(a(s)x + b(s)) = G(x), \quad s > 0$$

für reelle Funktionen

$$a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad \text{und} \quad b : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

zurückgegriffen und gezeigt, dass die einzige Lösung dieser Gleichung zum Typ der Gumbel-, Fréchet- oder Weibull-Verteilung gehört. Dazu geht man von der bereits oben erwähnten Funktion aus:

$$\psi : D \rightarrow \mathbb{R},$$

$$x \mapsto -\log(-\log G(x))$$

mit dem Definitionsbereich $D = \{x \in \mathbb{R} : G(x) \in (0, 1)\}$.

Laut Hilfssatz 6.4. besitzt die Funktion ψ eine inverse Funktion ψ^{-1} auf $\mathbb{R}$. Um die Funktion ψ^{-1} genauer zu beschreiben, nimmt man die Funktionalgleichung

$$G^s(a(s)x + b(s)) = G(x)$$

von Korollar 6.2. und setzt diese in $\psi(x)$ ein:

$$\begin{aligned}\psi(x) &= -\log(-\log G(x)) \\ &= -\log(-\log G^s(a(s)x + b(s))) \\ &= -\log(-\log(G(a(s)x + b(s)).s)) \\ &= \psi(a(s)x + b(s)) - \log(s)\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich mit Hilfe von Lemma 6.2.(i) für $a = a(s)$, $b = b(s)$ und $c = \log(s)$:

$$\psi^{-1}(y) = \frac{1}{a(s)}(\psi^{-1}(y + \log(s)) - b(s)), \quad \forall y \in \mathbb{R} \text{ und } s > 0.$$

Für $y = 0$ erhält man daraus

$$\psi^{-1}(0) = \frac{1}{a(s)}(\psi^{-1}(\log(s)) - b(s)), \quad \text{für } s > 0.$$

Subtrahiert man nun die Gleichung $\psi^{-1}(0)$ von $\psi^{-1}(y)$, so folgt:

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(y) - \psi^{-1}(0) &= \frac{1}{a(s)}(\psi^{-1}(y + \log(s)) - b(s)) - \frac{1}{a(s)}(\psi^{-1}(\log(s)) - b(s)) \\ &= \frac{1}{a(s)}(\psi^{-1}(y + \log(s)) - \psi^{-1}(\log(s))) \end{aligned}$$

Durch Umformung erhält man

$$a(s)(\psi^{-1}(y) - \psi^{-1}(0)) = (\psi^{-1}(y + \log(s)) - \psi^{-1}(\log(s))).$$

Indem man die Abkürzungen $z := \log(s)$, $\tilde{a}(z) := a(e^z)$ und $f(y) := \psi^{-1}(y) - \psi^{-1}(0)$ setzt, folgt:

$$f(y + z) - f(z) = f(y)\tilde{a}(z), \quad \forall y, z \in \mathbb{R} \quad (6.8)$$

Von dieser Gleichung werden nun die Lösungen gesucht, wobei man auch hier eine Fallunterscheidung machen muss:

1.Fall: $\tilde{a}(z) \equiv 1$

Dann vereinfacht sich Gleichung (6.8) zu: $f(y + z) - f(z) = f(y)$, $\forall y, z \in \mathbb{R}$. Die einzige monoton wachsende Lösung ist bis auf Konstanten eindeutig und hat die Form

$$f(y) = cy, \quad \text{für eine Konstante } c > 0.$$

Die Konstante c muss größer Null sein, da sonst $f(y) \equiv 0$ und somit ψ^{-1} konstant und G daher entartet wäre.

