DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Mathematische Rätsel – eine Alternative

Anregungen für einen interessanteren und praxisnäheren Mathematikunterricht in der AHS-Oberstufe

verfasst von

Fabian Nikolaus Kraler

angestrebter akademischer Grad

Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2013

Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 190 406
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Unterrichtsfach Mathematik
Betreut von:	Dr. Andreas Ulovec

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe.
Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht.

Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Wien, April 2013

(Fabian Nikolaus Kraler)

Abstract

Mathematikunterricht, der von Schüler/inne/n kaum selbständiges oder kreatives Denken fordert und sie somit in die geistige Passivität drängt, ist leider noch immer weit verbreitet. Interesse und Aufmerksamkeit werden zur Mangelware.

Aus diesem Grund beschäftigt sich die vorliegende Diplomarbeit mit mathematischen Rätseln und der Frage, wie man diese als Grundpfeiler eines verbesserten Mathematikunterrichts in der Oberstufe einer allgemein bildenden höheren Schule etablieren kann.
Insbesondere geht es um den Versuch, die drei Bereiche „Einführung von Variablen", „Kombinatorik" und „Wahrscheinlichkeit" mithilfe von Rätseln für Schüler/innen interessanter und praxisnäher zu gestalten.
Durch die Beschäftigung mit Rätseln sollen des Weiteren Kompetenzen gefördert werden, die im „herkömmlichen" Schulunterricht oft zu kurz kommen. So wird unter anderem auf das Erkennen des Essentiellen in komplexen Beziehungen und auf das Übersetzen von Alltagssituationen in mathematische Modelle ein besonderes Augenmerk gelegt.

Am Beginn der Arbeit sind theoretische Grundlagen zum Einsatz von Rätseln im Unterricht zu finden. Es werden mögliche Vor- und Nachteile besprochen, wodurch eine reflektierte und realistische Sichtweise bezüglich des Themas erschlossen werden soll. Im Anschluss wird ein rätselgestützter Unterricht entworfen, der die drei oben genannten Bereiche behandelt. Dieser Teil – eine Mischung aus mathematischer Theorie und Rätseln – kann in der Schule eins zu eins zur Anwendung gelangen.

Trotz der möglichen, in der Arbeit erwähnten Nachteile wird deutlich, dass ein auf Rätseln basierender Mathematikunterricht sehr sinnvoll und bereichernd sein kann.

INHALTSVERZEICHNIS

1. EINLEITUNG

Der Hauptgrund für die Wahl meines Diplomarbeitsthemas war generell wohl der Unterricht, wie ich ihn oftmals selbst erlebt habe. Zeitdruck, das Durchpressen von möglichst viel Inhalt, prinzipiell Stress, keinerlei Forderung eigener Gedanken oder Kreativität und vollkommenes Fehlen des Versuchs, den Stoff interessant und abwechslungsreich zu gestalten, bestimmten die Stunden.
Da ich schon länger mit dem Gedanken spiele Lehrer zu werden, habe ich mich auch schon eine gewisse Zeit mit der Frage auseinandergesetzt, wie ich diese Punkte verbessern könnte.

Der implizit schon angesprochene, etwas straffe Zeitrahmen in Verbindung mit dem Lehrplan wird bestimmt immer eine gewisse Schwierigkeit darstellen. Diesbezüglich kann meiner Meinung nach aber die Persönlichkeit der Lehrperson allein schon sehr viel leisten und ist mitunter entscheidend dafür, ob der Unterricht generell als reiner Stress empfunden wird oder ganz einfach als Phase erhöhter Produktivität. Es gibt Menschen, die selbst unter größter Stressbelastung vollkommen gelassen erscheinen und ihre Umgebung nur durch ihre Anwesenheit mit Ruhe anstecken. Genauso gibt es aber auch andere, die ständig sehr unruhig und unausgeglichen wirken, was sich schnell auf Schüler/innen übertragen kann, wie ich in einer Stunde meines Unterrichtspraktikums auch selbst mit eigenen Augen sehen konnte.
Ein strukturierter, gut geplanter Unterricht spielt diesbezüglich mit Sicherheit auch eine große Rolle.

In Bezug auf das Anregen selbständigen Denkens und Schaffens und auch bezüglich des Weckens von Interesse, schwirrt mir nun schon ziemlich lange der Begriff „Rätsel“ im Kopf herum.
Unter Rätseln verstehe ich grundsätzlich Fragestellungen, die Situationen bzw. Inhalte des Alltags thematisieren und die mit Hilfe verschiedenster mathematischer Werkzeuge gelöst werden können. Sie gestalten sich zum Teil verworren und kompliziert, mitunter sind sie aber auch klar und einfach formuliert. Obwohl vor allem Letztere diversen Textaufgaben, die man auch in Schulbüchern findet, teilweise ähneln, heben sich Rätsel meinem Verständnis nach durch ihre Kniffligkeit prinzipiell immer ein wenig von diesen ab.

Wann immer ich auf ein Rätsel gestoßen bin, war mein Interesse groß. Es macht mir seit jeher viel Spaß, mich mit solchen zu beschäftigen und die eine oder andere Lösung versetzte mich wirklich in Begeisterung. Diese Faszination war dann zusätzlich immer noch von einem Gefühl größter Zufriedenheit gefolgt und das alles nur, weil ich ein Rätsel gelöst hatte.
Insofern entstand in mir der Drang, viele Rätsel kennenzulernen und mich auch in meiner Diplomarbeit vertieft mit dem Thema auseinanderzusetzen.

In Kombination mit meiner „Knobelliebe" lebt nun aber auch schon seit langer Zeit die Frage in mir, wie man Rätsel sinnvoll in den Mathematikunterricht integrieren könnte; sie haben zweifelsohne einiges mit Mathematik zu tun und lassen diese mitunter auch in einem viel spannenderen Licht erscheinen.
Wenn überhaupt, habe ich Rätsel im Unterricht bisher allerdings nur als Mittel zur Auflockerung für zwischendurch präsentiert bekommen. Unter anderem sicherlich auch aus diesem Grund habe ich sie noch nie als Grundpfeiler des Mathematikunterrichts gesehen und frage mich nun, ob es denn möglich ist, sie als solche zu verstehen und zu verwenden.
Diese Frage finde ich persönlich sehr interessant und ich beantworte sie für mich jetzt schon einmal mit einem „Ja!". Auch wenn die schulische Verwendung von Rätseln bestimmt nicht immer vollkommen ohne Schwierigkeiten vonstattengehen wird, so kann eine solche mit Sicherheit sehr viel zu einem verbesserten und für Schüler/innen interessanteren und praxisnäheren Mathematikunterricht beitragen; daher bin ich äußerst froh, meine Diplomarbeit darüber schreiben zu dürfen.

Im Anschluss werde ich eventuelle Vor- und Nachteile genauer besprechen und mich später damit auseinandersetzen, wie Unterricht unter der Verwendung von Rätseln im Detail aussehen und ablaufen könnte.
Da sich mein Interesse generell mehr auf die schulische Praxis bezieht, wird die Beschäftigung mit Letzterem in meiner Arbeit zentrale Wichtigkeit haben. Insofern ist der nun folgende pädagogische Teil eher kurz gehalten und soll als Denkanstoß, keinesfalls aber als eine in irgendeiner Art und Weise vollständige Abhandlung verstanden werden.

2. THEORETISCHE GRUNDLAGEN ZUM EINSATZ VON RÄTSELN IM UNTERRICHT

2.1 Vorteile

Ich persönlich hatte schon immer – zumindest ab der siebten oder achten Schulstufe – das Gefühl, dass mir als Schüler Wissen von Seiten meiner Lehrer/innen ganz einfach einzupflanzen versucht wurde, was ich als sehr unangenehm und sinnlos empfunden habe. Schon mit dreizehn dachte ich mir, dass ich, falls ich einmal Lehrer werden sollte, Schüler/innen hauptsächlich zum Selbstdenken anregen möchte und welches Fach bietet sich dafür mehr an als die Mathematik?

2.1.1 Der Nürnberger Trichter als Negativbeispiel

Es gibt einen pädagogischen Terminus, der die gerade skizzierte Art des Unterrichts, die mir schon von Jugendzeit an zuwider ist, beschreibt: die Nürnberger-Trichter-Methode. Für diese stehen unter anderem Annahmen wie die, dass es *den* besten Weg der Vermittlung von Wissen gibt, welches obendrein als objektiv und allgemein gültig verstanden wird und dass es die Aufgabe der/des Lehrerin/Lehrers ist, diesem Weg entsprechend zu unterrichten. Von den Schüler/inne/n wird verlangt, die behandelten Inhalte in passiver Art und Weise in sich aufzusaugen und zu memorieren – je mehr desto besser. Man kann sich hier also einen Trichter vorstellen, mit dessen Hilfe Lehrer/innen Fakten und Fähigkeiten direkt in das Gehirn der Lernenden schütten.[1]
Wissen kann meiner Meinung nach aber nicht einfach so von einer Person zu einer anderen transferiert werden, es bedarf vielmehr eines Prozesses des Wissenserwerbs in jeder/jedem von uns. Dafür zu sorgen, dass dies gut gelingt, sehe ich als *die* Aufgabe von Lehrer/inne/n und als ausgezeichnete, erfolgversprechende Wege erscheinen mir diesbezüglich die Auswahl und die Präsentation geeigneter Stimuli sowie die unterstützende Begleitung.

[1] Vgl.: Pädagogische Informationen. Sammlung von pädagogischen Neuigkeiten aus allen Bereichen der Erziehung: Nürnberger-Trichter-Didaktik.
In: http://paidoblogger.blogspot.com/2007/12/nrnberger-trichter-didaktik.html (4. Februar 2012)

Nachdem ich in pädagogischer Hinsicht von der Nürnberger-Trichter-Methode also sehr wenig halte und das, wie gesagt, schon seit einer Zeit, in der ich vom Nürnberger Trichter noch gar nichts gehört hatte, ist es mir ein großes Anliegen, methodisch einen vollkommen anderen Weg einzuschlagen.

Eine Möglichkeit für den Mathematikunterricht besteht meiner Meinung nach in der Verwendung von Rätseln, wodurch die Selbständigkeit der Schüler/innen in der Aneignung von Wissen und Kompetenzen gefördert wird und Unterricht generell „offener" gestaltet werden kann.
Für diese Punkte sprechen sich auch viele neuere Richtungen in der Pädagogik und der Didaktik aus, wie beispielsweise der Konstruktivismus.

2.1.2 Der Konstruktivismus als Gegenposition zum Nürnberger Trichter

Ich möchte mich hier in meinen Ausführungen hauptsächlich auf den Konstruktivismus berufen, insbesondere auch deshalb, weil er *die* Gegenbewegung zum Objektivismus ist[2], welcher in seinen Vorstellungen denen der Nürnberger-Trichter-Methode sehr ähnelt.[3]
Indem ich also aufzeige, dass „Rätsel-Mathematikunterricht" – ich werde einen solchen in späteren Kapiteln entwerfen – den Idealen der Konstruktivist/inn/en in vielen Bereichen entspricht, betone ich auch, dass ein solcher dem Nürnberger Trichter und somit vielen altbekannten, „traditionellen" und mittlerweile sicherlich überholten Unterrichtsmethoden absolut entgegenwirkt.
Daher wird es für die nächsten Seiten mein Ziel sein, Parallelen zwischen konstruktivistischen Methoden und dem von mir entworfenen Unterricht, den ich im Anschluss dann auch präsentieren werde, aufzuzeigen und zu unterstreichen.

[2] Vgl.: Wild, Elke. Gerber, Judith: Einführung in die Pädagogische Psychologie. Opladen & Farmington Hills: Verlag Barbara Budrich 2006. S. 49.
[3] Vgl.: Ebd. S. 47.

Selbständigkeit im Denken und Problemorientiertes Lernen

Warum eine alternative Unterrichtsmethode, wie der Einsatz von Rätseln in Mathematikstunden, dem konstruktivistischen Gedankengut zuzuordnen ist, wird sehr schnell klar, wenn man sich anschaut, wie Lernsituationen aus konstruktivistischer Sicht gestaltet sein müssen.
So sollen Schüler/innen unter anderem in der Selbständigkeit ihres Denkens stark gefördert werden, wofür ihnen genügend viel Raum gegeben werden muss – sowohl in zeitlicher als auch physikalischer Hinsicht.

Ein anderes zentrales konstruktivistisches Ziel, welches damit stark in Zusammenhang steht, steckt im Terminus „Problemorientiertes Lernen“[4], welches laut Elke Wild und Judith Gerber bestenfalls in der Behandlung tatsächlicher Probleme, mit denen man in der Praxis unter Umständen auch konfrontiert wird, seine Realisierung findet. Darum soll es im problembasierten bzw. problemorientierten Unterricht gehen, um die Auseinandersetzung mit real gegebenen Schwierigkeiten. Auf diese kann man aber nicht nur im wirklichen Leben stoßen, sondern eben auch in Rätselbüchern.

Die Aufgabenstellungen sollten, wenn möglich, aus den unterschiedlichsten Bereichen stammen, damit das Suchen von Lösungsansätzen nicht auf eine bestimmte Problemsituation beschränkt wird. Dadurch bekommen Schüler/innen mit Verschiedenstem zu tun und können so in ihrem Denken flexibel bleiben und noch flexibler werden.

Nach Wild und Gerber ist es sehr wichtig, dass dieses Arbeiten zusätzlich in kleinen Gruppen, im Austausch mit Expert/inn/en, passiert. Letzteres insbesondere dann, wenn man innerhalb der Kleingruppen mit Schwierigkeiten zu kämpfen hat.
Bei alldem soll der/die Lehrer/in eine beratende und motivierende Funktion haben. Gleichzeitig sollen diese die Gruppen in der Bearbeitung ihrer Aufgaben aber auch alleine lassen, wenn sie nicht überfordert sind.[5]

---

[4] Vgl.: Wild, Elke. Gerber, Judith: Einführung in die Pädagogische Psychologie. Opladen & Farmington Hills: Verlag Barbara Budrich 2006. S. 49.
[5] Vgl.: Ebd. S. 52.

Um kurz zu zeigen, dass der gerade etwas detaillierter besprochene und implizit gut geheißene problemorientierte Unterricht auch wirklich Sinn macht, sei gesagt, dass die Erfahrung zeigt, dass dieser auf lange Sicht zu besserem Abschneiden bei Prüfungen führt, dass Schüler/innen in Folge dessen fähig sind, exakter zu diagnostizieren und dass sie weniger Angst vor „der Welt draußen“ und den von ihr gestellten Aufgaben haben[6]. Passives Wissen tritt zumeist gar nicht erst auf, welches ansonsten durch aufwändiges Wiederholen erneut verfügbar gemacht werden muss[7] und obendrein kommt eine derartige Unterrichtsform bei Lernenden besser an und führt dazu, dass diese eher gewillt sind, sich selbständig weiterzubilden als herkömmlich Unterrichtete.[8]

Das bis jetzt Vorgeführte berücksichtigend, erscheint mir der Einsatz von Rätseln unterschiedlichster Art als ein nahezu optimaler Weg. Denn wie kann Mathematikunterricht selbständigkeitsfördernder und problemorientierter sein, als unter der Verwendung von Rätseln, die Situationen und Aufgaben aus dem Alltag thematisieren? Lernende müssen bei deren Bearbeitung vollkommen selbständig denken und Strategien für einen möglichen Lösungsweg entwickeln. Dies geschieht obendrein, wie „gefordert“, in Kleingruppen mit der Unterstützung der/des Lehrenden, die/der dabei als Expertin/Experte fungiert.
Da der in dieser Arbeit entworfene Mathematikunterricht also den gerade besprochenen Punkten entspricht, kann er auch alle erwähnten Vorteile für sich beanspruchen.

Entwicklung von Abstraktionsfähigkeit

Ein weiteres zentrales Ziel des Konstruktivismus ist es, in Lernenden die Fähigkeit zu fördern, aus unterschiedlichsten Problemstellungen das Essentielle, das heißt die Grundstruktur, das mathematisch Behandelbare herauszufiltern und somit in der Folge zu immer abstrakterem Wissen zu gelangen. Im Idealfall bezieht sich dieses Filtern wiederum auf reale, nachvollziehbare und nicht künstlich konstruiert

[6] Vgl.: Wild, Elke. Gerber, Judith: Einführung in die Pädagogische Psychologie. Opladen & Farmington Hills: Verlag Barbara Budrich 2006. S. 53.
[7] Vgl.: Ebd. S. 50.
[8] Vgl.: Ebd. S. 53.

erscheinende Probleme, um von Anfang an den so wichtigen Praxisbezug herzustellen.[9]

Auch in diesem Punkt entdecke ich für mich persönlich außerordentlich Wichtiges. Genau darum geht es mir als angehender Lehrer; ich will Schüler/innen zu selbständigem Denken anregen, ich will ihnen zeigen, dass so vieles, das auf den ersten Blick so undurchschaubar und unlösbar erscheint, bei genauerer Betrachtung und tieferer Auseinandersetzung gar nicht mehr so gefürchtet werden muss. Jeder Mensch hat große Kompetenzen in sich (auch im Bezug auf Mathematik), die aber gefördert und herausgebildet werden müssen. Dafür gibt es geeignetere und weniger geeignete Wege. Mathematikunterricht unter Verwendung von Rätseln würde ich eindeutig den Ersteren zuordnen, denn meiner Meinung nach sollte es im Mathematikunterricht um das Erkennen von allgemeinen Strukturen, Gesetzen und Lösungswegen gehen, wofür Rätsel einen idealen Ausgangspunkt bilden.

Authentische Einführung in fachliche Expertise (Cognitive Apprenticeship-Ansatz)

Letzten Endes bieten Rätsel aber auch eine tolle Gelegenheit, Schüler/innen auf authentische Art und Weise und unter Berücksichtigung realer sozialer Beziehungen, welche sich in der Durchführung der Arbeitsphasen in Kleingruppen ergeben, in eine bestimmte fachliche Expertise einzuführen, wobei sich Differenzierung und Komplexität von Aufgabe zu Aufgabe steigern sollten – auch hierbei handelt es sich um Ideale der Vertreter/innen des Konstruktivismus bzw. des Cognitive Apprenticeship-Ansatzes, welcher dem Ersteren nahe verwandt ist.

Beim Cognitive Apprenticeship stehen die/der Expertin/Experte und ihr/sein Wissen stark im Zentrum. Letzteres soll den Lernenden anhand von Beispielen präsentiert werden, bevor diese damit beginnen, selbständig an bestimmten Aufgaben zu arbeiten und die/der Lehrende eine zurückhaltende Unterstützer/innen- und Vorbild-Rolle einnimmt.[10]

[9] Vgl.: Wild, Elke. Gerber, Judith: Einführung in die Pädagogische Psychologie. Opladen & Farmington Hills: Verlag Barbara Budrich 2006. S. 49.
[10] Vgl.: Ebd. S. 49f.

Ich bin der Meinung, dass man mit rätselunterstütztem Mathematikunterricht auch den geforderten Punkten dieses Ansatzes gerecht werden kann. Die Lehrperson wird die zur Anwendung kommenden Rätsel klarerweise in ihrer Komplexität ansteigend auswählen, wird die Lösungen so mancher vorzeigen und den Kleingruppen helfend zur Seite stehen.

Wie man anhand all dieser Inhalte sieht, können Rätsel im Unterricht sehr viel leisten und bewirken, weshalb man ihren Einsatz zumindest keinesfalls ausschließen sollte.

2.2 Nachteile

Auch wenn ich mich bis jetzt stark für den Rätsel-Unterricht ausgesprochen habe und der Meinung bin, dass er sehr sinnvoll ist – andernfalls würde ich sicherlich nicht meine Diplomarbeit diesem Thema widmen -, muss auch ich mir eingestehen, dass er nicht ausschließlich Vorteile gegenüber allen anderen Unterrichtsformen in sich trägt.
Die Literaturrecherche bezüglich der Nachteile eines solchen alternativen Konzepts hat sich als sehr schwierig und unergiebig herausgestellt, weshalb sich in diesem Kapitel nur wenige Zitate und Literaturhinweise finden werden. Ich habe mir selbst Gedanken gemacht, mit welchen Schwierigkeiten man als Lehrperson möglicherweise zu rechnen haben wird und habe mir auch überlegt, wie man eventuelle Problemsituationen lösen bzw. überhaupt von vornherein vermeiden könnte.

2.2.1 Zeitfaktor

Für die in dieser Arbeit vorgestellte und motivierte Art des Unterrichts ist eine bestimmte zeitliche Freiheit mit Sicherheit sehr wichtig, wenn nicht sogar notwendig. Die Beschäftigung mit Rätseln unterschiedlichster Art und Komplexität verlangt die ungeteilte Aufmerksamkeit seitens der Schüler/innen und darf nicht unter Zeitdruck stattfinden. Wie soll man sich auf neuem Terrain bewegen und komplizierte Sachverhalte Stück für Stück in ihre Einzelteile zerlegen um schlussendlich über den einen oder anderen Umweg zur Lösung zu kommen, wenn ständig das Ticken der Uhr im Hintergrund zu hören ist?
Zu wenig Zeit führt zum einen sicherlich dazu, dass es für Schüler/innen sehr schwierig wird, sich überhaupt auf eine gewisse Problemstellung einzulassen und zum anderen könnte es bewirken, dass der/die Lehrer/in sich im Endeffekt dazu gezwungen sieht, die Lösung einfach mitzuteilen um die Situation zu vermeiden, ohne „Erfolg“ das Klassenzimmer verlassen zu müssen. Dadurch würde rätselgestütztes Unterrichten aber sinnlos werden, da der Teil des Unterrichts, in dem Schüler/innen selbständig an einer Aufgabe arbeiten und als Konsequenz Resultate

erhalten sowie abstrakte Methoden erlernen, nicht mehr vorkommen würde. Gerade darauf soll das von mir Behandelte aber abzielen.

Hier spielt natürlich auch der Lehrplan eine Rolle, an dessen straffes Programm sich jede Lehrperson einer allgemein bildenden höheren Schule in Österreich bis zu einem gewissen Grad zu halten hat.
Das heißt, sich für bestimmte Bereiche mehr Zeit zu nehmen, ist oft schon deshalb problematisch bis unmöglich, weil man dadurch für andere wieder weniger Zeit hat, man in einem Schuljahr aber gewisse Planpunkte abhandeln muss.

Einen möglichen Lösungsansatz für das „Zeit-Problem“ sehe ich darin, ein Rätsel an den Anfang einer Unterrichtseinheit zu stellen. Dieses sollte so gewählt sein, dass es nicht zu aufwändig ist und somit nicht allzu viel Zeit in Anspruch nimmt – im schlimmsten Fall hätte man aber ohnehin eine ganze Schulstunde zur Verfügung.
Dadurch kann die Stressproblematik entschärft werden und das Rätsel würde zusätzlich als Motivationsquelle und als Ausgangspunkt für das Entwickeln mathematischen Wissens fungieren.

Genauso kann man zu Beginn einer Einheit aber auch mehrere Rätsel präsentieren, mit der Intention, ihre Bearbeitung auf die gesamte Stunde auszudehnen. Der mathematische Inhalt, welcher von diesen getragen wird, sollte derselbe sein und einfach in unterschiedlichen „Geschichten“ seinen Ausdruck finden. In der Stunde selbst werden nun der Reihe nach möglichst viele dieser Aufgabenstellungen in Kleingruppen behandelt, wobei ständig die folgende Frage über und in den Köpfen der Schüler/innen schweben sollte: „Was ist allen Problemen gemeinsam?“
Die Antwort kann noch in der Stunde oder wenn die Zeit dies nicht erlaubt, in der Hausübung ihre Formulierung finden. Sie sollte bestenfalls die allgemeine Struktur der Rätsel und die Lösungsmethoden beinhalten – darin besteht auch der mathematische Inhalt, welcher in der Folgestunde behandelt wird.
Dies erscheint nun auf den ersten Blick äußerst zeitaufwändig; dieser Eindruck verschwindet aber sehr schnell. Wenn man sich kurz vor Augen führt, was eine solche Rätselstunde leisten kann, sieht man sofort, dass man sich mit ihr zum Teil sicherlich übertrieben lange Übungsphasen ersparen kann, da die Schüler/innen selbst, durch eigenes Arbeiten und durch eigene Überlegungen, zu ihrem mathematischen Wissen gelangt sind. Dadurch ist dieses aber viel „natürlicher“,

effizienter und tiefer in ihr Denken übergegangen und muss nicht erst durch das Behandeln unzähliger Beispiele aus der abstrakten Theorie auf die Praxis übertragen werden. Insofern sieht man sich als Lehrperson hier im Endeffekt möglicherweise oft sogar mit einer gewissen Zeitersparnis konfrontiert.

Als dritten möglichen Lösungsweg schlage ich vor, Rätsel an das Ende der Stunde zu verlegen und so mit ihnen einen Übungs-, Wiederholungs- und Festigungseffekt zu erzielen. Um nicht in Zeitnot zu geraten, kann die Lehrperson die Behandlung der Aufgabenstellungen von vornherein als Hausübung definieren, deren Bearbeitung schon in den letzten Minuten der Mathematikstunde begonnen werden darf. Ein solcher Einsatz von Rätseln entspricht zwar nicht genau dem, wofür ich sie in dieser Arbeit vorgesehen habe – nämlich als Impulsinhalte für das selbständige Aneignen von Wissen und Methoden -, trotzdem soll auf eine derartige Verwendung aber nicht vollkommen verzichtet werden; sie kann durchaus sinnvoll sein.

Das alles bedeutet nun, dass es auf jeden Fall gut überlegt sein muss, wie und wann man Rätsel im Mathematikunterricht wie lange zum Einsatz bringt. Ihre Verwendung sollte meiner Meinung nach aber aufgrund dieser Schwierigkeiten keinesfalls aufgegeben werden, da sie sehr viele Vorzüge zum altbekannten Unterricht bringen und sehr fruchtbar sein kann, wie man im Kapitel „Vorteile“ bereits sehen konnte.

2.2.2 Kompetenzunterschiede innerhalb der Klasse

In Bezug auf die Problematik der Kompetenzunterschiede unter den Schüler/inne/n müssen einige Überlegungen angestellt werden.
Wen gibt man mit wem in eine Arbeitsgruppe oder überlässt man diese Entscheidung dem Zufall?
Bildet man Gruppen, die jeweils bezüglich der Kompetenzen sehr heterogen sind, dann hat man den großen Vorteil, dass alle ähnlich lange brauchen werden um eine Aufgabe zu lösen und dass die leistungsstärkeren Schüler/innen den etwas leistungsschwächeren helfen können. Dadurch fördern diese ihre sozialen Fähigkeiten und nehmen der Lehrperson gleichzeitig ein wenig Arbeit ab.
Derartige Gruppen bergen aber auch ein nicht zu vernachlässigendes Problem. Denn wie auch Manfred Bönisch in seinem Buch „Variable Lernwege“ schreibt,

wirken Unterschiede im Entwicklungsgrad des Bewusstseins und der Fähigkeiten der Auflösung bestimmter, immer bestehender hierarchischer Strukturen nicht entgegen, sondern verstärken diese eher noch. Das würde den Vorstellungen eines idealen offenen Unterrichts, in dem alle Schüler/innen gleichberechtigt und gleichermaßen an Aufgaben arbeiten, aber nicht entsprechen, was bestimmte Maßnahmen notwendig macht.[11]

Ungleiche Kompetenzen stellen also offensichtlich eine große Herausforderung für den/die Lehrer/in dar. Was kann getan werden?

Zum einen müssen die verwendeten Rätsel sehr gut ausgewählt sein. Das heißt, sie sollten möglichst viele Schüler/innen interessieren und der Grad ihrer Komplexität sollte zu Beginn sicherlich sehr niedrig sein und mit der Zeit stetig zunehmen, denn auch das Lösen von Rätseln muss erlernt werden. Die Fähigkeit, eine gegebene Aufgabe in ihre wichtigen Einzelteile zu zerlegen, allgemeine Problemlösungsstrategien zu entwickeln und strukturelle Ähnlichkeiten zwischen anfangs vollkommen unterschiedlich wirkenden Aufgabenstellungen zu erkennen, ist nicht vielen a priori gegeben.

Zum anderen ist aber, wie schon gesagt, natürlich auf die Zusammenstellung der Arbeitsgruppen zu achten. Wie bei allen Gruppenarbeitsphasen muss auch hier genauestens darauf Rücksicht genommen werden, welche Schüler/innen mit welchen zusammenarbeiten.
Sind die Kompetenzunterschiede in einer Gruppe zu groß, führt das in vielen Fällen dazu, dass die wenigen Leistungsstarken, welche dann zumeist auch die Interessierten sind, die ganze Arbeit übernehmen und der Rest sich gemütlich zurücklehnt.
Sind sie aber zu klein, so bedeutet dies, dass all diejenigen, die bereits viel verstehen, in einer Gruppe sind und all diejenigen, die sich etwas schwerer tun, in einer anderen; dadurch wird die eine Gruppe aber viel schneller zu Ergebnissen kommen als die andere, weshalb die Mitglieder der ersteren wiederum eine Zusatzbeschäftigung brauchen werden um die von den anderen zusätzlich benötigte Zeit zu überbrücken.

[11] Vgl.: Bönisch, Manfred: Variable Lernwege. Ein Lehrbuch der Unterrichtsmethoden. Sankt Augustin: Academia Verlag 2008. S. 53.

In beiden Fällen werden die Leistungsstarken ihre Fähigkeiten weiter ausbauen, was bei den Leistungsschwachen leider eher nicht passieren wird – die „Leistungsschere" öffnet sich.
Solchen Entwicklungen gilt es als Lehrer/in durch Hellhörigkeit, aktive Partizipation und Flexibilität entgegenzuwirken.

2.2.3 Verlust der Ernsthaftigkeit und der Fähigkeit Schemata zu folgen

Obwohl ich mich natürlich sehr für den Einsatz von Rätseln im Mathematikunterricht ausspreche, birgt ein solches Vorhaben auch so manche Risiken. So ist es für Lehrer/innen beispielsweise eine große Aufgabe, den Zusammenhang zwischen Rätseln und den im Lehrplan stehenden Inhalten klar zu vermitteln. Rätsel sollen ja nicht nur der Belustigung dienen, sondern sie haben im Unterricht ihren konkreten Sinn und Zweck. In ihnen stecken dieselben Aufgaben und Probleme wie im Lehrbuch, nur sehen sie anders aus.
Unterrichtsstunden, in denen Rätsel vorkommen, dürfen keinesfalls zu „Witzstunden" werden, die die Schüler/innen nicht mehr ernst nehmen. Gerade bei der Bearbeitung von Rätseln sind sie nämlich viel mehr gefordert als im herkömmlichen, altbekannten Frontalunterricht. Ihre Kreativität und Problemlösungsfähigkeiten kommen hier auf den „Prüfstand".
Natürlich soll ein derartiger alternativer Unterricht auch Spaß machen und das Interesse am behandelten Stoff wecken, ernsthaftes Lehren und Lernen sollen dabei aber nicht vollkommen aus dem Fokus geraten.
Auch Manfred Bönisch meint, dass die Intention kommunikativer und offener Lehrmethoden, worunter die Verwendung von Rätseln im Mathematikunterricht mit Sicherheit fällt, nicht ein bestimmtes, zeitgenössisches „Laisser-Faire" ist, was es auch klarzustellen gilt. Zusätzlich sollen entsprechende sinnvolle Methoden und didaktische Verfahren erarbeitet werden, die auf einen solchen Unterricht ausgerichtet sind und zu dessen Gelingen beitragen.[12]

Wie man der Überschrift bereits entnehmen kann, sollte das weniger kreative Erlernen von gewissen abstrakten Methoden und Algorithmen allerdings nicht

[12] Vgl.: Bönisch, Manfred: Variable Lernwege. Ein Lehrbuch der Unterrichtsmethoden. Sankt Augustin: Academia Verlag 2008. S. 53.

vollkommen ausgelassen werden, denn auch dieses hat im Mathematikunterricht durchaus seine Berechtigung. Das Lernen bestimmter Schemata durch Nachahmen – wie althergebracht und jeder neueren pädagogischen und didaktischen Sicht von Unterrichten widersprechend es auch erscheinen mag – ist meiner Ansicht nach genauso wichtig und eine Voraussetzung für das spätere (Berufs-)Leben, wie das phantasievolle Finden von Lösungswegen.

Manfred Bönisch weist in seinem Buch „Variable Lernwege. Ein Lehrbuch der Unterrichtsmethoden.“ ebenfalls auf diesen Punkt hin.

