



DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Das Cauchyproblem für hyperbolische
Pseudodifferentialoperatoren

Verfasser

Hermann Lametschwandtner

angestrebter akademischer Grad

Magister der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat)

Wien, im April 2013

Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 405
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Mathematik
Betreuer:	Ao.Univ.Prof.Dr. Günther Hörmann

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
1.1	Sobolevräume	7
1.2	Pseudodifferentialsymbole	11
1.3	Pseudodifferentialoperatoren	14
2	Das klassische Cauchyproblem	21
2.1	Hyperbolische Operatoren 1.Ordnung	21
2.2	Eine Energieabschätzung	24
2.3	Das klassische Lösungstheorem	27
3	Colombeau-Algebren	33
3.1	Die Colombeaualgebra	33
3.2	Verallgemeinerte Pseudodifferentialsymbole	38
4	Das verallgemeinerte Cauchyproblem	41
4.1	Die Energieabschätzung	44
4.2	Der Existenzsatz	53

Beim Cauchyproblem 1. Ordnung handelt es sich um ein Anfangswertproblem für gewöhnliche oder partielle Differentialgleichungen, das im allgemeinen von folgender Form ist:

$$\begin{aligned} Au &:= \partial_t u + Pu = f \\ u(0) &= g \end{aligned}$$

Hierbei ist $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ ein nicht notwendigerweise linearer Operator erster Ordnung in einem Banachraum X und $D(A)$ sein Definitionsbereich. Die Gleichung soll gültig sein in einem Zeitintervall $t \in [0, T]$ für $T > 0$, f und g werden als die Daten der Differentialgleichung bezeichnet. In dieser Arbeit wird es sich beim Operator A um einen hyperbolischen Pseudodifferentialoperator erster Ordnung handeln. Welche Voraussetzungen dafür an A gemacht werden müssen erfährt man im Abschnitt 2.1. Als Banachräume fungieren die Sobolevräume $H^s(\mathbb{R}^n)$ bzw. die Colombeaualgebra G_{L^2} im verallgemeinerten Fall.

Im ersten Kapitel werden alle für die weitere Arbeit wichtigen Definitionen und Hilfssätze abgehandelt. Insbesondere wird kurz auf die Theorie der Sobolevräume und Pseudodifferentialoperatoren eingegangen und für die weiteren Kapitel relevante Fakten zusammengestellt, wobei in einigen Fällen der Beweis nicht geführt wird, sondern lediglich eine Referenz gegeben wird. Dabei wird auf die Ausführungen von [2] und [5] zurückgegriffen.

Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit dem Cauchyproblem mit Sobolevdaten (d.h. f und g sind Funktionen in einem Sobolevraum), wie es in [6], Kap. 23.1 behandelt wird. Neben einer Energieabschätzung wird ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die Lösbarkeit bewiesen.

Das dritte Kapitel gibt eine kurze Einführung in die Theorie der Colombeaualgebren, wie sie z.B. in [3] oder [1] vorzufinden ist.

Darauf aufbauend, wird sich das vierte Kapitel mit dem Cauchyproblem für Colombeaudaten beschäftigen, dabei wird in erster Linie auf [4], Kap. 2 und 3, zurückgegriffen. Neben einer Energieabschätzung wird ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz für das verallgemeinerte Cauchyproblem bewiesen. Darüberhinaus wird auch auf die Regularität der Lösung eingegangen.

Der Operator A kann im Allgemeinen auch von höherer Ordnung als 1 sein. Das bekannteste Cauchyproblem ist wohl die klassische Wellengleichung. Der Wellenoperator $\square := \partial_t^2 - c^2 \Delta$ ist ein Operator der Ordnung 2. Deshalb sind in diesem Fall für die Eindeutigkeit der Lösung zwei Anfangsbedingungen notwendig, nämlich $u(0)$ und $\partial_t u(0)$. In dieser Arbeit wird jedoch auf Operatoren höherer Ordnung nicht eingegangen.

The first order Cauchy problem is an initial value problem for ordinary or partial differential equations given by

$$\begin{aligned} Au &:= \partial_t u + Pu = f \\ u(0) &= g \end{aligned}$$

The operator $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ is a first order operator with domain $D(A)$ in some Banach space X , not necessarily linear. The equation is required to hold for some time interval $t \in [0, T]$. The functions f and g are called the data of the differential equation. This paper will deal with a hyperbolic operator A . Section 2.1 will tell about the necessary assumptions to make this operator hyperbolic. The Banach spaces will be the Sobolev spaces $H^s(\mathbb{R}^n)$ respectively the Colombeau Algebra G_{L^2} in the generalized case.

The first chapter will be a summary about the theory of Sobolev spaces and pseudodifferential operators. Important facts and theorems, which are relevant for the further chapters, will be stated. In some cases the proofs will be omitted. For references [2] and [5] will be recommended.

The second chapter will deal with the Cauchy problem for data in some Sobolev space as done in [6], chapter 23.1. Besides an energy estimate there will be given an existence and uniqueness theorem for solvability including a proof.

The third chapter will present a short introduction into the theory of Colombeau Algebras as stated in [3] or [1]. This will be the base for the last chapter.

The last chapter will deal with the generalized Cauchy problem as stated in [4], chapter 2 and 3. Again an existence and uniqueness theorem and, in addition, a regularity theorem will be proved.

A hyperbolic operator can have higher order than 1. For example the d'Alembert operator of the wave equation $\square := \partial_t^2 - c^2 \Delta$ has order 2. Therefore one needs two initial conditions, namely $u(0)$ and $\partial_t u(0)$ to establish uniqueness. This paper will not deal with operator of higher order.

Kapitel 1

Einleitung

Das erste Kapitel wird eine Einführung in die Thematik geben. Aufbauend auf eine Behandlung der Sobolevräume wird eine Definition von Pseudodifferentialsymbolen und Pseudodifferentialoperatoren gegeben und es werden deren wichtigste Eigenschaften erläutert. Auf diese wird in den Folgekapiteln zurückgegriffen. Für weiterführende Literatur sei vor allem auf [5], [2] sowie auf [9] verwiesen.

1.1 Sobolevräume

1.1 Definition:

Der Raum der rasch fallenden Funktionen (Schwartzraum) S wird durch

$$S(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \forall \alpha \forall \beta \in \mathbb{N}_0^n \times \mathbb{N}_0^n : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha f(x)| \leq \infty \right\}$$

definiert. Mit Hilfe der Halbnormen

$$|f|_k := \sup_{|\alpha+\beta| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha f(x)|$$

wird S zu einem Frechetraum. Die Schwartzfunktionen bilden den Grundraum für die Fouriertransformation.

1.2 Definition:

Die Abbildung $F : S \rightarrow S$ mit

$$Fu(\xi) := \hat{u}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x} u(x) dx$$

heißt Fouriertransformierte von u . Es gibt in der Literatur abweichende Definitionen der Fouriertransformation, die jedoch die Theorie nichts ändern. Aus der Definition ist zu erkennen, dass auch die Fouriertransformierte einer rasch fallenden Funktion selbst rasch fallend sein muss.