Da laut Definition $f(y) = \psi^{-1}(y) - \psi^{-1}(0)$ ist, sieht man mittels Umformung, dass

$$\psi^{-1}(y) = cy + \psi^{-1}(0)$$

gilt und ψ^{-1} stetig ist. In weiterer Folge definiert man $d := \psi^{-1}(0)$. Nun kann man Lemma 6.2.(iii) anwenden und erhält:

$$x = \psi^{-1}(\psi(x)) = c\psi(x) + d.$$

Daraus folgt

$$\psi(x) = \frac{x-d}{c}.$$

Man setzt dieses Ergebnis gleich mit $\psi(x) = -\log(-\log G(x))$:

$$\frac{x-d}{c} = -\log(-\log G(x))$$

$$\Leftrightarrow \exp\left(-\frac{x-d}{c}\right) = -\log G(x)$$

$$\Leftrightarrow \exp\left(-e^{-\frac{x-d}{c}}\right) = G(x)$$

$$\Leftrightarrow \exp\left(-e^{-\alpha x + \beta}\right) = G(x)$$

mit $\alpha = \frac{1}{c}$ und $\beta = \frac{d}{c}$. Man sieht, dass G vom Typ der Gumbel-Verteilung ist.

2.Fall: $\tilde{a}(z) \neq 1$, d.h. $\exists z_0 \in \mathbb{R}$, sodass $\tilde{a}(z_0) \neq 1$.

Vertauscht man in (6.8) y und z , so erhält man

$$f(z+y) - f(y) = f(z)\tilde{a}(y), \quad \forall y, z \in \mathbb{R}.$$

Nun zieht man dieses Ergebnis von Gleichung (6.8) ab:

$$f(y) - f(z) = f(y)\tilde{a}(z) - f(z)\tilde{a}(y)$$

$$\Leftrightarrow f(y)(1 - \tilde{a}(z)) = f(z)(1 - \tilde{a}(y)), \quad \forall y, z \in \mathbb{R}$$

Für $z = z_0$ und $d := \frac{f(z_0)}{1 - \tilde{a}(z_0)}$ ergibt sich:

$$f(y) = \frac{f(z_0)}{1 - \tilde{a}(z_0)} (1 - \tilde{a}(y)) = d(1 - \tilde{a}(y)) \quad (6.9)$$

Dabei ist $d \neq 0$, da sonst $f(y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}$ und G somit entartet wäre. Wenn man Gleichung (6.9) in Gleichung (6.8) einsetzt, dann folgt:

$$d(1 - \tilde{a}(y+z)) - d(1 - \tilde{a}(z)) = d(1 - \tilde{a}(y))\tilde{a}(z)$$

Im nächsten Schritt dividiert man durch $d \neq 0$:

$$(1 - \tilde{a}(y+z)) - (1 - \tilde{a}(z)) = (1 - \tilde{a}(y))\tilde{a}(z)$$

$$\Leftrightarrow \tilde{a}(z) - \tilde{a}(y+z) = \tilde{a}(z) - \tilde{a}(y)\tilde{a}(z)$$

$$\Leftrightarrow \tilde{a}(y+z) = \tilde{a}(y)\tilde{a}(z), \quad \forall y, z \in \mathbb{R}$$

Da die Funktion $\tilde{a}(z) = a(e^z)$ nur positive Werte annimmt, kann man in obiger Gleichung beide Seiten logarithmieren:

$$\log(\tilde{a}(y+z)) = \log(\tilde{a}(y)) + \log(\tilde{a}(z))$$

Als Lösung dieser Gleichung erhält man:

$$\log(\tilde{a}(y)) = cy, \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

mit $c = \log(\tilde{a}(1)) = \log(a^e)$. Durch Anwendung der Exponentialfunktion erhält man:

$$\tilde{a}(y) = \exp(cy), \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

wobei $c \neq 0$, da sonst $\tilde{a} \equiv 1$ ein Widerspruch zur Voraussetzung wäre.