> Die Gefahr der Vernachlässigung der instrumentellen Seite des schulischen Lernens (Erwerb von gesellschaftlich und individuell wichtigen Kenntnissen und Fertigkeiten) muss möglichst frühzeitig von Lehrern und Schülern erkannt werden.[13]

2.2.4 Druck und Unverständnis von außen

Genauso wichtig wie es ist, den Schüler/inne/n den Sinn des Einsatzes von Rätseln und deren direkten Bezug zu den Lehrinhalten aufzuzeigen, wird es sein, dies auch den Eltern und dem sozialen Umfeld der Klasse zu vermitteln. Alternative Methoden, egal in welchem Bereich, treffen häufig auf Skepsis und Kritik. Neues in sein eigenes Gedanken- und Vorstellungsgebäude zu integrieren und es somit letzten Endes zu akzeptieren, fällt nicht allen leicht. Wenn Schüler/innen nach einer Mathematikstunde nach Hause kommen und ihren Eltern erzählen, dass sie an dem Tag „nur“ Rätsel gelöst haben, werden sich diese zuerst vielleicht einmal denken, dass dies sehr schön ist – endlich einmal eine Abwechslung zum ansonsten so trockenen Unterricht. Wenn das dann aber öfters vorkommt, werden diese mitunter möglicherweise Angst bekommen, dass ihre Kinder im Mathematikunterricht nur Spaß haben und nichts lernen – „Rätsel, was sollen denn diese mit Mathematik zu tun haben?!“. Die Angst, dass die Schule ihren Söhnen und Töchtern das, was sie draußen in der Welt brauchen, nicht in ausreichendem Maße mit auf den Weg geben könnte – im Kopf von bestimmten gesellschaftlichen Gruppen, wie auch Eltern, spielen Leistungsstandards und insbesondere deren Erfüllung eine sehr große und oft die

[13] Bönisch, Manfred: Variable Lernwege. Ein Lehrbuch der Unterrichtsmethoden. Sankt Augustin: Academia Verlag 2008. S. 53.

einzige Rolle -, kann sehr schnell zu Panik und diese wiederum zu schweren Vorwürfen der Lehrperson gegenüber führen.[14]

> Unter gesellschaftspolitischen Gesichtspunkten wird der hier zur Rede stehende Unterricht unter Umständen als gefährliche Form emanzipatorischer Erziehung verstanden, die die Reproduktions-, Selektions- und auch Integrationsfunktion der Schule in Frage stellt.[15]

Auf das mögliche Entstehen einer derartigen Situation, muss man als Lehrer/in vorbereitet sein bzw. sollte man versuchen, solche Missverständnisse durch ständige Aufklärung zu vermeiden.

Rätsel, sofern sie gut gewählt sind, beinhalten alles an Mathematik, was in der Schule vermittelt werden soll und mehr. Die Kreativität, das logische Denken, die Fähigkeit aus einer bestimmten Problemstellung allgemeine Methoden zur Lösungsfindung zu erarbeiten und mathematisches Wissen sind dabei sehr stark gefordert. Und Spaß macht das Ganze obendrein auch noch.

2.2.5 Fehlendes Interesse seitens der Schüler/innen

Zur Beziehung „Rätsel und Spaß" muss ich noch etwas sagen. Bevor ich wirklich begonnen habe für diese Diplomarbeit zu recherchieren, war ich unbewusst der festen Überzeugung, dass so ziemlich jede/r sich am Rätsel-Lösen erfreut. Mit der Zeit musste ich dann aber feststellen, dass dem nicht ganz so ist. Die Beschäftigung mit Rätseln polarisiert sehr. Im Rahmen dieser Arbeit, habe ich viele Rätselbücher durchgearbeitet und bin dabei regelmäßig auf Problemstellungen gestoßen, die und deren Lösungen mich fasziniert haben. In Folge meiner Begeisterung habe ich in meinem Freundeskreis immer wieder manche dieser Rätsel angesprochen und habe auch mit entsprechenden Reaktionen gerechnet. Dabei machte ich die Erfahrung, dass viele Menschen mit mathematischen Rätseln nichts anfangen können und diese ganz einfach als überflüssig, uninteressant und mühsam empfinden.

Das hat mich zuerst einmal sehr verwundert und irritiert, im Endeffekt hat es mich aber auf genau diese Problematik aufmerksam gemacht. Man darf und kann als

[14] Vgl.: Bönisch, Manfred: Variable Lernwege. Ein Lehrbuch der Unterrichtsmethoden. Sankt Augustin: Academia Verlag 2008. S. 53.
[15] Ebd.

Lehrer/in nicht davon ausgehen, dass Rätsel im Mathematikunterricht bei allen Schüler/inne/n Begeisterung auslösen werden; oftmals mag es nicht einmal für angenehme Akzeptanz reichen. Das passive Dasein im Frontalunterricht wird den möglicherweise als anstrengend und uninteressant empfundenen Rätselarbeitsphasen des Öfteren vorgezogen werden.

Aber auch diese Erkenntnis soll nun nicht dazu führen, dass man auf den Einsatz von Rätseln im Mathematikunterricht verzichtet. Gegenteiliges zum gerade Beschriebenen wird man nämlich mit Sicherheit auch sehr oft erleben. Man sollte sich als Lehrer/in ganz einfach dessen bewusst sein, dass Rätsel-Lösen nicht für alle eine Lieblingsbeschäftigung darstellt und dass man teilweise mit Ablehnung konfrontiert sein wird. Aber wie auch weiter oben schon erwähnt, müssen Stunden, in denen Rätsel zum Einsatz kommen, ja keine reinen Spaßstunden sein. Es geht letztendlich immer noch um den Lernerfolg, der hier meiner Meinung nach, zum Teil unabhängig davon, welche Emotionen dem Ganzen entgegengebracht werden, sehr hoch ausfallen kann.

2.2.6 Sprachliche Überforderung

Die Tatsache, dass Schüler/innen bei der Bearbeitung von Rätseln nicht nur auf einer rein mathematischen Ebene gefordert sind, sondern ganz wesentlich auch auf einer sprachlichen, sehe ich prinzipiell als enormen Pluspunkt an, der aber leider auch sehr leicht zum Problem werden kann.

Aus eigener Erfahrung im Arbeiten mit Nachhilfeschüler/inne/n weiß ich, dass sich besonders Kinder und Jugendliche, deren Muttersprache nicht Deutsch ist, beim Verstehen „mathematischer" Texte sehr schwer tun. Daher werden dann beispielsweise Textaufgaben, die Rätseln zum Teil ja sehr ähnlich sind, von vielen gefürchtet. Worte in einen mathematischen Formalismus umzuschreiben ist generell nicht leicht und wenn man die Sprache selbst schon nicht ganz beherrscht, wird diese Transformation zu einer wirklichen Hürde.

Genau um diese Übertragung von eher greifbaren sprachlichen Inhalten in abstrakt mathematische sollte es meiner Meinung nach im Mathematikunterricht aber verstärkt gehen, da die Mathematik dadurch als praktischer und sinnvoller erlebt werden kann. Dies ist meiner Erfahrung nach für viele Schüler/innen äußerst wichtig.

Insofern sollte man als Lehrer/in auf Rätsel keinesfalls verzichten, aber man muss sich der möglicherweise entstehenden Schwierigkeiten bewusst sein und Inhalte diesem Wissen entsprechend präsentieren. Eine einfache Sprache zu Beginn und eine langsame Steigerung der Komplexität mit der Zeit sind hierbei sicherlich ähnlich sinnvoll wie ein gründliches Besprechen der einzelnen Aufgaben und deren Inhalte im Plenum.

3. KONKRETE UMSETZUNG

Im Folgenden möchte ich mich den drei Bereichen „Die Einführung von Variablen“, „Kombinatorik“ und „Wahrscheinlichkeit“ widmen, die bis zu einem gewissen Grad feste Inhalte des Lehrplans in Mathematik in der Oberstufe einer allgemein bildenden höheren Schule in Österreich sind. Mein Ziel ist es, diese Gebiete theoretisch so aufzubereiten und an den entscheidenden Stellen passende Rätsel so einzufügen, dass das Ergebnis im Unterricht auch wirklich verwendet werden kann.

In theoretischer Hinsicht halte ich mich an neuere Ausgaben verschiedener Lehrbücher und es ist mir ein Anliegen, mich bezüglich der Theorie nur auf das Notwendigste zu konzentrieren. Das heißt, sie soll nicht bis ins letzte Detail besprochen werden, sondern vielmehr den roten Faden durch den Hauptteil meiner Arbeit bilden, in den in regelmäßigen Abständen diverse Rätsel eingeknüpft werden. Von diesen wird es viele geben, was von mir aber auch so beabsichtigt ist. Dadurch will ich zeigen, was für eine Vielfalt an geeigneten Rätseln es gibt und was für eine Schande es ist, diese nicht in größerem Ausmaß zu verwenden. Des Weiteren soll dem/der Leser/in so die Möglichkeit zur Auswahl gegeben werden.

3.1 Die Einführung von Variablen

In diesem ersten der drei Hauptkapitel meiner Diplomarbeit möchte ich mich einem Thema widmen, welches ich als sehr wichtig empfinde und dessen Vermittlung in der Schule meiner Meinung nach zu den zentralen Aufgaben eines/einer Lehrers/Lehrerin gehört. Mathematik auf praktische Probleme anwenden und diese damit lösen zu können muss eines der großen Ziele des Mathematikunterrichts sein.
Man wird sehr schnell sehen, dass es hier nicht so sehr um technische Fertigkeiten und abgeklärte Rechnerei geht, sondern vielmehr darum, die logische Struktur in verworren scheinenden Problemsituationen zu erkennen, Variablen sinnvoll einzuführen und einen mathematischen Algorithmus zu finden – dieser wird hier zumeist aus einfachen Gleichungen bzw. Gleichungssystemen bestehen – um im Endeffekt zu einer Lösung zu gelangen.
Wie gesagt, von einem rechnerischen Standpunkt aus gesehen, wird man wohl auf keinerlei Schwierigkeiten treffen, man wird allerdings erstaunt sein, wie fordernd es sein kann, einfache mathematische Werkzeuge zur richtigen Anwendung zu bringen.

Da sich diese Arbeit um Bereiche der Oberstufe einer allgemein bildenden höheren Schule dreht, setze ich an dieser Stelle mehr oder weniger alle mathematischen Lehrinhalte der Unterstufe voraus. Das heißt, ich werde mich nun beispielsweise nicht mit allgemeinen Term- oder Gleichungsumformungen aufhalten. Insofern müssen die Regeln zum Auflösen von Klammern, Distributivgesetze, Binomische Formeln sowie die Rechenregeln für Brüche beherrscht werden. Genauso müssen auch die elementaren additiven und multiplikativen Umformungsregeln, die sogenannten Waageregeln und die Quadratregel für nichtnegative reelle Zahlen bezüglich Gleichungen gekonnt werden.
Diese nicht allzu fordernden Punkte werden in der neunten Schulstufe teilweise noch kurz wiederholt, da ich mich aber auf anderes konzentrieren möchte, werde ich mich deren Behandlung nicht ausgiebig widmen.
Bei aller Einfachheit ist es aber von enormer Wichtigkeit, dass diese elementaren Fertigkeiten leicht abrufbar sind, da sie in den bald folgenden Rätseln ständig gebraucht werden. Die Schwierigkeiten liegen nun eben gleich woanders, weshalb man sich zumindest auf das Beherrschen des Alten verlassen können sollte.

Auch wenn sich das Folgende nun hauptsächlich um das selbständige Bilden von mathematischen Modellen dreht, werde ich den konkreten mathematischen Inhalt natürlich dennoch nicht vollkommen vernachlässigen. So möchte ich lineare Gleichungen mit einer und mit zwei Unbekannten – trotz der Tatsache, dass diese schon in der Unterstufe zumindest zum Teil besprochen worden sein sollten -, sowie quadratische Gleichungen behandeln. Diese Bereiche helfen mir die Rätsel aufzuteilen und einzuordnen. Des Weiteren bilden sie hier den klar definierten Schulstoff der Oberstufe, der mit meinen Rätseln vermittelt werden soll.

3.1.1 Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten

Mit „lineare Gleichung“ bezeichnet man Gleichungen, die aussehen wie $a \cdot x + b = 0$. Dabei sind a ($\neq 0$) und b reelle Zahlen, deren Werte bekannt sind und x ist die einzige Unbekannte, deren Wert gesucht wird.

Gleichungen dieser Form haben immer genau eine Lösung.
Mit „genau eine“ ist wirklich eine gemeint; nicht keine, nicht zwei, nicht drei, …!

Die Lösung der obigen linearen Gleichung ist durch $x = -\frac{b}{a}$ gegeben.
Damit kann man aber gleich alle linearen Gleichungen lösen, da sich logischerweise alle möglichen Gleichungen mit einer Unbekannten auf die oben beschriebene Form bringen lassen. Die einzige Voraussetzung ist, dass die Hochzahl von x wie hier „1“ ist ($x = x^1$).[16]

Nun werden Rätsel vorgestellt, die in der Form im Unterricht verwendet werden können und sich somit auch schon direkt an den/die Schüler/in richten.

Versuche Lösungen zu den folgenden Fragestellungen zu finden. Es sind immer lineare Gleichungen mit einer Unbekannten zu lösen, du wirst aber sehr schnell merken, dass nicht alle Rätsel das prinzipiell gleiche Vorgehen deinerseits verlangen. Führe sinnvoll Variablen ein und bleibe in deinen Gedanken und Systemen flexibel!

[16] Vgl.: Malle, Günther. Ramharter, Esther. Ulovec, Andreas. Kandl, Susanne: Mathematik verstehen 5. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG 2005. S. 152.

Unterschiedliche Interessen

Trotz größter Bemühungen seitens ihrer Mütter wollen die Söhne von Alexia und Christina einfach nicht miteinander spielen. Das könnte möglicherweise an ihrem Alter liegen.

Der eine, Alexander, ist nämlich zweiunddreißig Jahre älter als der andere, dessen Name Christian ist. In sieben Jahren ist Alexander elf Drittel mal so alt wie Christian dann sein wird. Kannst du sagen, wie alt Alexander und Christian jetzt sind?

Lösung:

Wir bezeichnen das Alter von Christian mit x, dann ist Alexander x + 32 Jahre alt.

In sieben Jahren wird Christian x + 7 Jahre zählen und Alexander wird der Angabe entsprechend $\frac{11}{3} \cdot (x + 7)$ Jahre alt sein.

Gleichzeitig muss in sieben Jahren das Alter von Alexander aber auch (x + 32) + 7 Jahre betragen – auch er wird ja ganz einfach um sieben Jahre älter geworden sein.

Daher: $\frac{11}{3} \cdot (x + 7) = (x + 32) + 7$; diese Gleichung gilt es nun zu lösen!

$\frac{11}{3} \cdot (x + 7) = (x + 32) + 7$ | Klammern auflösen

$\frac{11}{3} x + \frac{77}{3} = x + 39$ | (· 3)

$11x + 77 = 3x + 117$ | (– 3x) & (– 77)

$8x = 40$ | (: 8)

$x = 5$

Das heißt nun aber, dass Christian fünf Jahre alt ist und Alexander siebenunddreißig. Kein Wunder, dass die beiden unterschiedliche Interessen haben.[17]

Ungleiche Gleichheiten

Der große Wiegemeister steht vor einem kleinen Problem. In seiner Hand hält er eine Waage, die sich im Gleichgewicht befindet.

In der einen Waagschale liegt ein ganzer Laib Brot, in der anderen liegen drei Viertel von einem Laib Brot und ein drei Viertel Kilo schweres Gewicht.

[17] Vgl.: matheboard.de: mathe online verstehen.
In: http://www.matheboard.de/archive/410922/thread.html (6. Dezember 2012)

Er überlegt, wie viel das ganze Brot wiegen muss. Wer kann ihm helfen?[18]

Lösung:

Wir benennen das unbekannte Gewicht des ganzen Brotlaibs mit x. Dann gilt:

$x = \frac{3}{4} x + \frac{3}{4}$ kg | $(\cdot 4)$

$4x = 3x + 3$kg | $(- 3x)$

$x = 3$kg

Somit sind wir schon bei unserer Lösung angelangt und wissen nun, dass der Laib Brot genau drei Kilogramm wiegt.[19]

Teilen

Josephine und Max haben sich gemeinsam eine zweihundert Meter lange Slackline gekauft. Diese lassen sie nun von einem professionellen Slackline-Hersteller in zwei Teile zerschneiden, da sie beide gerne eine eigene hätten und zweihundert Meter zum Anfangen sowieso viel zu lang sind.

Da Josephine den größeren Teil der Rechnung bezahlt hat, soll sie nun auch ein längeres Stück der Slackline erhalten. Und so kommt es, dass Max´ Stück am Ende nur vier Fünftel so lang ist wie Josephines.

Wie lang waren schlussendlich die beiden erhaltenen Slacklines?[20]

Lösung:

Beide Stücke zusammen ergeben zweihundert Meter und eines der Stücke ist vier Fünftel so lang wie das andere. Daher bezeichnen wir das „andere“ einfach mit x und schon sehen wir, dass $x + \frac{4}{5} x = 200$ gelten muss.

$x + \frac{4}{5} x = 200$ | x auf Fünftel bringen & addieren

$\frac{9}{5} x = 200$ | $(\cdot \frac{5}{9})$

---

[18] Vgl.: Loyd, Sam. Gardner, Martin: Noch mehr mathematische Rätsel und Spiele. Köln: DuMont Buchverlag 1979. S. 66.

[19] Vgl.: Ebd. S. 185.

[20] Vgl.: Ebd. S. 142.

$x = \frac{1000}{9}$ | als gemischten Bruch schreiben

$x = 111\,\frac{1}{9}$

Josephines Slackline ist am Ende also $111\,\frac{1}{9}$ Meter lang, weshalb die von Max $\frac{4}{5} \cdot 111\,\frac{1}{9} = \frac{800}{9} = 88\,\frac{8}{9}$ Meter messen muss.[21]

Besondere Liebschaften

Paul liebt seinen Kater Sticky über alles. Kürzlich meinte er, dass er vor sechs Jahren viermal so alt war wie Sticky und jetzt sei er nur noch zweimal so alt.

Welches Alter hat Pauls Kater heute?[22]

Lösung:

Bezeichnen wir das Alter von Sticky vor sechs Jahren mit x, dann war Paul zu der Zeit 4x alt. Wenn sie vor sechs Jahren x und 4x alt waren, dann sind sie jetzt mit Sicherheit x + 6 und 4x + 6 Jahre alt.

Gleichzeitig ist Paul der Angabe nach jetzt aber auch zweimal so alt wie Sticky, das heißt, $2 \cdot (x + 6)$.

Damit kommen wir zur folgenden Gleichung:

$4x + 6 = 2 \cdot (x + 6)$ | Klammer auflösen

$4x + 6 = 2x + 12$ | (– 2x) & (– 6)

$2x = 6$ | (: 2)

$x = 3$

Insofern ist Pauls Kater nun 3 + 6 = 9 und Paul selbst 18 Jahre alt.[23]

[21] Vgl.: Loyd, Sam. Gardner, Martin: Noch mehr mathematische Rätsel und Spiele. Köln: DuMont Buchverlag 1979. S. 220.
[22] Vgl.: Ebd. S. 55.
[23] Vgl.: Ebd. S. 180.

Drei Generationen

Dem Wunsch der Großmutter folgend, geht ein Teil der Familie zu ihrem einundachtzigsten Geburtstag mit ihr ins Kino. Mit dabei sind Großmutters Sohn mit seiner Frau und ihre zwei Kinder – Tochter und Sohn.

Am Schalter will der Mann, der die Karten verkauft, wissen, wie alt denn der kleine Lukas sei. Sein Vater, der schon seit jeher Rätsel liebt, antwortet:

„Mein lieber Sohn ist fünfmal älter als seine Schwester, seine Mutter ist fünfmal älter als er, ich bin zweimal so alt wie Lukas´ Mutter und gemeinsam erreichen wir das Alter von unserem heutigen Geburtstagskind."

Wie alt ist Lukas?[24]

Lösung:

Mit x bezeichnen wir in diesem Fall das Alter von Lukas. Dann kommen wir auf die folgende Gleichung:

$x + \frac{x}{5} + 5x + 2 \cdot 5x = 81$ | zusammenfassen

$\frac{81x}{5} = 81$ | (· 5) & (: 81)

$x = 5$

Lukas ist somit fünf Jahre alt.[25]

Erstaunliche Regelmäßigkeit

Auf einem Bauernhof wohnen dreizehn Katzen, die sich im Alter alle um fünf Drittel (in Jahren) unterscheiden. Die Bäuerin weiß, dass die älteste Katze sechsmal älter ist als die jüngste. Wie alt ist dann die älteste?[26]

Lösung:

Die kleinste Katze sei x Jahre alt, dann ist die größte 6x Jahre alt. Da zwischen der jüngsten und der ältesten elf andere Katzen (in fünf Drittel Jahresabständen) liegen,

[24] Vgl.: Loyd, Sam. Gardner, Martin: Noch mehr mathematische Rätsel und Spiele. Köln: DuMont Buchverlag 1979. S. 91.
[25] Vgl.: Ebd. S. 196.
[26] Vgl.: Ebd. S. 48.

muss man, wenn man bei der jüngsten startet, um zwölf Katzen „weitergehen" um zur ältesten zu gelangen. Daher muss gelten:

$x + 12 \cdot \frac{5}{3} = 6x$ | (– x), kürzen & rechnen

$5x = 20$ | (: 5)

$x = 4$

Man sieht, dass die kleinste Katze vier Jahre alt sein muss und dass die älteste bereits erstaunliche vierundzwanzig Jahre erreicht hat.[27]

Karte um Karte

Mario und Philip sind zwei begeisterte Autoliebhaber. So sammelt jeder von ihnen schon seit langer Zeit Karten, auf denen besonders schnelle, starke oder einfach schöne Fahrzeuge abgebildet sind. Zusätzlich findet man auf diesen Karten noch genaue Informationen bezüglich PS-Anzahl, Maximalgeschwindigkeit, Beschleunigungsdauer von Null auf Hundert und so weiter. Mario und Philip besitzen beide gleich viele solche Karten.

Diese kann man mitunter auch mischen um damit ein Spiel zu spielen. Das funktioniert dann so, dass man einen außergewöhnlichen Punkt auf der eigenen Autokarte anspricht und wenn das Auto des anderen in diesem Bereich schlechter abschneidet, dann gewinnt man. Mario und Philip führen zusätzlich die Regel ein, dass man die Karte des anderen behalten darf, wenn man ein solches Duell gewinnt.

So spielen sie lange Zeit. Karten wandern vom einen zum anderen und auch wieder zurück. Am Ende wird Bilanz gezogen.

Philip hat im ersten Durchgang zwanzig Karten gewonnen, im Lauf mehrerer Spielrunden aber zwei Drittel seines Kartenstapels verloren. Am Ende des Tages war Mario tatsächlich Besitzer von viermal mehr Karten als Philip.

Mit wie vielen Karten haben die beiden das Spiel begonnen?[28]

Lösung:

Sowohl Mario als auch Philip hatten anfangs x Karten auf ihrer Hand.

[27] Vgl.: Loyd, Sam. Gardner, Martin: Noch mehr mathematische Rätsel und Spiele. Köln: DuMont Buchverlag 1979. S. 177.

[28] Vgl.: Ebd. S. 128.

Nach der ersten Runde gewann Philip zwanzig dazu, besaß nun also x + 20, weshalb Mario zwanzig verloren haben muss und nun bei x – 20 stand.
Mit der Zeit hat Philip dann zwei Drittel verloren, womit er nur noch ein Drittel von x + 20 auf seine Seite retten konnte, das heißt $\frac{1}{3}(x + 20)$.
Die zwei Drittel von x + 20, die Philip ab der zweiten Runde verloren hat, muss Mario aber klarerweise ab der zweiten Runde gewonnen haben. Das heißt er beendet das Spiel mit $(x - 20) + \frac{2}{3}(x + 20)$ Karten, was nun der Angabe entsprechend aber auch viermal soviel sein soll, wie der Endstand von Philip.

Somit kommen wir auf die folgende zu lösende Gleichung:

$4 \cdot \frac{1}{3}(x + 20) = (x - 20) + \frac{2}{3}(x + 20)$ | Klammern auflösen & (· 3)

$4x + 80 = 3x - 60 + 2x + 40$ | zusammenfassen, (– 4x) & (+ 20)

$x = 100$

Am Anfang besaßen Mario und Philip somit jeweils hundert Karten.[29]

Familienangelegenheiten

Auf einem großen Familienfest kamen nach sehr langer Zeit wieder einmal alle Verwandten aus allen Teilen des Landes zusammen. Den Großvater freute es besonders seine geliebten Enkel/innen wiederzusehen. Nachdem er sich mit Sophia längere Zeit unterhalten hatte, wollte er ihr ein wenig Taschengeld zustecken. Doch als er seine Geldtasche aufklappte, bemerkte er, dass er gar nicht so viel Geld bei sich hatte und entschied sich kurzerhand Sophia zwei Euro mehr als die Hälfte des gesamten Inhalts seines Geldbeutels zu geben.
Diese freute sich sehr und verließ das Gespräch mit ihrem Großvater mit großen Freudensprüngen. Als sie auf zwei ihrer Cousins traf, musste sie ihnen einfach erzählen, wie viel Geld sie von Opa bekommen hatte, woraufhin sich diese natürlich in Richtung des Großvaters bewegten und auch auf eine milde Spende von ihm hofften.

[29] Vgl.: Loyd, Sam. Gardner, Martin: Noch mehr mathematische Rätsel und Spiele. Köln: DuMont Buchverlag 1979. S. 213.

Der Großvater gab Simon drei Euro mehr als die Hälfte dessen, was ihm nach der Spende an Sophia noch geblieben war und Tobias bekam dann noch vier Euro mehr als die Hälfte dessen, was der Großvater nach den Gaben an Sophia und Simon noch besaß.
Nun fand der Großvater nur noch einen einzigen Euro in seiner Geldtasche.
Wie viel Geld hatte er bei sich gehabt bevor er auf Sophia, Simon und Tobias gestoßen ist?[30]

Lösung:
Bezeichnen wir die anfängliche Geldsumme des Großvaters mit x. Dann gilt:

$x - (\frac{x}{2} + 2) - [\frac{1}{2}(\frac{x}{2} - 2) + 3] - [\frac{1}{2}(\frac{x}{4} - 4) + 4] = 1$ | Klammern auflösen

$\frac{x}{2} - 2 - \frac{x}{4} + 1 - 3 - \frac{x}{8} + 2 - 4 = 1$ | zusammenfassen & (+ 6)

$\frac{x}{8} = 7$ | (· 8)

$x = 56$

Das heißt der freigiebige Großvater hatte zu Beginn sechsundfünfzig Euro in seiner Geldtasche.[31]

„Lienz-Wien“ und zurück

Die Klasse 7b des Bundesgymnasiums und Bundesrealgymnasiums der Stadt Lienz in Osttirol fährt auf „Wien-Woche“.
Bei einem Schulausflug in eine fremde Stadt kommt neben den vielen gemeinsamen Museumsbesuchen und Aktivitäten auch immer wieder einmal die Zeit, in der sich die Schüler/innen für ein paar Stunden frei bewegen dürfen.
So passiert es, dass die Klasse die Erlaubnis erhält heute Nachmittag die Stadt auf eigene Faust zu erkunden.
Dabei fällt auf, dass sich ein Fünftel aller Schüler/innen in Richtung des ersten Bezirks bewegt und ein Drittel auf die Neubaugasse fährt. Dreimal die Differenz dieser beiden Zahlen begibt sich auf die Donauinsel und eine einzige Schülerin kann

[30] Vgl.: Loyd, Sam. Gardner, Martin: Noch mehr mathematische Rätsel und Spiele. Köln: DuMont Buchverlag 1979. S. 75.
[31] Vgl.: Ebd. S. 189.

sich nicht so richtig entscheiden und macht somit einfach das Marathonprogramm indem sie alle diese Orte besucht.

Wie viele Schüler/innen sind insgesamt von Osttirol nach Wien gefahren?[32]

Lösung:

Die Gesamtzahl an Schüler/inne/n bezeichnen wir mit x. Dann gilt:

$\frac{x}{5} + \frac{x}{3} + 3 \cdot (\frac{x}{3} - \frac{x}{5}) + 1 = x$ | Klammer auflösen & zusammenfassen

$\frac{8x}{15} + \frac{6x}{15} + 1 = x$ | rechnen & $(- \frac{14x}{15})$

$1 = \frac{x}{15}$ | $(\cdot 15)$

$x = 15$

Die Klasse 7b besteht somit aus fünfzehn Schüler/inne/n.[33]

Geschichten, die das Leben prägen

Steffen war glücklich verheiratet, bis seine Frau eines Tages, für ihn vollkommen unerwartet, die Scheidung einreichte. Das geschah vor zwei Jahren. Mittlerweile fühlt sich Steffen wieder bereit sich einer anderen Frau gegenüber zu öffnen.

Es dauert nicht lange und schon sitzt er mit einer sehr sympathisch wirkenden Dame seines Alters in einem schönen Restaurant beim ersten Date.

Wie es nun mal so ist, erzählen die beiden erst einmal viel voneinander um sich kennenzulernen.

So meint Steffen, dass er ein Sechstel seines vergangenen Lebens in der Steiermark auf einem Bauernhof verbracht hat und ein Zwölftel seiner bisherigen Zeit in Wien war, wo er als Kellner gearbeitet hat. Anschließend war er ein Siebtel seines verlebten Lebens plus fünf Jahre im Ausland, genauer gesagt auf Kuba, und hat gefischt. Das machte er so lange bis seine damalige Freundin deren ersten gemeinsamen Sohn zur Welt brachte, der vor nicht allzu langer Zeit Aktivist bei Greenpeace wurde. Steffen überlegt und merkt, dass dies nun genau vier Jahre

[32] Vgl.: Loyd, Sam. Gardner, Martin: Noch mehr mathematische Rätsel und Spiele. Köln: DuMont Buchverlag 1979. S. 91.

[33] Vgl.: Ebd. S. 196.

zurückliegt. Damals hatte Tom, sein Sohn, die Hälfte des Alters, das er selbst jetzt hat. Wie alt ist Steffen?[34]

Lösung:
Klarerweise schreiben wir für das Alter von Steffen wieder x.
Somit:

$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$ | (· 84)

14x + 7x + 12x + 420 + 42x + 336 = 84x | zusammenfassen

75x + 756 = 84x | (– 75x) & (: 9)

x = 84

Steffen ist jetzt vierundachtzig Jahre alt.[35]

Geliebte, alte Drahtesel

Theresa hat sich vor einigen Jahren ein sehr altes, ziemlich kaputtes Rennrad um dreißig Euro gekauft. Das hat sie gemacht, weil es ihr einfach unglaublich gut gefallen hat und sie schon vor langem im Räder-Reparieren ein Hobby gefunden hat, in welchem sie nach wie vor sehr geschickt ist. So hat sie sich in der Folge ein paar Ersatzteile besorgt um das Rad wieder fahrtauglich zu machen.
Zwei Jahre später stieß sie auf ein noch wundervolleres Rad und verkaufte somit ihr „altes“ um siebzig Euro. Sie hatte das Gefühl, im Gesamten mit dem Rad einen Gewinn gemacht zu haben.
Als sie aber den Preis für die Ersatzteile berücksichtigte und noch einmal genau nachrechnete, bemerkte sie, dass sie bei der ganzen Aktion einiges an Geld verloren hat – keine Rede von Gewinn – und zwar zwei Drittel von dem, was sie selbst für das kaputte Rad gezahlt hat und zusätzlich ein Fünftel der Ersatzteilkosten.
Wie viel Geld hat Theresa im Endeffekt eingebüßt?[36]

[34] Vgl.: Loyd, Sam. Gardner, Martin: Noch mehr mathematische Rätsel und Spiele. Köln: DuMont Buchverlag 1979. S. 128.
[35] Vgl.: Ebd. S. 213.
[36] Vgl.: Ebd. S. 150.

Lösung:
x sei der Preis für die Ersatzteile, dann gilt:

$30 + x = 70 + \frac{2}{3} \cdot 30 + \frac{x}{5}$ | $(-\frac{x}{5})$, kürzen, rechnen & (-30)

$\frac{4x}{5} = 60$ | $(\cdot 5)$ & $(: 4)$

$x = 75$

Das heißt, die Kosten für die Ersatzteile beliefen sich auf ganze 75 Euro. Damit hat Theresa aber insgesamt 30 + 75 = 105 Euro für das Rad ausgegeben und hat am Ende nur 70 Euro dafür bekommen.
Insofern hat Theresa im Gesamten einen Verlust von 105 – 70 = 35 Euro gemacht.[37]

3.1.2 Lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten

Auch die linearen Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten waren schon Inhalt der Unterstufe. Daher will ich an dieser Stelle nur noch einmal kurz in Erinnerung rufen, was damit gemeint ist und welche Lösungsmethoden es gibt.

Ein lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen sieht aus wie folgt:

$a \cdot x + b \cdot y = c$ … wobei a und b nicht gleichzeitig null sein dürfen;
$d \cdot x + e \cdot y = f$ … wobei d und e nicht gleichzeitig null sein dürfen;

Hierbei sind a, b, c, d, e und f reelle Zahlen, die man kennt und für die zum Teil die oben genannten Einschränkungen gelten.
x und y sind die beiden Unbekannten, deren Werte gesucht werden.

Zwei bestimmte x und y nennt man Lösung dieses Gleichungssystems, wenn sie, eingesetzt in die beiden obigen Gleichungen, zu sinnvollen „Aussagen“ führen, das

[37] Vgl.: Loyd, Sam. Gardner, Martin: Noch mehr mathematische Rätsel und Spiele. Köln: DuMont Buchverlag 1979. S. 225.

heißt wenn durch ihre „Verwendung“ die linken Seiten gleich den rechten Seiten der Gleichungen werden.