1.3 Beispiele:

(i) Sei $u(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$. Dann ist $\hat{u}(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$. Denn es gilt

$$\begin{aligned}\hat{u}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x} e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x - \frac{|x|^2}{2}} dx \stackrel{\text{quadrat.E.}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}(|x+i\xi|^2 - |\xi|^2)} dx \\ &\stackrel{z=x+i\xi}{=} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|z|^2}{2}} dz = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}.\end{aligned}$$

(ii) Aufgrund der Substitutionsregel folgt außerdem für $k \in \mathbb{R}$ und $u_k(x) = u(kx)$

$$\hat{u}_k(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x} u(kx) dx \stackrel{kx=z}{=} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{i\xi z}{k}} \frac{u(z)}{k^n} dz = \frac{1}{k^n} \hat{u}\left(\frac{\xi}{k}\right).$$

1.4 Satz:

(i) Die Fouriertransformation ist $\forall u \in S(\mathbb{R}^n)$ invertierbar und die inverse Fouriertransformation F^{-1} ist gegeben durch

$$F^{-1}u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} \hat{u}(\xi) d\xi. \quad (1.1)$$

(ii) Für $f \in S(\mathbb{R}^n)$ und $g \in S(\mathbb{R}^n)$ gilt die Formel von Parseval

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = (2\pi)^n \langle f, g \rangle. \quad (1.2)$$

(iii) Für die Fouriertransformierte einer Ableitung gilt

$$F(D_j u)(\xi) = \xi_j \hat{u}(\xi).$$

Beweis: (i) Seien $f \in S(\mathbb{R}^n)$ und $g \in S(\mathbb{R}^n)$ sowie $g_\epsilon(x) := g(\epsilon x)$. Berechne für $\epsilon > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} \hat{f}(\xi) g(\epsilon \xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi y} f(y) g(\epsilon \xi) dy d\xi \stackrel{\text{Fubini}}{=}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi(y-x)} f(y) g(\epsilon\xi) d\xi dy &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \hat{g}_\epsilon(y-x) dy \stackrel{y=x+\epsilon\xi}{=} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x+\epsilon\xi) \hat{g}_\epsilon(\epsilon\xi) \epsilon^n dz \stackrel{1.3(ii)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(x+\epsilon\xi) \hat{g}(\xi) d\xi. \quad (*)
\end{aligned}$$

Geht man zum Grenzwert $\epsilon \rightarrow 0$ über, so ergibt sich aus (*)

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} \hat{f}(\xi) g(0) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \hat{g}(\xi) d\xi.$$

Wählt man nun $g(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$, ergibt sich wegen $g(0) = 1$ und 1.3 (i) die Inversionsformel (1.1):

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} \hat{f} d\xi = f(x) \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}} d\xi = (2\pi)^n f(x).$$

(ii) Das folgt direkt durch Rechnen mit dem komplexen inneren Produkt:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x} f(x) \overline{\hat{g}(\xi)} dx d\xi = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i\xi x} \overline{\hat{g}(\xi)} dx d\xi \stackrel{(i)}{=} (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx = (2\pi)^n \langle f, g \rangle.
\end{aligned}$$

(iii) Unter Verwendung partieller Integration ergibt sich

$$F(D_j u)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x} D_j^\alpha u(x) dx \stackrel{part. Int.}{=} - \int_{\mathbb{R}^n} \xi_j e^{-i\xi x} u(x) dx = \xi_j \hat{u}(\xi). \quad \square$$

Die Fouriertransformation kann mithilfe der Definition $\langle \hat{u}, \phi \rangle = \langle \check{u}, \hat{\phi} \rangle$ $\forall \phi \in S$ auf S' erweitert werden. Dabei ist $\check{u}(x) = u(-x)$ und S' der topologische Dualraum von S , genannt Raum der temperierten Distributionen. Satz 1.4 sowie andere grundlegende Eigenschaften bleiben gültig. Ausführlichere Informationen zur Fouriertransformation im allgemeinen als auch in S' sind in [13] zu finden.

1.5 Definition:

(i) Die Funktion $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\lambda(\xi) = \sqrt{1 + |\xi|^2}$$

Diese Funktion ist für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ definiert und beliebig oft differenzierbar.

(ii) Die **Sobolevräume** $H^s(\mathbb{R}^n)$ für $s \in \mathbb{R}$ sind definiert durch

$$H^s(\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in S'(\mathbb{R}^n) : \lambda(\xi)^s \hat{u} \in L^2 \right\}$$

(iii) Die Norm

$$\|u\|_s := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \lambda(\xi)^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|\lambda(\xi)^s \hat{u}\|_{L^2} \quad (1.3)$$

wird als Sobolevnorm bezeichnet.

1.6 Bemerkungen:

(i) Da $\|u\|_s$ für jede Schwartzfunktion und für jedes $s \in \mathbb{R}$ endlich ist, gilt $S \subseteq H^s \subseteq S' \forall s \in \mathbb{R}$, die letzte Inklusion gilt nach Definition. So gesehen, sind die Sobolevräume „zwischen S und S' “ einzuordnen.

(ii) Mit dieser Norm werden alle H^s zu Banachräumen (es handelt sich sogar um Hilberträume), speziell gilt nach Definition $H^0 = L^2$.

(iii) Wegen $\lambda(\xi)^s \leq \lambda(\xi)^t \forall s \leq t$ folgt $H^t(\mathbb{R}^n) \subseteq H^s(\mathbb{R}^n) \forall s \leq t$. Damit lassen sich

$H^\infty(\mathbb{R}^n) := \bigcap_s H^s$ sowie $H^{-\infty}(\mathbb{R}^n) := \bigcup_s H^s$ definieren.

(iv) Es gilt $u \in H^s(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow D^\alpha u \in H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ (vergleiche 1.32 in [5])

Beweis: (iv) Aus Satz 1.4 (iv) folgt

$$\begin{aligned} |\lambda(\xi)^{s-1} \hat{u}(\xi)|^2 + \sum_{j=1}^n |\lambda(\xi)^{s-1} F(D_j u)(\xi)|^2 &= |\lambda(\xi)^{s-1} \hat{u}(\xi)|^2 + \sum_{j=1}^n |\lambda(\xi)^{s-1} \xi_j \hat{u}(\xi)|^2 = \\ &= (1 + |\xi|^2) |\lambda(\xi)^{s-1} \hat{u}(\xi)|^2 = \lambda(\xi)^2 |\lambda(\xi)^{s-1} \hat{u}|^2 = |\lambda(\xi)^s \hat{u}|^2. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\sum_{j=1}^n \|D_j u\|_{s-1}^2 = \|u\|_s^2 - \|u\|_{s-1}^2,$$

womit die Behauptung für die ersten Ableitungen bewiesen ist. Durch erneutes Anwenden derselben Rechnung für $D_j u$ erhält man die Aussage auch für höhere Ableitungsordnungen. $\square$

1.7 Satz:

Seien $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ und $g \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ für ein $s \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_s \|g\|_{-s}. \quad (1.4)$$

Hierbei ist $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx$ das L^2 -Skalarprodukt. Die Aussage ist insbesondere für Schwartzfunktionen gültig. Aus dem Satz lässt sich folgern, dass der Dualraum zu $H^s(\mathbb{R}^n)$ der Raum $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ ist.

Beweis: Aufgrund der Parsevalschen Gleichung (1.4(ii)) folgt durch Anwendung der Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$$|\langle f, g \rangle| = (2\pi)^{-n} |\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle| = (2\pi)^{-n} \left| \underbrace{\lambda^s \hat{f}}_{\in L^2}, \underbrace{\lambda^{-s} \hat{g}}_{\in L^2} \right| \leq \|f\|_s \|g\|_{-s} \square$$

1.8 Beispiel

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ist eine $H^\infty(\mathbb{R})$ -Funktion, da $f \in L^2$ und auch alle Ableitungen, welche pro Differentiation um eine Ordnung in x niedriger werden, quadratisch integrierbar sind, weshalb auch $\lambda(\xi)^2 \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$ sein muss. Jedoch gilt $f \notin S$, da $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k f(x)$ für $k \geq 2$ nicht mehr konvergent ist. Das bedeutet, dass S eine echte Teilmenge der Sobolevräume ist.