Die Gleichung (6.9) kann man nun folgendermaßen umformulieren:

$$\psi^{-1}(y) = a + d(1 - \exp(cy)),$$

mit $a := \psi^{-1}(0)$. Da $\psi(x) = -\log(-\log G(x))$ monoton wachsend ist, gilt dies auch für ψ^{-1} . Daher folgt:

- Für $c > 0$ muss $d < 0$ sein.
- Umgekehrt: für $c < 0$ muss $d > 0$ sein.

Da ψ^{-1} eine stetige Funktion ist, kann an dieser Stelle Lemma 6.2.(iii) angewendet werden, und für die Funktion $\psi(x)$ wird deren Definition eingesetzt:

$$\begin{aligned} x = \psi^{-1}(\psi(x)) &= a + d(1 - \exp(c\psi(x))) \\ &= a + d(1 - (-\log G(x))^{-c}) \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann man weiter umformen:

$$G(x) = \exp\left(-\left(1 - \frac{x-a}{d}\right)^{-\frac{1}{c}}\right)$$

Das gilt für alle x mit $G(x) \in (0, 1)$. Nun wird wieder unterschieden:

- Für $c > 0$ setzt man $\gamma := \frac{1}{c} > 0$. Mit $\alpha := -\frac{1}{d} > 0$ und $\beta := 1 + \frac{a}{d}$ ergibt sich:

$$G(x) = \exp(-(\alpha x + \beta)^{-\gamma}), \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } 0 < G(x) < 1.$$

Diese Bedingung ist für jene $x \in \mathbb{R}$ erfüllt, für die $\alpha x + \beta > 0$ gilt.

Da G monoton wachsend ist, erhält man folgendes Resultat:

$$G(x) = \exp(-(\alpha x + \beta)^{-\gamma}) \cdot \mathbf{1}_{(0, \infty)}(\alpha x + \beta)$$

Somit ist G vom Typ der Fréchet-Verteilung.

- Für $c < 0$ sei nun $\delta := -\frac{1}{c} > 0$. Mit $\alpha := \frac{1}{d} > 0$ und $\beta := -(1 + \frac{a}{d})$ folgt:

$$G(x) = \exp(-(-(\alpha x + \beta)^\delta)), \text{ für alle } x \in \mathbb{R}, \text{ für die } 0 < G(x) < 1.$$

Diese Bedingung ist für jene $x \in \mathbb{R}$ erfüllt, für die $\alpha x + \beta < 0$ gilt.

Da G monoton wachsend ist, folgt:

$$G(x) = \exp(-(-(\alpha x + \beta)^\delta)) \cdot \mathbf{1}_{(-\infty, 0)}(\alpha x + \beta) + \mathbf{1}_{[0, \infty)}(\alpha x + \beta)$$

In diesem Fall ist G vom Typ der Weibull-Verteilung.

□

Damit lässt sich nun das Fisher-Tippett-Theorem leicht beweisen.

Satz 6.3 (Fisher-Tippett-Theorem). Für $n \in \mathbb{N}$ sei $M_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, wobei $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ i.i.d. Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilungsfunktion F sind. Für eine nicht-ausgeartete Verteilungsfunktion G sind äquivalent:

- (a) G ist eine Extremwertverteilung, d.h. es existieren Folgen $(a_n)_{n \geq 1}$ in $(0, \infty)$ und $(b_n)_{n \geq 1}$ in $\mathbb{R}$, sodass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = G(x)$$

für jedes $x \in \mathcal{C}(G)$ gilt.

- (b) G ist vom Typ der Gumbel-, Fréchet- oder Weibull-Verteilung.

Beweis. Sei G eine nicht-ausgeartete Verteilungsfunktion. Nach Theorem 6.1.(ii) ist der Anziehungsbereich von G genau dann nicht leer, wenn G max-stabil ist. Laut obigem Satz ist G genau dann max-stabil, wenn G vom Typ der Gumbel-, Fréchet-, oder Weibull-Verteilung ist. $\square$

Bemerkung. (1) Die Gumbel-, Fréchet- und Weibull-Verteilung werden häufig als „die drei Extremwertverteilungen“ bezeichnet.