Wie aber bekommt man die richtigen Werte von x und y?

Grundsätzlich gibt es mehrere verschiedene Lösungsverfahren, die sich aber alle sehr ähneln. Ich möchte hier nur die drei erwähnen, die mir am sinnvollsten erscheinen. So werde ich unter anderem die Cramer´sche Regel und auch das Lösen von nicht eindeutig lösbaren Gleichungssystemen auslassen.

Substitutionsverfahren (Einsetzen)

- Man schreibt eine der zwei Gleichungen so um, dass auf einer Seite nur mehr x oder y steht. Wir entscheiden uns hier für das x und drücken somit x durch y aus.
- Diesen Ausdruck für x setzt man nun in die zweite Gleichung anstatt des x ein, wodurch man eine lineare Gleichung mit nur mehr einer Unbekannten (in unserem Fall mit y) erhält.
- Nun berechnet man auf altbekannte Art und Weise das y.
- Dann setzt man dieses Ergebnis für y wiederum in den Ausdruck von x ein und erhält x.
- Zur Kontrolle setzen wir sowohl unser errechnetes x als auch unser y in die beiden Ausgangsgleichungen ein und schauen, ob wir zu sinnvollen Aussagen kommen.[38]

Komparationsverfahren (Gleichsetzen)

Dieses gleicht dem Substitutionsverfahren sehr, verdient meiner Ansicht nach aber trotzdem eine eigene Erwähnung.

- Ähnlich wie beim Substitutionsverfahren soll auf einer Seite nur x oder y stehen, das aber in beiden Gleichungen. Wir entscheiden uns wiederum für das x und erhalten das x zweimal als Ausdruck von y.

[38] Vgl.: Malle, Günther. Ramharter, Esther. Ulovec, Andreas. Kandl, Susanne: Mathematik verstehen 5. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG 2005. S. 154.

- Da nun in beiden Gleichungen auf einer Seite nur x steht und x gleich x ist, müssen auch die beiden anderen Seiten übereinstimmen; wir setzen sie gleich.
- Wir erhalten wieder eine lineare Gleichung mit nur einer Variablen (nämlich y) und können diese mit Hilfe der bekannten Umformungen lösen, wodurch wir auf das y kommen.
- Nun setzen wir den Wert für y wieder in unser durch y ausgedrücktes x ein und finden x.
- x und y in beide Anfangsgleichungen eingesetzt bringt uns die Probe.[39]

(Gauß´sches) *Eliminationsverfahren*

- Hier wird nun eine der Gleichungen mit einer geeigneten Konstante multipliziert damit in der Folge durch Addition der beiden Gleichungen eine Unbekannte wegfällt.

  Ist der Koeffizient von x in der ersten Gleichung beispielsweise „2“ und in der zweiten „-1“, so wäre es ratsam, die zweite Gleichung mit „2“ zu multiplizieren, denn „$2 + 2 \cdot (-1) = 0$“. Man kann auch beide Gleichungen mit verschiedenen Zahlen multiplizieren, wenn das die Koeffizienten einer Variablen entsprechend sinnvoll verändert.
- Nun addieren wir die beiden Gleichungen, wodurch eine Unbekannte wegfällt.
- Da nun ja eine Unbekannte weggefallen sein sollte, haben wir es wieder mit einer linearen Gleichung mit einer Unbekannten zu tun, die wir leicht lösen können. Wir erhalten den Wert für die eine Variable.
- Wir setzen den Wert der einen Unbekannten in eine der Anfangsgleichungen ein und erhalten die zweite.
- Um zu kontrollieren ob wir richtig gerechnet haben, können wir wieder die erhaltenen Werte für die zwei Variablen in die beiden Anfangsgleichungen einsetzen und auf sinnvolle Ergebnisse hoffen.[40]

---

[39] Vgl.: Reichel, Hans-Christian. Müller, Robert: Lehrbuch der Mathematik 5. Wien: öbv & hpt Verlagsgesellschaft mbH & Co. KG 2002. S. 209.

[40] Vgl.: Malle, Günther. Ramharter, Esther. Ulovec, Andreas. Kandl, Susanne: Mathematik verstehen 5. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG 2005. S. 154.

Nun wieder zu den Rätseln:

Schönes Licht

Florin hat als Schweißer seine kleine Wirtschaftsnische gefunden. Er kreiert sehr stilvolle Lampenfassungen und trifft dabei auch vollkommen den Geschmack seiner Klientel. Gerade vor kurzem hat er erst wieder zwei Fassungen um insgesamt sechshundert Euro verkauft.

Leider entsprechen seine Preisvorstellungen nicht immer denen der Kund/inn/en.

So hat er zwar an der einen Lampe fünfzehn Prozent Gewinn gemacht, an der anderen hat er jedoch fünfzehn Prozent verloren. Im Gesamten ist aber immerhin von einem Gewinn von sieben Prozent zu sprechen.

Wie teuer war für ihn die Herstellung der beiden gerade verkauften Lampenfassungen?[41]

Lösung:

x_1 beschreibe die Herstellungskosten der ersten und x_2 die der zweiten Fassung.

Da im Gesamten in den sechshundert Euro sieben Prozent, das heißt 0.07 Gewinn stecken, muss gelten:

- $x_1 + x_2 = 0.93 \cdot 600$

Des Weiteren gilt auch:

- $1.15x_1 + 0.85x_2 = 600$

Somit haben wir zwei Gleichungen und zwei Unbekannte.

Ich verwende hier nun das Substitutionsverfahren um zur Lösung zu kommen.

Aus dem ersten Punkt erhält man: $x_1 = 0.93 \cdot 600 – x_2$;

Dies in den zweiten Punkt eingesetzt ergibt:

$1.15 \cdot (0.93 \cdot 600 – x_2) + 0.85x_2 = 600$	| Klammer auflösen & rechnen
$641.7 – 1.15x_2 + 0.85x_2 = 600$	| zusammenfassen & (– 641.7)
$- 0.3x_2 = - 41.7$	| : (- 0.3)
$x_2 = 139$	

[41] Vgl.: Loyd, Sam. Gardner, Martin: Noch mehr mathematische Rätsel und Spiele. Köln: DuMont Buchverlag 1979. S. 146.

Dieses x_2 in $x_1 = 0.93 \cdot 600 - x_2$ eingesetzt, ergibt $x_1 = 419$.

Das heißt nun aber, dass Florin die Herstellung der ersten Lampenfassung 419 Euro und die der zweiten 139 Euro gekostet hat.[42]

Mathematik – die Voraussetzung für jede Party

Die zwei Geschwister Susanna und Peter, denen in ihrem Elternhaus ein schön eingerichtetes Zimmer im Keller für die eine oder andere Partynacht zur Verfügung steht, entscheiden sich für eben solche Anlässe gemeinsam ein ziemlich gutes Soundsystem für fünfhundert Euro zu kaufen. Beide tragen sie ihr Geld zusammen und sehen, dass sich folgende zwei Möglichkeiten ergeben:

Entweder gibt Susanna Peter $\frac{3}{4}$ ihres Budgets, wodurch sie zusammen mit Peters Geld das Soundsystem kaufen könnten – von Susannas Geld bliebe dann ein kleiner Rest übrig, den sie für Knabbereien ausgeben könnte -, oder Peter gibt Susanna $\frac{2}{3}$ seines Kapitals, wodurch sie sich dann wieder zusammen mit Susannas Geld das Ersehnte leisten könnten – nun müsste sich Peter mit seinem restlichen Geld um Knabbereien kümmern und tatsächlich könnte er genau gleich viele kaufen wie Susanna im anderen Fall.

Wie viel Geld geben die zwei für Party-Snacks aus?[43]

Lösung:

Sei x das Budget von Peter und y das von Susanna. Dann gilt:

- $\frac{3}{4}y + x = 500$
- $\frac{2}{3}x + y = 500$

Aus dem ersten Punkt folgt: $x = 500 - \frac{3}{4}y$;

dies in den zweiten eingesetzt, ergibt:

$$\frac{2}{3}\left(500 - \frac{3}{4}y\right) + y = 500 \qquad | (\cdot 3) \text{ \& rechnen}$$

[42] Vgl.: Loyd, Sam. Gardner, Martin: Noch mehr mathematische Rätsel und Spiele. Köln: DuMont Buchverlag 1979. S. 223.
[43] Vgl.: Ebd. S. 149.

$1000 - \frac{3}{2}y + 3y = 1500$ | rechnen & (· 2)

$3y = 1000$ | (: 3)

$y = \frac{1000}{3}$ | als gemischter Bruch

$y = 333\,\frac{1}{3}$

Das wiederum in $x = 500 - \frac{3}{4}y$ eingesetzt, bringt uns $x = 500 - 250 = 250$.

Peter hat diesem ganzen Projekt also 250 und Susanna $333\,\frac{1}{3}$ Euro beigesteuert.

Wie viel Geld haben die beiden aber in Party-Snacks investiert?
Nun ja, nachdem der Angabe nach beide von ihrem jeweiligen Restgeld gleich viele Knabbereien kaufen können, muss ihnen derselbe Geldbetrag übrig bleiben.
Peters Rest ist durch $\frac{1}{3}x$ gegeben und Susannas durch $\frac{1}{4}y$. Folglich:

$\frac{1}{3}x = \frac{1}{4}y$ | für x und y die obigen Werte einsetzen

$\frac{1}{3} \cdot 250 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1000}{3}$ | kürzen & rechnen

$\frac{250}{3} = \frac{250}{3}$

Somit haben wir also richtig gerechnet und es sind Party-Snacks im Wert von $\frac{250}{3} = 83\,\frac{1}{3}$ Euro gekauft worden.[44]

Auch Aufstehen soll gelernt sein

Die achtzehnjährige Corinna geht in die Matura-Klasse eines humanistischen Gymnasiums in Wien. Sie ist „chronische“ Langschläferin und verschläft regelmäßig. Da es ihrer Mutter wichtig ist, dass sie in der Schule gut mitkommt und in allen Stunden zumindest physisch anwesend ist, kümmert sie sich jeden Morgen darum, dass Corinna rechtzeitig aus den Federn kommt. Das findet sie mittlerweile aber unglaublich mühsam, vor allem auch, weil Corinna ja nun schon seit längerer Zeit volljährig ist und es noch immer nicht schafft, selbständig aufzustehen. Aus diesem

[44] Vgl.: Loyd, Sam. Gardner, Martin: Noch mehr mathematische Rätsel und Spiele. Köln: DuMont Buchverlag 1979. S. 224.

Grund schlägt sie Corinna einen Deal vor, obwohl sie diesen von einem erzieherischen Standpunkt aus gesehen eigentlich völlig idiotisch findet.

Sie will, dass Corinna zumindest einmal eine Woche lang, das heißt sieben aufeinander folgende Tage, selbständig aufsteht und nicht immer von ihr aus dem Bett geworfen werden muss. Für jedes „Selbst-Aufstehen“ verspricht die Mutter Corinna sechs Euro als Belohnung, wenn sie es allerdings nicht aus eigener Kraft schafft, muss Corinna ihrer Mutter zur Strafe acht Euro zahlen.

Nun ist die Woche vergangen und keine der beiden schuldet der anderen etwas.

An wie vielen Tagen hat Corinna selbständig ihr Bett verlassen und an wie vielen musste ihre Mutter etwas nachhelfen?[45]

Lösung:

Sei x die Anzahl der Tage, an denen Corinna selbständig aufgestanden ist und y die Anzahl der Tage, an denen die Mutter aktiv werden musste.

Dann gilt sicher: $x + y = 7$ (x oder y, nicht allerdings beide gleichzeitig, könnten unter Umständen natürlich auch null sein);

Des Weiteren heben sich die Belohnungen und die Strafen in der Summe offensichtlich auf. Belohnungen wurden x viele und Strafen y viele gezahlt.

Daher: $x \cdot 6 – y \cdot 8 = 0$;

Aus der ersten dieser beiden Gleichungen erhalten wir: $x = 7 – y$;

Und aus der zweiten durch Kürzen: $x = \frac{y \cdot 4}{3}$;

Somit können wir das Komparationsverfahren anwenden und erhalten die folgende nun zu lösende Gleichung:

$7 – y = \frac{y \cdot 4}{3}$ | $(\cdot 3)$

$21 – 3y = 4y$ | $(+ 3y)$ & $(: 7)$

$y = 3$

Somit stand Corinna an $7 – 3 = 4$ Tagen selbständig auf und an 3 Tagen musste ihre Mutter nachhelfen.[46]

[45] Vgl.: Loyd, Sam. Gardner, Martin: Noch mehr mathematische Rätsel und Spiele. Köln: DuMont Buchverlag 1979. S. 156.

Einstellungsprobleme

Der Inhaber einer Weberei hat gerade fünf Arbeiter/innen entlassen.

Ein Freund von ihm spricht ihn darauf an und fragt, warum er das denn gemacht habe. Es sei ja mittlerweile so schwer in diesem Bereich einen Job zu finden und nun stelle er als einer der verantwortungs- und verständnisvollsten Chefs der Welt fünf Leute quasi auf die Straße.

Dazu meint dieser, dass es ihm wirklich unglaublich leid tue, dass er aber schon vor einiger Zeit durch das Einstellen von zu vielen Leuten den entscheidenden Fehler begangen habe. Als er bemerkt habe, dass er dadurch niemandem mehr einen angemessenen Lohn zahlen konnte, habe er einfach die fünf zuletzt Eingestellten wieder gehen lassen müssen.

Auf die Frage, wie genau das zu verstehen sei, antwortete der Inhaber der Weberei, dass er mit diesen zusätzlichen fünf Arbeiter/inne/n jeder/jedem einzelnen nun um zwei Euro weniger als zuvor habe zahlen müssen. Aufgrund der ständig steigenden Lebenserhaltungskosten habe er sich daher trotz tiefstem Bedauern dazu gezwungen gefühlt, fünf Leute zu entlassen.

Er erzählt weiter, dass er damals eigentlich nicht nur fünf Neue einstellen habe wollen, sondern überhaupt gleich neun. Gott sei Dank habe er das aber aus welchem Grund auch immer nicht gemacht, denn dadurch hätten in der Folge alle um drei Euro weniger erhalten, was einfach unhaltbar gewesen wäre, und er hätte jetzt gleich neun Leute gehen lassen müssen.

Wie viel Geld verteilt der traurige Chef monatlich unter seinen Arbeiter/inne/n?[47]

Lösung:

Bezeichnen wir die Anzahl der Arbeiter/innen ohne zusätzlich Eingestellte/n mit x und den entsprechenden Pro-Kopf-Verdienst mit y, dann verteilt der Chef monatlich $x \cdot y$ Euro an Löhnen.

Bei insgesamt fünf Arbeiter/inne/n mehr (also $x + 5$), muss er pro Kopf um zwei Euro weniger Lohn auszahlen (das heißt $y – 2$).

Somit verteilt er in diesem Fall $(x + 5) \cdot (y – 2)$ Euro an Löhnen.

---

[46] Vgl.: Loyd, Sam. Gardner, Martin: Noch mehr mathematische Rätsel und Spiele. Köln: DuMont Buchverlag 1979. S. 226.

[47] Vgl.: Ebd. S. 81.

Bei neun zusätzlichen Angestellten (insgesamt also $x + 9$) kann er dann nur mehr $y – 3$ Euro pro Person auszahlen, das heißt im Gesamten $(x + 9) \cdot (y – 3)$ Euro.

Da die verteilten Löhne in der Summe jedoch immer gleich bleiben und sich nur die Art der Aufteilung ändert, können wir aus dem gerade Erwähnten nun mehrmals zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten gewinnen. Zum Beispiel die folgenden zwei:

- $x \cdot y = (x + 5) \cdot (y – 2)$ | Klammern auflösen
  $xy = xy – 2x + 5y – 10$ | (– xy) & (+ 2x)
  $2x = 5y – 10$
- $x \cdot y = (x + 9) \cdot (y – 3)$ | Klammern auflösen
  $xy = xy – 3x + 9y – 27$ | (– xy), (+ 3x) & (: 3)
  $x = 3y – 9$

Dieses $x = 3y – 9$ in das „Ergebnis“ des ersten Punktes eingesetzt, ergibt:
$2 \cdot (3y – 9) = 5y – 10$ | Klammer auflösen, (– 5y) & (+ 18)
$y = 8$

Und damit: $x = 3 \cdot 8 – 9 = 15$;

Der Chef verteilt somit monatlich $x \cdot y = 15 \cdot 8 = 120$ Euro unter seinen Arbeiter/inne/n.

Wenn man dieses „Gesamtlohnbudget“ betrachtet, muss das Rätsel fast in einer sehr viel früheren Zeit stattgefunden haben, in der es noch gar keinen Euro gegeben haben kann. Denn mit 120 Euro pro Monat wird man den eigenen Arbeiter/inne/n einen aktuellen mitteleuropäischen Durchschnittslohn sicher nicht bieten können.[48]

[48] Vgl.: Loyd, Sam. Gardner, Martin: Noch mehr mathematische Rätsel und Spiele. Köln: DuMont Buchverlag 1979. S. 193.

Zum Abschluss dieses Kapitels sollen die Interessierten noch ein wenig gefordert werden:

Nicht alles wird mit dem Alter leichter

Seppl, ein mittlerweile schon etwas in die Jahre gekommener Mann, der in seinem Dorf für seine schwer zu durchschauenden, gleichzeitig aber vollkommen sinnvollen und wahren Geschichten bekannt ist, erzählte kürzlich von einem kleinen Jungen, der im selben Dorf aufgewachsen ist wie er und der dort auch noch immer lebt. Ich möchte versuchen, die Geschichte wiederzugeben.

Der Junge heißt Pablo. Er war zu der Zeit, zu der ein gewisser Johann dem Alkoholismus verfiel, vierzig Monate alt. Johann ist mittlerweile vier Drittel mal so alt wie damals.

Pablo hat nun schon zwei Jahre mehr als das halbe Alter, von dem, das Seppl selbst damals hatte, als der Alkoholismus an Johanns Tür klopfte.

Die Zeit wird kommen, wenn Pablo das Alter erreicht haben wird, das Johann zu der damaligen entscheidenden Zeit hatte und wenn es soweit ist, werden die drei zusammen hundert Jahre zählen, sofern alle von ihnen noch am Leben sein werden.

Wer kann hier herauslesen, wie alt der kleine Pablo jetzt ist?[49]

Lösung:

Wir bezeichnen Johanns „damaliges“ Alter mit x und Seppls mit y. Dann kommt man durch genaues Lesen der Angabe auf den Großteil der unten stehenden Tabelle.

Wenn man Pablos „damaliges“ und sein „jetziges“ Alter aus dem Text herausgelesen hat, dann kann man durch Subtraktion („jetzt“ minus „damals“) die Monate bestimmen, die zwischen „damals“ und „jetzt“ liegen, diese in Seppls Spalte zu seinem „damaligen“ Alter dazuzählen und kommt somit auf sein „jetziges“.

Analog erhält man in Johanns Spalte die vergangenen Jahre auch durch Subtraktion („jetzt“ minus „damals“) und erhält somit zwei verschiedene Versionen von Seppls „jetzigem“ Alter.

Genauso zählt man auch die Differenz an Monaten zwischen Pablos „dann“ und „jetzt“ zu Johanns und Seppls „jetzt“ dazu und kann auf diese Weise die Tabelle vervollständigen.

[49] Vgl.: Loyd, Sam. Gardner, Martin: Noch mehr mathematische Rätsel und Spiele. Köln: DuMont Buchverlag 1979. S. 107.

	Johann	Pablo	Seppl
damals	x	40 Monate	y
jetzt	$\frac{4}{3}$ x	$\frac{y}{2}$ + 2 Jahre = $\frac{y}{2}$ + 24 Monate	y + $\frac{y}{2}$ – 16 = y + $\frac{x}{3}$
dann	$\frac{4}{3}$ x + (x – $\frac{y}{2}$ – 24)	x	$\frac{3y}{2}$ – 16 + (x – $\frac{y}{2}$ – 24)

Unsere erste Gleichung können wir Seppls Spalte entnehmen:

$y + \frac{y}{2} - 16 = y + \frac{x}{3}$ | (– y) & (· 6)

$3y - 96 = 2x$ | (+ 96) & (: 3)

$y = 32 + \frac{2x}{3}$

Nun wissen wir aber auch noch, dass die „dann"-Alter addiert 100 Jahre, das heißt 1200 Monate, ergeben müssen. Also:

$\frac{4}{3}x + (x - \frac{y}{2} - 24) + x + \frac{3y}{2} - 16 + (x - \frac{y}{2} - 24) = 1200$ | zusammenfassen & (+ 64)

$\frac{13}{3}x + \frac{y}{2} = 1264$ | (· 6)

$26x + 3y = 7584$ | $y = 32 + \frac{2x}{3}$ (siehe oben)

$26x + 96 + 2x = 7584$ | zusammenfassen & (– 96)

$28x = 7488$ | (: 28)

$x = 267.429$

Damit: $y = 32 + \frac{2x}{3} = 32 + \frac{7488}{42} = \frac{8832}{42} = \frac{1472}{7}$;

und Pablos „jetziges" Alter: $\frac{y}{2} + 24 = \frac{736}{7} + 24 = \frac{904}{7} = 129.143$;

Da wir alles in Monaten gerechnet haben, beschreibt auch dieses Ergebnis Monate. Insofern ist Pablo jetzt $\frac{904}{12 \cdot 7} = \frac{226}{21} = 10\,\frac{16}{21}$ Jahre alt.[50]

[50] Vgl.: Loyd, Sam. Gardner, Martin: Noch mehr mathematische Rätsel und Spiele. Köln: DuMont Buchverlag 1979. S. 203.

Verzwickte Verhältnisse

Coretta und Ingrid, zwei Cousinen, sind gerade auf einen sie beide betreffenden lustigen Alterszusammenhang gestoßen.

Coretta ist nämlich achtzehn und offensichtlich dreimal so alt, wie Ingrid gewesen ist, als Coretta das Alter gehabt hat, das Ingrid zum momentanen Zeitpunkt hat.

Gefragt ist natürlich das Alter von Ingrid.

Lösung:

Dieses Rätsel wirkt aufgrund seiner Kürze relativ leicht. Dem ist aber nicht wirklich so. Grundsätzlich gibt es, ähnlich wie im Rätsel zuvor, wieder mehrere zeitliche Schauplätze. Genauer gesagt sind es hier zwei, nämlich „damals“ und „jetzt“.

Wenn man die Angabe analysiert, für das „jetzige“ Alter von Ingrid „I“ und für die Anzahl der Jahre zwischen „damals“ und „jetzt“ „x“ schreibt, kommt man auf die folgende Tabelle:

	Coretta	Ingrid
damals	18 – x = I	I – x
jetzt	18 = 3 · (I – x)	I

Damit hat man wieder zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten:

- 18 – x = I
- 18 = 3 · (I – x)

Die erste in die zweite Gleichung eingesetzt und eine Division durch 3 ergeben:

6 = 18 – 2x | (– 18) & [: (– 2)]

x = 6

Mit Hilfe der ersten Gleichung kommt man damit aber auf: I = 18 – 6 = 12;

Somit ist Ingrid jetzt zwölf Jahre alt.[51]

[51] Vgl.: mathsoft.de: Marrys Geburtstag.
In: http://www.matheraetsel.de/archiv/Algebra/Marry/MARRY2.PDF (11. Dezember 2012)

3.1.3 Quadratische Gleichungen

Im Gegensatz zu den linearen Gleichungen, bei denen nur „1“ als Hochzahl der Variable zugelassen ist, hat man nun bei den quadratischen Gleichungen neben der „1“ auch die „2“ als Hochzahl der Unbekannten.
Das Ziel wird es sein, Gleichungen zu lösen, die aussehen wie $ax^2 + bx + c = 0$, wobei a (≠ 0), b und c wieder reelle Zahlen sind, die man kennt und x ist die Variable.

Wir betrachten vier (Spezial-)Fälle:

1. $x^2 = d$ (d. h. $a = 1$, $b = 0$ und $c = - d$)
2. $(x – d)^2 = e$ (d. h. $a = 1$, $b = - 2d$ und $c = d^2 – e$)
3. $ax^2 + bx = 0$ (d. h. $c = 0$)
4. $x^2 + bx + c = 0$ (d. h. $a = 1$)

Ad 1.:
Durch einfaches Wurzelziehen und Beachten dessen, dass in einer Quadratzahl immer auch der negative Teil enthalten ist, kommt man zu:
$x = \pm \sqrt{d}$;

Ad 2.:
Zuerst kommt man durch Wurzelziehen und unter Beachtung des Negativen auf:
$x – d = \pm \sqrt{e}$;

Mit Hilfe elementarer Umformung erhält man das Ergebnis:
$x = d \pm \sqrt{e}$;

Ad 3.:
Man hebt zu Beginn ein x heraus und erhält:
$x \cdot (ax + b) = 0$;

Da ein Produkt genau dann null ist, wenn zumindest einer der beiden Faktoren null ist, gilt: $x = 0$ oder $ax + b = 0$;

Das heißt:

$x = 0$ oder $x = -\frac{b}{a}$;

Ad 4.:

Indem wir auf beiden Seiten der Gleichung (- c) rechnen, erhalten wir:

$x^2 + bx = -c$;

An dieser Stelle kommt ein kleiner Trick ins Spiel. Wir addieren auf beiden Seiten $(\frac{b}{2})^2$ um in der Folge auf der linken Seite die Binomische Formel anwenden zu können. Also: $x^2 + bx + (\frac{b}{2})^2 = (\frac{b}{2})^2 - c$;

Mit dem Wissen über die Binomische Formel $[a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2]$ erhalten wir:

$(x + \frac{b}{2})^2 = (\frac{b}{2})^2 - c$;

„$(\frac{b}{2})^2 - c$“ bezeichnen wir der Einfachheit halber mit „D“. Somit:

$(x + \frac{b}{2})^2 = D$;

Nun sind wir wieder beim Wurzelziehen angelangt.

Wenn wir hier allerdings die Wurzel ziehen wollen, so müssen wir drei Fälle unterscheiden:

Fall 1: $D > 0$, dann können wir ganz einfach die Wurzel ziehen und erhalten:

$x + \frac{b}{2} = \pm \sqrt{D}$; und somit gelangen wir durch elementare Umformung zu:

$x_1 = -\frac{b}{2} + \sqrt{D}$ und $x_2 = -\frac{b}{2} - \sqrt{D}$; (zwei Lösungen)

Fall 2: D = 0, dann ist das Ganze sehr einfach, denn $\sqrt{0}$ = 0 und es gilt:

$x + \frac{b}{2} = 0$; das heißt: $x = -\frac{b}{2}$; (genau eine Lösung)

Fall 3: D < 0, dann können wir die Gleichung (noch) nicht lösen.

Auf der linken Seite steht wegen dem „^{2}" etwas, das größer oder gleich null ist und die rechte Seite beschreibt auf jeden Fall etwas Negatives.

Daher kann hier (noch) keine Gleichheit herrschen, weshalb wir (noch) keine Lösung finden. (keine Lösung)[52]

Fassen wir „Ad 4." zusammen, so erhalten wir die sehr wichtige *kleine Lösungsformel für quadratische Gleichungen*:

Eine quadratische Gleichung $x^2 + bx + c = 0$, wobei b und c reelle Zahlen sind, hat

- zwei reelle Zahlen als Lösungen, wenn $(\frac{b}{2})^2 - c > 0$,
- genau eine reelle Zahl als Lösung, wenn $(\frac{b}{2})^2 - c = 0$,
- keine reelle Zahl als Lösung, wenn $(\frac{b}{2})^2 - c < 0$.

Für Fall, dass $(\frac{b}{2})^2 - c \geq 0$, gilt:

$$x^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}\ ;$$

Damit sind wir beim allgemeinen Fall „$ax^2 + bx + c = 0$" angelangt, den ich nun aber nicht mehr allzu ausführlich besprechen werde.

Was ich diesbezüglich anmerken möchte, ist, dass man ihn ganz leicht auf den jetzt zuletzt behandelten Fall zurückführen kann, indem man beide Seiten der Gleichung durch „a" dividiert. Damit hat man diesen allgemeinen Fall aber auch schon in der Tasche.

[52] Vgl.: Malle, Günther. Ramharter, Esther. Ulovec, Andreas. Kandl, Susanne: Mathematik verstehen 5. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG 2005. S. 157ff.

Es gibt zwar eine spezielle Lösungsformel für den allgemeinen Fall – *die große Lösungsformel* -, diese finde ich aber aufgrund des gerade Erwähnten relativ überflüssig, weshalb ich von ihr nur ihre Existenz und ihren Namen erwähnt wissen möchte.

Ohne dass ich näher darauf eingehen werde, soll aufgrund seiner doch unbestrittenen Wichtigkeit auch *der Satz von Vieta für quadratische Gleichungen* seine Erwähnung finden:

> Besitzt eine quadratische Gleichung $x^2 + bx + c = 0$ die Lösungen x_1 und x_2 (die auch zusammenfallen, das heißt, gleich sein können), so gilt:
>
> 1. $x^2 + bx + c = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$, das heißt, der behandelte Gleichungsterm lässt sich als Produkt von zwei Linearfaktoren schreiben;
> 2. $b = -(x_1 + x_2)$ und $c = x_1 \cdot x_2$;

Einkaufsstress

Mein Vater kam kürzlich ziemlich verwirrt vom Einkaufen zurück – der ganze Stress hatte seine Spuren hinterlassen. Er war sich nicht mehr sicher, ob die drei Euro und vierundzwanzig Cent, die er für die wenigen Sachen bezahlt hat, nicht viel zu viel waren.

Daher setzte ich mich gemeinsam mit ihm hin und versuchte ihn zu beruhigen.

Er begann zu erzählen, dass er Bananen, dann das Vierfache davon an Tomaten und zu guter Letzt noch achtmal soviel Radieschen wie Bananen gekauft hat und dass der Stückpreis in Cent jeweils der Anzahl der gekauften Artikel entsprach.

Ich musste kurz überlegen, wusste aber relativ schnell wie viel er von alledem besorgt hat und dass die drei Euro und vierundzwanzig Cent in Ordnung gingen.

Wer kann sagen, wie viele Bananen, Tomaten und Radieschen mein Vater gekauft hat?[53]

[53] Vgl.: Loyd, Sam. Gardner, Martin: Noch mehr mathematische Rätsel und Spiele. Köln: DuMont Buchverlag 1979. S. 48.

Lösung:

Sagen wir mein Vater hat x Bananen gekauft. Dann hat er 4x Tomaten und 8x Radieschen erstanden.

Für eine Banane zahlt er x, für eine Tomate 4x und für ein Radieschen 8x Cent.

Insgesamt hat er 3.24 Euro, also 324 Cent, bezahlt. Somit:

$x \cdot x + 4x \cdot 4x + 8x \cdot 8x = 324$	| rechnen
$x^2 + 16x^2 + 64x^2 = 324$	| rechnen & (: 81)
$x^2 = 4$	| Wurzel ziehen
$x_1 = +2$ und $x_2 = -2$	

„- 2“ ist hier nicht sehr sinnvoll, weshalb mein Vater x = 2 Bananen, 4x = 8 Tomaten und 8x = 16 Radieschen gekauft hat.[54]

Das folgende Rätsel verlangt sehr aufmerksames Lesen und höchste Konzentration:

Alterszusammenhänge

Raffael ist fünfzehn und seine Mutter vierzig Jahre alt.

In wie vielen Jahren wird die Mutter um exakt das Vielfache genau dieser Jahre älter sein als Raffael es vor so vielen Jahren war?

Lösung:

Die Anzahl der Jahre sei n. Dann gilt:

$40 + n = n \cdot (15 - n)$	| Klammer auflösen
$40 + n = 15n - n^2$	| $(+ n^2)$ & $(- 15n)$
$n^2 - 14n + 40 = 0$	| kleine Lösungsformel
$n_{1,2} = 7 \pm \sqrt{49 - 40}$	
$n_{1,2} = 7 \pm 3$	
$n_1 = 10$ und $n_2 = 4$	

Wie man sieht, gibt es prinzipiell zwei mögliche Antworten auf die obige Frage.

In $n_1 = 10$ Jahren wird die Mutter 40 + 10 = 50 Jahre alt sein und das ist genau

[54] Vgl.: Loyd, Sam. Gardner, Martin: Noch mehr mathematische Rätsel und Spiele. Köln: DuMont Buchverlag 1979. S. 176.

10 · (15 – 10) = 50. Die erste Antwort stimmt schon einmal.

Genauso sollte es auch mit 4 Jahren funktionieren. In 4 Jahren wird die Mutter 40 + 4 = 44 Jahre alt sein und das ist genau 4 · (15 – 4) = 44. Auch für n_2 = 4 Jahre kommt das obige Rätsel also zu einer richtigen Lösung.[55]

Auf Kosten der Anderen

Neulich machte die Klasse 6c eine Exkursion ins „mumok“, das Museum moderner Kunst in Wien. Um die zu sehende Ausstellung richtig verstehen und intellektuell voll und ganz aufnehmen zu können, hat die verantwortliche Lehrerin schon im Voraus eine Führung bestellt. Diese wurde nun aber unter anderem auch als Teil eines Kombipakets angeboten, welches zusätzlich zu den Eintrittskarten und der Führung noch ein Mittagessen beinhaltet und das alles für 336 Euro für alle zusammen. Die Lehrerin rechnete kurz nach und ließ sich dann auf das Angebot ein.