1.2 Pseudodifferentialsymbole

Unter einem Pseudodifferentialsymbol (kurz Ψ DS) versteht man eine glatte Funktion, deren Ableitungen sich mithilfe von λ global abschätzen lassen, genauer:

1.9 Definition:

Sei $p: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ eine glatte Funktion mit folgender Eigenschaft:

$$\forall \alpha \forall \beta \quad \exists c > 0, \text{ so dass: } |\lambda(\xi)^{\frac{(|\beta|-m)}{2}} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x, \xi)| \leq c \quad \forall x \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad (1.5)$$

Dann heißt p ein **Pseudodifferentialsymbol** der Ordnung m , kurz $p \in S^m$. (1.5) bedeutet, dass sämtliche Ableitungen durch entsprechende Potenzen von ξ abgeschätzt werden können, wobei die Konstante c nur von den Ableitungsordnungen α und β abhängt.

1.10 Bemerkungen:

- (i) Da sich $(1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}}$ asymptotisch wie $(1 + |\xi|)^m$ verhält
 (d.h. $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+|\xi|^2}}{1+|\xi|} = \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1+|\xi|^2}{(1+|\xi|)^2}} = 1$), ist folgende Abschätzung zu (1.5) äquivalent:

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x, \xi)| \leq c \lambda(\xi)^{m-|\beta|} \quad (1.6)$$

Diese Form der Definition eines Symbols wird beispielsweise in [2] und [4] verwendet.

- (ii) Da $\lambda(\xi)$ in $|\xi|$ streng monoton wachsend ist, gilt $S^m \subseteq S^n$ genau dann, wenn $m \leq n$.

- (iii) wegen (ii) kann man $S^\infty := \bigcup_m S^m$ sowie $S^{-\infty} := \bigcap_m S^m$ definieren.

- (iv) Es gilt $C_c^\infty \subseteq S^{-\infty} \subseteq S^\infty \subseteq C^\infty$, somit sind Pseudodifferentialssymbole zwischen Testfunktionen und glatten Funktionen einzuordnen.

- (v) Summen und Produkte von Symbolen sind selbst Symbole. Seien dazu $p \in S^m$ und $q \in S^n$. Dann folgt $p + q \in S^{\max(m,n)}$ und $pq \in S^{m+n}$.

Beweis: (v) Die Ableitungen der Ausdrücke werden abgeschätzt:

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (p + q)| \leq |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p| + |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta q| \stackrel{(1.5)}{\leq} (1 + |\xi|^2)^{\frac{m-|\beta|}{2}} + (1 + |\xi|^2)^{\frac{n-|\beta|}{2}}$$

sowie

$$\begin{aligned} &\leq (1 + |\xi|^2)^{\frac{\max(m,n)-|\beta|}{2}} \\ |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (pq)| &\stackrel{Leibniz}{=} \left| \sum_{\delta \leq \beta} \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\beta}{\delta} \binom{\alpha}{\gamma} \partial_x^\gamma \partial_\xi^\delta p \partial_x^{\alpha-\gamma} \partial_\xi^{\beta-\delta} q \right| \\ &\leq 2^{|\alpha|+|\beta|} (1 + |\xi|^2)^{\frac{m-|\delta|}{2}} (1 + |\xi|^2)^{\frac{n-|\beta|+|\delta|}{2}} \leq c (1 + |\xi|^2)^{\frac{m+n-|\beta|}{2}}. \square \end{aligned}$$

1.11 Beispiele:

- (i) Ein einfaches Symbol der Ordnung $m \in \mathbb{R}$ ist $p(x, \xi) = \lambda(\xi)^m$ ($m \in \mathbb{R}$) selbst: Aus $\partial_x^\alpha \lambda^m = 0$ und $\partial_{\xi_j} \lambda(\xi)^m = m \xi_j \lambda^{m-2} = O((1 + |\xi|)^{m-1})$ folgt unter Verwendung von Ketten- und Produktregel, dass

$$|\partial_\xi^\beta (\lambda^m)| \leq c \lambda^{m-|\beta|}.$$

- (ii) Für $\varphi \in C_c^\infty$ ist auch $p(x, \xi) = \varphi(x) \lambda(\xi)^m \in S^m$, da in diesem Fall $\partial_x^\alpha p(x, \xi) = \lambda(\xi)^m \partial_x^\alpha \varphi(x)$ in x global beschränkt bleibt.

- (iii) Sei $p(x, \xi) = e^{-\frac{1}{|\xi|^2}} \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Aus der Kettenregel folgt

$$|\partial_{\xi_j} p(x, \xi)| = |2 \xi_j \xi|^{-4} \underbrace{e^{-\frac{1}{|\xi|^2}}}_{\leq 1} \leq 2 |\xi|^{-3} = O(\lambda^{-3})$$

Alle weiteren ξ -Ableitungen werden um genau eine Ordnung niedriger (jedoch nicht um 3, da neben der Kettenregel nun auch die Produktregel ins Spiel kommt). Daher sind alle Ableitungen von der Form $q(\frac{1}{\xi})e^{-\frac{1}{|\xi|^2}}$, wobei $q(\xi)$ ein Polynom ist. Damit ist (1.5) $\forall \xi \neq 0$ erfüllt. $p(x, \xi)$ lässt sich glatt durch $p(x, 0) \equiv 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$ fortsetzen, da $\lim_{\xi \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{|\xi|^2}} = 0$ und sich durch Multiplikation von Polynomen in $\frac{1}{\xi}$ nicht verändert, weil nach der Regel von l'Hospital bei einem unbestimmten Ausdruck das Konvergenzverhalten von Exponentialfunktionen gegenüber dem von Polynomfunktionen dominiert. Damit wird durch glatte Fortsetzung $p(x, \xi)$ zu einem Symbol der Ordnung 0.

1.12 Satz:

Sei $p \in S^m(\mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{R}$, $u \in S(\mathbb{R}^n)$. Dann ist

- (i) $\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} p(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi \in S$.
- (ii) $\exists l \in \mathbb{N}$, sodass

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} p(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi \right|_k \leq c(k) |u|_{k+l} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (1.7)$$

Hierbei ist $|u|_k := \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |\alpha + \beta| \leq k}} |x^\alpha \partial_x^\beta u|$ die „Schwartznorm“.

Beweis: Der Beweis orientiert sich an [5], Theorem 3.2. Es reicht aus, (ii) zu zeigen, da (i) unmittelbar daraus folgt. Das Integral in (1.7) ist wegen $u \in S$ absolut konvergent. Wir beginnen mit $k = 0$.

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} p(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi \right|_0 &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{|\lambda(\xi)^{-m} p(x, \xi)|_0}_{< \infty} |\lambda(\xi)^{m+2n} \hat{u}(\xi)|_0 \underbrace{\lambda(\xi)^{-2n}}_{\in L^1} d\xi \\ &\leq c_1 |\hat{u}|_{m+2n} \leq c |u|_{m+4n}. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung folgt aus der Stetigkeit der Fouriertransformation, welche in [5], Theorem 1.16 (i) bewiesen wird.