- (2) Wie aus dem Fisher-Tippett-Theorem hervorgeht, sind die drei Extremwertverteilungen (Gumbel-, Fréchet- und Weibull-Verteilung) selbst stetig. Daher braucht in weiterer Folge bei der Konvergenz in Verteilung nicht mehr auf Stetigkeitspunkte der Grenzwertverteilung geachtet werden.

Im Fisher-Tippett-Theorem wird davon ausgegangen, dass $\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \right)_{n \geq 1}$ in Verteilung gegen eine nicht-ausgeartete Grenzwertverteilung G konvergiert. Von dieser Grenzwertverteilung G wird dann gezeigt, von welchem Typ sie ist.

Jedoch liegt nicht jede beliebige Verteilungsfunktion im Anziehungsbereich einer nicht ausgearteten Extremwertverteilung, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel. Sei F eine Verteilungsfunktion mit dem rechten Randpunkt $x_R < \infty$. Existiert ein $\rho < 1$ und eine Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ mit $x_n \uparrow x_R$, sodass $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \rho$, dann kann F nicht im Anziehungsbereich der Gumbel-, Fréchet- oder Weibull-Verteilung sein.

Angenommen, dies wäre aber der Fall. Dann würde eine nicht-ausgeartete Verteilungsfunktion G mit $F \in \mathcal{D}(G)$ existieren, d.h. für geeignete Konstanten $a_n > 0$ und b_n aus $\mathbb{R}$ würde gelten:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = G(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Da F rechtsseitig stetig ist, gilt $F(x_R) = 1$, und somit würde für alle $n \in \mathbb{N}$ folgen:

$$F^n(a_n x + b_n) \begin{cases} = 1 & \text{wenn } x \geq \frac{x_R - b_n}{a_n} \\ \leq \rho^n & \text{wenn } x < \frac{x_R - b_n}{a_n} \end{cases}$$

Wegen $F \in \mathcal{D}(G)$ würde somit für jedes $x \in \mathbb{R}$ gelten:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_R - b_n}{a_n} \\ 0 & \text{wenn } x < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_R - b_n}{a_n} \end{cases}$$

Daher wäre G entartet, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

6.5 Anwendungen des Fisher-Tippett-Theorems

In diesem Abschnitt werden zwei Beispiele dafür gegeben, wie man das Fisher-Tippett-Theorem anwenden kann.

6.5.1 Beispiel 1

Es seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige und $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilte Zufallsvariablen. Die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung ist gegeben durch

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Für $n \geq 1$ bildet man die Konstantenfolge

$$a_n = (2 \log(n) - \log(4\pi \log(n)))^{-\frac{1}{2}},$$

wobei $(a_n)_{n \geq 1} \in (0, \infty)$ ist. Weiter setzt man $b_n = \frac{1}{a_n}$. In diesem Beispiel besitzt $\left(\frac{M_n}{a_n} - \frac{1}{a_n^2}\right)$ die Verteilungsfunktion $\Phi\left(a_n t + \frac{1}{a_n}\right)^n$. Nun möchte man den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{(M_n - b_n)}{a_n} \leq t\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi\left(a_n t + \frac{1}{a_n}\right)^n$$

berechnen. Dazu sei

$$r(x) := -2 \log(x) - \log(4\pi) - \log(-\log(x)).$$

Für $x = \frac{1}{n}$ ist $a_n = r\left(\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}$ und $\Phi\left(a_n t + \frac{1}{a_n}\right)^n = \Phi\left(\frac{t}{\sqrt{r(x)}} + \sqrt{r(x)}\right)^{\frac{1}{x}} =: H(x)$.