Da am Tag der Exkursion allerdings drei Schüler/innen krank zu Hause bleiben mussten, erhöhte sich der Preis pro Person um zwei Euro.

Kann aus diesen Informationen jemand schließen, wie viele Schüler/innen ursprünglich mit ins Museum kommen wollten?

Lösung:

Mit x bezeichne ich die ursprünglich geplante Anzahl an Schüler/inne/n. Diese x Leute haben zusammen 336 Euro bezahlt, das sind $\frac{336}{x}$ Euro pro Person.

Nun fehlen am Tag des Museumsbesuchs aber drei. Das heißt, schlussendlich gehen nur x – 3 Schüler/innen ins Museum, die nun aufgrund der Abwesenheit der drei eben jeweils zwei Euro mehr bezahlen müssen. Das heißt der Pro-Kopf-Preis erhöht sich von $\frac{336}{x}$ auf $\frac{336}{x}$ + 2 Euro.

Insofern kommt man eben nicht durch das x-fache Zahlen von $\frac{336}{x}$ auf 336 Euro, sondern eben durch das (x – 3)-fache Zahlen von $\frac{336}{x}$ + 2. Also:

$(x - 3) \cdot (\frac{336}{x} + 2) = 336$ | Klammern auflösen

[55] Vgl.: Klassenarbeiten.net: DIE SCHÜLERCOMMUNITY. In: http://www.klassenarbeiten.net/klassenarbeiten/uebungen/klasse9/mathematik/quadratextaufgaben.shtml (6. Dezember 2012)

$336 + 2x - \frac{1008}{x} - 6 = 336$ | (– 336) & (· x)

$2x^2 - 1008 - 6x = 0$ | anordnen und (: 2)

$x^2 - 3x - 504 = 0$ | kleine Lösungsformel

$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 504}$

$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \frac{45}{2}$

$x_1 = 24$ und $x_2 = -21$

Die negative Lösung macht in unserem Zusammenhang nicht viel Sinn, weshalb ursprünglich vierundzwanzig Schüler/innen das „mumok“ besuchen wollten.[56]

Stück für Stück

Aufgrund ihrer Begeisterung für Farbe, Qualität und Preis kaufte Marianne Fritz vor zwei Monaten um zweihundertdreiundvierzig Euro einige Meter Stoff, die sie nun aufgrund einer akuten Verschlechterung ihrer Sehkraft leider nicht mehr verarbeiten kann. Daher stellt sie ein Photo und eine passende Beschreibung ihres Stoffes auf mehrere „Verkauf-Ankauf-Plattformen“ im Internet und bietet ihn zum Verkauf an.

Als sie nach einer Woche noch immer keine einzige Anfrage erhalten hat, denkt sie den Grund dafür in der Größe des Stoffes erkannt zu haben, teilt diesen in mehrere gleiche Teile und siehe da, unmittelbar nachdem sie die kleineren Varianten ins Netz gestellt hat, melden sich schon einige Leute und der ganze Stoff ist in kürzester Zeit verkauft.

Für jedes der einzelnen Stücke erhält Frau Fritz achtzehn Euro. Damit hat sie im Endeffekt an ihrem Stoffan- und -verkauf verdient und zwar genauso viel, wie sie beim ursprünglichen Preis für sechs solche kleinere, ihrer Stücke bezahlt hätte.

Wie viele Stoffstücke hat Marianne Fritz über das Internet verkauft?[57]

---

56 Vgl.: Klassenarbeiten.net: DIE SCHÜLERCOMMUNITY. In: http://www.klassenarbeiten.net/klassenarbeiten/uebungen/klasse9/mathematik/quadratextaufgaben.shtml (6. Dezember 2012)

57 Vgl.: Loyd, Sam. Gardner, Martin: Noch mehr mathematische Rätsel und Spiele. Köln: DuMont Buchverlag 1979. S. 151.

Lösung:

Die Anzahl der Stoffstücke bezeichnen wir mit x. Dann hätte beim ursprünglichen Preis, den Marianne Fritz gezahlt hat, ein Stück $\frac{243}{x}$ Euro gekostet.

Da Frau Fritz für jedes der verkauften Stücke nun aber achtzehn Euro erhalten hat, hat sie beim Verkauf insgesamt $x \cdot 18$ Euro verdient.

Dadurch hat sie im Endeffekt anscheinend genauso viel an Geld gewonnen, wie ursprünglich sechs der kleineren Stücke Stoff gekostet hätten. Das heißt:

$x \cdot 18 - 243 = 6 \cdot \frac{243}{x}$ | $(\cdot\, x)$, $(:18)$ & kürzen

$x^2 - \frac{27}{2}x - 81 = 0$ | kleine Lösungsformel

$x_{1,2} = \frac{27}{4} \pm \sqrt{\frac{729}{16} + 81}$

$x_{1,2} = \frac{27}{4} \pm \frac{45}{4}$

$x_1 = 18$ und $x_2 = -\frac{9}{2}$

Die negative Lösung macht in unserem Rätsel wieder einmal keinen Sinn. Somit hat Frau Fritz über das Internet achtzehn Stoffstücke verkauft.[58]

[58] Vgl.: Loyd, Sam. Gardner, Martin: Noch mehr mathematische Rätsel und Spiele. Köln: DuMont Buchverlag 1979. S. 225.

3.2 Kombinatorik

3.2.1 „n^k“ – geordnete Stichproben mit Zurücklegen

Löse das folgende Rätsel!

Gewonnen? Unentschieden? Verloren?
Jede/r von uns kennt wahrscheinlich Totoscheine. Dabei geht es um das Erraten des korrekten Ergebnisses von elf Spielen der Fußballbundesliga.
Für einen Sieg der Mannschaft mit Heimvorteil schreibt man „1“, für ein Unentschieden „0“ und für einen Erfolg der Mannschaft, die zu Gast ist, „2“.

Ich möchte von dir nun die Anzahl der Möglichkeiten wissen, die es gibt, um einen solchen Schein zu komplettieren![59]

Lösung:
Für das erste Spiel gibt es drei Möglichkeiten, „1“, „0“ und „2“; für das zweite genauso. Das heißt für die ersten beiden Spiele zusammen gibt es $3 \cdot 3 = 3^2$ Möglichkeiten.
Da man sich insgesamt elf Spiele anschauen muss und man für jedes eben drei mögliche Tipps zur Verfügung hat, gibt es für den ganzen Schein
$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3 = 3^{11}$ Möglichkeiten. $3^{11} = 177147$;
Insofern kann man einen solchen Schein auf 177147 unterschiedliche Arten ausfüllen.[60]

Die Lösung dieser ersten Aufgabe im Bereich der Kombinatorik sollte uns nicht allzu schwer gefallen sein. Wir haben es hier eigentlich mit nichts wirklich Neuem zu tun, wir beginnen nur einfach bewusst mit den uns bereits zur Verfügung stehenden Werkzeugen zu zählen. Dabei ist „n^k“ schon einmal sehr wichtig.
Aufgaben oder Rätsel, die man in mehrere, nacheinander untersuchbare Stufen aufteilen kann (hier: die einzelnen Tippreihen) und bei denen man auf jeder Stufe

[59] Vgl.: Bezirksregierung Düsseldorf: Mathe-Treff.
In: http://www.brd.nrw.de/lerntreffs/mathe/pages/knobel/2004/r37_78.html (18. Juni 2012)
[60] Vgl.: Bezirksregierung Düsseldorf: Mathe-Treff.
In: http://www.brd.nrw.de/lerntreffs/mathe/pages/knobel/2004/l37/l37_78.pdf (18. Juni 2012)

wieder dieselbe Anzahl an Möglichkeiten zur Verfügung hat, nennt man *geordnete Stichproben mit Zurücklegen*.[61]

Mit dieser Definition können wir nun unser erstes selbst erarbeitetes Ergebnis formulieren:

> Aus n verschiedenen Elementen einer Menge erhält man durch k-faches Ziehen $n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k$ geordnete Stichproben mit Zurücklegen.

Weitere Aufgaben:

Rechnen mit Würfeln

Martin, Isabella und Ibrahim sind gute Freunde. Isabella hat vor kurzem sechs wunderbare Würfel zu ihrem Geburtstag geschenkt bekommen, über die sie sich sehr freut. Nun hat sie Martin und Ibrahim zu einem netten Abend bei ihr eingeladen und beim Überlegen, welche Spiele man mit sechs Würfeln spielen könnte, sind sie auf eine Frage gestoßen:

Auf den Würfeln sind ja die Zahlen „1“ bis „6“ abgebildet. Wenn man die Würfel nun nebeneinander auflegt – beginnend mit nur einem, dann zwei, dann drei, … und am Ende sechs -, wie viele unterschiedliche Zahlen kann man dabei „entstehen“ lassen?[62]

Lösung:

Wenn man zuerst nur einen Würfel auflegt, so ist klar, dass man dabei einstellige Zahlen, das heißt Ziffern erhalten wird. Mit zwei Würfeln bekommt man zweistellige, mit drei dreistellige, … und mit sechs Würfeln sechsstellige Zahlen.

Jeder der sechs Würfel liefert sechs mögliche Werte („1“, „2“, „3“, „4“, „5“ und „6“).

Das heißt, legt man nur einen Würfel auf, dann hat man sechs mögliche Zahlen.

Mit zwei Würfeln erhält man $6 \cdot 6 = 6^2 = 36$ Möglichkeiten, mit drei $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$ und so weiter bis sich mit sechs Würfeln $6 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 6 = 6^6 = 46656$ mögliche Zahlen ergeben. Die Summe all dieser Möglichkeiten ist 55986.

[61] Vgl.: Götz, Stefan. Reichel, Hans-Christian. Müller, Robert. Hanisch, Günter: Mathematik Lehrbuch 6. Wien: öbvhpt Verlagsgesellschaft mbH. & Co. KG 2005. S. 181.

[62] Vgl.: Bezirksregierung Düsseldorf: Mathe-Treff.
In: http://www.brd.nrw.de/lerntreffs/mathe/pages/knobel/2010/r66/r66_56.html (17. Juni 2012)

Auf die besprochene Art und Weise können somit 55986 unterschiedliche Zahlen gelegt werden.[63]

Belohnte Abenteuer

Mario hat vor kurzem angefangen, den geheimnisvollen Keller seiner Großeltern zu erkunden. Überall hatte er mit Spinnweben zu kämpfen und seine Angst vor der Dunkelheit machte dieses Unternehmen für ihn auch nicht einfacher. Am dritten Tag seines Abenteurerdaseins sollte er allerdings für seinen Mut belohnt werden. Er stieß auf eine riesige Schachtel voller Faschingskostüme. Er liebte es schon immer sich zu verkleiden.

Nachdem er die Schachtel geleert und deren Inhalt untersucht hatte, konnte er mit Sicherheit sagen, dass er vier vollständige neue Verkleidungen gefunden hatte.

Diese bestanden jeweils aus einem „Kopfschmuck“, einem Ober- und Unterteil sowie einem Accessoire.

Als „Kopfschmuck“ standen eine Batman-Maske, ein Cowboyhut, ein Helm für Stahlarbeiter und eine engelhafte blonde Elfenperücke zur Verfügung.

Dazu gab es dann natürlich das Batman-Cape, Cowboyhemd und -hose, Arbeitskleidung und ein weißes Kleid.

Zu guter Letzt gehörte zu all diesen Verkleidungen aber auch noch ein Accessoire.

Batman benötigt natürlich seinen Batarang, der Cowboy seine Pistole, der Arbeiter sein Stemmeisen und die Elfe ihre Flügel.

Was Verkleidungen angeht, ist Mario sehr experimentierfreudig. Ein Kostüm so anzuziehen wie es gedacht ist, empfindet er als langweilig.

Daher nun die Frage: Wie viele verschiedene Verkleidungen kann er aus den ihm zur Verfügung stehenden zwölf „Gegenständen“ kreieren, wenn jede davon aus drei Teilen bestehen soll – Kopfbedeckung, Kleidung, Accessoire?[64]

[63] Vgl.: Bezirksregierung Düsseldorf: Mathe-Treff.
In: http://www.brd.nrw.de/lerntreffs/mathe/pages/knobel/2010/r66/l66_56.pdf (17. Juni 2012)
[64] Vgl.: Bezirksregierung Düsseldorf: Mathe-Treff.
In: http://www.brd.nrw.de/lerntreffs/mathe/pages/knobel/2011/r70/r70_34.html (30. Juni 2012)

Lösung:

Für die Kopfbedeckung gibt es vier Möglichkeiten, zum Anziehen hat man vier Kleidungsstücke zur Auswahl und Accessoires hat man auch vier zur Verfügung. Diese Möglichkeiten miteinander kombiniert, ergibt: $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64$;

Im Gesamten kann Mario also vierundsechzig verschiedene Verkleidungen zusammenstellen.

Was man allerdings in der Lösung nicht vergessen darf, ist, dass vier von diesen Kostümen „ordentliche“ und somit für Mario uninteressant sind. Diese muss man von unserem Zwischenergebnis noch abziehen um das richtige Endergebnis zu erhalten. Letztendlich erhält Mario somit sechzig außergewöhnliche Verkleidungen.[65]

Telefonieren leicht gemacht

In einigen ländlicheren Gegenden Österreichs bestehen Telefonnummern oft nur aus fünf Ziffern.

Wie viele Haushalte können damit aber eine eigene Telefonnummer zugesprochen bekommen, wenn für die erste Ziffer der Nummer die Null nicht in Frage kommt?

Lösung:

„Fünf Ziffern“ bedeutet, dass die gesuchten Telefonnummern aus fünf einstelligen Zahlen bestehen, für die es natürlich jeweils zehn Möglichkeiten („0“, „1“, „2“, …, „9“) gibt, außer für die erste, hier haben wir nur neun Möglichkeiten (die „0“ ist ja nicht erlaubt) zur Verfügung.

Insgesamt ergeben sich also $9 \cdot 10^4 = 90\,000$ mögliche Telefonnummern.[66]

[65] Vgl.: Bezirksregierung Düsseldorf: Mathe-Treff.
In: http://www.brd.nrw.de/lerntreffs/mathe/pages/knobel/2011/r70/l70_34.pdf (30. Juni 2012)

[66] Vgl.: Schule-Studium.de: Das Schul- und Studienportal.
In: http://www.schule-studium.de/Mathe/Wahrscheinlichkeitsrechnung-Tupel-Permutation-Aufgaben.html (18. Juni 2012)

3.2.2 Die Fakultät „!“ – geordnete Stichproben ohne Zurücklegen

Zu Beginn gleich ein Rätsel:

Wer wird wohl gewinnen?
Heute sehen wir den Hundert-Meter-Sprint der Mädchen der Klasse 3a.
Acht motivierte Läuferinnen stehen am Start und der Lauf wird in wenigen Sekunden beginnen.
Die Freunde/Freundinnen der Teilnehmerinnen besprechen sich schon über den möglichen Ausgang des Rennens. Aber wie viele verschiedene Zieleinläufe kann es überhaupt geben?

Lösung:
Wenn man sich alle Läuferinnen in einer Reihe stehend vorstellt und eine nach der anderen abgeht um sich Zielplatzierungen für jede zu überlegen, so sieht man, dass man für die erste Läuferin acht Möglichkeiten hat (erster bis achter Platz). Für die zweite Läuferin sind nun aber nur mehr sieben mögliche Plätze übrig, da ja die erste schon einen eingenommen hat. Für die dritte Läuferin haben wir noch sechs Möglichkeiten und so weiter bis wir bei der achten Läuferin angekommen sind, für welche noch genau ein möglicher Platz übrig bleibt.
Im Gesamten erhalten wir für die acht Läuferinnen also $8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 40320$ mögliche Reihenfolgen beim Zieleinlauf.[67]

Produkte der Form „$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$“ oder eben „$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 7 \cdot 8$“, wie das hier am Ende der Rätsels Lösung, sind in der Kombinatorik sehr wichtig und treten auch sehr häufig auf, weshalb man für sie einen eigenen Namen sowie eine eigene Schreibweise eingeführt hat.

Damit kann man die beiden obigen Produkte weniger aufwändig als „8!“ schreiben. Das heißt: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 7 \cdot 8 = 8!$

[67] Vgl.: Schule-Studium.de: Das Schul- und Studienportal.
In: http://www.schule-studium.de/Mathe/Wahrscheinlichkeitsrechnung-Tupel-Permutation-Aufgaben.html (18. Juni 2012)

Man spricht acht *Fakultät* oder acht *Faktorielle*.[68]

Allgemein gilt:

> $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n - 1) \cdot n$, das heißt man multipliziert alle natürlichen Zahlen, beginnend bei „1“ bis zu der Zahl, die vor dem Fakultätszeichen („!“) steht;

Mathematischer:

> Unter der Fakultätsfunktion $n!$ versteht man die Funktion $!: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $0! = 1$ und $n! = n \cdot (n - 1)!$.

Wir wollen wieder kurz ein wenig allgemeiner werden:

Wenn man im Bezug auf die vorher behandelten geordneten Stichproben mit Zurücklegen das obige Rätsel analysiert, so sieht man, dass dieses zwar in mehrere Stufen aufgeteilt werden kann, man findet jedoch nicht auf jeder der Stufen die gleiche Anzahl an Möglichkeiten vor.

Der Grund dafür ist, dass man es hier nun mit *geordneten Stichproben ohne Zurücklegen* zu tun hat.
„Ohne Zurücklegen“ besagt ja vom Wort her schon, dass man nicht immer wieder dieselbe Ausgangslage vorfindet, da eben nicht mehr zurückgelegt wird – bestimmte „Elemente“ werden weggenommen, verwendet bzw. fixiert.
Dadurch werden die Möglichkeiten nun aber von Stufe zu Stufe weniger.

In unserem Rätsel von gerade eben:
Man hat für das erste Mädchen acht mögliche Zieleinlauf-Plätze, für das zweite nur mehr sieben, für das dritte sechs, …

[68] Vgl.: Götz, Stefan. Reichel, Hans-Christian. Müller, Robert. Hanisch, Günter: Mathematik Lehrbuch 6. Wien: öbvhpt Verlagsgesellschaft mbH. & Co. KG 2005. S. 121.

Auch dies wieder in mathematischer Sprache:

> Aus n verschiedenen Elementen einer Menge erhält man durch k-faches Ziehen $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ geordnete Stichproben ohne Zurücklegen.
>
> … die rechte Seite der Gleichung erhält man durch Erweitern mit $(n-k)!$;
>
> … Festlegung: $0! = 1$ und $1! = 1$;

Spezialfall:

> $n = k$: Dann erhält man $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ geordnete Stichproben ohne Zurücklegen.

In diesem Spezialfall findet man nun die ideale Überleitung zum nächsten Punkt:

3.2.3 Permutationen

Will man wie gerade zuvor beispielsweise wissen, wie viele verschiedene Ergebnisse es bei einem Laufrennen mit acht Teilnehmerinnen geben kann, so könnte man diese Frage auch folgendermaßen umformulieren.

Auf wie viele verschiedene Arten kann man acht Läuferinnen nebeneinander aufstellen?
Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Reihenfolge von acht Mädchen zu verändern?

Für diese verschiedenen Arten der Anordnung bzw. Möglichkeiten die Reihenfolge zu ändern gibt es auch einen mathematischen Begriff, nämlich den der *Permutation*. Das Wort Permutation beschreibt eine Vertauschung der Reihenfolge.

Wie viele Permutationen gibt es dann von n Elementen?
Richtig, $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ viele;

Wir betrachten ja eigentlich geordnete Stichproben ohne Zurücklegen, bei denen wir aus einer Menge von n verschiedenen Elementen n mal ziehen.
Das heißt aber, dass n = k ist und damit haben wir es mit unserem Spezialfall von gerade eben zu tun, weshalb das richtige Ergebnis tatsächlich „n!“ lauten muss.

Das Rennen der Kleinen
Julia, Markus, Maria, Joanna und Muhammed sind stolze Besitzer/innen von Rennmäusen. Da sie alle schon seit langer Zeit damit prahlen, wie schnell ihre eigenen Mäuse laufen können, wollen sie nun endlich herausfinden, welche tatsächlich die schnellste ist.
Dafür haben sie eine Rennstrecke in einem Park ihrer Stadt ausfindig gemacht und fünf Bahnen nebeneinander abgesteckt.

- Auf wie viele Arten können sie ihre Mäuse am Start aufstellen?
- Julias und Muhammeds Mäuse kennen einander schon etwas besser – sie haben bei einigen Treffen von Julia und Muhammed bereits miteinander gespielt. Da sie sich dabei sehr gut verstanden haben, bestehen Besitzerin und Besitzer nun darauf, sie nebeneinander laufen zu lassen.
  Wenn die anderen Julia und Muhammed dies zugestehen, wie viele Möglichkeiten der Startaufstellung gibt es dann?[69]

Lösung:

Zum ersten Punkt:
Wenn man sich die Möglichkeiten der Besetzung der ersten Bahn anschaut, so wird sehr schnell klar, dass es für diese fünf Möglichkeiten gibt – insgesamt sind es ja fünf Mäuse und jede von ihnen kann auf Bahn eins laufen. Nun ist diese erste Bahn aber besetzt, das heißt für die zweite fällt nun eine der anfänglich fünf Möglichkeiten weg und man kommt auf vier mögliche Arten der Belegung. Mit genau der gleichen Argumentation stehen für die dritte Bahn drei Mäuse zur Auswahl und so weiter, bis für die letzte Bahn nur mehr eine Maus übrig bleibt.
Insofern hat man im Gesamten $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ mögliche Startaufstellungen.

[69] Vgl.: Bezirksregierung Düsseldorf: Mathe-Treff.
In: http://www.brd.nrw.de/lerntreffs/mathe/pages/knobel/1997/r4_78.html (17. Juni 2012)

Oder:
Die Anzahl der Möglichkeiten fünf Mäuse auf fünf Bahnen zu verteilen ist ja gleich der Anzahl der Permutationen von fünf Elementen, weshalb die Antwort natürlich
$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ lauten muss.

Zum zweiten Punkt:
Auf fünf Bahnen „nebeneinander laufen" heißt auf der ersten und zweiten Bahn, der zweiten und dritten, der dritten und vierten oder der vierten und fünften. Das sind vier Möglichkeiten für das „nebeneinander Laufen". Da es aber zusätzlich noch egal ist, auf welcher der jeweils zwei Bahnen Julias bzw. Muhammeds Maus läuft, hat man in jedem dieser vier Fälle noch einmal zwei Möglichkeiten mehr, das heißt insgesamt gibt es $4 \cdot 2 = 8$ Möglichkeiten für das „nebeneinander Laufen".

Für die restlichen drei Mäuse bleiben nun aber in jedem der gerade besprochenen Fälle drei Bahnen zum Belegen übrig. Die Anzahl der Möglichkeiten drei Mäuse auf drei Bahnen zu verteilen ist $3! = 6$.

Wenn man all diese Möglichkeiten nun miteinander kombiniert, kommt man im Endeffekt auf $8 \cdot 6 = 48$ mögliche Startaufstellungen – den Wunsch von Julia und Muhammed berücksichtigend.[70]

Nicht verzagen, die Frau Direktorin fragen!
An der Schule ist ein großes Fest mit Live-Band und riesigem Buffet geplant.
Fünf Schülerinnen sowie vier Lehrer, die in die Planung dieses Events involviert sind, kommen am Ende eines anstrengenden Schultags zum Zimmer der Direktorin um sie um ein Gespräch zu bitten.

- Auf wie viele verschiedene Arten können die fünf Schülerinnen und vier Lehrer das Zimmer der Direktorin betreten?
- Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn die Schülerinnen als erste und anschließend erst die Lehrer eintreten?

[70] Vgl.: Bezirksregierung Düsseldorf: Mathe-Treff.
In: http://www.brd.nrw.de/lerntreffs/mathe/pages/knobel/1997/l4_78.html (17. Juni 2012)

- Wie sieht das Ganze bei abwechselndem Eintreten der Schülerinnen und Lehrer aus?[71]

Lösung:

Zum ersten Punkt:

Diese Frage ist der Frage nach den unterschiedlichen Zieleinläufen von zuvor sehr ähnlich; nun haben wir statt acht eben neun Personen. Die verschiedenen Arten des Eintretens in ein Zimmer von insgesamt neun Personen zu zählen, ist gleich dem Zählen der unterschiedlichen Aufstellungen oder Anordnungen von neun Personen; und da wissen wir bereits, dass es dafür genau 9! = 362880 Möglichkeiten gibt.

Zum zweiten Punkt:

Für die Beantwortung dieser Frage müssen wir nur ganz einfach die Anzahl der möglichen Anordnungen von fünf Personen mit der von vier Personen kombinieren. Das heißt, wir rechnen $5! \cdot 4! = 2880$ und erhalten das richtige Ergebnis.

Zum dritten Punkt:

Hierfür betrachten wir jeden Fall einzeln. Für die Auswahl der ersten Schülerin haben wir fünf Möglichkeiten, für die des ersten Lehrers vier; insgesamt erhalten wir für die ersten beiden Eintretenden also $5 \cdot 4$ Möglichkeiten. Für die nächsten zwei gibt es dann nur mehr $4 \cdot 3$ Möglichkeiten und so weiter. Am Ende erhalten wir als Ergebnis: $(5 \cdot 4) \cdot (4 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 1) \cdot 1 = 2880$;[72]

3.2.4 „Fakultäten abziehen" – ungeordnete Stichproben ohne Zurücklegen

Zuvor haben wir bereits herausgefunden, dass die Anzahl der geordneten k-elementigen Stichproben aus einer n-elementigen Menge ohne Zurücklegen gleich $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ ist.

[71] Vgl.: Bezirksregierung Düsseldorf: Mathe-Treff.
In: http://www.brd.nrw.de/lerntreffs/mathe/pages/knobel/2009/r63/r63_78.html (18. Juni 2012)

[72] Vgl.: Bezirksregierung Düsseldorf: Mathe-Treff.
In: http://www.brd.nrw.de/lerntreffs/mathe/pages/knobel/2009/r63/l63_78.pdf (18. Juni 2012)

Wie verhält es sich nun aber mit *ungeordneten Stichproben ohne Zurücklegen*?
Oder anders formuliert: Wie viele Stichproben erhalten wir, wenn es uns nicht auf die Reihenfolge der gezogenen Elemente ankommt, das heißt wenn Ziehungen von gleichen Elementen in unterschiedlicher Reihenfolge zu ein und derselben Ziehung werden?

Nun ja, klarerweise werden wir weniger ungeordnete als geordnete Stichproben erhalten, da nun beispielsweise „123" und „231" keine zwei verschiedenen Ziehungen mehr sind.

Wenn wir allgemein die Anzahl ungeordneter k-elementiger Stichproben aus einer n-elementigen Menge berechnen wollen, so müssen wir uns eigentlich nur überlegen, auf wie viele verschiedene Arten man eine k-elementige Stichprobe anordnen kann; durch diese Zahl dividieren wir dann unser bereits bekanntes „$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$" und erhalten so ganz einfach unsere Antwort:[73]

> Aus n verschiedenen Elementen einer Menge erhält man durch k-faches Ziehen $\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ ungeordnete Stichproben ohne Zurücklegen.

Wenn wir uns nun nicht ungeordnete Stichproben von k aus n Elementen anschauen, sondern solche von n aus n Elementen, so haben wir es mit einem Spezialfall bezüglich dem obigen Lehrsatz zu tun und sind im Grunde genommen wieder bei den Permutationen angelangt. „n aus n Elementen ziehen" bedeutet ja nichts anderes als n Elemente neu anzuordnen, das heißt Permutationen zu betrachten – abgesehen davon, dass die Reihenfolge, auf die es uns hier nun ja nicht ankommen soll, Permutationen eigentlich ausmacht.

[73] Vgl.: Götz, Stefan. Reichel, Hans-Christian. Müller, Robert. Hanisch, Günter: Mathematik Lehrbuch 6. Wien: öbvhpt Verlagsgesellschaft mbH. & Co. KG 2005. S. 181.

Die Anzahl der Möglichkeiten n von n Elementen anzuordnen, ohne dass die Reihenfolge eine Rolle spielt, wäre dann nach obiger Formel gleich:

$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1}{n!} = \frac{n!}{n!} = 1$;

Das ist aber klar. Wie schon erwähnt, ist die Reihenfolge von Elementen für Permutationen essentiell und wenn wir nun die Anzahl von Permutationen bestimmen wollen, ohne die Reihenfolge zu berücksichtigen, so erhalten wir als Ergebnis natürlich „1“. Wenn unterschiedliche Reihenfolgen nicht zu unterschiedlichen Ergebnissen führen, erhält man eben nur eine Möglichkeit n von n Elementen „anzuordnen“.

Worauf müssen wir aber achten, wenn uns nicht die Reihenfolge aller Elemente egal ist, sondern nur die mancher?

Wollen wir beispielsweise die Anzahl der Permutationen der Elemente „2“, „4“, „4“, „4“, „5“, „8“ bestimmen, so spielt es für uns bei der möglichen Anordnung „424485“ keine Rolle, welche „4“ wo steht. Ob die erste Stelle von der ersten, der zweiten oder der dritten „4“ belegt wird, ist für uns belanglos.
Da es nun aber 3! = 6 Möglichkeiten gibt, drei „4“en anzuordnen – das heißt in unserem Beispiel tritt jede Permutationen quasi sechsmal auf, je nachdem welche der drei „4“en wo steht –, müssen wir die Anzahl der Permutationen, die wir zuerst erhalten, noch um dieses „Zuviel“ reduzieren.

Genauer: In diesem Fall müssen wir 6! – die Anzahl der Möglichkeiten sechs Elemente anzuordnen – eben noch durch 3! dividieren um nicht für uns „gleiche“ Permutationen mehrfach zu zählen.

Es gibt also $\frac{6!}{3!}$ verschiedene Permutationen der Elemente „2“, „4“, „4“, „4“, „5“ und „8“.
Dies legt nahe, dass wir in Beispielen wie diesen immer durch die Fakultät der Anzahl der gleichen Elemente dividieren müssen.

Und tatsächlich gilt allgemein:

> Die Anzahl der möglichen Reihenfolgen von n Elementen, in denen m verschiedene Elemente mit den Vielfachheiten $k_1, k_2, \ldots, k_m$ mit
> $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$ auftreten, ist $\frac{n!}{k1! \cdot k2! \cdot \ldots \cdot km!}$.

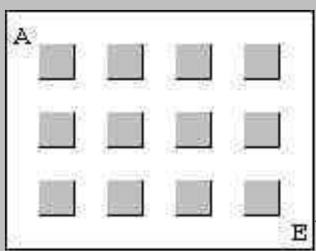
Versuche nun mit Hilfe dieser Überlegungen das folgende Rätsel selbständig zu lösen:

So schnell wie möglich!

Stellen wir uns vor, wir wären gerade im New Yorker Stadtteil Manhattan und wollten zu Fuß möglichst schnell vom American Museum of Natural History („A“) zum Empire State Building („E“) gelangen; wir müssen also auf jeden Fall Umwege vermeiden.

Wie man vielleicht weiß, ist das Straßensystem in den meisten Städten der USA nach dem Schachbrettmuster aufgebaut, das heißt, alle Straßen stehen normal aufeinander und bilden eine Art Gitter – so auch in Manhattan.

Betrachte die folgende vereinfachte Veranschaulichung unserer Situation und finde heraus, wie viele unterschiedliche Wege man von „A“ nach „E“ finden kann, ohne dabei überflüssige Strecken zurückzulegen![74]



[75]

Lösung:

Wir dürfen also keine Umwege machen. Was aber heißt das genau?

Nun ja, unser „A“ befindet sich links oben im Eck und wir müssen zum „E“, welches ganz rechts, ganz unten liegt. Darin steckt aber schon die Antwort auf unsere erste kleine Frage. Wir müssen nach rechts unten, das heißt aber, dass wir nur nach

[74] Vgl.: Bezirksregierung Düsseldorf: Mathe-Treff.
In: http://www.brd.nrw.de/lerntreffs/mathe/pages/knobel/1998/r8_56.html (30. Juni 2012)

[75] Ebd.

rechts und nach unten gehen dürfen. Nach oben oder nach links zu gehen würde einen Umweg bedeuten.

Gut, wir gehen also nur nach rechts und nach unten. Wie viele solche grauen Häuserblöcke müssen wir aber nach rechts bzw. nach unten wandern? Das obere Bild betrachtend sieht man sehr schnell, dass man viermal nach rechts und dreimal nach unten gehen muss um das „E“ zu erreichen.
Ob wir nun aber sofort nach unten abbiegen oder zuerst alle vier Blöcke nach rechts spazieren, ist für die Länge der Strecke belanglos; dadurch ergeben sich aber unsere verschiedenen Wege, die wir ja suchen und finden sollen.

Wie aber kann man bestimmen, wie viele solcher Wege es gibt?
Wir müssen auf jeden Fall viermal nach rechts (= „r“) und dreimal nach unten (= „u“) und das auf alle möglichen Arten. Das bedeutet aber, dass wir ganz einfach vier „r“s und drei „u“s auf alle erdenklichen, unterschiedlichen Weisen anordnen müssen.