Sei nun $k > 0$. Dann folgt durch Differentiation unter dem Integral sowie der Produktregel

$$\begin{aligned} \partial_j \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} p(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi \right) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} (i\xi_j p(x, \xi) + \partial_{x_j} p(x, \xi)) \hat{u}(\xi) d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \partial_{x_j} p(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi + \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} p(x, \xi) F(\partial_j u(\xi)) d\xi. \end{aligned}$$

Das erste Integral lässt sich nach der gleichen Methode wie oben abschätzen, da lediglich p eine x -Ableitung hinzubekommen hat und deshalb $\partial_{x_j} p(x, \xi)$ immer noch ein Symbol der Ordnung m ist. Wegen $(\partial_j \hat{u}(\xi)) = -i\xi \hat{u}(\xi)$ (1.4(iii)) gilt für das zweite Integral

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} p(x, \xi) F(\partial_j u)(\xi) d\xi \right| \leq c |\hat{u}|_{2n+m+1} \leq c_1 |u|_{4n+m+1}.$$

Damit folgt $|\partial_j (\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} p(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi)| \leq C |u|_{4n+m+1}$.

Mit den x -Faktoren lässt sich nach partieller Integration ähnlich verfahren:

$$\begin{aligned} x_j \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} p(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} (-i\partial_{\xi_j} e^{i\xi x}) p(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi \stackrel{\text{part. Int.}}{=} \\ &\int_{\mathbb{R}^n} i e^{i\xi x} (\partial_{\xi_j} p(x, \xi) \hat{u}(\xi) + p(x, \xi) \partial_{\xi_j} \hat{u}(\xi)) d\xi. \end{aligned}$$

Analog zu vorher lassen sich beide Teile des Integrals mit $|u|_{4n+m+1}$ abschätzen, weil $|\partial_{\xi_j} p(x, \xi)| \leq c_3 \lambda^{m-1}$ und $|\partial_{\xi_j} \hat{u}(\xi)| \leq c_4 |u|_{2n+m+1}$ gelten. Für $|\alpha| \geq 1$ bzw. $|\beta| \geq 1$ ergibt sich somit induktiv die Ungleichung

$$|(x^\alpha \partial^\beta) \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} p(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi|_k \leq c(k) |u|_{k+l}, \quad \text{wobei } l = 4n + m.$$

Damit ist die Behauptung (ii) bewiesen und $f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} p(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi$ ist ein Element aus S . $\square$

1.3 Pseudodifferentialoperatoren

1.13 Adjungierte eines Symbols:

Definiere für $p \in S^m(\mathbb{R}^n)$ und $D := -i\partial$ den linearen Operator $P : S(\mathbb{R}^n) \rightarrow S(\mathbb{R}^n)$ durch

$$p(x, D)u := (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} p(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi. \quad (1.8)$$

In Satz 1.12 wurde gezeigt, dass ein solcher Operator den Raum $S(\mathbb{R}^n)$ in sich überführt. Diese Definition kann mit Hilfe des Adjungierten Operators auf $S'(\mathbb{R}^n)$ ausdehnt werden. Der Adjungierte Operator P^* soll wie üblich

Die Gleichung $\langle p(x, D)u, \varphi \rangle = \langle u, p^*(x, D)\varphi \rangle \quad \forall u \in S'$ und $\forall \varphi \in S$ erfüllen. P^* lässt sich folgendermaßen berechnen (siehe auch [2], Lemma 8.35).

$$\begin{aligned}
\langle p(x, D)u, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} p(x, D)u(x) \overline{\varphi(x)} dx \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} p(x, \xi) \hat{u}(\xi) \overline{\varphi(x)} d\xi dx \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} p(x, \xi) \overline{\varphi(x)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi y} u(y) dy \right) d\xi dx. \tag{1.9}
\end{aligned}$$

Die Integralfunktion $G(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} p(x, \xi) \overline{\varphi(x)} dx$ ist eine Schwartzfunktion, da

$$\begin{aligned}
|\xi^\alpha g(\xi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^\alpha (e^{i\xi x}) p(x, \xi) \overline{\varphi(x)} dx \right| \stackrel{part. Int.}{=} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} \partial_x^\alpha (p(x, \xi) \overline{\varphi(x)}) dx \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \underbrace{\partial_x^\beta p(x, \xi)}_{\leq c\lambda^m} \underbrace{\partial_x^{\alpha-\beta} \overline{\varphi(x)}}_{\in S} \right| \leq C |\varphi|_{|\alpha|+m} < \infty.
\end{aligned}$$

Damit wird 1.9 zu einem konvergenten Integral, sodass auch der Satz von Fubini angewandt werden kann (siehe [5], 2.21 (iv)). Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\langle p(x, D)u, \varphi \rangle &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi(x-y)} p(x, \xi) u(y) \overline{\varphi(x)} dy d\xi dx \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{e^{-i\xi(x-y)} p(x, \xi) \varphi(x)} u(y) dy d\xi dx,
\end{aligned}$$

welches sich durch Tauschen der Variablen x und y auch in der Form

$$(2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{i\xi(x-y)} \overline{p(y, \xi) \varphi(y)} dx d\xi dy$$

schreiben lässt. Deshalb gilt

$$p(x, D)^* u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi(x-y)} \overline{p(y, \xi)} u(y) dy d\xi. \tag{1.10}$$

Der Operator P^* hat also das Symbol $p^*(x, y, \xi) = \overline{p(y, \xi)}$, welches von der selben Ordnung wie $p(x, \xi)$ ist. $\square$

1.14 Definition:

Eine lineare Abbildung $P : S'(\mathbb{R}^n) \rightarrow S'(\mathbb{R}^n)$, die durch die Gleichung (1.8) gegeben ist, wird als **Pseudodifferentialoperator** bezeichnet und $p(x, \xi)$ als sein **zugehöriges Symbol**. Ist $p \in S^m(\mathbb{R}^n)$, so nennt man P einen Pseudodifferentialoperator der Ordnung m und schreibt kurz $P \in \Psi^m$.

In Satz 1.12 wurde gezeigt, dass jedes $P \in \Psi^m$ S in S abbildet. Da wegen 1.13 auch $P^* \in \Psi^m$, ist mithilfe der Definition

$\langle p(x, D)u, \varphi \rangle := \langle u, p^*(x, D)\varphi \rangle$ der Operator P auch in $S'(\mathbb{R}^n)$ definierbar.

1.15 Beispiel:

Sei $p(x, D)$ ein Differentialoperator mit glatten Koeffizienten, d.h.

$p(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} p_\alpha(x) D^\alpha$ mit $p_\alpha(x) \in H^\infty(\mathbb{R}^n) \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Dann ist $p(x, D) \in \Psi^m$. Wegen $F(D^\alpha u) = \xi^\alpha \hat{u}$ gilt

$$p(x, D)u(x) = (-2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} \sum_{|\alpha| \leq m} p_\alpha(x) \xi^\alpha \hat{u} d\xi,$$

also $p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} p_\alpha(x) \xi^\alpha$. Das ist ein Polynom von Grad m , also glatt und

klarerweise ist $|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x, \xi)| = O(\lambda^{m-|\alpha|})$. Also ist $p \in S^m \Rightarrow P \in \Psi^m$.

1.16 Lemma:

Sei $\lambda^m(D)$ der Operator, dessen Symbol $\lambda(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}}$ ist. Dann ist $\lambda^m(D)$ ein Pseudodifferentialoperator der Ordnung m und es gilt

$\forall m \in \mathbb{R}$ und $\forall n \in \mathbb{R}$ sowie $\forall u \in S'(\mathbb{R}^n)$ und $\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$

(i) $F(\lambda^m(D)u(\xi)) = \lambda^m(\xi)\hat{u}(\xi)$.