In weiterer Folge braucht man das folgende Resultat:

$$\lim_{x \downarrow 0} r(x) = \lim_{x \downarrow 0} \left(-2 \log(x) \left(1 + \frac{\log(4\pi) + \log(-\log(x))}{2 \log(x)} \right) \right) = \infty,$$

wobei

$$\lim_{x \downarrow 0} \left(\frac{\log(4\pi)}{2 \log(x)} + \frac{\log(-\log(x))}{2 \log(x)} \right) = 0.$$

Dies sieht man, indem man $y = -\log(x)$ setzt und die Regel von de l'Hospital anwendet:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} -\frac{\log(y)}{2y} = \lim_{y \rightarrow \infty} -\frac{\frac{1}{y}}{\frac{2}{y}} = \lim_{y \rightarrow \infty} -\frac{1}{2y} = 0.$$

Um den Grenzwert von $\log(H(x)) = \frac{1}{x} \log \Phi\left(\frac{t}{\sqrt{r(x)}} + \sqrt{r(x)}\right)$ zu erhalten, wendet man auch hier die Regel von de l'Hospital an:

$$\begin{aligned} \lim_{x \downarrow 0} \log(H(x)) &= \lim_{x \downarrow 0} \frac{\Phi'\left(\frac{t}{\sqrt{r(x)}} + \sqrt{r(x)}\right) \left(-\frac{tr'(x)}{2r(x)^{3/2}} + \frac{r'(x)}{2r(x)^{1/2}}\right)}{\Phi\left(\frac{t}{\sqrt{r(x)}} + \sqrt{r(x)}\right)} \\ &\stackrel{(1)}{=} \lim_{x \downarrow 0} \Phi'\left(\frac{t}{\sqrt{r(x)}} + \sqrt{r(x)}\right) \cdot \frac{r'(x)}{2r(x)^{1/2}} \left(1 - \frac{t}{r(x)}\right) \\ &\stackrel{(2)}{=} \lim_{x \downarrow 0} \Phi'\left(\frac{t}{\sqrt{r(x)}} + \sqrt{r(x)}\right) \cdot \frac{r'(x)}{2r(x)^{1/2}}, \end{aligned}$$

wobei in (1) eingegangen ist, dass $\lim_{x \downarrow 0} \Phi\left(\frac{t}{\sqrt{r(x)}} + \sqrt{r(x)}\right) = 1$ ist, und in (2), dass $\lim_{x \downarrow 0} r(x) = \infty$ gilt. Nun ist ja

$$\Phi'\left(\frac{t}{\sqrt{r(x)}} + \sqrt{r(x)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{r(x)} + 2t + r(x)\right)}$$

und

$$r'(x) = -\frac{2}{x} - \frac{1}{x \log(x)}.$$

Man setzt diese Ergebnisse oben ein

$$\lim_{x \downarrow 0} \log(H(x)) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{r(x)} + 2t + r(x)\right)} \cdot \left(\frac{-\frac{2}{x} - \frac{1}{x \log(x)}}{2r(x)^{1/2}}\right)$$

und logarithmiert ein zweites Mal

$$\lim_{x \downarrow 0} \log(-\log(H(x))) = \lim_{x \downarrow 0} \left(\log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{t^2}{2r(x)} - t - \frac{r(x)}{2} + \log\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x \log(x)}\right) - \log\left(2r(x)^{\frac{1}{2}}\right) \right)$$

Da $\lim_{x \downarrow 0} r(x) = \infty$ und $\lim_{x \downarrow 0} \log(x) = -\infty$ gilt, folgt $\lim_{x \downarrow 0} \frac{t^2}{2r(x)} = 0$ und $\lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{\log(x)} = 0$ und somit:

$$= \lim_{x \downarrow 0} \left(-\frac{1}{2} \log(2\pi) - t - \frac{r(x)}{2} + \log(2) + \log\left(\frac{1}{x}\right) - \log(2) - \frac{1}{2} \log(r(x)) \right)$$

Man kürzt $\log(2)$ und setzt $r(x)$ ein:

$$= \lim_{x \downarrow 0} \left(-\frac{1}{2} \log(2\pi) - t + \log(x) + \frac{\log(4\pi)}{2} + \frac{1}{2} \log(-\log(x)) + \log\left(\frac{1}{x}\right) \right) - \\ - \frac{1}{2} \lim_{x \downarrow 0} \left(-2 \log(x) \left(1 + \frac{\log(4\pi) + \log(-\log(x))}{2 \log(x)} \right) \right)$$

Da $\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log(x)$ ist, kann man $\log(x)$ und $\log\left(\frac{1}{x}\right)$ kürzen.