Dazu schreiben wir zuerst einmal alle möglichen Wege als Folgen von „r“s und „u“s, dadurch wird alles etwas übersichtlicher. „rruruur“ steht dann beispielsweise für den Weg, bei dem man zuerst zweimal nach rechts, dann einmal nach unten, dann wieder nach rechts, anschließend zweimal nach unten und zu guter Letzt noch einmal nach rechts geht.

Unsere Schreibweise können wir noch ein klein wenig vereinfachen indem wir uns nur mehr auf die „u“s konzentrieren und die Stellen angeben an denen die „u“s bei unseren sieben Buchstaben langen Wegen stehen – die „r“s befinden sich dann klarerweise an den nicht notierten Stellen. Zum Beispiel wäre „rruruur“ gleich „356“.

Nun heißt es systematisch vorgehen und alle möglichen Wege finden:

„123“, „124“, „125“, „126“, „127“
„134“, „135“, „136“, „137“
„145“, „146“, „147“
„156“, „157“
„167“
„234“, „235“, „236“, „237“
„245“, „246“, „247“

„256“, „257“

„267“

„345“, „346“, „347“

„356“, „357“

„367“

„456“, „457“

„467“

„567“

Wenn man nun noch richtig zählen kann, kommt man im Gesamten auf fünfunddreißig verschiedene Wege von „A“ nach „E“, ohne dabei einen Umweg zu gehen.[76]

Oder:

Wie gerade schon erwähnt, müssen wir ganz einfach vier „r“s und drei „u“s auf alle erdenklichen, unterschiedlichen Arten anordnen und zählen, wie viele Möglichkeiten es dafür gibt. Das heißt aber, dass wir die Anzahl der Permutationen von insgesamt sieben „r“s und „u“s berechnen müssen, wobei die Anzahl der reinen „r“- bzw. „u“-Permutationen abgezogen werden sollte, da für uns alle „r“s und „u“s ununterscheidbar sind und eine „r“- bzw. „u“-Vertauschung für uns keine wirklich neue Anordnung ergibt. Dies führt zur folgenden Rechnung: $\frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$;

Wir erhalten somit fünfunddreißig verschiedene Möglichkeiten um ohne Umweg von „A“ nach „E“ zu gelangen.

Eins, zwei oder drei?

Jede/r von uns kennt es, wie es ist, viele Stufen hochsteigen zu müssen. Das kann sehr anstrengend werden und ist mitunter auch durchaus etwas langweilig.

[76] Vgl.: Bezirksregierung Düsseldorf: Mathe-Treff.
In: http://www.brd.nrw.de/lerntreffs/mathe/pages/knobel/1998/l8_56.html (30. Juni 2012)

Zum Eingang von Cecilias Elternhaus führen sechs Stufen hoch. Um der Langeweile vorzubeugen und schneller zu sein, nimmt Cecilia nicht immer nur eine Stufe nach der anderen, sondern manchmal auch zwei oder sogar drei auf einmal.
Auf wie viele verschiedene Arten kann sie so zu ihrer Eingangstür gelangen?[77]

Lösung:
In diesem Rätsel geht es darum, unterschiedliche Reihen der Zahlen „1“, „2“ und „3“ zu permutieren, mit der Voraussetzung, dass diese Reihen aufsummiert immer die „6“ ergeben.
Ähnlich wie zuvor kommt man systematisch zu den folgenden Möglichkeiten:

1. 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6
2. 1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 6
3. 1 + 1 + 1 + 3 = 6
4. 1 + 1 + 2 + 2 = 6
5. 1 + 2 + 3 = 6
6. 3 + 3 = 6

Da es nicht egal ist, wann Cecilia wie viele Stufen auf einmal nimmt, müssen wir noch die Permutationen dieser sechs Reihen berücksichtigen – beispielsweise 5. betrachtend sind „1 + 2 + 3“, „1 + 3 + 2“ und „3 + 1 + 2“, … für uns ja unterschiedliche Arten des Stufensteigens.

1. nur eine Permutation;
2. $\frac{5!}{4! \cdot 1!}$ = 5 Permutationen;
3. $\frac{4!}{3! \cdot 1!}$ = 4 Permutationen;
4. $\frac{4!}{2! \cdot 2!}$ = 6 Permutationen;
5. $\frac{3!}{1! \cdot 1! \cdot 1!}$ = 6 Permutationen;
6. $\frac{2!}{1! \cdot 1!}$ = 2 Permutationen;

[77] Vgl.: DENKmal ´97: Aufgaben vom Knobelwettbewerb 1997.
In: http://www.mathe-spass.de/dm199x/dm97_auf.htm#dm97_06k (18. Juni 2012)

Insgesamt erhalten wir für Cecilia vierundzwanzig verschiedene Möglichkeiten die sechs Stufen hochzusteigen. Eine, nämlich 1., müssen wir aber noch abziehen, da diese für Cecilia zu langsam und zu langweilig ist.
Die richtige Anzahl an Möglichkeiten wird also durch die Zahl dreiundzwanzig beschrieben.[78]

Ungeordnete Stichproben mit Zurücklegen

Nur der Vollständigkeit wegen möchte ich an dieser Stelle auch die ungeordneten Stichproben mit Zurücklegen erwähnen; sie spielen in dieser Arbeit aber keine wichtige Rolle.

> Die Anzahl der Möglichkeiten, eine ungeordnete Stichprobe von k aus n Elementen mit Zurücklegen zu ziehen, ist durch die folgende Zahl beschrieben: $\frac{(n+k-1)\cdot(n+k-2)\cdot\ldots\cdot n}{k!} = \frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!}$;

3.2.5 Die Summe der Zahlen von „1“ bis „100“

Einer der wohl bekanntesten und auch einer der wichtigsten Mathematiker ist Carl Friedrich Gauß.
Ähnlich berühmt wie sein Name ist auch eine Begebenheit aus seiner Volksschulzeit. An einem bestimmten Tag war dem Lehrer seiner Klasse offensichtlich gar nicht nach unterrichten zumute, weshalb er sich eine Aufgabe ausdachte, die die Schüler/innen möglichst lange beschäftigen und somit ruhig halten sollte. So kam er auf die Idee, sie ganz einfach alle Zahlen von „1“ bis „100“ aufsummieren zu lassen, das heißt, er wollte von ihnen das Ergebnis von „1 + 2 + 3 + 4 + … + 98 + 99 + 100“ wissen.

[78] Vgl.: DENKmal ´97: Aufgaben vom Knobelwettbewerb 1997.
In: http://www.mathe-spass.de/dm199x/dm97_loe.htm#dm97_06e (18. Juni 2012)

Er lehnte sich, in der Annahme nun mit Sicherheit die ganze Unterrichtsstunde für sich alleine zu haben, entspannt zurück.
Womit er allerdings nicht gerechnet hat, war Carl Friedrich Gauß. Schon nach kürzester Zeit hatte dieser das richtige Ergebnis „5050“ errechnet.

Doch wie gelang ihm das so schnell?
Nun ja, anstatt wie alle anderen Schüler/innen die einzelnen Summen auszurechnen und so zum Schluss auf die Endsumme zu kommen, war ihm ganz einfach aufgefallen, dass die erste Zahl zusammen mit der letzten gleich „101“ ist
(1 + 100 = 101), die zweite zusammen mit der vorletzten Zahl „101“ ergibt
(2 + 99 = 101), die dritte Zahl zusammen mit der drittletzten genauso und so weiter.
Auf diese Weise kam er insgesamt auf fünfzig Mal „101“ und somit hat er das richtige Ergebnis der Aufgabenstellung ganz einfach durch „50 · 101 = 5050“ berechnet.[79]

Diese Überlegungen des jungen Gauß kann man verallgemeinern.
Es ist ja egal ob man die Summe der Zahlen von „1“ bis „100“ oder der Zahlen von „1“ bis „1000“ oder sogar der Zahlen von „1“ bis „2448“ berechnet, das Prinzip muss immer das gleiche sein. So gilt:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2};$$

Damit kann Folgendes ganz leicht gelöst werden:

Prost
Sieben alte Freundinnen treffen sich in einer Bar.
Wie oft klingen die Gläser, wenn jede mit jeder anstößt?[80]

Lösung:
Die erste lässt ihr Glas mit sechs anderen klingen, die zweite nur mehr mit fünf anderen, die dritte mit vier und so weiter.

---

[79] Vgl.: Astronomische Vereinigung Bodensee e.V. Alexander von Behaim-Schwartzbach: Wissenschaft und Technik. Carl Friedrich Gauß.
In: http://wissenschaft-und-technik.de/beruehmte-wissenschaftler-menu/carl-friedrich-gauss.html (7. November 2012)
[80] Vgl.: Bezirksregierung Düsseldorf: Mathe-Treff.
In: http://www.brd.nrw.de/lerntreffs/mathe/pages/knobel/2000/r15_56.html (30. Juni 2012)

Wie oft man also insgesamt zwei Gläser aufeinanderstoßen hört, berechnet sich wie folgt: $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = \frac{6 \cdot (6+1)}{2} = 21$;

Wenn jede mit jeder anstößt, klingen die Gläser somit einundzwanzigmal.[81]

High five

Igor hat am Wochenende Geburtstag und möchte daher ein kleines Fest feiern. Dazu lädt er im Gesamten vierzehn Freunde/Freundinnen ein und freut sich schon sehr.

In Igors Freundeskreis ist es üblich, sich nicht mit normalem Händeschütteln oder einer Umarmung zu begrüßen, sondern mit dem bekannten „High five“-Händeschlag. Wenn wirklich alle geladenen Gäste erscheinen und jede/r jeder/jedem auf diese Art und Weise „Hallo!“ sagt, wie oft wird man dann auf Igors Party Hände aufeinander klatschen hören?

Lösung:

Jede/r klatscht mit jeder/jedem ein und „alle“ heißt in diesem Fall fünfzehn Leute – Igor selbst darf man hier nämlich nicht vergessen.

Gehen wir nun einfach der Reihe nach alle durch. Der erste Gast gibt vierzehn anderen ein „High five“, der zweite dreizehn anderen (mit dem ersten hat er ja bereits eingeschlagen), der dritte zwölf und so weiter bis zum letzten, der niemandem mehr ein „High five“ geben muss.

Schlussendlich haben wir also $14 + 13 + 12 + \ldots + 1 = \frac{14 \cdot (14+1)}{2} = 105$ „High five“s.[82]

Schlag oder Trumpf?

Ein Kartenspiel, das sich vor allem in Tirol sehr großer Beliebtheit erfreut, heißt „Watten“. In regelmäßigen Abständen werden Turniere ausgetragen, bei denen jede/r genau einmal gegen jede/n spielt. Die größte Anzahl an gewonnenen Spielen führt dann zum Sieg.

[81] Vgl.: Bezirksregierung Düsseldorf: Mathe-Treff.
In: http://www.brd.nrw.de/lerntreffs/mathe/pages/knobel/2000/l15_56.html (30. Juni 2012)

[82] Vgl.: LustigeStories.de: Nie wieder Langeweile!
In: http://www.lustigestories.de/fun/raetsel/rshow.php?rid=85&lsg_show=true (18. Juni 2012)

Bei den letzten Landesmeisterschaften konnten am Ende dreihundertfünfundzwanzig gespielte Partien verzeichnet werden.
Nenne die Anzahl der Teilnehmer/innen dieses Turniers![83]

Lösung:
Jede/r Spieler/in spielt einmal gegen jede/n andere/n. Das heißt, wenn es im Gesamten n Teilnehmer/innen gibt, dann spielt die/der erste gegen n – 1 Gegner/innen, die/der zweite gegen n – 2, die/der dritte gegen n – 3, … bis die/der letzte gegen niemanden mehr spielen muss, weil sie/er bereits gegen alle gespielt hat. Also: $(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1=\frac{(n-1)\cdot n}{2}=325$;

Diese Gleichung gilt es zu lösen:

$\frac{(n-1)\cdot n}{2}=325$ | (· 2), Klammer auflösen & (– 650)

$n^2-n-650=0$ | kleine Lösungsformel

$n_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+650}$

$n_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\frac{51}{2}$

$n_1 = 26$ und $n_2 = -25$

Der negative Wert fällt weg, weil er in diesem Zusammenhang keinen Sinn macht, und übrig bleibt $n_1 = 26$. Die Turnierveranstalter/innen durften sich also über sechsundzwanzig Teilnehmer/innen freuen.[84]

[83] Vgl.: Bezirksregierung Düsseldorf: Mathe-Treff.
In: http://www.brd.nrw.de/lerntreffs/mathe/pages/knobel/2009/r63/r63_910.html (17. Juni 2012)
[84] Vgl.: Bezirksregierung Düsseldorf: Mathe-Treff.
In: http://www.brd.nrw.de/lerntreffs/mathe/pages/knobel/2009/r63/l63_910.pdf (17. Juni 2012)

3.2.6 Der Binomialkoeffizient „$\binom{n}{k}$“

Gleich zu Beginn wird eure Fähigkeit zu zählen auf die Prüfung gestellt:

Drei aus sechs

Im Turnunterricht der Buben der siebten Klassen werden die Jungen immer in drei Gruppen aufgeteilt. Die erste Gruppe spielt Volleyball, die zweite Fußball und die dritte Basketball. Die Buben dürfen selbst entscheiden, in welche der drei Gruppen sie gehen.

Am Ende der Doppelstunde müssen immer drei aus einer der drei Gruppen beim Wegräumen der Bälle helfen. Heute ist die Fußballgruppe an der Reihe, welche zuvor von sechs Jungen gewählt wurde.

Aus diesen sechs sollen nun eben drei als Hilfskräfte für die Lehrperson ausgewählt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür?[85]

Lösung:

Ich bezeichne die sechs Buben aus der Fußballgruppe mit „A“, „B“, „C“, „D“, „E“ und „F“. Wenn wir alle möglichen Dreiergruppen aus diesen sechs Buchstaben aufschreiben wollen, müssen wir wieder einmal systematisch vorgehen:

„ABC“, „ABD“, „ABE“, „ABF“, „ACD“, „ACE“, „ACF“, „ADE“, „ADF“, „AEF“, „BCD”, „BCE”, „BCF”, „BDE”, „BDF”, „BEF“, „CDE“, „CDF“, „CEF“ und „DEF“;

Man sieht, dass man aus sechs Buben zwanzig unterschiedliche Dreierteams gewinnen kann.[86]

Die Lösung dieses Rätsels war etwas aufwändig, es hielt sich bei diesem Beispiel allerdings durchaus in Grenzen. Was aber wäre gewesen, wenn wir nicht drei aus sechs Jungen, sondern beispielsweise drei aus sechsunddreißig aussuchen hätten müssen?

[85] Vgl.: Bezirksregierung Düsseldorf: Mathe-Treff.
In: http://www.brd.nrw.de/lerntreffs/mathe/pages/knobel/1999/r10_56.html (30. Juni 2012)
[86] Vgl.: Bezirksregierung Düsseldorf: Mathe-Treff.
In: http://www.brd.nrw.de/lerntreffs/mathe/pages/knobel/1999/l10_56.html (30. Juni 2012)

Wenn wir eine derartige Aufgabe auf die obige Art lösen wollten, dann säßen wir sicher stundenlang dabei und würden Unmengen an Schreibmaterial verbrauchen.
Zum Glück gibt es für solche Fälle aber ein mathematisches Werkzeug, das einiges vereinfacht, den *Binomialkoeffizienten*.

Diesen haben wir bereits kennengelernt, nämlich beim Ausrechnen von $(a + b)^n$ $(= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k,\, n \in \mathbb{N})$.
Das Wissen über die Entwicklung von $(a + b)^n$, das Pascal´sche Dreieck und deren Zusammenhang wird an dieser Stelle vorausgesetzt.

Wenn wir beispielsweise $15a^4b^2$ in der Entwicklung von $(a + b)^6$
$(= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6)$ anschauen und uns überlegen, was dieser Ausdruck eigentlich bedeutet, so erkennen wir, dass wir es hier mit 15 Produkten zu tun haben, bei denen „a“ 4-mal vorkommt und „b“ 2-mal.
Ausgeschrieben sehen diese so aus:

„aaaabb“, „aaabab“, „aabaab“, „abaaab“, „baaaab“, „baaaba“, „baabaa“, „babaaa“, „bbaaaa“, „aabbaa“, „abaaba“, „abbaaa“, „aaabba“, „ababaa“, „aababa“;

Ähnlich wie bei der Lösung eines Rätsels von zuvor, bezeichnen wir nun die Plätze, an denen die „a“s und die „b“s stehen, mit „1“ bis „6“ – wir haben ja insgesamt sechs „a“s und „b“s – und konzentrieren uns insbesondere auf die „a“s. Das heißt, wir notieren nur die Zahlen, die die Plätze der „a“s beschreiben.
So wird dann etwa „ababaa“ zu „1356“ (die „a“s liegen ja an der 1., 3., 5. und 6. Stelle) oder „aaabba“ zu „1236“.

Wir schreiben alle obigen Produkte auf diese Art:

„1234“, „1235“, „1245“, „1345“, „2345“, „2346“, „2356“, „2456“, „3456“, „1256“, „1346“, „1456“, „1236“, „1356“, „1246“;

Im Prinzip sehen wir hier die Anzahl der Möglichkeiten vier aus sechs Elementen auszuwählen – wir arbeiten ja im Gesamten mit sechs Elementen, betrachten aber nur die vier Elemente, die für uns von Interesse sind. Im Endeffekt geht es an dieser

Stelle also wieder um die Anzahl der Möglichkeiten, vier aus sechs Elementen zu ziehen und das ohne auf die Reihenfolge zu achten und ohne zurückzulegen.

Damit zählt unser Faktor 15 = $\binom{6}{4}$ (= Koeffizient von „a^4b^2" in der Entwicklung von „$(a + b)^2$", gefunden mit Hilfe des Pascal´schen Dreiecks) nun aber die ungeordneten Stichproben ohne Zurücklegen von 4 aus 6 Elementen.

Verallgemeinernd kommen wir zu folgender Erkenntnis:

> „$\binom{n}{k}$" steht für die Anzahl der ungeordneten Stichproben ohne Zurücklegen von k aus n Elementen.[87]

Und damit gilt in Kombination mit unserer zuvor schon erhaltenen Formel für das Zählen von ungeordneten Stichproben ohne Zurücklegen von k aus n Elementen:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!};$$

Des Weiteren kann man zeigen, dass

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ und
- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, sowie
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.

Betrachte noch einmal das zuletzt behandelte Rätsel „Drei aus sechs"!

Kann man nun mit dem neu Gelernten schneller zum richtigen Ergebnis kommen? Und wenn ja, wie?

[87] Vgl.: Götz, Stefan. Reichel, Hans-Christian. Müller, Robert. Hanisch, Günter: Mathematik Lehrbuch 6. Wien: öbvhpt Verlagsgesellschaft mbH. & Co. KG 2005. S. 182.

Lösung:

Mit unserem neuen kombinatorischen Wissen können wir die Anzahl der Möglichkeiten „3“ aus „6“ auszuwählen auch mit „$\binom{6}{3}$“ anschreiben und berechnen.

Also: $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot (6-3)!} = 20$;

Es ergeben sich also zwanzig Möglichkeiten der Gruppenbildung.

Und gleich weiter:

Seltenes Zusammentreffen

Am Ende einer großen Familienfeier zu Ehren des 96. Geburtstags von Opa Dvorak umarmen sich alle fünfzig Großfamilienmitglieder bei der Verabschiedung.

Wie viele Umarmungen finden statt, wenn sich wirklich jede/r von jeder/jedem verabschiedet?[88]

Lösung:

Der altbekannte Weg:

Die/Der Erste umarmt neunundvierzig Familienmitglieder, die/der Zweite nur mehr achtundvierzig – die/den Erste/n hat sie/er ja bereits umarmt – und so weiter.

Am Ende erhält man $49 + 48 + \ldots + 2 + 1 = \frac{49 \cdot 50}{2} = 1225$ Umarmungen.[89]

Mittels neuem Wissen:

Hier geht es um die Frage, wie oft man „2“ aus „50“ nehmen kann – man hat fünfzig Leute und es verabschieden sich immer jeweils zwei voneinander. Das heißt die Anzahl der Umarmungen wird beschrieben durch: $\binom{50}{2} = \frac{50!}{2! \cdot 48!} = 1225$;

[88] Vgl.: denksport.de: die seite für´s köpfchen.
In: http://www.denksport.de/denksport/raetsel.asp?nr=245&show=Aufgabe (18. Juni 2012)

[89] Vgl.: denksport.de: die seite für´s köpfchen.
In: http://www.denksport.de/denksport/raetsel.asp?nr=245&show=Loesung (18. Juni 2012)

Violinschlüssel, Noten und so weiter

Olena will nach der Matura am Konservatorium Wien Saxophon studieren.

Bei der schwierigen Aufnahmeprüfung muss sie im theoretischen Teil neun von vierzehn Aufgaben korrekt lösen um zum praktischen Teil überhaupt zugelassen zu werden.

- Wie viele Möglichkeiten hat Olena, bei neun von vierzehn Aufgaben erfolgreich zu sein?
- Wie viele Möglichkeiten hat sie, wenn sieben von diesen neun Aufgaben, die sie zu bewältigen hat, die ersten sieben sein müssen?

Lösung:

Zum ersten Punkt:

Hier müssen wir zählen, auf wie viele Arten Olena neun Beispiele von den vierzehn auswählen kann. Das berechnet man aber ganz einfach durch: $\binom{14}{9} = \frac{14!}{9! \cdot 5!} = 2002$;

Olena hat also 2002 Möglichkeiten neun von den vierzehn Beispielen auszusuchen um sie dann erfolgreich zu bewältigen.

Zum zweiten Punkt:

Im Gesamten müssen auf jeden Fall neun der vierzehn Aufgaben richtig gelöst werden. Zusätzlich sind nun sieben der neun Aufgaben „vorgegeben“. Das heißt, für uns bleiben nur noch zwei zu behandelnde Beispiele übrig, welche wir nun auf alle möglichen Arten aus den restlichen 14 – 7 = 7 Aufgaben aussuchen müssen.

Es gilt also Folgendes zu berechnen: $\binom{7}{2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = 21$;

Hier hat Olena nun also einundzwanzig Möglichkeiten.[90]

Gemeinschaft fördern

Die Klasse 7a hat Einkehrtag auf einer kleinen Alm irgendwo im Bereich der Raxalpe. Man kann hier wirklich alles machen; auch verschiedenste Sportarten stehen zur Auswahl.

[90] Vgl.: Schule-Studium.de: Das Schul- und Studienportal.
In: http://www.schule-studium.de/Mathe/Wahrscheinlichkeitsrechnung-Untermenge-Gluehbirnen.html (18. Juni 2012)

Zwölf Schüler/innen würden gerne Fußball spielen und sind auch schon dabei zwei Mannschaften aufzustellen, was aber komischerweise sehr lange dauert. Das Problem dabei ist nämlich, dass es so manchen Extrawunsch gibt.
So wollen Rasmus und Lydia keinesfalls in der gleichen Mannschaft spielen; für Alexander und Alexandra hingegen ist es äußerst wichtig, in einem Team zu sein.
So komme ich zur Frage, auf wie viele verschiedene Arten man hier nun zwei Mannschaften zu je sechs Spieler/inne/n bilden kann, unter der Berücksichtigung der gerade genannten zwei Wünsche.[91]

Lösung:
Alexandra und Alexander stecken wir in dieselbe Mannschaft; nennen wir sie einfachheitshalber Mannschaft A.

Fall 1:
Auch Rasmus geht in die Mannschaft A. Dann müssen für die noch übrigen drei Plätze (in einer Mannschaft spielen ja sechs Leute) noch drei aus acht Anwärter/inne/n (Lydia will ja in eine andere Mannschaft als Rasmus) ausgewählt werden.
Die Anzahl der Möglichkeiten dafür wird durch $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$ beschrieben.

Fall 2:
Lydia geht in die Mannschaft A. Genau wie vorher (man muss nur die beiden Namen „Lydia“ und „Rasmus“ vertauschen) kommt man auf sechsundfünfzig Möglichkeiten.

Insgesamt erhält man dann also 56 + 56 = 112 Möglichkeiten der Mannschaftsaufstellung.[92]

[91] Vgl.: Bezirksregierung Düsseldorf: Mathe-Treff.
In: http://www.brd.nrw.de/lerntreffs/mathe/pages/knobel/2005/r41/r41_910.html (17. Juni 2012)
[92] Vgl.: Bezirksregierung Düsseldorf: Mathe-Treff.
In: http://www.brd.nrw.de/lerntreffs/mathe/pages/knobel/2005/r41/l41_910.pdf (17. Juni 2012)

3.2.7 Wiederholung und Festigung

Löse zur Übung noch die folgenden drei Rätsel!
Sie beschäftigen sich mit nahezu allem, was im Kapitel „Kombinatorik“ behandelt wurde.

RES26ZUS792EMCO0222NDMWYAO123

Wenn man alle Buchstaben unseres Alphabets und die Ziffern des dekadischen Zahlensystems zusammennimmt, wie viele ein- bis achtstellige Buchstaben-Zahlen-Kombinationen kann man dann bilden?[93]

Lösung:

Insgesamt haben wir sechsunddreißig Buchstaben und Ziffern – von den ersteren gibt es sechsundzwanzig, von den letzteren zehn.

Mit diesen müssen wir jetzt verschiedene ein- bis achtstellige Kombinationen bilden und wir müssen herausfinden wie viele davon existieren. Damit sind wir aber wieder beim Binomialkoeffizienten angelangt. Mit sechsunddreißig Buchstaben und Ziffern kann man nämlich auf jeden Fall $\binom{36}{1}$ einstellige, $\binom{36}{2}$ zweistellige, … und $\binom{36}{8}$ achtstellige „Wörter“ konstruieren. Daher errechnet sich unser Ergebnis wie folgt:[94]

$$\binom{36}{1} + \binom{36}{2} + \binom{36}{3} + \binom{36}{4} + \binom{36}{5} + \binom{36}{6} + \binom{36}{7} + \binom{36}{8};$$ [95]

Auf diese Art und Weise erhält man die Anzahl aller Buchstaben-Zahlen-Kombinationen, ohne dass dabei ein Buchstabe oder eine Ziffer für eine Kombination mehrfach gewählt wird.

Lässt man dies jedoch zu, so sollte man auf folgendes Ergebnis kommen:[96]

$$36 + 36^2 + 36^3 + 36^4 + 36^5 + 36^6 + 36^7 + 36^8;$$ [97]

[93] Vgl.: Bezirksregierung Düsseldorf: Mathe-Treff.
In: http://www.brd.nrw.de/lerntreffs/mathe/pages/knobel/2003/r34_os.html (17. Juni 2012)
[94] Vgl.: Bezirksregierung Düsseldorf: Mathe-Treff.
In: http://www.brd.nrw.de/lerntreffs/mathe/pages/knobel/2003/l34_os.html (17. Juni 2012)
[95] Ebd.
[96] Vgl.: Ebd.
[97] Ebd.

Sechs gegen sechs

Volleyball ist eine Sportart, die schon seit langer Zeit sehr viel Zuspruch erhält, sowohl seitens der Männer als auch seitens der Frauen.

In der Klasse 8c finden sich zehn Jungen und Mädchen, die gerne eine Mannschaft für die Schulmeisterschaft im „Mixed Volleyball“ bilden würden.

Wie viele Möglichkeiten der Mannschaftsformierung gibt es unter der zusätzlichen Berücksichtigung der Spieler/innen-Positionen?[98]

Lösung:

Im Volleyball besteht eine Mannschaft aus sechs Spieler/inne/n.

Will man nun aus zehn Jungen und Mädchen sechs für eine Mannschaft auswählen, so gibt es dafür bekanntlich $\binom{10}{6} = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = 210$ Möglichkeiten.

Zusätzlich muss man noch berücksichtigen, dass es 6 zu vergebende Positionen und somit 6! = 720 verschiedene Aufstellungen ein und derselben Mannschaft gibt.

Die beiden Zwischenergebnisse kombinierend erhält man die endgültige Anzahl der Möglichkeiten der Mannschaftsbildung, nämlich 210 · 720 = 151 200.[99]

JÄÄTELÖTÖTTERÖ

Wer weiß, was dieses finnische Wort bedeutet?!

Richtig, die deutsche Übersetzung steht für nichts anderes als für unsere liebe altbekannte Eistüte.

Neben seiner Außergewöhnlichkeit zeichnet sich dieses Wort auch dadurch aus, dass viele seiner Buchstaben mehrfach vorkommen.

Zu wie vielen anderen „Wörtern“ kann man diese „Buchstabenmenge“ umordnen?

Lösung:

Fangen wir gleich mit dem ersten Buchstaben, dem „J“, an. Von diesem gibt es nur das eine und nachdem wir insgesamt vierzehn Stellen zu vergeben haben

[98] Vgl.: Bezirksregierung Düsseldorf: Mathe-Treff.
In: http://www.brd.nrw.de/lerntreffs/mathe/pages/knobel/1999/r13_os.html (17. Juni 2012)

[99] Vgl.: Bezirksregierung Düsseldorf: Mathe-Treff.
In: http://www.brd.nrw.de/lerntreffs/mathe/pages/knobel/1999/l13_os.html (17. Juni 2012)

(„JÄÄTELÖTÖTTERÖ“ besteht ja aus vierzehn Buchstaben) und mit ihm beginnen, kann es an vierzehn verschiedenen Plätzen stehen.
„14“ kann auch als „$\binom{14}{1}$“ geschrieben werden. Das machen wir nur aus ästhetischen Gründen, wir werden sehen warum.

Der zweite Buchstabe, den wir behandeln wollen, ist das „Ä“, von welchem wir zwei zur Verfügung haben. Für diese zwei „Ä“s bleiben nun nur mehr dreizehn mögliche Plätze übrig, da einer ja schon vom „J“ belegt ist.
Für die „Ä“s erhalten wir also $\binom{13}{2}$ Möglichkeiten der „Aufstellung“.

Aufgrund analoger Argumentation muss man die vier „T“s nun auf elf Plätzen unterbringen; für die „T“s gibt es somit $\binom{11}{4}$ Möglichkeiten.

Für die zwei „E“s gibt es dann nur mehr $\binom{7}{2}$ und für das eine „L“ $\binom{5}{1}$ Möglichkeiten.

Nun müssen wir uns nur noch den drei „Ö“s und dem einen „R“ widmen.
Für die ersteren bleiben noch $\binom{4}{3}$ mögliche Anordnungen und der letzte dann noch freie Platz gehört dem „R“; insofern wird die Anzahl der Möglichkeiten für das „R“ durch 1 = $\binom{1}{1}$ beschrieben.

Um alle möglichen „Wörter“ zu zählen, muss jetzt einmal mehr kombiniert werden:

$$\binom{14}{1} \cdot \binom{13}{2} \cdot \binom{11}{4} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{1}{1} =$$

$$= \frac{14!}{1! \cdot 13!} \cdot \frac{13!}{2! \cdot 11!} \cdot \frac{11!}{4! \cdot 7!} \cdot \frac{7!}{2! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{1! \cdot 4!} \cdot \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot \frac{1!}{1! \cdot 0!} =$$

= 151 351 200;

Man erhält im Endeffekt also 151 351 200 mögliche Umordnungen des Wortes „JÄÄTELÖTÖTTERÖ“.

Oder:

Wenn wir alle Umordnungen der vierzehn Buchstaben des Wortes „JÄÄTELÖTÖTTERÖ“ bestimmen wollen, dann können wir auch einfach die Anzahl aller möglichen Permutationen dieser vierzehn Buchstaben – davon gibt es 14! viele – durch das Produkt der Fakultäten der Vielfachheiten der mehrfach auftretenden Buchstaben dividieren (siehe 3.2.4 „Fakultäten abziehen“ – ungeordnete Stichproben ohne Zurücklegen).

Die Vielfachheiten der einzelnen Buchstaben:

J: 1mal
Ä: 2mal
T: 4mal
E: 2mal
L: 1mal
Ö: 3mal
R: 1mal

Somit erhalten wir $\frac{14!}{1! \cdot 2! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 3! \cdot 1!}$ = 151 351 200 unterschiedliche „Wörter“ und das sind tatsächlich gleich viele wie zuvor.[100]

[100] Vgl.: Schule-Studium.de: Das Schul- und Studienportal.
In: http://www.schule-studium.de/Mathe/Wahrscheinlichkeitsrechnung-Mississippi-Tim.html
(18. Juni 2012)

3.3 Wahrscheinlichkeiten

Am Anfang der Beschäftigung mit Wahrscheinlichkeiten stehen prinzipiell die Definition einiger Begriffe und das Arbeiten mit diesen. Wichtig sind diesbezüglich die Urliste, geordnete Listen, das arithmetische und gewichtete Mittel, der Modalwert oder Modus, der Zentralwert oder Median, die Quartile, die Spannweite und die Standardabweichung.[101] Diesen Inhalten möchte ich mich nun nicht weiter widmen, da sie für meine Arbeit nicht essentiell sind. Ich will sie hier nur erwähnt wissen und setze voraus, dass dem/der Leser/in klar ist, was damit gemeint ist. Des Weiteren sollte an dieser Stelle auch das Umschreiben von Dezimalzahlen in Prozente und umgekehrt keine Probleme mehr bereiten.