(ii) $\lambda^m(D)\lambda^n(D)u = \lambda^{m+n}(D)u$.

(iii) $\|\lambda^m(D)u\|_{s-m} = \|u\|_s \forall u \in H^s(\mathbb{R}^n)$.

(iv) $\langle \lambda^m(D)u, \varphi \rangle = \langle u, \lambda^m(D)\varphi \rangle$.

Die Aussage (iii) bedeutet, dass $u \in H^s(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \lambda^m(D)u \in H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis: Nach Definition ist $\lambda^m(D)u = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} \lambda^m(\xi) \hat{u}(\xi) d\xi$. Aus dem

Inversionssatz für die Fouriertransformation (1.4(i)) folgt (i) unmittelbar.

(ii) Direkte Rechnung ergibt

$$\lambda^m(D)(\lambda^n(D)u) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} \lambda^m(\xi) F(\lambda^n(D)u(\xi)) d\xi \stackrel{(i)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} \lambda^{m+n}(\xi) \hat{u}(\xi) d\xi.$$

Also ist $\lambda^{m+n}(\xi)$ das Symbol von $\lambda^m(D)\lambda^n(D) \Rightarrow$ (ii) (iii) Auch das folgt aus (i):

$$\|\lambda^m(D)u\|_{s-m} = \|\lambda(\xi)^{s-m}(F(\lambda^m(D)u))\|_0 \stackrel{(i)}{=} \|\lambda(\xi)^s \hat{u}\|_0 = \|u\|_s.$$

(iv) Mittels der Parsevalschen Gleichung (1.4(ii)) ergibt sich

$$\begin{aligned}\langle \lambda^m(D)u, \varphi \rangle &= (2\pi)^{-n} \langle F(\lambda^m(D)u), \hat{\varphi} \rangle = (2\pi)^{-n} \langle \lambda^m \hat{u}, \hat{\varphi} \rangle = \\ &= (2\pi)^{-n} \langle \hat{u}, \lambda^m \hat{\varphi} \rangle = (2\pi)^{-n} \langle \hat{u}, F(\lambda^m(D)\varphi) \rangle = \langle u, \lambda^m(D)\varphi \rangle. \square\end{aligned}$$

Die folgenden zwei Resultate werden hier nicht bewiesen, jedoch in weiterer Folge benötigt.

1.17 Satz von Calderon-Vaillancourt

Sei $p \in S^0(\mathbb{R}^n)$. Dann ist der zugehörige Operator $P(x, D)$ stetig. Ein Beweis dieses Satzes befindet sich z.B. in [8], Theorem 1.1.

1.18 Satz:

Jeder Pseudodifferentialoperator der Ordnung m bildet $H^s(\mathbb{R}^n)$ in $H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$ ab, genauer:

Sei $p \in S^m(\mathbb{R}^n)$. Dann gibt es für jedes reelle s eine positive Konstante c_s , sodass

$$\|p(x, D)u\|_{s-m} \leq c_s \|u\|_s \quad \forall u \in H^s(\mathbb{R}^n) \quad (1.11)$$

Beweise dieses Satz finden sich beispielsweise in [5], Theorem 3.12, sowie in [6], Theorem 18.1.11 (Stetigkeit) bzw. 18.1.15 (Gültigkeit von (1.11)).

1.19 Komposition von Pseudodifferentialoperatoren:

Seien $P \in \Psi^m$ und $Q \in \Psi^n$ sowie ihre zugehörigen Symbole p und q . Dann gilt für die Komposition QP nach Definition

$$q(x, D)p(x, D)u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\eta x} q(x, \eta) F(p(x, D)u)(\eta) d\eta.$$

Wegen

$$\begin{aligned}F(p(x, D)u)(\eta) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\eta y} p(y, D)u(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\eta y} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi y} p(y, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\xi-\eta)y} p(y, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi dy\end{aligned}$$

folgt, dass

$$q(x, D)p(x, D)u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\eta x} q(x, \eta) \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\xi-\eta)y} p(y, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi dy d\eta =$$

$$= (2\pi)^{-n} \int \int \int e^{i\eta(x-y)} e^{i\xi y} q(x, \eta) p(y, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi dy d\eta. \quad (*)$$

Mittels der linearen Variablentransformation $x - y \rightarrow y$ sowie $\xi - \eta \rightarrow \eta$ ändert sich der Exponent von e von $i(\eta y + \xi x - \xi y)$ auf $i((\xi - \eta)(x - y) + \xi x - \xi(x - y)) = i(\xi x - \eta(x - y)) \rightarrow i(\xi x - \eta y)$. Damit kann (*) in folgender Gestalt geschrieben werden:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-n} e^{i\xi x} e^{-i\eta y} q(x, \xi - \eta) p(x - y, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi dy d\eta.$$

Damit muss das Symbol der Komposition gegeben sein durch die Gleichung

$$r(x, \xi) = (2\pi)^{-n} \int \int e^{-i\eta y} q(x, \xi - \eta) p(x - y, \xi) dy d\eta. \quad (1.12)$$

In [5] wird im Beweis von Theorem 2.23 gezeigt, dass alle in der Rechnung beteiligten Integrale im oszillatorischen Sinn konvergieren, also obige Rechnung rechtfertigen. Die Abschätzungen (1.5) für p und q werden durch das Integral nicht beeinflusst und deshalb ist r ein Symbol der Ordnung m+n. $\square$

1.20 Definition:

Sei P ein Pseudodifferentialoperator, $P : S'(\mathbb{R}^n) \rightarrow S'(\mathbb{R}^n)$ und sei weiters $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ eine Distribution mit

$$\langle Pu, \varphi \rangle = \langle K, \varphi \otimes u \rangle, \quad (1.13)$$

wobei $\varphi \otimes u := \varphi(x) \overline{u(y)}$ das Tensorprodukt darstellt. Hierbei ist $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ sowie $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. Dann heißt $K(x, y)$ der **Kern** des Operators P. In [2] auf Seite 271/272 wird eine allgemeinere Definition des Integralkerns gegeben. Der in (1.13) definierte Kern $K(x, y)$ lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned} \langle p(x, D)u, \varphi \rangle &= (2\pi)^{-n} \left\langle \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} p(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi, \varphi \right\rangle = \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} p(x, \xi) \hat{u}(\xi) \overline{\varphi(x)} d\xi dx \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi(x-y)} p(x, \xi) u(y) \varphi(x) dy d\xi dx = \langle K, \varphi \otimes u \rangle. \end{aligned}$$

Daher hat $K(x,y)$ die Integraldarstellung

$$K(x,y) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi(x-y)} p(x,\xi) d\xi \quad (1.14)$$

Dieser Kern sowie das folgende Lemma werden beim Beweis der Energieabschätzung für das Cauchyproblem mit Colombeaudaten benötigt. Die Formulierung des Lemmas entspricht derjenigen von [5], Lemma 3.13.