Weiters kann man zusammenfassen: $-\frac{1}{2} \log(2\pi) + \frac{1}{2} \log(4\pi) = \frac{1}{2} \log(2)$.

$$= \lim_{x \downarrow 0} \left(\frac{1}{2} \log(2) - t + \frac{1}{2} \log(-\log(x)) - \frac{1}{2} \log(2) - \frac{1}{2} \log(-\log(x)) \right) - \\ - \frac{1}{2} \lim_{x \downarrow 0} \log \left(\left(1 + \frac{\log(4\pi) + \log(-\log(x))}{2 \log(x)} \right) \right)$$

Der letzte Summand geht gegen Null, da $\lim_{x \downarrow 0} \left(\frac{\log(4\pi)}{2 \log(x)} + \frac{\log(-\log(x))}{2 \log(x)} \right) = 0$. Wie zu erkennen ist, kürzen sich alle Terme bis auf $-t$ weg. Es folgt

$$\lim_{x \downarrow 0} \log(-\log(H(x))) = -t$$

und somit

$$\lim_{x \downarrow 0} (-\log(H(x))) = e^{-t} \\ \lim_{x \downarrow 0} (\log(H(x))) = -e^{-t} \\ \lim_{x \downarrow 0} H(x) = e^{-e^{-t}}.$$

Das heißt, $\lim_{x \downarrow 0} \Phi \left(\frac{t}{\sqrt{r(x)}} + \sqrt{r(x)} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{-e^{-t}}$ oder $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi \left(a_n t + \frac{1}{a_n} \right)^n = e^{-e^{-t}}$.

Damit wurde gezeigt, dass die Grenzwertverteilung von $\Phi \left(a_n t + \frac{1}{a_n} \right)^n$ zum Typ der Gumbel-Verteilung gehört.

6.5.2 Beispiel 2

In diesem Beispiel geht man wieder von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots$ aus. Die gemeinsame Verteilungsfunktion F besitzt eine Wahrscheinlichkeitsdichte f mit folgender Eigenschaft:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) x^{k+1} = c, \text{ wobei } k \geq 0 \text{ ist.}$$

Für $t > 0$ betrachtet man

$$\begin{aligned}\lim_{x \downarrow 0} \log \left(F \left(\frac{t}{x^{1/k}} \right)^{\frac{1}{x}} \right) &= \lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x} \log \left(F \left(\frac{t}{x^{1/k}} \right) \right) \\ &= \lim_{x \downarrow 0} \frac{f \left(\frac{t}{x^{1/k}} \right) \cdot \left(-\frac{1}{k} t x^{-\frac{1}{k}-1} \right)}{F \left(\frac{t}{x^{1/k}} \right)},\end{aligned}$$

wobei hier wieder die Regel von de l'Hospital verwendet wurde. Da $\lim_{x \downarrow 0} F \left(\frac{t}{x^{1/k}} \right) = 1$ gilt, folgt weiter:

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \downarrow 0} f \left(\frac{t}{x^{1/k}} \right) \left(\frac{t}{x^{1/k}} \right)^{k+1} \left(\frac{x^{k+1}}{t} \right)^{k+1} \left(-\frac{t}{k x^{(k+1)/k}} \right) \\ &= \lim_{x \downarrow 0} c \left(-\frac{1}{k t^k} \right) \frac{(x^{1/k})^{k+1}}{x^{(k+1)/k}} \\ &= \lim_{x \downarrow 0} c \left(-\frac{1}{k t^k} \right) \\ &= -\frac{c}{k} t^{-k}\end{aligned}$$