3.3.1 Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

Wahrscheinlichkeiten haben im Leben von uns Menschen schon immer eine große Rolle gespielt.
Wenn man sich beispielsweise den Bereich des Glücksspiels anschaut, so wird klar, dass von den Wahrscheinlichkeiten bestimmter Spielausgänge mitunter auch sehr viel abhing. So tauchte die Frage nach gewissen Gewinn- bzw. Verlustwahrscheinlichkeiten sehr schnell auf; insbesondere dann, wenn es um viel Geld ging oder sogar Haus und Hof auf dem Spiel standen.
Wahrscheinlichkeiten sind also nicht irgendein komisches, abstraktes Konstrukt, sondern sie sind vielmehr schon seit jeher Teil unseres Lebens.

Worum es sich bei Wahrscheinlichkeiten handelt und die Tatsache, dass die Intuition im Zusammenhang mit diesen so manche/n schon einmal in die Irre führen kann, soll durch die folgenden Eingangsrätsel gezeigt werden.[102]

Löcher in der Geldtasche?!
Gabriel ist Student an der Universität Wien und hat in einem Geschäft gerade sein „Mittagessen“ bezahlt – Bio-Fruchtsaft und ein Sandwich. Als er seine Geldtasche

[101] Vgl.: Götz, Stefan. Reichel, Hans-Christian. Müller, Robert. Hanisch, Günter: Mathematik Lehrbuch 6. Wien: öbvhpt Verlagsgesellschaft mbH. & Co. KG 2005. S. 164ff.
[102] Vgl.: Ebd. S. 168.

zurück in den Rucksack geben will, fallen unglücklicherweise zwei Ein-Euro-Münzen heraus auf den Boden.
Wie wahrscheinlich ist es, dass die beiden Münzen nun mit der „1" nach oben zeigen?[103]

Lösung:
Welche möglichen Ausgänge gibt es, wenn zwei Ein-Euro-Münzen zu Boden fallen?
Schnell kann man erkennen, dass vier Möglichkeiten existieren:
„Bild-Bild", „Bild-1", „1-Bild" und „1-1";

In nur einem dieser vier Fälle erhalten wir den für uns interessanten Ausgang („1-1"), weshalb die Wahrscheinlichkeit für diesen gleich $\frac{1}{4}$ sein muss.

Hierbei ist es von großer Bedeutung, zu beachten, dass es tatsächlich vier Ausgänge gibt. Ein Fehler, der aufgrund des gleichen Aussehens der Münzen recht häufig begangen wird, ist der, die beiden Ausgänge „Bild-1" und „1-Bild" als ein und denselben anzusehen. Dies führt dann aber zum falschen Ergebnis „$\frac{1}{3}$".[104]

Kopieren mit vollem Magen
Gabriel hat seine Mittagspause hinter sich gebracht und bevor nun schon gleich die nächste Vorlesung beginnt, muss er noch kurz etwas kopieren. Als er den Kopierer mit einigen Münzen füttern will, fällt ihm schon wieder eine auf den Boden und wieder ist es eine Ein-Euro-Münze.
Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze mit der „1" nach oben zeigt?
Da wir in diesem Fall zwei mögliche Ausgänge vorfinden („1" oder „Bild") und uns wieder nur einer davon („1") interessiert, ist die Wahrscheinlichkeit hier gleich $\frac{1}{2}$ oder anders formuliert, die Chancen stehen fünfzig zu fünfzig.

Nun lässt Gabriel Münzen offensichtlich ja öfters mal fallen. Angenommen, er hat heute einen besonders ungeschickten Tag und diese Ein-Euro-Münze findet noch

[103] Vgl.: Holt, Michael: Neue mathematische Rätsel für Denker und Tüftler. Köln: DuMont Literatur und Kunst Verlag 2005. S. 90.
[104] Vgl.: Ebd. S. 118.

zehnmal ihren Weg aus Gabriels Händen auf den Boden; die ersten neun Male zeigt sie dabei mit „Bild“ nach oben.

Wie groß schätzt du die Wahrscheinlichkeit ein, dass die Münze beim zehnten Mal Herunterfallen auch wieder mit „Bild“ nach oben zeigt? $\frac{1}{2}$? Höher? Niedriger?[105]

Lösung:

Beim zehnten Mal ist die Wahrscheinlichkeit für „Bild“ wieder $\frac{1}{2}$, auch wenn man versucht sein mag, dieser Münzseite nun eine kleinere Wahrscheinlichkeit zuzusprechen, da sie der Zufall zuvor ja schon neunmal ausgewählt hat.

Bei jedem Münzwurf stehen die Chancen für beide Seiten fünfzig zu fünfzig – die Münze merkt sich ja nicht, wie häufig sie bereits auf der einen oder der anderen Seite zu liegen gekommen ist. Das Gedächtnis ist etwas Menschliches, nichts „Münzisches“!

Trotzdem bzw. eigentlich genau aus dem Grund, dass eben bei jedem Wurf die Chancen für „Bild“ und „1“ gleich stehen, ist es ein Faktum, dass bei sehr langen Münzwurf-Versuchsreihen „Bild“ und „1“ annähernd gleich oft auftreten.[106]

Diese zwei Rätsel zeigen, dass es bei der Beschäftigung mit Wahrscheinlichkeiten oft nicht sehr sinnvoll ist, sich auf die erste Eingebung zu verlassen und dass es von größter Bedeutung ist, richtig zu zählen und wirklich alle Möglichkeiten zu berücksichtigen.

3.3.2 Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil

Des Weiteren hat man beim Lösen dieser Rätsel schon unbewusst *absolute* und *relative Häufigkeiten* verwendet und mit Hilfe der letzteren intuitiv Wahrscheinlichkeiten berechnet.

[105] Vgl.: Holt, Michael: Neue mathematische Rätsel für Denker und Tüftler. Köln: DuMont Literatur und Kunst Verlag 2005. S. 91.
[106] Vgl.: Ebd. S. 118.

Hinter dem Verständnis von Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit stecken Experimente, bei denen man es mit sehr langen Versuchsfolgen (das heißt man führt einen Versuch sehr oft hintereinander durch) zu tun hat.
Bei deren Durchlaufen zählt man zuerst das totale Auftreten eines gewissen Ereignisses (= *absolute Häufigkeit des Ereignisses*).
Den erhaltenen Wert dividiert man durch die Anzahl der Versuchsfolgen (= *relative Häufigkeit des Ereignisses*) und schätzt mit Hilfe des Ergebnisses dieser Rechnung die Wahrscheinlichkeit des entsprechenden Ereignisses ab.
Das heißt, die relative Häufigkeit eines Ereignisses (= $\frac{\text{absolute Häufigkeit}}{\text{Anzahl der Versuchswiederholungen}}$) wird als bester Schätzwert für das Auftreten des Ereignisses in der Zukunft
(= Wahrscheinlichkeit des Ereignisses) verwendet.

Wie schon erwähnt, kam die relative Häufigkeit als Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen gerade eben in unseren Rätseln bereits vor.
Aber haben wir da irgendwelche Versuche 100mal oder öfter durchgeführt? Nein. Man muss absolute und relative Häufigkeiten nicht immer nur im Zusammenhang mit tatsächlichen Versuchswiederholungen sehen.
Wenn man sich alle möglichen Ausgänge eines bestimmten Versuchs anschaut und dabei das absolute Auftreten eines gewissen Ereignisses zählt, kommt man durch Division ($\frac{\text{absolutes Auftreten}}{\text{Anzahl der möglichen Ausg änge}}$) auch zur relativen Häufigkeit oder besser gesagt zum *relativen Anteil* und damit zur Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses.[107]

Beispielsweise ist die Gesamtheit aller möglichen Ausgänge im Rätsel „Löcher In Der Geldtasche?!“ durch die folgenden Ereignisse gegeben: „Bild-Bild“, „Bild-1“, „1-Bild“ und „1-1“;
Das sind insgesamt vier mögliche Ausgänge, wovon uns aber nur der Ausgang „1-1“ interessiert. Dessen relativer Anteil an allen Ausgängen ist also $\frac{1}{4}$ und damit haben wir auch dessen Wahrscheinlichkeit gefunden.

Im Kapitel „Laplace“ wird das alles genauer besprochen.

[107] Vgl.: Götz, Stefan. Reichel, Hans-Christian. Müller, Robert. Hanisch, Günter: Mathematik Lehrbuch 6. Wien: öbvhpt Verlagsgesellschaft mbH. & Co. KG 2005. S. 168.

3.3.3 Wahrscheinlichkeit als subjektives Vertrauen

Wenn Experimente keine Hilfe mehr darstellen (sie sind in vielen Fällen nicht wirklich durchführbar und schon gar nicht oft genug) und das Betrachten aller möglichen Ausgänge auch nicht den gewünschten Erfolg bringt, dann werden Wahrscheinlichkeiten zu einem *Maß für unser subjektives Vertrauen* darauf, dass ein bestimmtes Ereignis eintritt oder nicht.

Ein Beispiel dafür stellen Wettquoten dar:
Rahul wettet vier Euro gegen einen Euro (Quote 4:1), dass das nächste Werfen des Würfels „1“, „2“, „4“, „5“ oder „6“ ergibt. Das heißt, wird wirklich „1“, „2“, „4“, „5“ oder „6“ gewürfelt, dann erhält er von seinem/seiner Wettpartner/in einen Euro. Erscheint allerdings „3“ auf der Würfeloberseite, dann muss er seinem Gegenüber vier Euro zahlen.

Wie groß ist beim Würfeln aber die Wahrscheinlichkeit für „1“, „2“, „4“, „5“ oder „6“? Und wie stehen die Chancen für „3“?

Ist dieses Spiel fair? Und wenn nicht, wie müsste die Quote stehen, damit es fair wird?

Wie hängen Quote und Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines bestimmten Ereignisses im fairen Fall zusammen?[108]

Bei den folgenden Rätseln gehen wir immer von fairen Wettquoten aus:

Wer hält zum Kojoten?
Drei Tiere aus dem Land der Träume wollen herausfinden, wer von ihnen wohl die/der Schnellste ist. So laufen der Schimpanse, das Einhorn und der Kojote um die Wette.
1:3 beschreibt die Gewinnwahrscheinlichkeit des Schimpansen und 3:4 stehen die Chancen für das Einhorn.

[108] Vgl.: Götz, Stefan. Reichel, Hans-Christian. Müller, Robert. Hanisch, Günter: Mathematik Lehrbuch 6. Wien: öbvhpt Verlagsgesellschaft mbH. & Co. KG 2005. S. 169.

Angenommen, alles läuft, wie man es im Land der Träume gewohnt ist, korrekt ab, wie wahrscheinlich ist es dann, dass der Kojote gewinnt?[109]

Lösung:
Um dieses Rätsel besser fassen zu können, schreiben wir als allererstes die obigen Quoten in Gewinnwahrscheinlichkeiten um.
Der Schimpanse gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{4}$ und das Einhorn wird in $\frac{3}{7}$ aller Fälle siegreich die Rennstrecke verlassen.

Da die einzelnen Gewinnwahrscheinlichkeiten Anteilen von 1 (= Wahrscheinlichkeit des einen, mit Sicherheit eintretenden Sieges) entsprechen, müssen sie in der Summe 1 ergeben. Wenn wir die Gewinnwahrscheinlichkeit des Kojoten mit x bezeichnen, muss daher Folgendes gelten: $\frac{1}{4} + \frac{3}{7} + x = 1$;

Nach kurzer elementarer Umformung kommen wir auf: $x = 1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{7} = \frac{9}{28}$;

Der Kojote gewinnt also mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{9}{28}$ bzw. stehen die Chancen 9:19 für ihn.[110]

Anhand dieses Beispiels erkennt man ganz beiläufig sehr leicht von selbst, dass die Einzelwahrscheinlichkeiten aller, einen Versuch bildenden Ergebnisse (= *Ergebnismenge*) aufsummiert gleich „1“ sein müssen.

Geht schon!
In der Ortschaft Lind nehmen dieses Jahr leider nur drei Mannschaften am Kleinfeldturnier teil.
Alle drei haben relativ ausgefallene Namen. Die erste Mannschaft nennt sich „Die erfolgreichen Verlierer“, die zweite heißt „La victoria hasta siempre“ und die dritte fand den Namen „Wos soll´s?!“ für sich sehr passend.

[109] Vgl.: Loyd, Sam. Gardner, Martin: Mathematische Rätsel und Spiele. Denksportaufgaben für kluge Köpfe. 117 Aufgaben und Lösungen. Köln: DuMont Buchverlag 1978. S. 88.
[110] Vgl.: Ebd. S. 187.

Wenn man sich die Spiele der letzten Jahre in Erinnerung ruft, so sollten „Die erfolgreichen Verlierer“ eine Chance von 3:3 auf den Sieg haben und 4:1 sollten die Chancen gegen „La victoria hasta siempre“ stehen.
Wie muss die Quote für einen Erfolg von „Wos soll´s?!“ aussehen?[111]

Lösung:
Ähnlich wie zuvor schreiben wir die Chancen wieder in Wahrscheinlichkeiten um.
Die Gewinnwahrscheinlichkeit für „Die erfolgreichen Verlierer“ beträgt dann $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; „La victoria hasta siempre“ wird in $\frac{1}{5}$ aller Fälle als Sieger vom Platz gehen (eine 4:1-Chance gegen eine Mannschaft ist ja gleichbedeutend mit einer 1:4-Chance für die Mannschaft).

Mit unserem Wissen bezüglich der Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten können wir die Gewinnwahrscheinlichkeit von „Wos soll´s?!“ nun folgendermaßen berechnen:
$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$;

Damit stehen die Chancen 3:7 für „Wos soll´s?!“.[112]

3.3.4 Laplace

Hat man eine Versuchsanordnung vor sich liegen, so ist es zumeist nicht möglich, den Ausgang des Versuchs vollkommen verlässlich vorherzusagen – er hängt vom Zufall ab.
Eines kann man aber sehr wohl mit absoluter Sicherheit beschreiben, nämlich die Menge der möglichen Ausgänge – die gerade schon erwähnte *Ergebnismenge Ω des Experiments*.

[111] Vgl.: Symmank, Christian: Willkommen auf meiner SYMMANK-Homepage.
In: http://www.symmank.de/wahrscheinlichkeit.htm (9. Juni 2012)
[112] Vgl.: Symmank, Christian: Willkommen auf meiner SYMMANK-Homepage.
In: http://www.symmank.de/loesweg.php?loes=q3.txt (9. Juni 2012)

Was ist beispielsweise die Ergebnismenge beim Werfen einer Münze oder eines Würfels? Wie sieht sie beim Ziehen einer Kugel aus einer Urne aus, die mit einer grünen, einer blauen und einer gelben Kugeln gefüllt ist?

Ist ein Experiment durch die Ergebnismenge schon hinreichend beschrieben? Nein. Natürlich sollten wir noch mehr wissen, beispielsweise wie groß die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der einzelnen Versuchsergebnisse sind.

Wie hoch ist nun aber die Wahrscheinlichkeit für das Werfen von „Kopf“ oder „Zahl“ bzw. für das Würfeln von „1“, „2“, …, „5“ oder „6“? Wie sieht es beim Kugelziehen aus?

Wir erhalten hier innerhalb eines Versuchs für die Einzelwahrscheinlichkeiten immer denselben Wert (Wahrscheinlichkeit für „Kopf“ = $\frac{1}{2}$ = Wahrscheinlichkeit für „Zahl“, usw.). Das heißt, alle Ereignisse dieser Ergebnismengen treten mit derselben Wahrscheinlichkeit auf.
Das ist etwas Besonderes, weshalb wir diesem Sachverhalt auch einen Namen geben:[113]

> Ein Zufallsexperiment, bei dem jedes der möglichen Versuchsergebnisse mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftritt, heißt LAPLACE`sches (Zufalls-)Experiment.

Des Weiteren lässt sich die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A [P(A)] aus der Ergebnismenge Ω eines Laplace´schen Zufallsexperiments auf die folgende Art berechnen:

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Versuchsergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Versuchsergebnisse}} = \frac{|A|}{|\Omega|};$$

[113] Vgl.: Götz, Stefan. Reichel, Hans-Christian. Müller, Robert. Hanisch, Günter: Mathematik Lehrbuch 6. Wien: öbvhpt Verlagsgesellschaft mbH. & Co. KG 2005. S. 170.

Falls sich an dieser Stelle jemand wundern sollte, warum wir dies als neue Erkenntnis formulieren, so muss ich sagen, dass er/sie das zu Recht tut. Diese Formel zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten haben wir tatsächlich die ganze Zeit schon intuitiv richtig verwendet, sie soll hier bloß ihre konkrete Erwähnung finden.

Zur Anwendung:

Simsalabim

Am Bodensee, im Dreiländereck von Deutschland, Österreich und der Schweiz, hat vergangenes Wochenende eine Open-Air-Zauber-Show stattgefunden.

Das Publikum bestand ausschließlich aus Deutschen (siebenundzwanzig), Österreicher/inne/n (neunzehn) und Schweizer/inne/n (einundzwanzig).

Wie es bei Zauber-Shows so üblich ist, benötigte der große Zauberer immer wieder Freiwillige aus dem Publikum und bei der Vorführung eines ganz besonderen Tricks brauchte er sogar zwei.

Da sich niemand meldete, suchte er sich diese zwei „Freiwilligen" einfach selbst aus.

- Wie viele Möglichkeiten hatte der Zauberer dafür?
- Wie wahrscheinlich ist es, dabei zufällig zwei Deutsche zu wählen?
- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Wahl dabei zufällig auf zwei Österreicher/innen fiel?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man eine/n Deutsche/n und eine/n Schweizer/in?
- Und wie sieht es mit zwei unterschiedlichen Nationalitäten aus?

Lösung:

Zum ersten Punkt:

Im Gesamten besuchten siebenundsechzig Leute die Zauber-Show und von diesen wollen wir auf alle möglichen Arten zwei auswählen. Daher berechnen wir:

$\binom{67}{2} = \frac{67!}{2! \cdot 65!} = 2211;$

Der Zauberer hatte also 2211 Möglichkeiten, zwei Leute aus den siebenundsechzig auszusuchen.

Zum zweiten Punkt:

Insgesamt gab es siebenundzwanzig Deutsche und davon wollen wir für unsere „günstigen Fälle“ zwei auswählen. Diese „günstigen Fälle“ müssen wir dann nach Laplace aber noch durch die Anzahl aller „möglichen Fälle“ dividieren; davon haben wir nach dem ersten Punkt aber $\binom{67}{2}$ viele.

Bezüglich der Wahrscheinlichkeit für zwei Deutsche ergibt sich die Rechnung:
$\frac{\binom{27}{2}}{\binom{67}{2}} = 0.1588;$

In 15.88% der Fälle wurden also zufällig zwei Deutsche ausgewählt.

Zum dritten Punkt:

Ganz analog zum zweiten Punkt erhält man die Wahrscheinlichkeit für zwei Österreicher/innen: $\frac{\binom{19}{2}}{\binom{67}{2}} = 0.0773;$

In 7.73% der Fälle wurden also zwei Österreicher/innen gewählt.

Zum vierten Punkt:

Auch analog zum zweiten bzw. dritten Punkt, nur etwas schwieriger – man muss nämlich noch die günstigen Fälle miteinander kombinieren, das heißt deren Anzahlen miteinander multiplizieren -, ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für eine/n Deutsche/n und eine/n Schweizer/in: $\frac{\binom{27}{1} \cdot \binom{21}{1}}{\binom{67}{2}} = 0.2564;$

Der Zauberer erhielt unter den beiden willkürlich ausgewählten Personen also mit einer Wahrscheinlichkeit von 25.64% eine/n Deutsche/n und eine/n Schweizer/in.

Zum fünften Punkt:

Hier muss man nun die folgenden drei Fälle in das Ergebnis integrieren: „Deutsche/r–Österreicher/in", „Österreicher/in–Schweizer/in" und „Schweizer/in–Deutsche/r";

Die Wahrscheinlichkeiten für diese einzelnen Fälle sind gegeben durch:

$\frac{\binom{27}{1}\cdot\binom{19}{1}}{\binom{67}{2}}$, $\frac{\binom{19}{1}\cdot\binom{21}{1}}{\binom{67}{2}}$ und $\frac{\binom{21}{1}\cdot\binom{27}{1}}{\binom{67}{2}}$;

Nun müssen wir diese noch addieren und erhalten das Folgende:

$\frac{\binom{27}{1}\cdot\binom{19}{1}+\binom{19}{1}\cdot\binom{21}{1}+\binom{21}{1}\cdot\binom{27}{1}}{\binom{67}{2}} = 0.6689$;

Für diesen letzten, kompliziertesten Fall erhalten wir also eine Wahrscheinlichkeit von 66.89%.[114]

Tochter und Tochter?

Frau Saraijlic ist die Mutter zweier Kinder. Wir wissen mit Sicherheit, dass sie mindestens eine Tochter hat.

Wie wahrscheinlich ist es, dass sich diese über die Existenz einer Schwester freuen kann?

Lösung:

Da Frau Saraijlic zwei Kinder hat, ergeben sich hier prinzipiell die folgenden, gleich wahrscheinlichen Möglichkeiten:

„Tochter-Tochter", „Tochter-Sohn", „Sohn-Tochter" und „Sohn-Sohn";

[114] Vgl.: Schule-Studium.de: Das Schul- und Studienportal.
In: http://www.schule-studium.de/Mathe/Wahrscheinlichkeitsrechnung-Untermenge.html (18. Juni 2012)

„Sohn-Sohn“ scheidet aber von vornherein aus, weil wir ja wissen, dass Frau Saraijlic mindestens eine Tochter hat.
Insofern haben wir drei „mögliche“ Fälle und einen „günstigen“, nämlich „Tochter-Tochter“.

Nach Laplace beträgt die Wahrscheinlichkeit für zwei Töchter somit $\frac{1}{3}$.

Die oft sehr schnell genannte Lösung „$\frac{1}{2}$“ ist falsch, weil wir nicht wissen, welches der beiden Kinder die eine Tochter ist. Insofern können wir diese nicht einfach „festhalten“ und uns nur auf das Geschlecht des anderen Kindes konzentrieren; wir müssen uns einfach prinzipiell alle Möglichkeiten anschauen.[115]

Scherben bringen Glück
In der heutigen Zeit müssen Menschen nicht mehr gezwungenermaßen in Geschäfte gehen, wenn sie einkaufen wollen. Stattdessen kann man den Computer einschalten und im Internet auf einer der unzähligen, alles anbietenden Seiten das bestellen, was man gerade braucht. Egal ob es sich um Bücher handelt, um Kleidung oder um Zahnpasta, alles findet man im World Wide Web.
So auch Suppenteller, von welchen das Restaurant „Lounge“ kürzlich vierzig geordert hat. Schon bei der Bestellung musste sich der Betriebsführer damit einverstanden erklären, dass bei der Lieferung im Durchschnitt zehn Prozent der Teller kaputt gehen.
Als das Paket ankommt, nimmt der Betriebsführer von „Lounge“ sechs Teller aus dem riesigen Karton.

- Wie wahrscheinlich ist es, dass keiner dieser sechs kaputt ist?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind genau drei dieser sechs kaputt?

[115] Vgl.: Andinet.de: Wahrscheinlichkeit für einen Bruder.
In: http://www.andinet.de/raetsel/raetsel/bruderwahrscheinlichkeit.php?lsg (8. Juni 2012)

Lösung:

Zum ersten Punkt:
Wir haben 40 Suppenteller und nehmen an, dass 10% davon kaputt sind. 10% von 40 sind 4; das heißt, 4 zerbrochene Teller sind zu erwarten.

Nun wenden wir wieder die Laplace´sche Regel „Günstige durch Mögliche" an – alle einzelnen Ziehungen sind ja gleich wahrscheinlich.

Es gibt $\binom{40}{6}$ „mögliche" Ziehungen von 6 aus 40 Suppentellern; für unsere „günstigen" wollen wir an dieser Stelle 6 von den 36 unbeschädigten und 0 von den 4 zerbrochenen Tellern.

Somit kommen wir auf die folgende Rechnung: $\frac{\binom{36}{6}\cdot\binom{4}{0}}{\binom{40}{6}}$ = 0.5075;

Das heißt, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keiner der sechs Teller kaputt ist, beträgt 50.75%.

Zum zweiten Punkt:
Nun benötigen wir für die „günstigen" Fälle 3 der 4 kaputten und 3 der 36 unbeschädigten Suppenteller. „Mögliche" Fälle haben wir wieder gleich viele wie gerade eben.

Daher kommen wir auf: $\frac{\binom{4}{3}\cdot\binom{36}{3}}{\binom{40}{6}}$ = 0.0074;

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.74% sind somit genau drei der sechs gezogenen Teller kaputt.[116]

[116] Vgl.: Schule-Studium.de: Das Schul- und Studienportal.
In: http://www.schule-studium.de/Mathe/Wahrscheinlichkeitsrechnung-Untermenge-Gluehbirnen.html (18. Juni 2012)

Verlassen wie vorgefunden

Zwölf Freunde/Freundinnen haben während ihrer Studienzeit zusammen in einem großen Haus gelebt, welches relativ weit vom Stadtzentrum entfernt gelegen war. Da sie nun alle ihr Studium beendet und zu arbeiten begonnen haben, verfügen sie über mehr Geld und haben sich dazu entschlossen, dieses unter anderem in mehr Wohnqualität und damit auch in eine bessere, zentralere Lage des Wohnsitzes zu investieren. Da man in der Stadt aber schwer ein kleines Haus findet, in dem zwölf Leute wohnen können, haben sie sich in Zweiergruppen aufgeteilt und leben nun alle zu zweit in Wohngemeinschaften.

Immer wieder treffen sie sich um zu kochen, zu essen und einfach einen schönen Abend miteinander zu verbringen. Am Ende eines solchen Abends werden immer durch Zufall drei Leute bestimmt, die dann dafür verantwortlich sind, dass die jeweilige Wohnung, in der das Beisammensein stattgefunden hat, aufgeräumt und sauber hinterlassen wird. Da es aber langweilig wäre, wenn sich unter diesen drei Personen wieder zwei aus derselben Wohngemeinschaft befinden würden – diese sehen sich ja ohnehin jeden Tag -, frage ich nun nach der Wahrscheinlichkeit dafür, dass man zufällig drei Leute von den zwölf auswählt und der gerade erwähnte langweilige Fall eben nicht eintritt.[117]

Lösung:

Wenn man hier sofort den Verdacht hat, wieder einmal Laplace anwenden zu müssen, so liegt man sehr richtig.

Für die Anzahl der „Möglichen" müssen hier die verschiedenen Arten 3 aus 12 auszusuchen gezählt werden. Daher: $\binom{12}{3} = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = 220$;

Für die Anzahl der „Günstigen" (drei Leute, von denen keine zwei in derselben Wohngemeinschaft leben) müssen wir ein wenig mehr arbeiten.

Man kann die zwölf Leute in zwei Sechsergruppen aufspalten, sodass sich in keiner dieser zwei Gruppen zwei aus der gleichen Wohngemeinschaft befinden. Somit muss man die drei gesuchten Personen ganz einfach nur aus einer dieser beiden Sechsergruppen auswählen, weshalb wir uns schon einmal Folgendes berechnen:

[117] Vgl.: Symmank, Christian: Willkommen auf meiner SYMMANK-Homepage. In: http://www.symmank.de/wahrscheinlichkeit.htm (9. Juni 2012)

$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20;$

Nun kann man bei der Wahl jeder einzelnen dieser drei Personen aber jedes Mal entweder die Person selbst oder den/die Mitbewohner/in wählen.
Insofern muss die obige Zahl noch „dreimal“ verdoppelt werden. Das erreicht man dadurch, dass man einfach im Gesamten mit 2^3 multipliziert.

Insgesamt kommt man auf die folgende Rechnung:
$\frac{20 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{220} = 0.7273;$

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter den drei zufällig ausgewählten „Aufräumer/inne/n“ keine zwei Leute aus der gleichen Wohngemeinschaft befinden, beträgt also 72.73%.[118]

Zwei plus eins macht drei
Sophie ist leidenschaftliche Würfelsammlerin. Mittlerweile ist sie schon Besitzerin von über zwanzig Würfeln. Wenn ihr langweilig ist, spielt sie gerne mit ihren Lieblingen und erfindet die verrücktesten Spiele. Manchmal stößt sie dabei auch auf die eine oder andere Frage.
So hat sie sich eines Tages, nachdem sie einen Würfel dreimal hintereinander geworfen hatte, gefragt, wie wahrscheinlich es ist, dass der Würfel beim dritten Wurf die Summe der Augenzahlen der ersten beiden Würfe zeigt. Kannst du ihr helfen?[119]

Lösung:
Die Summe der zwei gewürfelten Zahlen muss größer gleich „2“ und kleiner gleich „6“ sein – ein Würfel kann ja nur die Zahlen von „1“ bis „6“ zeigen und „1“ lässt sich nicht als Summe zweier Würfelzahlen schreiben. Aus diesem Grund erhält man mit zwei Würfeln auf jeden Fall Summen, die hier nun nicht in Frage kommen.

[118] Vgl.: Symmank, Christian: Willkommen auf meiner SYMMANK-Homepage.
In: http://www.symmank.de/loesungen.htm#loeswahr (9. Juni 2012)
[119] Vgl.: Janko, Angela. Janko, Otto: Mathematik (Mathe-Rätsel).
In: http://www.janko.at/Raetsel/Mathematik/062.a.htm (10. Juni 2012)

Wie viele kommen aber in Frage, das heißt, wie viele Möglichkeiten gibt es, die Ziffern „2“ bis „6“ als Summe zweier Zahlen zu schreiben, die beide zwischen „1“ und „6“ liegen? Wir gehen systematisch vor:

„1 + 1“	„2 + 1“	„3 + 1“	„4 + 1“	„5 + 1“
„1 + 2“	„2 + 2“	„3 + 2“	„4 + 2“	
„1 + 3“	„2 + 3“	„3 + 3“		
„1 + 4“	„2 + 4“			
„1 + 5“				

Mit diesen 15 Möglichkeiten sollten wir alle gefunden haben.
Von den $6 \cdot 6 = 36$ prinzipiell möglichen Summen sind also nur 15 sinnvoll.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnet man somit folgendermaßen:
$\frac{15}{36} = 0.4167$;[120]

Nein? Ja? Egal?
Die Familie Mair umfasst vier Personen – Mama, Papa, Tochter und Sohn.
Mama Sabine und Papa Johannes setzten sich schon immer stark dafür ein, dass ihre zwei Kinder Jelena und Leon möglichst viel draußen im Garten an der frischen Luft sind und dabei ständig neue Spiele selbst kreieren, anstatt im Zimmer passiv vorm Fernseher oder vorm Computer zu sitzen. Jelena und Leon finden es eigentlich auch total gut in der Natur unterwegs zu sein, doch manchmal versiegt die Quelle ihrer Ideen und dann kann es durchaus auch einmal etwas langweilig werden. Gut, dass in solchen Fällen ihr Papa oft zur Stelle ist und sie mit spannendem Input versorgt; so auch heute.
Nach dem bloßen Ankündigen eines super Einfalls verschwindet er für geraume Zeit in der Scheune und als er zurückkommt, bringt er drei riesige, selbst gebastelte Holzkisten mit sich, die er vor den Kindern aufstellt.
Johannes erklärt ihnen, dass in einer der drei Boxen eine Überraschung auf sie wartet und dass in den zwei anderen gar nichts zu finden ist. Dann meint er, dass sie eine der drei Kisten auswählen sollen, von der sie glauben, dass sie den Preis

[120] Vgl.: Janko, Angela. Janko, Otto: Mathematik (Mathe-Rätsel).
In: http://www.janko.at/Raetsel/Mathematik/062.b.htm (10. Juni 2012)

beinhaltet. Kaum fünf Sekunden später zeigen Jelena und Leon schon fest entschlossen auf eine der Boxen. Papa Johannes fragt noch einmal nach, ob sie wirklich diese eine Box meinen und nach deren Bestätigung sagt er „Schaut mal!“ und öffnet eine der anderen zwei Kisten, die natürlich leer ist – Johannes weiß ja, wo er die Überraschung versteckt hat und will dieses Geheimnis natürlich noch nicht lüften.

Das Öffnen dieser leeren Box soll den zwei Kindern nun als zusätzliche Information dienen. Bevor Johannes gleich noch eine Box öffnen und das Spiel somit beenden wird, bietet er den beiden an, ihre Entscheidung noch einmal zu überdenken und nun doch die andere noch übrige Kiste zu wählen.

Jelena ist sofort hundertprozentig für den Wechsel, Leon empfindet diesen als großen Schwachsinn.

Wer von den beiden sollte die/den andere/n überzeugen um damit ihre Gewinnchancen zu erhöhen? Oder spielt es überhaupt keine Rolle, ob sie den Wechsel vornehmen oder nicht?[121]

Lösung:

Bei diesem Rätsel gibt es bestimmt mehrere Meinungen bezüglich der Lösung.

Fragt man danach, wie wahrscheinlich es ist, dass Jelena und Leon mit Entscheidungswechsel die Überraschung gewinnen werden, so wird von vielen bestimmt „$\frac{1}{2}$“ als Lösung vorgeschlagen. Die beiden Kinder müssen sich am Ende ja zwischen zwei Boxen entscheiden und die Wahrscheinlichkeit eine von zwei zu wählen ist eben gleich $\frac{1}{2}$.