1.21 *Lemma von Schur:*

Sei $K(x,y)$ eine auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ messbare Funktion mit folgenden Eigenschaften:

$$\exists C > 0, \text{ sodass } \int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y)| dx \leq C \text{ und } \int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y)| dy \leq C \quad (1.15)$$

Dann ist $\forall \Psi \in L^2$ die Funktion $\Phi(x) := \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) \Psi(y) dy$ quadratisch integrierbar und es gilt die Abschätzung

$$\|\Phi\|_{L^2} \leq C \|\Psi\|_{L^2}$$

Beweis: Nach der binomischen Formel ist $|\Psi(y) \overline{\Psi(z)}| \leq \frac{1}{2}(|\Psi(y)|^2 + |\Psi(z)|^2)$. Daher ist die Funktion $f(x,y,z) := K(x,y) \Psi(y) \overline{K(x,z) \Psi(z)}$ L^1 -integrierbar auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Durch Berechnung erhält man

$$\begin{aligned} \|\Phi\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) \Psi(y) dy \int_{\mathbb{R}^n} \overline{K(x,z) \Psi(z)} dz \right) dx \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) \Psi(y) \overline{K(x,z) \Psi(z)} dx dy dz \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y)| |K(x,z)| |\Psi(y)|^2 dx dy dz + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y)| |K(x,z)| |\Psi(z)|^2 dx dy dz \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |K(x,z)| dz |K(x,y)| dx}_{\leq C^2} |\Psi(y)|^2 dy + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |K(x, y)| dy |K(x, z)| dx |\Psi(z)|^2 dz \\
& \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{\leq C^2} \\
& \leq \frac{1}{2} C^2 2 \|\Psi\|_{L^2}^2 = C^2 \|\Psi\|_{L^2}^2. \square
\end{aligned}$$

1.22 Die strikte Gårding-Ungleichung:

Sei $p \in S^{2m+1}(\mathbb{R}^n)$ ein Symbol, mit nach unten beschränktem Realteil. Dann gibt es eine positive Konstante C , sodass

$$\Re \langle p(x, D)u, u \rangle \geq -C \|u\|_m^2 \quad \forall u \in S \quad (1.16)$$

Diese Formulierung der starken Garding-Ungleichung entspricht der Version von [6], Theorem 18.1.14, wo sie auch bewiesen wird. Es gibt weitere (schwächere) Formulierungen der Garding-Ungleichung, welche z.B. in [2], Theorem 8.40 zu finden ist.

Kapitel 2

Das klassische Cauchyproblem

Dieser Abschnitt widmet sich dem klassischen Cauchyproblem für einen hyperbolischen Pseudodifferentialoperator 1. Ordnung. Im ersten Abschnitt wird klargestellt, was unter einem hyperbolischen Operator zu verstehen ist, in den anderen Abschnitten wird eine Energieabschätzung und, darauf aufbauend, ein Existenz- und Eindeigkeitssatz für das Cauchyproblem 1. Ordnung mit Daten aus einem Sobolevraum bewiesen. Dieser wird für das vierte Kapitel von Bedeutung sein, wo vom klassischen in das verallgemeinerte Cauchyproblem übergegangen wird. Die gewählten Notationen und die Beweismethoden orientieren sich stark nach [6], Kapitel 23.1. Operatoren höherer Ordnung werden hier nicht bearbeitet.

2.1 Hyperbolische Operatoren 1.Ordnung

2.1 Definition:

Sei $p_t(x, \xi) := p(t, x, \xi)$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $p_t(x, \xi) \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \forall t \in [0, T]$
- (ii) Für jedes positive T ist die Abbildung

$$[0, T] \ni t \rightarrow p_t \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$

stetig und die Menge $\{p_t : t \in [0, T]\}$ ist beschränkt in $S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

Dann wird $p(t, x, \xi)$ ein glattes Symbol der Ordnung m mit Parameter t genannt. Kurz schreibt man $p \in C^\infty([0, T], S^m)$. In den Anwendungen steht die Variable t meist für die Zeit.

2.2 Satz und Definition:

Sei $p(t, x, \xi) \in C^\infty([0, T], S^1)$. Dann sind folgende drei Aussagen gleichwertig:
 (i) p kann in einen reellen und einen beschränkten Teil zerlegt werden, d.h. es gibt ein reellwertiges Symbol $p_1(t, x, \xi) \in C^\infty([0, T], S^1)$ und ein Symbol $p_0 \in C^\infty([0, T], S^0)$, sodass

$$p(t, x, \xi) = p_1(t, x, \xi) + p_0(t, x, \xi) \quad (2.1)$$

- (ii) $p(t, x, D) - p(t, x, D)^* \in \Psi^0$
 (iii) p hat beschränkten Imaginärteil, also

$$\exists c > 0 : \Im p(t, x, \xi) \leq c \quad (2.2)$$

Im Falle der Gültigkeit von (i) bis (iii) wird $\partial_t + ip(t, x, D)$ ein **hyperbolischer** Pseudodifferentialoperator 1. Ordnung genannt.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): Wie in 1.13 berechnet wurde, hat $p(t, x, D)^*$ die Symboldarstellung $\overline{p(t, x, \xi)}$, also hat wegen der Linearität $p(t, x, D) - p(t, x, D)^*$ die Symboldarstellung

$$p_1(t, x, \xi) + p_0(t, x, \xi) - \overline{p_1(t, x, \xi)} - \overline{p_0(t, x, \xi)} = 2p_0(t, x, \xi)$$

und letzteres ist nach Voraussetzung ein Symbol der Ordnung 0.

- (ii) $\Rightarrow$ (iii) Ist $p(x, t, \xi) - \overline{p(x, t, \xi)} = 2\Im p(t, x, \xi)$ ein Symbol der Ordnung 0, so muss wegen Definition 1.9 $\Im p(t, x, \xi)$ beschränkt sein, was (iii) impliziert.
 (iii) $\Rightarrow$ (i) Da p ein komplexwertiges Symbol ist, kann es in der Form $p = a_1 + ia_0$ geschrieben werden. Wegen $a_0(t, x, \xi) \leq c$ ist $a_0 \in C^\infty([0, T], S^0)$ und somit (i) gezeigt. $\square$

2.3 Bemerkung:

Sei $\partial_t + P$ mit $P \in \Psi^1$ hyperbolisch und $A := iP$. Dann muss wegen $\Re(iz) = -\Im z$ der Operator A ein Symbol $a(t, x, \xi)$ besitzen, dessen Realteil nach unten beschränkt ist.

2.4 Beispiele:

(i) Jedes reellwertige Symbol 1. Ordnung erzeugt einen hyperbolischen Pseudodifferentialoperator. So erzeugt beispielsweise der Lambdaoperator $\lambda(D)$ aus Lemma 1.16, dessen Symbol $p(t, x, \xi) = \lambda(\xi)$ ist, einen hyperbolischen Operator.

(ii) Sei $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(t, x) \in C^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^n)$ sowie $\partial_t^i \partial_x^\alpha f(t, x) \in L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^n) \forall t \in [0, T] \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Dann erzeugt auch $p(t, x, \xi) = f(t, x) + \lambda(\xi)$ einen hyperbolischen Pseudodifferentialoperator 1. Ordnung

2.5 Warnung:

Der hyperbolische Operator $Q := \partial_t + iP$ mit $P \in \Psi^1$ ist im allgemeinen selbst kein Pseudodifferentialoperator. Wäre Q nämlich ein Pseudodifferentialoperator 1. Ordnung, müsste das zugehörige Symbol $q(t, \tau, x, \xi)$ folgende Form haben: Sei dazu $u(t, x) \in D(\mathbb{R}^{n+1})$.

$$(\partial_t + iP(t, x, D))u(t, x) = iD_t u(t, x) + P(t, x, D)u(t, x) \stackrel{1.4(iii)}{=}$$

$$(2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{i\langle (t,x), (\tau, \xi) \rangle} (i\tau + p(t, x, \xi)) \hat{u}(\tau, \xi) d(\tau, \xi).$$