Somit ist:

$$\lim_{x \downarrow 0} F \left(\frac{t}{x^{1/k}} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{c}{k} t^{-k}}$$

Setzt man $x = \frac{1}{n}$, dann ergibt sich:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F \left(n^{1/k} t \right)^n = e^{-\frac{c}{k} t^{-k}}$$

bzw.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F \left(\left(n \cdot \frac{c}{k} \right)^{1/k} t \right)^n = e^{-t^{-k}}.$$

Das heißt, wählt man in diesem Beispiel für $n \geq 1$ die Konstantenfolgen $a_n = \left(n \cdot \frac{c}{k} \right)^{\frac{1}{k}}$ mit $k \geq 0$ und $b_n = 0$ und berechnet $\lim_{n \rightarrow \infty} F \left(\left(n \cdot \frac{c}{k} \right)^{1/k} t \right)^n$, so sieht man, dass die Grenzwertverteilung zum Typ der Fréchet-Verteilung gehört.

Zusammenfassung

Stochastische Prozesse dienen als grundlegendes mathematisches Konzept, um Folgen von Zufallsexperimenten beschreiben zu können. Ausgehend davon, nach welchen Regeln ein stochastischer Prozess abläuft, kann man verschiedene Typen unterscheiden, wie zum Beispiel Poisson- oder Erneuerungsprozesse. Dementsprechend ist die Anwendung stochastischer Prozesse in der Praxis auch breit gestreut. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, wie stochastische Prozesse sowohl diskreter als auch kontinuierlicher Zeit im Bereich der Versicherungsmathematik zum Einsatz kommen können.

Der erste Teil beschäftigt sich mit der Risikotheorie. Man geht von der vereinfachten Annahme aus, dass ein Versicherungsunternehmen Einnahmen in Form von Prämien und Ausgaben für Leistungen aus versicherten Schadensfällen, sogenannte Forderungen, hat. Das Verhalten der Risikowahrscheinlichkeit, d.h. der Wahrscheinlichkeit einer Versicherung, zahlungsunfähig zu werden, soll genauer untersucht werden. Dazu wird angenommen, dass die Anzahl der Forderungen, die in einem bestimmten Zeitintervall eintreffen, einen stochastischen Prozess kontinuierlicher Zeit bilden. Zunächst wird gezeigt, dass der Poissonprozess dieses Modell am besten beschreibt. Da man verschiedene Verteilungsfunktionen für die Höhe der Forderungen verwenden kann, unterscheidet man zwischen kleinen und großen Forderungen. In beiden Fällen werden Resultate für das asymptotische Verhalten der Risikowahrscheinlichkeit dargelegt.

Der zweite Teil setzt sich mit der Extremwerttheorie auseinander. Diese für eine Versicherung wichtige Fragestellung versucht, Antwort zu geben, wie häufig sogenannte „extreme Ereignisse“, wie Erdbeben oder Überflutungen, eintreten können. Gegeben sei dazu eine Folge von Ereignissen, d.h. ein stochastischer Prozess diskreter Zeit. Im nächsten Schritt bildet man für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Maximum M_n der ersten n Zufallsvariablen und versucht, eine Beschreibung der Verteilungsfunktion zu finden. Das zentrale Resultat, das Fisher-Tippett-Theorem, besagt, dass die Verteilungsfunktion der Maxima gegen drei mögliche Verteilungstypen konvergiert. Dies wird anhand von Beispielen belegt.