Dabei wird aber vergessen, dass das Öffnen einer leeren Box durch Papa Johannes nicht unbedeutend ist. Seine Wahl der Kiste hängt ja von der zuvor getroffenen Wahl der Kinder ab.

Um das konkreter und klarer zu machen, können wir einfach einmal beide Varianten durchspielen und schauen, welche sich dabei als die aussichtsreichere entpuppt.

Hierzu nennen wir unsere Kisten „1“, „2“ und „3“. „3“ sei die Überraschungsbox.

[121] Vgl.: Keller, Gerhard: Ziegenproblem.
In: http://www.gfksoftware.de/Ziegenproblem/ (8. Juni 2012)

Zuerst mit „Sich-Um-Entscheiden“:

Erster Fall:
Jelena und Leon wählen zu Beginn „1“. Johannes wird dann klarerweise „2“ öffnen und durch das darauf folgende „Sich-Um-Entscheiden“ der beiden Kinder kommen sie zu ihrem Gewinn.

Zweiter Fall:
Die beiden wählen anfangs „2“. Daraufhin wir ihr Papa „1“ öffnen und der anschließende Wechsel beschert ihnen wieder die Überraschung.

Dritter Fall:
Die zwei Kinder wählen „3“, woraufhin Papa Johannes „1“ oder „2“ öffnen wird. Jelena und Leon wechseln dann je nachdem zu „2“ oder „1“ und verlieren.

Zusammenfassend:
Mit „Sich-Um-Entscheiden“ gewinnen Jelena und Leon in zwei von drei Fällen ihren Preis. Das heißt, sie gewinnen mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$.

Nun ohne „Sich-Um-Entscheiden“:

Erster Fall:
Jelena und Leon wählen „1“, bleiben dabei und verlieren.

Zweiter Fall:
Die beiden entscheiden sich für „2“, wechseln nicht und gehen wieder leer aus.

Dritter Fall:
Die Entscheidung der zwei Kinder fällt auf „3“, sie ändern ihre Wahl wiederum nicht und werden mit der Überraschung belohnt.

Zusammenfassend:
Ohne „Sich-Um-Entscheiden“ gewinnen sie nur in einem von drei Fällen, womit die Gewinnwahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ beträgt.

Ergebnis:
Jelena und Leon sollten ihre Wahl also auf jeden Fall noch einmal zu ändern! Dadurch erhöhen sie ihre Gewinnwahrscheinlichkeit nämlich von nur $\frac{1}{3}$ auf $\frac{2}{3}$.[122]

3.3.5 Gegenereignis

Betrachte die folgende Fragestellung und deren Lösung!

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, bei einmaligem Würfeln eine der Zahlen „1“, „2“, „3“, „4“ oder „5“ zu erhalten?
Mit Hilfe der Laplace´schen Wahrscheinlichkeitsregel kommen wir zum richtigen Ergebnis „$\frac{5}{6}$“ (beim Würfeln gibt es insgesamt sechs mögliche Ausgänge und für uns sind hier nun eben fünf davon von Interesse).

Wie könnte man in diesem Beispiel „$\frac{5}{6}$“ noch anders erhalten?
Auf jeden Fall gilt: $\frac{5}{6} = 1 - \frac{1}{6}$;

Was aber ist im Hinblick auf die obige Aufgabe „$\frac{1}{6}$“?
Genau, „$\frac{1}{6}$“ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, die Zahl „6“ zu würfeln.
Das heißt: $\frac{5}{6} = 1 - \frac{1}{6} = 1 - P(„6“)$;

Das Würfeln der Zahl „6“ ist das sogenannte *Gegenereignis* zum Würfeln einer der Zahlen „1“, „2“, „3“, „4“ oder „5“. Wir erkennen:

> (die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses) = 1 – (die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses);

122 Vgl.: Andinet.de: Drei Tore und nur ein Gewinn – das Ziegenproblem. In: http://www.andinet.de/raetsel/raetsel/dreitore.php?lsg (8. Juni 2012)

Oder kurz:

$P(A) = 1 - P(A')$ …………………………… A´ ist hier das Gegenereignis von A;

Es gibt viele Fälle, in denen die Verwendung des Gegenereignisses die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten um einiges vereinfacht.[123]

Versuche!

Die Faszination des Unbekannten

Reisen wird immer populärer und so hat das Reisefieber auch die Österreicher/innen gepackt.

Wenn 80% aller Österreicher/innen schon einmal in Italien waren, 90% in Deutschland, 70% in Kroatien und 65% in Spanien, wie viel Prozent waren dann bereits in allen vier Ländern?

Lösung:

Da wir mit dem Gegenereignis arbeiten wollen, berechnen wir zuerst, wie viel Prozent aller Österreicher/innen noch nie in Italien, Deutschland, Kroatien oder Spanien waren.

Aus der Rechnung $1 - 0.8 = 0.2$ folgt, dass 20% aller Österreicher/innen noch nie in Italien waren. $1 - 0.9 = 0.1$ bedeutet, dass 10% der österreichischen Bevölkerung noch nicht in Deutschland auf Urlaub waren.

Mittels $1 - 0.7 = 0.3$ erkennt man, dass 30% der in Österreich lebenden Menschen noch nie nach Kroatien gefahren sind und $1 - 0.65 = 0.35$ sagt uns, dass 35% der Österreicher/innen noch keine Reise nach Spanien unternommen haben.

Wenn man nun die Summe dieser Anteile bildet, erfährt man, wie viel Prozent der österreichischen Bevölkerung noch in keinem dieser vier Länder waren. Also:

$0.2 + 0.1 + 0.3 + 0.35 = 0.95$, das entspricht 95%;

Wir wollen aber die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses wissen.

[123] Vgl.: Götz, Stefan. Reichel, Hans-Christian. Müller, Robert. Hanisch, Günter: Mathematik Lehrbuch 6. Wien: öbvhpt Verlagsgesellschaft mbH. & Co. KG 2005. S. 171.

Insofern: 1 – (0.2 + 0.1 + 0.3 + 0.35) = 0.05, das entspricht 5%;

Nur 5% aller Österreicher/innen haben also schon alle vier Länder bereist.[124]

Das harte Gesetz der Straße

Fiona, Franz und Daniel spielen in ihrer Freizeit sehr gerne Streetball. Dabei wird nur auf einen Korb gespielt und es tritt immer eine/r gegen eine/n an, während der/die Dritte Pause macht.

Eines Tages kreuzt Franz mit einem neuen Ball auf. Fiona und Daniel sind sofort vollauf begeistert und durchlöchern ihn mit Fragen, wie „Woher?“, „Warum?“, „Von wem?“, …

Fiona gefällt der Ball besonders gut, weshalb sie Franz scherzhaft fragt, was sie denn tun müsse, damit er ihr den Ball schenke. Franz ist von seinen Fähigkeiten als Streetball-Spieler vollkommen überzeugt und er nimmt Fiona als das einzige Mädchen auf dem Streetball-Feld auch nicht ganz ernst. Daher antwortet er ihr, dass sie von drei Spielen, die sie abwechselnd gegen ihn und gegen Daniel absolvieren müsse, nur zwei aufeinander folgende zu gewinnen habe, damit der Ball ihr gehöre. Ob sie zuerst gegen ihn spiele, dann gegen Daniel und anschließend noch einmal gegen ihn oder umgekehrt sei ihr überlassen.

Daraufhin verlangt Fiona einen bestätigenden Händedruck und überlegt. Sie weiß, dass sie normalerweise mehr Partien gegen Daniel gewinnt als gegen Franz. Dennoch kann sie sich nicht entscheiden, mit welchem der beiden sie beginnen soll. Wer kann ihr helfen?[125]

Lösung:

Um das Rätsel besser in den Griff zu bekommen, bezeichne ich die Wahrscheinlichkeit, mit der Fiona in einem Spiel gegen Franz als Siegerin hervorgeht, mit „F“; „D“ sei die Wahrscheinlichkeit, mit der sie gegen Daniel gewinnt.

Dann kann man dem Text Folgendes entnehmen: D > F;

---

[124] Vgl.: Rüdrich, Annet: Von Zigarettenrauchern und Rechtshändlern.
In: http://www.matheraetsel.de/archiv/Stochastik/Rechtshaendler/rechtshaendler2.pdf (10. Juni 2012)

[125] Vgl.: Hemme, Heinrich: Der Wettlauf mit der Schildkröte. 100 mathematische Rätsel mit ausführlichen Lösungen. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 2002, 2004. S. 13.

Erster Fall:

Angenommen, Fiona tritt zuerst gegen Franz an. Dann darf sie keinesfalls beide Partien – sie muss nun ja insgesamt zweimal gegen ihn spielen – verlieren.
Die Wahrscheinlichkeit, ein Spiel gegen Franz zu verlieren, ist gegeben durch $1 – F$. Daher beträgt die Wahrscheinlichkeit, zwei Partien gegen Franz zu verlieren, $(1 – F)^2$. Das von Fiona erhoffte Gegenereignis (nicht bei beiden Spielen als Verliererin vom Platz zu gehen) tritt somit mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 – (1 – F)^2 = F(2 – F)$ ein.

Die Wahrscheinlichkeit, die mittlere Partie gegen Daniel zu gewinnen, wird durch D beschrieben.

Am Ende beträgt die Wahrscheinlichkeit, mit dieser Strategie den Basketball zu gewinnen, $DF(2 – F)$.

Zweiter Fall:

Wenn Fiona nun die erste Partie gegen Daniel spielt, so erhält man die Wahrscheinlichkeit für den Basketball-Gewinn auf vollkommen analoge Art und Weise; man muss nur die beiden Buchstaben D und F vertauschen.
Insofern ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit hier $DF(2 – D)$.

Da die Rätselangabe aber $D > F$ besagt, muss gelten: $DF(2 – F) > DF(2 – D)$;

Wenn Fiona ihre Gewinnchancen optimieren möchte, sollte sie daher Franz als ihren ersten Gegner wählen.[126]

Du auch?!

Worum geht es auf Geburtstagsfeiern? Richtig, um Geburtstage!
Da diese bei derartigen Festlichkeiten schon einmal zentrales Thema sind, kann man die geladenen Gäste diesbezüglich auch gleich zum Staunen bringen.
Behauptet auf der nächsten Feier einfach mal, dass mit fast hundertprozentiger Sicherheit zwei der Anwesenden am selben Tag geboren sind – es geht nur um den

[126] Vgl.: Hemme, Heinrich: Der Wettlauf mit der Schildkröte. 100 mathematische Rätsel mit ausführlichen Lösungen. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 2002, 2004. S. 51.

gleichen Tag, das Jahr ist irrelevant! Nun ja, wahrscheinlich wird euch niemand glauben.

Wie wahrscheinlich ist es aber wirklich, dass auf einem Fest mit beispielsweise dreiundzwanzig Gästen zwei am gleichen Tag Geburtstag haben?
Und wie schaut dies bei sechzig Personen aus?[127]

Lösung:
Die Mathematik abstrahiert immer wieder von bestimmten Details. So werden hier beispielsweise Schaltjahre vernachlässigt, wodurch wir unter einem Jahr ganz einfach dreihundertfünfundsechzig Tage verstehen.

Nachdem dieses Rätsel dem Kapitel „Gegenereignis" angehört, werden wir dieses auch hier wieder zur Anwendung bringen müssen.
Insofern frage ich gleich einmal, wie wahrscheinlich es ist, dass zwei Leute nicht am selben Tag Geburtstag haben?

In einem Jahr gibt es dreihundertfünfundsechzig „mögliche" Tage um Geburtstag zu feiern. Für die/den Erste/n sind alle davon „günstig". Für die/den Zweite/n bleiben nur mehr dreihundertvierundsechzig „günstige", da sich die/der Erste ja bereits einen Tag ausgewählt hat. Daher lautet die Antwort: $\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} = \frac{364}{365}$;

Für eine/n eventuelle/n Dritte/n bleiben dreihundertdreiundsechzig „günstige" Tage und so weiter.

Allgemein gilt für k Partygäste:
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keine zwei der k Gäste am selben Tag Geburtstag haben, beträgt: $\frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{365-k+1}{365} = \frac{1}{365 \cdot \ldots \cdot 365} \cdot \frac{365!}{(365-k)!}$;

Wir wollen aber eigentlich genau das Gegenteil davon wissen, nämlich die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen gemeinsamen Geburtstag. Also brauchen wir die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses:

[127] Vgl.: Holt, Michael: Neue mathematische Rätsel für Denker und Tüftler. Köln: DuMont Literatur und Kunst Verlag 2005. S. 90.

$1-\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\frac{362}{365}\cdot\ldots\cdot\frac{365-k+1}{365}=1-\frac{1}{365\cdot\ldots\cdot365}\cdot\frac{365!}{(365-k)!}$;

Damit haben wir die allgemeine Lösung zu unserem Problem gefunden. Nun müssen wir nur noch die für uns interessanten Werte für k einsetzen und schon haben wir alle Antworten, die wir gesucht haben.

Bei dreiundzwanzig Leuten, das heißt für k = 23, gilt:
$1-\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\frac{362}{365}\cdot\ldots\cdot\frac{343}{365}=0.5073$, was 50.73% entspricht;

Wir sehen, dass bei der Anwesenheit von dreiundzwanzig Personen unsere Chancen schon besser als 50:50 stehen, dass zwei am gleichen Tag Geburtstag haben.[128]

Wie sich das Ganze bei sechzig Personen verhält, kann man nun durchaus schon erahnen. Da kann man dann nämlich von einem beinahe sicheren Eintreten des beschriebenen Szenarios ausgehen.[129]

In den folgenden zwei Rätseln, die sich auch mit Gegenereignissen beschäftigen, kommt mathematischer Inhalt vor, den wir erst im Anschluss besprechen werden (die 1. Pfadregel). Die menschliche Intuition kann mitunter allerdings Großartiges leisten. In diesem Sinne, auf zum fröhlichen Versuchen!

Drei zu null
Drei Freunde treffen sich jedes Wochenende am Fußballplatz um ein wenig zu kicken. Zu Beginn veranstalten sie immer ein kleines Wettschießen. Jeder von ihnen stellt sich mit seinem eigenen Ball an die Mittellinie und wenn die Bälle freigegeben werden, schießen sie gleichzeitig und versuchen das weit entfernte leer stehende Tor zu treffen.
Die Erfahrung zeigt, dass die drei in dem „Bewerb“ unterschiedlich gut sind.
Für Cale stehen die Chancen 4:3, dass er trifft, für Kevin 2:7 und für Josef 1:7.

[128] Vgl.: Brefeld, Werner: Mathematik – Hintergründe im täglichen Leben. In: http://www.brefeld.homepage.t-online.de/geburtstag.html (8. Juni 2012)
[129] Vgl.: Holt, Michael: Neue mathematische Rätsel für Denker und Tüftler. Köln: DuMont Literatur und Kunst Verlag 2005. S. 118.

Wie wahrscheinlich ist es, dass zumindest ein Ball im Tor landet?[130]

Lösung:

Die Trefferquoten kann man in Wahrscheinlichkeitsbrüche umschreiben, wodurch man der Reihe nach $\frac{4}{7}$, $\frac{2}{9}$ und $\frac{1}{8}$ erhält. Damit hat man aber auch die „Nicht-Trefferquoten", nämlich $\frac{3}{7}$, $\frac{7}{9}$ und $\frac{7}{8}$. Deren Kombination ($\frac{3}{7} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{8}$) ergibt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass kein Ball im Tor landet.

Uns interessiert jedoch die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses. Insofern:

$1 - \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{8} = 0.7083$;

Die Wahrscheinlichkeit, dass zumindest einer der drei das Tor trifft, beträgt also 70.83%.[131]

Über Stock und Stein

Seit einigen Jahren finden bei den Olympischen Spielen nun auch Mountainbike-Rennen statt. Aus Interesse besuchte ich ein Vorbereitungsrennen der Herren und war erstaunt darüber, wie schwierig und gefährlich ein solcher Wettkampf offensichtlich ist.

Nach den ersten hundert Metern kam schon eine sehr scharfe Kurve, in der aufgrund des rutschigen Untergrunds gleich einmal einer von sechs Teilnehmern zu Boden stürzte und dabei eine leichte Verletzung erlitt. Dann dauerte es nicht lange und die Männer mussten mit ihren Mountainbikes eine sehr schmale Brücke überqueren, von der drei von elf hinunterfielen. Das daran anschließende felsige Gelände bewältigten nur sieben von zehn und alles in allem blieben auf der ganzen Strecke zwei von neun Teilnehmern an Baumstämmen hängen.

Wie viel Prozent der Starter konnten das Rennen nicht beenden?[132]

[130] Vgl.: Symmank, Christian: Willkommen auf meiner SYMMANK-Homepage. In: http://www.symmank.de/wahrscheinlichkeit.htm (9. Juni 2012)

[131] Vgl.: Symmank, Christian: Willkommen auf meiner SYMMANK-Homepage. In: http://www.symmank.de/loesungen.htm#loeswahr (9. Juni 2012)

[132] Vgl.: Symmank, Christian: Willkommen auf meiner SYMMANK-Homepage. In: http://www.symmank.de/wahrscheinlichkeit.htm (9. Juni 2012)

Lösung:

Einer von sechs bedeutet $\frac{1}{6}$ und drei von elf $\frac{3}{11}$ aller Teilnehmer. Die Aussage, dass sieben von zehn das felsige Gelände bewältigten, ist gleichbedeutend damit, dass dies drei von zehn nicht taten; das sind $\frac{3}{10}$ aller. Zu guter Letzt muss man noch zwei von neun mit $\frac{2}{9}$ identifizieren.

Der Reihe nach haben also $\frac{5}{6}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{7}{10}$ und $\frac{7}{9}$ der Gestarteten die tückischen Stellen heil überstanden. $\frac{5}{6} \cdot \frac{8}{11} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{9}$ beschreibt daher den Anteil der Fahrer, die das Rennen erfolgreich beendet haben.

Um herauszufinden, wie viele der Teilnehmer nicht ins Ziel kamen, verwenden wir wieder die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses:

$1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{8}{11} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{9} = 0.6700;$

Das heißt, ungefähr 67 Prozent aller Teilnehmer sind der schwierigen Strecke zum Opfer gefallen.[133]

3.3.6 Die erste Pfadregel

Lässt sich ein Zufallsversuch in eine Folge von Einzelversuchen zerlegen (z. B.: drei einzelne Würfe bei dreimaligem Würfeln), so kann man diese und überhaupt den gesamten Versuch in einem sogenannten *Baumdiagramm* veranschaulichen.
Der „Baum“ steht dabei auf dem Kopf, die einzelnen „Äste“ repräsentieren die verschiedenen Einzelversuche und die „Knoten“ deren Ergebnisse.
Man beginnt immer oben zu lesen. Ganz unten findet man die Endergebnisse aller möglichen Versuchsdurchgänge.
Die Wege, die entlang der Äste verlaufen und von der Spitze bis zu den Endergebnissen reichen, nennt man *Pfade*.

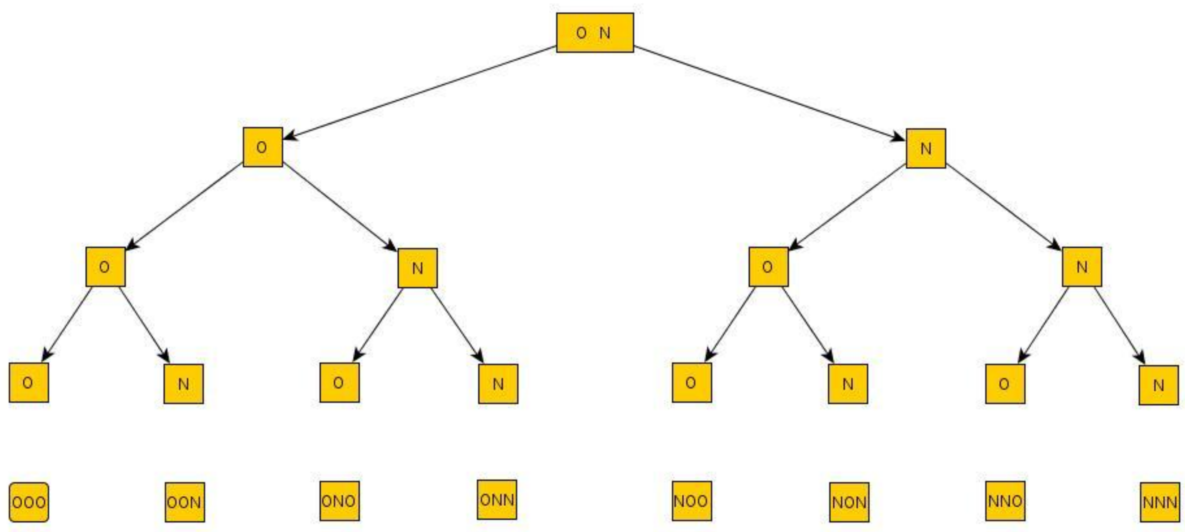
[133] Vgl.: Symmank, Christian: Willkommen auf meiner SYMMANK-Homepage.
In: http://www.symmank.de/loesweg.php?loes=e3.txt (9. Juni 2012)

Ziehen geordneter Stichproben mit Zurücklegen

Anna, Jian und Margarete sind drei Freundinnen und große Fans von John Lennon. Da Yoko Ono zu Lebzeiten ihres Stars dessen Freundin war, beneiden sie diese über alles. Eines Nachmittags sitzen die drei Freundinnen gemeinsam in Jians Zimmer und hören die Musik von John Lennon. Dabei fällt Margarete ein Spiel ein. Sie nimmt zwei kleine Zettel, malt auf den einen ein „O“ und auf den anderen ein „N“, knüllt sie zusammen und lässt sie in ihrer Mütze verschwinden.

Nun sollen sowohl Anna als auch Jian dreimal aus der Mütze ziehen und dabei den jeweils gezogenen Zettel nach jedem Zug wieder zurücklegen. Diejenige, die in diesen drei Zügen das Wort „ONO“ erhält – es muss also beim ersten Mal der „O“-, beim zweiten Mal der „N“- und beim dritten Mal erneut der „O“-Zettel aus der Mütze genommen werden -, darf sich für den restlichen Tag mit dem Namen der Geliebten von John Lennon schmücken und hat somit gewonnen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man bei diesem Spiel gewinnen?



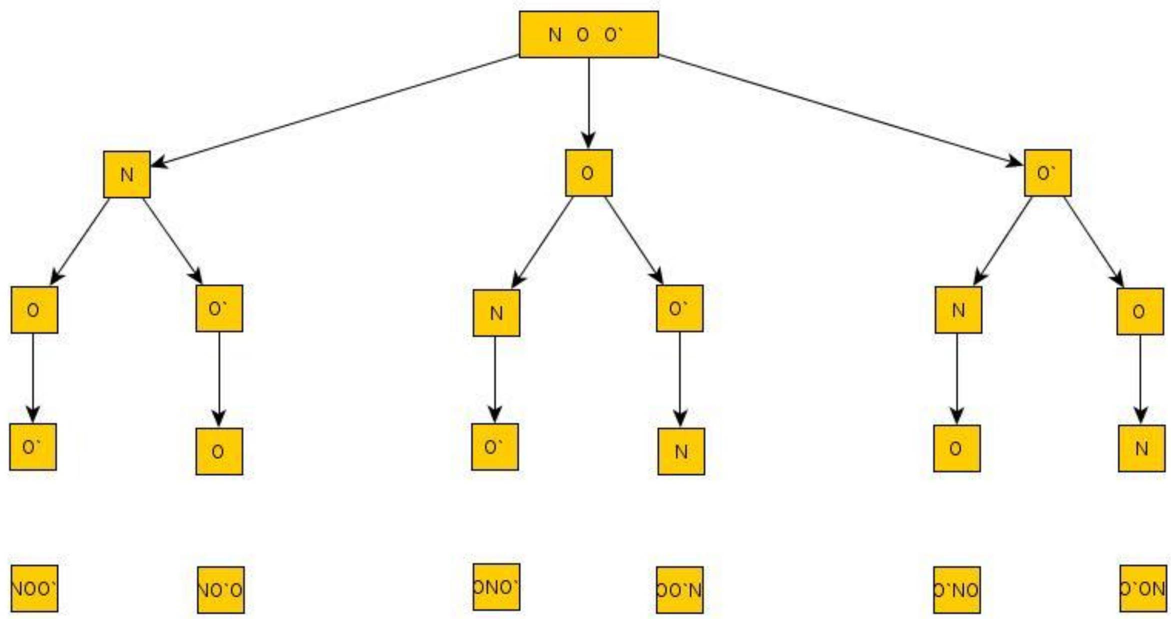
Anhand dieses Baumdiagramms erkennt man sehr leicht, dass es insgesamt acht verschiedene mögliche Ausgänge des Spiels gibt. Von diesen interessiert uns aber nur einer, nämlich „ONO“. Das heißt, eine der acht Stichproben ist eine günstige. Aufgrund der Gleichwahrscheinlichkeit aller Ergebnisse erhält man mit Hilfe von Laplace: P(„ONO“) = $\frac{1}{8}$;

Das Ergebnis einer solchen Ziehung nennt man im Allgemeinen eine *geordnete Stichprobe von n aus N Elementen mit Zurücklegen* („n“ wäre in unserem Fall „3“ und „N“ wäre „2“).

Ziehen geordneter Stichproben ohne Zurücklegen

Da Anna und Jian dieses Spiel immer und immer wieder spielen wollen und es schon langsam mühsam wird, die gezogenen Zettel jedes Mal wieder zusammenzuknüllen und zurück in die Mütze zu geben, führt Margarete einen dritten Zettel ein. Diesen versieht sie mit dem Buchstaben „O“.
Somit haben wir insgesamt zwei „O“- und einen „N“-Zettel, weshalb man nun ohne Zurücklegen dreimal hintereinander einen Papierknäuel aus der Mütze nehmen kann. Im Idealfall zieht man eben wieder „ONO“.
Mit welcher Gewinnwahrscheinlichkeit haben es Anna, Jian und Margarete nun zu tun?

Um die beiden „O“s voneinander unterscheiden zu können, wird im folgenden Baumdiagramm eines davon als „O`“ geschrieben:



Auch hier hilft das Baumdiagramm wieder außerordentlich bei der folgenden Einsicht: Die Anzahl der möglichen Ausgänge beläuft sich nun auf sechs und davon sind für uns zwei von Interesse; nämlich „ONO`" und „O`NO" (eigentlich ist „O`" gleich „O", wir schreiben ja nur „O" und „O`" um das eine vom anderen unterscheiden zu können).

Aufgrund der Gleichwahrscheinlichkeit aller Ausgänge erhalten wir mit Laplace:
P(„ONO") = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$;

Das Ergebnis eines Pfades in einem Beispiel der vorliegenden Art bezeichnet man im Allgemeinen als eine *geordnete Stichprobe von n aus N Elementen ohne Zurücklegen* (in unserem Beispiel ist sowohl „n" als auch „N" gleich „3").

Die erste Pfadregel

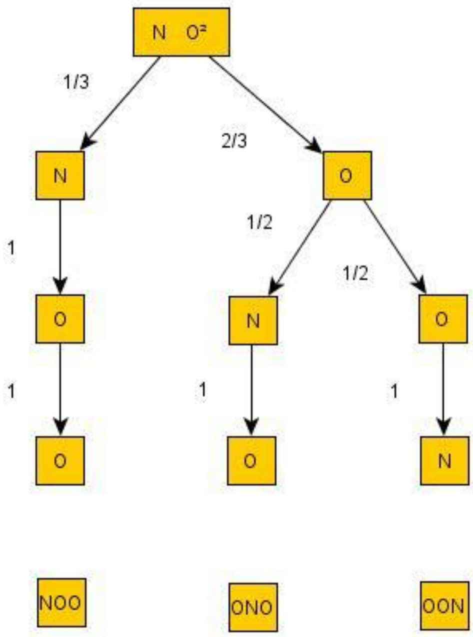
Wenn man die beiden Baumdiagramme vergleicht, sieht man, dass beim zweiten durch den zusätzlichen „O"-Zettel ein weiterer Ast mit zwei Verzweigungen hinzugekommen ist. Mehr Äste bedeuten aber mehr Arbeit und selten eine Vereinfachung.

Ist die Trennung in „O" und „O`", durch welche wir eben mehr Äste erhalten haben, aber eigentlich notwendig?
Was passiert, wenn man „O" und „O`" zusammennimmt und sie als nicht unterscheidbar ansieht – im Ergebnis geschieht dies nämlich ohnehin?

Dieses Vorhaben birgt eigentlich sehr wenige Schwierigkeiten:
Man operiert ganz einfach nur mit einem „O", behält aber im Kopf, dass es sich bei diesem einen „O" eigentlich um zwei handelt.
Um wirklich nicht zu vergessen, dass wir es grundsätzlich mit zwei „O"s zu tun haben, schreiben wir entsprechende Wahrscheinlichkeiten an die verschiedenen Äste; und zwar an die Äste, die zu den „O"s führen, aber auch an alle anderen.
Diese beschreiben, wie wahrscheinlich es ist, das Ereignis, zu dem der jeweilige Ast führt, zu erhalten.

Das alles wird sehr schnell um einiges klarer, wenn wir uns auf eine etwas praktischere Ebene begeben und uns noch einmal Annas, Jians und Margaretes Spiel anschauen.

„O^2“ im ersten Knoten des folgenden Baumdiagramms soll daran erinnern, dass wir prinzipiell mit zwei „O“s arbeiten; und die unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten lassen sich sehr leicht mit Hilfe der Laplace´schen Wahrscheinlichkeitsregel finden:



An dieser Stelle möchte ich nicht die Entstehung des gesamten Diagramms erklären, sondern mich nur dem einen günstigen „ONO“-Ausgang widmen – es sollte mittlerweile durchaus möglich sein, die anderen Pfade selbständig nachzuvollziehen:

Beim ersten Ziehen ein „O“ zu erhalten, passiert mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$. Es gibt die drei möglichen Ausgänge „N“, „O“, „O“ und zwei davon, nämlich die „O“s, sind günstig. Laplace tut den Rest.

Nun befinden sich nur mehr ein „N“ und ein „O“ in der Mütze, weshalb die Wahrscheinlichkeit, beim zweiten Zug ein „N“ zu ziehen, mittels Laplace $\frac{1}{2}$ sein muss.

„ON“ erhält man also in der Hälfte jener $\frac{2}{3}$ aller Fälle, in denen zuvor schon ein „O“ aus der Mütze gezogen wurde. Somit gilt: P(„ON“) = $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$;

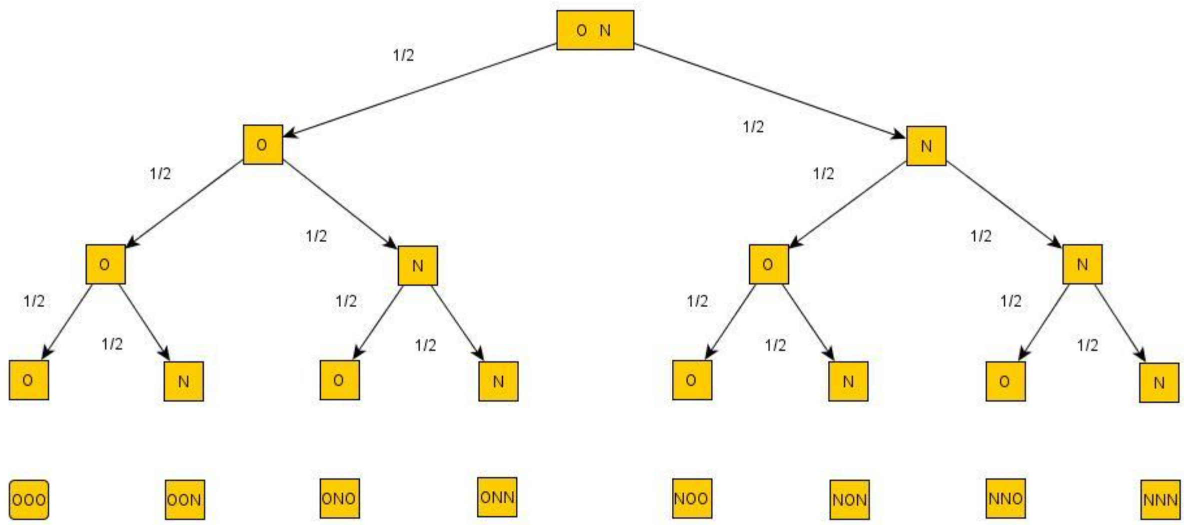
Da nun nur mehr ein „O“ in der Mütze übrig bleibt, ist die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen eines „O“s im dritten Zug gleich 1.
„ONO“ wird somit in jedem Fall jener $\frac{1}{3}$ aller Fälle gezogen, in denen zuvor schon „ON“ erhalten wurde.

Insgesamt kommen wir somit auf: P(„ONO“) = $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{3}$;[134]

Zu welcher abstrakteren Erkenntnis kommt man dadurch aber auch?

> Die Wahrscheinlichkeit P(„ONO“) ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades, der zum Ereignis „ONO“ führt.