Also müsste $q(t, \tau, x, \xi) = i\tau + p(t, x, \xi)$ gelten (p sei das Symbol von P), welches zu $S^1(\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1})$ gehören müsste. Für $\gamma = (\alpha_{n+1}, \alpha)$ sowie $\delta = (\beta_{n+1}, \beta)$ müsste daher folgen:

$$\forall \gamma \in \mathbb{N}_0^{n+1} \forall \delta \in \mathbb{N}_0^{n+1} \quad \exists c_{\gamma, \delta} \geq 0 :$$

$$|\partial_{(t,x)}^\gamma \partial_{(\tau, \xi)}^\delta (i\tau + p(t, x, \xi))| \leq c_{\gamma, \delta} \lambda(\tau, \xi)^{\frac{1-|\delta|}{2}} \quad \forall (t, x, \tau, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}. \quad (2.3)$$

Wählt man speziell $\gamma = (0, 0)$ und $\delta = (0, \beta)$ mit $\beta \neq 0$, so ergibt sich

$$|\partial_{(t,x)}^\gamma \partial_{(\tau, \xi)}^\delta (i\tau + p(t, x, \xi))| = |\partial_\xi^\beta p(t, x, \tau, \xi)|.$$

Für $|\beta| \geq 2$ ist der Exponent $\frac{1-|\delta|}{2}$ negativ. Das hat zur Folge, dass für $|\tau| \rightarrow \infty$ die Funktion $\lambda(\tau, \xi)$ für festes ξ gegen 0 streben muss. Soll Gleichung (2.3) richtig bleiben, ist es daher notwendig, dass

$$\partial_\xi^\beta p(t, x, \xi) = 0 \quad \forall |\beta| \geq 2 \quad \forall (t, x, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Das bedeutet, dass alle ξ -Ableitungen, deren Ordnung höher als 1 ist, verschwinden müssen. Daraus folgt, dass p bezüglich aller Komponenten linear in ξ sein muss. Deshalb muss es komplexwertige Funktionen $c(t, x) \in \mathbb{C}$ und $d(t, x) \in \mathbb{C}^n$ geben, sodass

$$p(t, x, \xi) = c(t, x)\xi + d(t, x).$$

Damit muss p das Symbol eines partiellen Differentialoperator 1.Ordnung sein. Daher kann Q nur dann ein Pseudodifferentialoperator auf $\mathbb{R}^{n+1}$ sein, wenn P für jedes fixe $t \in R$ ein partieller Differentialoperator 1. Ordnung ist. $\square$

2.2 Eine Energieabschätzung

2.6 *Motivation:*

Das Ziel dieses und des nächsten Abschnittes ist es, die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung für das folgende Cauchyproblem zu finden:

$$\begin{aligned}\partial_t u + iP u &= f \text{ in } (0, T) \times \mathbb{R}^n \\ u(0) &= g\end{aligned}\tag{2.4}$$

Dabei ist $\partial_t + iP$ ein hyperbolischer Pseudodifferentialoperator der Ordnung 1 im Sinne der Definition 2.2. Für die Daten f und g soll $f \in L^1((0, T), H^s(\mathbb{R}^n))$ (das bedeutet: f soll für $t \in (0, T)$ integrierbar und bezüglich x in $H^s(\mathbb{R}^n)$ sein) und $g \in H^s(\mathbb{R}^n)$ für ein beliebiges $s \in \mathbb{R}$ gelten. Es wird später gezeigt werden, dass unter diesen Voraussetzungen eine eindeutige Lösung $u \in C([0, T], H^s(\mathbb{R}^n))$ existiert. Zur Vorbereitung muss noch eine „Energieabschätzung“ bewiesen werden.

2.7 *Satz:*

Sei $P \in \Psi^1$ und $Q := \partial_t + iP$ ein hyperbolischer Pseudodifferentialoperator. Sei weiters $u \in C([0, T], H^{s+1}) \cap C^1([0, T], H^s)$ mit $s \in \mathbb{R}$ beliebig, aber fest. Dann gibt es eine positive Konstante k , sodass folgende Energieabschätzung gilt:

$$\sup_{t \in [0, T]} e^{-kt} \|u(t)\|_s \leq \|u(0)\|_s + 2 \int_0^T e^{-kt} \|Qu\|_s dt\tag{2.5}$$

Setzt man $u(0) := g$ sowie $Qu := f$, so lässt sich Gleichung (2.5) vereinfacht in der Form

$$\sup_{t \in [0, T]} e^{-kt} \|u(t)\|_s \leq \|g\|_s + 2 \int_0^T e^{-kt} \|f\|_s dt\tag{2.6}$$

darstellen.

Beweis: Sei zu Beginn $s = 0$. Die Sobolevnorm $\|u(t)\|_0$ lässt sich folgendermaßen ableiten.

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_0^2 = \langle \partial_t u(t), u(t) \rangle + \langle u(t), \partial_t u(t) \rangle = 2 \operatorname{Re} \langle \partial_t u(t), u(t) \rangle.$$

Damit folgt unter Verwendung der Produktregel

$$\begin{aligned}2\Re(\langle f(t), u(t) \rangle) e^{-2kt} &\stackrel{f=Qu}{=} 2\Re(\langle \partial_t u(t), u(t) \rangle) e^{-2kt} + \\ &+ 2\Re(\langle ip(t, x, D)u(t), u(t) \rangle) e^{-2kt}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{dt} \|u(t)\|_0^2 e^{-2kt} + 2\Re(\langle ip(t, x, D)u(t), u(t) \rangle) e^{-2kt} \\
&= \frac{d}{dt} (\|u(t)\|_0^2 e^{-2kt}) + 2k \|u(t)\|_0^2 + 2\Re(\langle ip(t, x, D)u(t), u(t) \rangle) e^{-2kt}.
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $\Re(ip(t, x, \xi)) = -\Im(p(t, x, \xi)) \geq -c$ für ein positives c . Daher folgt wegen der strikten Gårdingungleichung (Satz 1.22), dass $\Re(\langle ip(t, x, D)u(t), u(t) \rangle) \geq -c \|u(t)\|_0^2$. Damit gilt

$$2\Re(\langle f(t), u(t) \rangle) e^{-2kt} \geq \frac{d}{dt} (\|u(t)\|_0^2 e^{-2kt}) + (2k - c) \|u(t)\|_0^2.$$

Wählt man $k > \frac{c}{2}$, so ergibt sich daraus

$$2\Re(\langle f(t), u(t) \rangle) e^{-2kt} \geq \frac{d}{dt} (\|u(t)\|_0^2 e^{-2kt}). \quad (2.7)$$

Integriert man die Ungleichung (2.7) von 0 bis t , so erhält man mit Hilfe der Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
&\int_0^t 2e^{-2k\tau} \|f(\tau)\|_0 \|u(\tau)\|_0 \, d\tau \geq \int_0^t 2e^{-2k\tau} \Re(\langle f(\tau), u(\tau) \rangle) d\tau \\
&\stackrel{(2.5)}{\geq} \int_0^t \frac{d}{d\tau} (\|u(\tau)\|_0^2 e^{-2k\tau}) d\tau = e^{-2kt} \|u(t)\|_0^2 - \|u(0)\|_0^2.
\end{aligned}$$

Oder, anders geschrieben

$$e^{-2kt} \|u(t)\|_0^2 \leq \|u(0)\|_0^2 + \int_0^t 2e^{-k\tau} \|f(\tau)\|_0 e^{-k\tau} \|u(\tau)\|_0 \, d\tau. \quad (2.8)$$