Literaturverzeichnis

- [1] N. H. Bingham, C. M. Goldie, and J. L. Teugels. *Regular Variation*. Cambridge University Press, 1987.
- [2] Lukas Breiteneder. *Summe von Schäden mit heavy tailed Verteilungen unter Berücksichtigung von Abhängigkeitsstrukturen*, pages 3–21. Diplomarbeit, Technische Universität Wien, 2012.
- [3] Laurens de Haan. *Sample Extremes: An elementary Introduction*, pages 161–172. Statistica Neerlandica, Volume 30, 1976.
- [4] Laurens de Haan and Ana Ferreira. *Extreme Value Theory. An Introduction*. Springer Science+Business Media, LLC, 2006.
- [5] Paul Embrechts, Claudia Klüppelberg, and Thomas Mikosch. *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
- [6] Pierre Frères. *Erneuerungsprozesse - Theorie und Anwendungen*, pages 1–19. Diplomarbeit, Universität Wien, 2010.
- [7] Geoffrey Grimmett and David Stirzaker. *Probability and Random Processes. Third Edition*. Oxford University Press, 2001.
- [8] Franz Hofbauer. *Wahrscheinlichkeitstheorie 1*. Unveröffentlichtes Vorlesungsskriptum, Universität Wien, SS 2008.
- [9] Franz Hofbauer. *Stochastische Prozesse, Markovketten und Erneuerungsprozesse*. Unveröffentlichtes Vorlesungsskriptum, Universität Wien, WS 2002/03.
- [10] Franz Hofbauer. *Wahrscheinlichkeitstheorie 2*. Unveröffentlichtes Vorlesungsskriptum, Universität Wien, WS 2006/07.
- [11] Samuel Karlin and Howard M. Taylor. *A First Course in Stochastic Processes. Second Edition*. Academic Press, Inc., 1975.
- [12] M.R. Leadbetter, Georg Lindgren, and Holger Rootzén. *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes*, pages 1–30. Springer-Verlag New York Inc., 1983.
- [13] Matthias Löwe. *Extremwerttheorie*, pages 1–40. Vorlesungsskriptum, Westfälische Wilhelmsuniversität Münster, WS 2008/09.

Literaturverzeichnis

- [14] Thomas Mikosch. *Non-Life Insurance Mathematics. An Introduction with the Poisson Process*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.
- [15] Alexander Zwirchmayr and Peter Grandits. *Sachversicherungsmathematik*, pages 96–123. Vorlesungsskriptum, Technische Universität Wien, 2008.

Lebenslauf – Verena Klambauer

KONTAKTDATEN

Adresse: 2380 Perchtoldsdorf, Gauguschgasse 20
E-Mail: verena.klambauer@gmail.com

PERSÖNLICHE DATEN

Geburtsdatum und –ort: 21.10.1986, Wien
Nationalität: Österreich
Familienstand: ledig

AUSBILDUNG

09/1993 – 06/1997 Volksschule in Perchtoldsdorf, Roseggergasse 2
09/1997 – 06/2005 Bundesgymnasium Perchtoldsdorf, Roseggergasse 2
10/2005 – 01/2007 Studium der Rechtswissenschaften an der Universität Wien,
Abschluss der 1. Diplomprüfung
seit 03/2007 Diplomstudium Mathematik an der Universität Wien,
Studienschwerpunkt: Stochastik
08/2011 – 12/2011 Auslandssemester an der University of Edinburgh, Schottland

BESONDERE KENNTNISSE UND INTERESSEN

Sprachen Deutsch: in Wort und Schrift – Muttersprache
Englisch: in Wort und Schrift – Schulkenntnisse (8 Jahre)
Französisch: in Wort und Schrift – Schulkenntnisse (6 Jahre)
EDV-Kenntnisse Windows, MS-Office, MatLab, Mathematica

BERUFSERFAHRUNG

07/2007 – 08/2007 Ferialpraktikum bei Erste Bank, Filiale Perchtoldsdorf
08/2012 – 09/2012 Ferialpraktikum bei Helvetia Versicherungen AG Generaldirektion,
Wien