Kann man dies auch auf unser zu allererst behandeltes Baumdiagramm anwenden, welches nicht, wie das gerade eben, das *Ziehen geordneter Stichproben ohne Zurücklegen* beschreibt, sondern eben das *Ziehen geordneter Stichproben mit Zurücklegen*?



[134] Vgl.: Götz, Stefan. Reichel, Hans-Christian. Müller, Robert. Hanisch, Günter: Mathematik Lehrbuch 6. Wien: öbvhpt Verlagsgesellschaft mbH. & Co. KG 2005. S. 174ff.

Nach unserer neuen Methode, die Wahrscheinlichkeit für einzelne Pfade eines Baumdiagramms auszurechnen, müsste gelten: P(„ONO“) = $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$;

Am Anfang dieses Abschnitts haben wir die Wahrscheinlichkeit für den Pfad „ONO“ dieses Baumdiagramms schon mit Hilfe der Laplace´schen Wahrscheinlichkeitsregel berechnet. Wir erhielten: P(„ONO“) = $\frac{1}{8}$;

Damit kamen wir aber zweimal auf dieselbe Wahrscheinlichkeit, weshalb anzunehmen ist, dass diese gerade neu gelernte Art der Wahrscheinlichkeitsberechnung sowohl für geordnete Stichproben mit Zurücklegen als auch für geordnete Stichproben ohne Zurücklegen sinnvoll und richtig ist.[135]

Damit können wir die *erste Pfadregel* formulieren:

> Die Wahrscheinlichkeit einer geordneten Stichprobe (Zufallsfolge) ist das Produkt aller Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades im Baumdiagramm.

Zur Anwendung:

Gleich und gleich gesellt sich gern

Die siebenjährige Zahira hat kürzlich Bekanntschaft mit den Zwillingen Mustafa und Gökce gemacht. Sie wollte den beiden anfangs gar nicht glauben, dass sie Zwillinge sind, denn alle Zwillinge, die Zahira bis zu diesem Zeitpunkt kennengelernt hatte, sahen immer zum Verwechseln ähnlich aus, was die zwei nun eben nicht taten. Ein paar Tage später erzählt sie ihrem Großvater von dieser neuen, für sie so verwunderlichen Erfahrung.

Dieser erklärt ihr daraufhin, dass es eineiige und zweieiige Zwillinge gibt und dass die letzteren sich überhaupt nicht ähneln müssen. Als er Zahira allerdings von der Häufigkeit des Auftretens der jeweiligen Fälle berichten will, bemerkt er, dass er sich

[135] Vgl.: Götz, Stefan. Reichel, Hans-Christian. Müller, Robert. Hanisch, Günter: Mathematik Lehrbuch 6. Wien: öbvhpt Verlagsgesellschaft mbH. & Co. KG 2005. S. 174ff.

diesbezüglich nicht gut auskennt und begibt sich zum Computer um im Internet nach Informationen zu suchen.
Dort erfährt er, dass Zwillingspaare überhaupt sehr selten vorkommen – auf zweihundertfünfzig Neugeborene kommt ein Zwillingspaar – und dass eineiige Zwillinge eine außergewöhnliche Besonderheit darstellen – nur $\frac{1}{3}$ aller Zwillingspaare ist eineiig.
Mit diesem neuen Input stößt Zahiras Großvater auf eine Frage: Wie wahrscheinlich ist es, dass eine Frau, die ein Kind erwartet, zweieiige Zwillinge bekommt, die zusätzlich noch unterschiedlichen Geschlechts sind?[136]

Lösung:
Wenn wir uns hier ein Baumdiagramm vorstellen, so müssen die ersten beiden Äste zu den Knoten „Zwillinge" und „Nicht-Zwillinge" führen. Wir wählen natürlich den ersteren. Von diesem gehen nun wieder zwei Äste aus, welche uns den Weg zu den zwei möglichen Ereignissen „eineiig" und „zweieiig" weisen. Hier folgen wir dem zweiten Ast und sind somit bei unserem ersten Zwischenergebnis angelangt – zweieiige Zwillinge.
Mit Hilfe der ersten Pfadregel erhalten wir nun die Wahrscheinlichkeit für zweieiige Zwillinge ganz leicht. Wir müssen nur die einzelnen Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades, der zu unserem Ergebnis führt, miteinander multiplizieren.
Die Wahrscheinlichkeit für Zwillinge beträgt $\frac{1}{250}$ und diese sind dann in $\frac{2}{3}$ aller Fälle zweieiig.
Also beträgt die Wahrscheinlichkeit für zweieiige Zwillinge: $\frac{1}{250} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{375}$;

In dieses Zwischenergebnis müssen wir nun noch die Wahrscheinlichkeit für das unterschiedliche Geschlecht integrieren.
Welche möglichen „Konstellationen" bezüglich „Bub und Mädchen" gibt es eigentlich? Zweieiige Zwillinge können aus zwei Buben, zwei Mädchen, einem Bub und einem Mädchen oder einem Mädchen und einem Bub gebildet werden.
Die Wahrscheinlichkeit des für uns interessanten Falls – nämlich „Bub und Mädchen", egal in welcher Reihenfolge – beträgt daher mit Laplace: $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$;

[136] Vgl.: Symmank, Christian: Willkommen auf meiner SYMMANK-Homepage. In: http://www.symmank.de/wahrscheinlichkeit.htm (9. Juni 2012)

Wir kombinieren und kommen somit auf unsere Abschlussrechnung: $\frac{1}{375} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{750}$;

Das heißt, im Durchschnitt bringt eine von siebenhundertfünfzig Frauen zweieiige Zwillinge unterschiedlichen Geschlechts zur Welt.[137]

Das folgende Rätsel wird einigen bekannt vorkommen – es wurde bereits im Kapitel „Kombinatorik" behandelt; nicht so bekannt werden die Fragestellungen sein:

Gewonnen? Unentschieden? Verloren?

Jede/r von uns kennt wahrscheinlich Totoscheine. Dabei geht es um das Erraten des korrekten Ergebnisses von elf Spielen der Fußballbundesliga.

Für einen Sieg der Mannschaft mit Heimvorteil schreibt man „1", für ein Unentschieden „0" und für einen Erfolg der Mannschaft, die zu Gast ist, „2".

- Ich möchte von dir nun die Anzahl der Möglichkeiten wissen, die es gibt, um einen solchen Schein zu komplettieren!
- Wie wahrscheinlich ist es, alles richtig zu tippen?
- Und wie wahrscheinlich ist es, immer falsch zu liegen?[138]

Lösung:

Zum ersten Punkt:

Für das erste Spiel gibt es drei Möglichkeiten, „1", „0" und „2"; für das zweite genauso. Das heißt für die ersten beiden Spiele zusammen gibt es $3 \cdot 3 = 3^2$ Möglichkeiten.

Da man sich insgesamt elf Spiele anschauen muss und man für jedes eben drei mögliche Tipps zur Verfügung hat, gibt es für den ganzen Schein

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3 = 3^{11}$ Möglichkeiten. $3^{11} = 177147$;

Insofern kann man einen solchen Schein auf 177147 unterschiedliche Arten ausfüllen.

[137] Vgl.: Symmank, Christian: Willkommen auf meiner SYMMANK-Homepage.
In: http://www.symmank.de/loesungen.htm#loeswahr (9. Juni 2012)

[138] Vgl.: Bezirksregierung Düsseldorf: Mathe-Treff.
In: http://www.brd.nrw.de/lerntreffs/mathe/pages/knobel/2004/r37_78.html (18. Juni 2012)

Zum zweiten Punkt:

Man wählt grundsätzlich elfmal eine von drei Möglichkeiten aus. Von diesen drei Möglichkeiten ist aber immer nur eine die richtige. Diese eine richtige aus den dreien auszuwählen, geschieht bekannter Weise mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$ und das elfmal.

Insofern beträgt die Wahrscheinlichkeit, alles richtig zu tippen, $(\frac{1}{3})^{11} = \frac{1}{177147}$.

Das entspricht ungefähr einer 0.0005645-prozentigen Chance.

Zum dritten Punkt:

Zwei der jeweils drei Varianten sind falsch, weshalb die Wahrscheinlichkeit falsch zu tippen auf jeder der elf Stufen gleich $\frac{2}{3}$ ist.

Im Gesamten beträgt die Wahrscheinlichkeit immer falsch zu liegen $(\frac{2}{3})^{11} = \frac{2048}{177147}$.

Das entspricht ungefähr einer 1.156-prozentigen „Chance".[139]

Begegnungen der besonderen Art

Irmi wohnt in einem kleinen Dorf namens Lind, wo sie auch zur Volkschule geht. Der Weg von ihrem Haus zur Schule führt durch ein kleines, sehr idyllisches Wäldchen, in dem ihr immer wieder ein Fuchs und ein Dachs über den Weg laufen.

Ersteren sieht sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 80%, letzteren mit einer Wahrscheinlichkeit von 60%.

Heute ist ihr keiner der beiden begegnet, worüber sie sich sehr wundert.

Daher fragt sie sich, wie wahrscheinlich es eigentlich ist, keinen, beide oder nur einen der beiden zu treffen. Wie muss sie rechnen?[140]

Lösung:

Ad „keinen":

Hier verwenden wir wieder einmal die Wahrscheinlichkeit von Gegenereignissen und zusätzlich die erste Pfadregel.

[139] Vgl.: Bezirksregierung Düsseldorf: Mathe-Treff.
In: http://www.brd.nrw.de/lerntreffs/mathe/pages/knobel/2004/l37/l37_78.pdf (18. Juni 2012)
[140] Vgl.: Bezirksregierung Düsseldorf: Mathe-Treff.
In: http://www.brd.nrw.de/lerntreffs/mathe/pages/knobel/2000/r17_78.html (15. Juni 2012)

Die Wahrscheinlichkeit, weder den Fuchs noch den Dachs zu treffen, muss demnach gleich $0.2 \cdot 0.4 = 0.08$ sein. Das entspricht einer achtprozentigen Chance.

Ad „beide“:
Ähnlich wie gerade eben, nur noch leichter, kommen wir zur Wahrscheinlichkeit beide zu treffen. Sie beträgt nämlich $0.8 \cdot 0.6 = 0.48$, also 48%.

Ad „nur Fuchs“:
Hierbei handelt es sich nun um eine Mischung aus den beiden vorherigen Punkten. Wir rechnen: $0.8 \cdot 0.4 = 0.32$;
Somit hat Irmi eine 32-prozentige Chance nur den Fuchs zu treffen.

Ad „nur Dachs“:
Analog zu „nur Fuchs“ erhalten wir die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Irmi nur den Dachs trifft. Diese beträgt $0.2 \cdot 0.6 = 0.12$, das heißt 12%.[141]

3.3.7 Die zweite Pfadregel

Versuche, das folgende Rätsel zu lösen!

Manieren des Mittelalters
Früher, als die Playstation und der Nintendo Wii noch nicht erfunden waren, gingen Kinder raus in die Natur um zu spielen. Aber auch heute gibt es noch welche, die das Leben draußen dem digitalen vorziehen, so zum Beispiel Maria, Lucia, Klaus und Dominik. Sie sind begeisterte Armbrustbauer/innen.
Alle haben sie ihre eigenen Meisterwerke, die sie in ihrer Qualität auch schon des Öfteren miteinander verglichen haben.
So wissen sie, dass man mit Marias wertvollster Armbrust einen aufgeblasenen Luftballon aus einer Entfernung von zehn Metern mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% trifft. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man dieses Kunststück auch mit den Armbrüsten der anderen vollbringen kann, ist geringer.

[141] Vgl.: Bezirksregierung Düsseldorf: Mathe-Treff.
In: http://www.brd.nrw.de/lerntreffs/mathe/pages/knobel/2000/l17_78.html (15. Juni 2012)

Lucias Armbrust hat eine Trefferwahrscheinlichkeit von 80%, die von Klaus 70% und die von Dominik 60%.
Wie wahrscheinlich ist es, dass ein durchschnittlich guter Armbrustschütze den Luftballon mit einem einzigen Schuss zum Platzen bringt, wenn sich dieser dafür durch Zufall eines der angesprochenen Meisterwerke aussucht?[142]

Lösung:
Wieder kann man sich ein Baumdiagramm vorstellen.

Nach dem Anfangsknoten trifft man auf der ersten Stufe auf die vier Armbrüste, von denen jede mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{4} = 0.25$ in die Hand des Schützen gelangt.

Auf der zweiten Stufe betrachtet man die Trefferwahrscheinlichkeiten der Armbrüste, die alle unterschiedlich sind – 90%, 80%, 70% und 60%.

Im Gesamten erhält man vier Pfade, die uns nun alle interessieren.
Daher addieren wir am Ende die Wahrscheinlichkeiten all dieser Pfade und kommen zu unserem Ergebnis. Also:

$(0.25 \cdot 0.9) + (0.25 \cdot 0.8) + (0.25 \cdot 0.7) + (0.25 \cdot 0.6) =$
$0.25 \cdot (0.9 + 0.8 + 0.7 + 0.6) =$
$0.25 \cdot 3 =$
0.75

Somit wird der Luftballon mit zufällig gewählter Armbrust beim ersten Versuch mit einer 75-prozentigen Wahrscheinlichkeit getroffen.[143]

Mit der Lösung dieses Rätsels haben wir eigentlich schon von selbst unsere zweite, wichtige Regel erhalten – die zweite Pfadregel.

[142] Vgl.: Janko, Angela. Janko, Otto: Mathematik (Mathe-Rätsel).
In: http://www.janko.at/Raetsel/Mathematik/116.a.htm (10. Juni 2012)
[143] Vgl.: Janko, Angela. Janko, Otto: Mathematik (Mathe-Rätsel).
In: http://www.janko.at/Raetsel/Mathematik/116.b.htm (10. Juni 2012)

Bevor wir diese allerdings formulieren und explizit behandeln, sollten wir uns noch einmal klar machen, was ungeordnete Stichproben sind. Diese, wie auch geordnete Stichproben, haben wir schon im Kapitel „Kombinatorik“ besprochen. Wiederholung ist allerdings nie schlecht und oft sogar notwendig.
Bis jetzt, das heißt in unseren bisherigen Beispielen und Rätseln bezüglich der Wahrscheinlichkeitstheorie, kam es uns immer auf die Reihenfolge an. Beim Ziehen der Zettel beispielsweise war uns wichtig, welchen wir als ersten, als zweiten und so weiter zogen und je nachdem wie dies geschah, erhielten wir günstige oder ungünstige Pfade – nach dem Kennenlernen der ersten Pfadregel gab es eigentlich auch immer nur mehr einen günstigen Pfad.

Wie viele günstige Pfade haben wir aber hier bei diesem obigen Rätsel nun?
Ist uns die Reihenfolge wichtig? Ist überhaupt eine Reihenfolge zu erkennen?

Wenn wir uns das Beispiel von gerade eben noch einmal genauer anschauen, erkennen wir, dass es nicht darum geht, mit welchem Gewehr wir als erstes, als zweites, als drittes, … schießen, sondern uns ist nur wichtig, mit welcher Wahrscheinlichkeit wir welches Gewehr wählen und welche Trefferwahrscheinlichkeit wir in der Folge mit diesem dann haben. Und wir beschäftigen uns mit allen Gewehren, da ja alle in Frage kommen; nur eben nicht hintereinander, weil es hier kein Hintereinander bzw. eben keine Reihenfolge gibt – weder in zeitlicher noch in räumlicher Hinsicht. Da uns des Weiteren alle Pfade interessieren, haben wir auch mehrere günstige, nämlich vier.

Aus all diesen Gründen handelt es sich bei den Ergebnissen des obigen Rätsels nun um sogenannte *ungeordnete Stichproben von n aus N Elementen*, genauer um *ungeordnete Stichproben von n aus N Elementen ohne Zurücklegen*.

Genauso gibt es natürlich auch *ungeordnete Stichproben von n aus N Elementen mit Zurücklegen*. Dabei funktioniert aber alles sehr ähnlich, nur muss man die Wahrscheinlichkeiten der jeweiligen Knoten an das „mit Zurücklegen“ anpassen.

Was „ohne Zurücklegen“ bzw. „mit Zurücklegen“ bedeutet, sollte mittlerweile jedem/jeder von uns klar sein.[144]

Nun wollen wir aber unser letztes Ergebnis im Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung formulieren, die schon erwähnte, *zweite Pfadregel*:

> Die Wahrscheinlichkeit einer ungeordneten Stichprobe ist die Summe der zugehörigen Pfadwahrscheinlichkeiten.

Zahlen, bitte!

In einer sehr beliebten Bar der Stadt wird ein Job für drei Kellner/innen ausgeschrieben. Aufgrund des weit verbreiteten Wissens, dass die Inhaber der Bar keine rein gewinnorientierten Geldscheffler sind, sondern dass es ihnen sehr wichtig ist, gute Produkte, eine schöne Atmosphäre und Fairness in allen Bereichen anzubieten, kommen gleich am ersten Tag nach Aushang des Jobs neunzehn Bewerber/innen um sich vorzustellen.

Beim Warten stößt einer von ihnen auf eine Frage. Er bemerkt nämlich, dass es acht blonde Bewerber/innen gibt, alle anderen sind mehr oder weniger brünett. Angenommen, die drei Kellner/innen würden nicht aufgrund ihrer Qualifikationen ausgesucht werden, sondern durch Zufall; wie wahrscheinlich wäre es dann, unter den dreien beide Haarfarben mindestens einmal vertreten zu sehen?[145]

Lösung:

Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Haarfarben mindestens einmal vorkommen, ist gleich „1“ minus der Wahrscheinlichkeit, dass alle drei entweder blond oder brünett sind.

Die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei blond sind, erhält man folgendermaßen:

$\frac{8}{19} \cdot \frac{7}{18} \cdot \frac{6}{17} = \frac{336}{5814}$;

[144] Vgl.: Götz, Stefan. Reichel, Hans-Christian. Müller, Robert. Hanisch, Günter: Mathematik Lehrbuch 6. Wien: öbvhpt Verlagsgesellschaft mbH. & Co. KG 2005. S. 178f.

[145] Vgl.: Symmank, Christian: Willkommen auf meiner SYMMANK-Homepage. In: http://www.symmank.de/wahrscheinlichkeit.htm (9. Juni 2012)

Die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei brünett sind, ergibt sich wie folgt:

$\frac{11}{19} \cdot \frac{10}{18} \cdot \frac{9}{17} = \frac{990}{5814}$;

Damit lässt sich die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei entweder blond oder brünett sind, ganz leicht durch folgende Addition berechnen: $\frac{336}{5814} + \frac{990}{5814} = \frac{1326}{5814}$;

Insofern erhalten wir die gesuchte Wahrscheinlichkeit durch:

$1 - \frac{1326}{5814} = \frac{4488}{5814} = 0.7719$;

Mit 77.19-prozentiger Wahrscheinlichkeit findet man am Ende zumindest eine/n blonde/n und eine/n brünette/n Kellner/in unter den glücklichen dreien.[146]

Zapfen hin, Zapfen her

Claudia und Ephraim verbindet schon nahezu seit ihrer Geburt eine feste Freundschaft, weshalb sie auch vieles gemeinsam unternehmen. Heute hat es sie in den Wald verschlagen.

Nach einer gewissen Zeit des Genießens, verspüren sie das Bedürfnis sich zu duellieren. Anstatt dies aber mit Pistolen oder Gewehren zu tun, sucht sich jede/r der beiden eine Handvoll Tannenzapfen, die als Wurfgeschosse dienen sollen.

Kurz darauf haben sie sich auch schon in einer bestimmten Entfernung voneinander aufgestellt und werden gleich damit beginnen, sich abwechselnd zu bewerfen. Dies soll so lange andauern, bis eine/r von den beiden getroffen ist. Wie es sich gehört, darf die/der schlechtere „Schützin/Schütze" den ersten Wurf tätigen.

Da die beiden ein solches Duell nicht zum ersten Mal austragen, wissen sie über ihre gegenseitigen Trefferquoten Bescheid. Claudia trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von 35% und Ephraim mit einer 45-prozentigen Wahrscheinlichkeit.

Wer hat die bessere Chance zu „überleben"?[147]

Lösung:

Wir definieren C (= 65%) als die Wahrscheinlichkeit, dass Claudia nicht trifft und

[146] Vgl.: Symmank, Christian: Willkommen auf meiner SYMMANK-Homepage.
In: http://www.symmank.de/loesungen.htm#loeswahr (9. Juni 2012)

[147] Vgl.: Janko, Angela. Janko, Otto: Mathematik (Mathe-Rätsel).
In: http://www.janko.at/Raetsel/Mathematik/095.a.htm (10. Juni 2012)

E (= 55%) als die Wahrscheinlichkeit, dass Ephraim nicht trifft.

Widmen wir uns Claudias „Überlebenschance":
Als die schlechtere „Schützin“ darf sie auf jeden Fall beginnen; und die Wahrscheinlichkeit, dass sie gleich beim ersten Wurf trifft, beträgt 1 – C.

Die Möglichkeit, dass Claudia beim zweiten Wurf trifft, bedeutet, dass sie beim ersten nicht getroffen hat, dass Ephraim bei seinem ersten Versuch auch erfolglos geblieben ist und dass Claudia eben erst dann, im zweiten Anlauf, ihr Ziel nicht verfehlt.
Wenn wir die Wahrscheinlichkeiten dieser einzelnen Ereignisse betrachten, so erhalten wir die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Claudia Ephraim beim zweiten Wurf trifft, durch folgende Rechnung: $CE(1 – C) = (1 – C)(CE)$;

Wie wahrscheinlich ist es aber, dass Claudia erst mit ihrem dritten Wurf gewinnt?
Das Ereignis „Claudia trifft beim dritten Wurf“ entspricht ja eigentlich wieder einer Folge von Ereignissen, nämlich „Claudia trifft nicht, Ephraim trifft nicht, Claudia trifft nicht, Ephraim trifft nicht, Claudia trifft“. Insofern kommen wir hier im Gesamten auf eine Wahrscheinlichkeit von $CECE(1 – C) = (1 – C)(CE)^2$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass Claudia das Spiel mit ihrem vierten Wurf beendet, beträgt dann $(1 – C)(CE)^3$ und so weiter.

Wenn wir die Summe über all diese, so entstehenden Wahrscheinlichkeiten bilden, erhalten wir die Chance, mit der Claudia als Siegerin vom Feld geht. Also:
$(1 – C) \cdot (1 + (CE) + (CE)^2 + (CE)^3 + (CE)^4 + \dots) = \frac{1 - C}{1 - CE} = 0.5447$
(Summe der geometrischen Reihe $a_0 + a_0q + a_0q^2 + \dots = a_0 \cdot \frac{1}{1 - q}$, für $|q| < 1$);
Das entspricht einer Wahrscheinlichkeit von 54.47%.

Nun berechnet man Ephraims Überlebenschance durch: 1 – 0.5447 = 0.4553;
Sie beträgt also 45.53%.

Im Gesamten hat Claudia mit 54.47% eine bessere Überlebenschance als Ephraim mit 45.53%.[148]

Das Spiel mit der Fairness

Wanda bietet Aishe ein Spiel an: „Ich werfe gleich fünf Zwei-Euro-Münzen auf den Boden. Wenn alle entweder „Zahl“ oder „Kopf“ zeigen, dann gebe ich dir zehn Euro!“

„Und was passiert, wenn das nicht eintritt? Willst du dann nicht Geld von mir?“, fragt Aishe.

Daraufhin meint Wanda: „Nein, nicht wirklich. Du musst nur für jedes Spiel, das du spielst, einen Einsatz von zwei Euro zahlen.“

Aishe überlegt kurz und stimmt dem Ganzen dann zu.

War das eine kluge Entscheidung?[149]

Lösung:

Die Wahrscheinlichkeit, dass alle fünf Münzen „Zahl“ zeigen, errechnet sich wie folgt:

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$;

Genauso wahrscheinlich ist es auch, dass auf allen Münzen „Kopf“ erscheint.

Die Wahrscheinlichkeit, dass alle Münzen entweder „Zahl“ oder „Kopf“ zeigen, erhält man insofern ganz leicht durch Addition: $\frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{16} = 0.0625$;

Sie beträgt also 6.25%.

Folglich liegt die Gewinnchance für Aishe auch bei 6.25%, weshalb sie fairer Weise auch nur 6.25% vom möglichen Gewinn als Einsatz zahlen sollte.

6.25% von zehn Euro sind aber 0.625 Euro. Das sind weniger als 70 Cent und somit viel weniger als 2 Euro.

Daher war Aishes Entscheidung nicht die klügste.[150]

---

[148] Vgl.: Janko, Angela. Janko, Otto: Mathematik (Mathe-Rätsel).
In: http://www.janko.at/Raetsel/Mathematik/095.b.htm (10. Juni 2012)

[149] Vgl.: Janko, Angela. Janko, Otto: Mathematik (Mathe-Rätsel).
In: http://www.janko.at/Raetsel/Mathematik/038.a.htm (10. Juni 2012)

[150] Vgl.: Janko, Angela. Janko, Otto: Mathematik (Mathe-Rätsel).
In: http://www.janko.at/Raetsel/Mathematik/038.b.htm (10. Juni 2012)

4. SCHLUSS

Wenn ich meine in der Einleitung beschriebene Begeisterung für den Einsatz von Rätseln im Mathematikunterricht betrachte, so muss ich zugeben, dass diese im Lauf meiner Arbeit ein wenig kleiner geworden ist. Dennoch ist sie eindeutig vorhanden, möglicherweise etwas reflektierter und insofern ein wenig gedämpfter.

Der erste Teil – die Abhandlung über Vor- und Nachteile des Einsatzes von Rätseln im Mathematikunterricht – fiel mir relativ leicht, weshalb ich ihn ziemlich schnell fertigstellen konnte.
Als ich dann mit den Recherchen für den Hauptteil meiner Arbeit begann, lieh ich mir zuallererst Unmengen von Rätselbüchern aus. Ich verbrachte viel Zeit damit, diese zu lesen und die darin enthaltenen Aufgabenstellungen zu lösen. Dabei stieß ich auf eine Vielzahl unglaublich spannender und faszinierender Rätsel. Allerdings stellte sich mir das Problem, dass ich sie keinem Bereich der Oberstufe einer allgemein bildenden höheren Schule klar zuordnen konnte, was sich mit der Zeit als Kernproblem meiner Arbeit herausstellte.
Ich schaffte es dann doch, mich mit meinem Betreuer auf vier Themen zu einigen, zu denen ich glaubte, hinreichend viele Rätsel gefunden zu haben. Nun fing ich an, konkreter zu arbeiten. Nach einer sehr intensiven und produktiven Phase stand ich dann aber wieder vor einem ähnlichen Problem wie zuvor. Es wurde nämlich schnell klar, dass ich für zwei der vereinbarten Bereiche keinesfalls genügend passende Rätsel finden würde.
Daraufhin schlug ich das neue Thema der Variableneinführung vor, welches ich schlussendlich gemeinsam mit der Kombinatorik und der Wahrscheinlichkeitsrechnung in den Reigen meiner Bereiche aufnahm.

Natürlich beschäftigen sich alle Rätsel im weitesten Sinne mit Mathematik; sie jedoch einem speziellen Gebiet der Oberstufe zuzuordnen, ist in sehr vielen Fällen außerordentlich schwer. Ihre Mehrzahl würde man am ehesten in den Topf der allgemeinen Logik stecken. Dieser ist jedoch schlichtweg zu allumfassend und somit in meinem Fall nicht der richtige.

Wie bereits erwähnt, hatte ich nach dem Kampf um die Themengebiete meine drei dann aber doch gefunden und auch die Struktur meiner Arbeit sah ich bald sehr klar vor mir.
Mit dem konkreten Plan im Kopf und mit der Vielzahl an Rätseln, die ich zuvor schon gefunden und sortiert hatte, war es dann nur mehr eine Frage der Zeit, bis diese Diplomarbeit fertig geschrieben war.

Nach Abschluss meiner Arbeit bin ich nun der Meinung, dass ich es geschafft habe, meine drei auserkorenen Themenbereiche mithilfe von Rätseln so aufzubereiten, dass man das Ergebnis auch im Unterricht sinnvoll verwenden kann.
Jedes Rätsel erfüllt an der entsprechenden Stelle vollkommen seinen Zweck und weckt überdies hoffentlich auch die Neugier und das Interesse der Schüler/innen.

Ein kleines Manko meiner Arbeit sehe ich darin, dass die zwei Gebiete „Kombinatorik“ und „Wahrscheinlichkeit“ auch in den meisten Schulbüchern bereits unter der Verwendung von Textaufgaben vermittelt werden; diese können Rätseln teilweise sehr ähnlich sein. Insofern findet man als Leser/in meiner Diplomarbeit in diesen zwei Bereichen möglicherweise nicht nur vollkommen Neues. Trotzdem hoffe ich, mich mit meinen Rätseln auch hier von den Schulbüchern abheben und Innovatives anbieten zu können.

Mit Blick auf die möglichen Nachteile eines solchen Mathematikunterrichts ist eine kritische Haltung sicher nicht verkehrt. Versucht man jedoch gleichzeitig präventiv so gut wie möglich gegen eventuell auftretende Schwierigkeiten vorzugehen, so sollte man als Lehrer/in unbedingt Teile dieser Arbeit in den eigenen Unterricht integrieren. Unter der richtigen Verwendung garantiere ich vielseitige Bereicherung.

5. LITERATURVERZEICHNIS

- Wild, Elke. Gerber, Judith: Einführung in die Pädagogische Psychologie. Opladen & Farmington Hills: Verlag Barbara Budrich 2006.
- Bönisch, Manfred: Variable Lernwege. Ein Lehrbuch der Unterrichtsmethoden. Sankt Augustin: Academia Verlag 2008.
- Reichel, Hans-Christian. Müller, Robert: Lehrbuch der Mathematik 5.
  Wien: öbv & hpt Verlagsgesellschaft mbH. & Co. KG 2002.
- Malle, Günther. Ramharter, Esther. Ulovec, Andreas. Kandl, Susanne: Mathematik verstehen 5.
  Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG 2005.
- Loyd, Sam. Gardner, Martin: Mathematische Rätsel und Spiele. Denksportaufgaben für kluge Köpfe. 117 Aufgaben und Lösungen.
  Köln: DuMont Buchverlag 1978.
- Loyd, Sam. Gardner, Martin: Noch mehr mathematische Rätsel und Spiele. Köln: DuMont Buchverlag 1979.
- Hemme, Heinrich: Der Wettlauf mit der Schildkröte. 100 mathematische Rätsel mit ausführlichen Lösungen.
  Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 2002, 2004.
- Holt, Michael: Neue mathematische Rätsel für Denker und Tüftler.
  Köln: DuMont Literatur und Kunst Verlag 2005.
- Götz, Stefan. Reichel, Hans-Christian. Müller, Robert. Hanisch, Günter: Mathematik Lehrbuch 6.
  Wien: öbvhpt Verlagsgesellschaft mbH. & Co. KG 2005.

Internetquellen

- http://paidoblogger.blogspot.co.at/ (4. Februar 2012)
- http://www.matheboard.de/ (6. Dezember 2012)
- http://www.matheraetsel.de/ (11. Dezember 2012)
- http://www.klassenarbeiten.de/ (6. Dezember 2012)
- http://www.brd.nrw.de/lerntreffs/mathe/structure/home/homepage.php (18. Juni 2012)
- http://brinkmann-du.de/index.htm (28. Oktober 2012)
- http://www.schule-studium.de/ (18. Juni 2012)
- http://www.mathe-spass.de/index.htm (18. Juni 2012)
- http://wissenschaft-und-technik.de/startseite.html (7. November 2012)
- http://www.arndt-bruenner.de/mathe/mathekurse.htm (24. Januar 2013)
- http://www.lustigestories.de/index.php (18. Juni 2012)
- http://www.denksport.de/ (18. Juni 2012)
- http://www.janko.at/index.htm (10. Juni 2012)
- http://www.symmank.de/index.htm (9. Juni 2012)
- http://www.andinet.de/index.php (8. Juni 2012)
- http://www.gfksoftware.de/Ziegenproblem/ (8. Juni 2012)
- http://www.brefeld.homepage.t-online.de/ (8. Juni 2012)

Lebenslauf

Name:	Fabian Nikolaus Kraler
Geburtsdatum/-ort:	12. November 1984 / Lienz in Osttirol
Familienstand:	ledig
Staatsangehörigkeit:	Österreich

Schulbildung

1991 – 1993:	Volksschule Lienz Süd II (Michael Gamper-Straße 5, 9900 Lienz)
1993 – 1995:	Volksschule Dölsach (Dölsach 4, 9991 Dölsach)
1995 – 2003:	Bundesgymnasium und Bundesrealgymnasium Lienz (Maximilianstraße 11, 9900 Lienz) – Matura im Juni 2003 mit gutem Erfolg absolviert

Studium

2003 – 2004:	Lehramtsstudium Französisch und Philosophie/Psychologie an der Universität Wien (Dr.-Karl-Lueger-Ring 1, 1010 Wien)
2004 – 2013:	Lehramtsstudium Mathematik und Philosophie/Psychologie an der Universität Wien (Dr.-Karl-Lueger-Ring 1, 1010 Wien)
2005:	Diplomstudium Mathematik, laufend