Da diese Abschätzung für beliebiges $t \in (0, T)$ gilt, muss sie auch für das Supremum gelten.

$$\sup_{\tau \in [0, t]} (e^{-2k\tau} \|u(\tau)\|_0^2) \leq \|u(0)\|_0^2 + 2 \int_0^t e^{-k\tau} \|f(\tau)\|_0 \sup_{\tau \in [0, t]} (e^{-k\tau} \|u(\tau)\|_0) d\tau.$$

Zur Abschätzung dieses Supremums setze $M(t) := \sup_{\tau \in [0, t]} (e^{-k\tau} \|u(\tau)\|_0)$. Dann folgt

$$M^2(t) \leq \|u(0)\|_0^2 + 2M(t) \int_0^t e^{-k\tau} \|f(\tau)\|_0 \, d\tau$$

und durch Umformung

$$M^2(t) - 2M(t) \int_0^t e^{-k\tau} \|f(\tau)\|_0 \, d\tau \leq \|u(0)\|_0^2.$$

Hierbei handelt es sich um eine quadratische Ungleichung für $M(t)$. Durch quadratisches Ergänzen erhält man

$$(M(t) - \int_0^t e^{-k\tau} \|f(\tau)\|_0 \, d\tau)^2 \leq \|u(0)\|_0^2 + (\int_0^t e^{-k\tau} \|f(\tau)\|_0 \, d\tau)^2.$$

Da auf der rechten Seite beide Summanden positiv sind, folgt aus der binomischen Formel

$$(M(t) - \int_0^t e^{-k\tau} \|f(\tau)\|_0 \, d\tau)^2 \leq (\|u(0)\|_0 + \int_0^t e^{-k\tau} \|f(\tau)\|_0 \, d\tau)^2.$$

Hier kann ohne Fallunterscheidung auf beiden Seiten die Quadratwurzel gezogen werden und es ergibt sich

$$M(t) - \int_0^t e^{-k\tau} \|f(\tau)\|_0 \, d\tau \leq \|u(0)\|_0 + \int_0^t e^{-k\tau} \|f(\tau)\|_0 \, d\tau$$

und damit insgesamt

$$e^{-kt} \|u(t)\|_0 \leq M(t) \leq \|u(0)\|_0 + 2 \int_0^t e^{-k\tau} \|f(\tau)\|_0 \, d\tau.$$

Daraus folgt die Richtigkeit von (2.6) für den Fall $s = 0$ unmittelbar.

Sei nun $s \in \mathbb{R}$ beliebig. Definiere den Operator

$r(t, x, D) := \lambda^s(D)p(t, x, D)\lambda^{-s}(D)$. Wie in 1.19 nachgerechnet, muss $R(t, x, D)$ ein Pseudodifferentialoperator der Ordnung $s+1-s = 1$ mit Parameter t sein. Wegen Lemma 1.16 (i) muss dessen Symbol $r(t, x, \xi) = \lambda^s(\xi)p(t, x, \xi)\lambda^{-s}(\xi)$ lauten. Weiters muss $r(t, x, \xi)$ ebenfalls die Hyperbolizitätsbedingungen von Satz 2.2 erfüllen, da $\lambda(\xi)$ eine reellwertige Funktion ist (z.B. (iii) Imaginärteil bleibt beschränkt). Daher muss auch $\partial_t + ir(t, x, D)$ ein hyperbolischer Operator sein. Wegen Lemma 1.16 (iii) gilt

$$u \in C([0, T]; H^{s+1}) \cap C^1([0, T]; H^s) \Leftrightarrow \lambda^s(D)u \in C([0, T]; H^1) \cap C^1([0, T]; H^0).$$

Daher muss die Abschätzung (2.6) auch für $\lambda(D)^s u$ gültig bleiben. Wegen

$$\begin{aligned} (\partial_t + ip(t, x, D))\lambda^s(D)u &= \lambda^s(D)\partial_t u(t) + i\lambda^s(D)p(t, x, D)\lambda^{-s}(D)\lambda^s(D)u(t) \\ &= \lambda^s(D)(\partial_t u(t) + ip(t, x, D)u(t)) = \lambda^s(D)(\partial_t + ip(t, x, D))u(t) \end{aligned}$$

folgt aus (2.6)

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} e^{-kt} \|\lambda^s(D)u(t)\|_0 &\leq \|\lambda^s(D)u(0)\|_0 + \\ &+ 2 \int_0^T e^{-kt} \|\lambda^s(D) \underbrace{(\partial_t + ip(t, x, D))u(t)}_{=f(t)}\|_0 dt. \end{aligned}$$

Wegen Lemma 1.16 (iii) ist obige Ungleichung gleichbedeutend mit

$$\sup_{t \in [0, T]} e^{-kt} \|u(t)\|_s \leq \|u(0)\|_s + 2 \int_0^T e^{-kt} \|f(t)\|_s dt,$$

und das war die Behauptung. $\square$

2.3 Das klassische Lösungstheorem

Gegeben sei das Cauchyproblem für die Pseudodifferentialgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u + ip(t, x, D)u &= f \text{ in } X_T := (0, T) \times \mathbb{R}^n \\ u(0) &= g \end{aligned} \tag{2.9}$$

Hierbei sei $p \in C^\infty([0, T], S^1)$ ein Symbol, das sich zerlegen lasse in $p = p_1 + p_0$ mit reellwertigem $p_1 \in C^\infty([0, T], S^1)$ und $p_0 \in C^\infty([0, T], S^0)$ (d.h. $\partial_t + iP$ ist ein hyperbolischer Pseudodifferentialoperator).

2.8 Theorem:

Das Cauchyproblem (2.9) hat für jedes $f \in L^1((0, T), H^s(\mathbb{R}^n))$ und jedes $g \in H^s(\mathbb{R}^n)$ eine eindeutige Lösung $u \in C([0, T], H^s(\mathbb{R}^n))$. Diese Lösung erfüllt die Energieabschätzung (2.6).

Beweis: Eindeutigkeit: Sei dazu $f \equiv 0$ und $g \equiv 0$. Es ist zu zeigen, dass dann auch $u \equiv 0$ ist. Wegen Satz 1.18 folgt für beliebiges $u \in C([0, T], H^s(\mathbb{R}^n))$, dass

$$\partial_t u \stackrel{f=0}{=} -ip(t, x, D)u \in C([0, T], H^{s-1}(\mathbb{R}^n)).$$

Daher ist $u \in C^1([0, T], H^{s-1}(\mathbb{R}^n)) \cap C([0, T], H^s(\mathbb{R}^n))$ und die Voraussetzungen für die Energieabschätzung (2.6) sind erfüllt. Also folgt

$$\sup_{t \in [0, T]} e^{-kt} \|u(t)\|_s \leq 0 + 2 \int_0^T e^{-kt} \cdot 0 dt = 0 \Rightarrow u \equiv 0.$$

Existenz:. Sei $v \in D(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp } v \in \{(t, x) : t < T\}$. Dann muss für jedes $u \in D'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, welches Lösung des Cauchyproblems (2.4) ist, gelten:

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle f(t), v(t) \rangle dt &= \int_0^T \langle \partial_t u(t) + ip(t, x, D)u(t), v(t) \rangle dt = \\ &= \int_0^T \langle \partial_t u(t), v(t) \rangle + \langle u(t), ip^*(t, x, D)v(t) \rangle dt, \end{aligned}$$

wobei $p^*(t, x, D)$ den zu $p(t, x, D)$ adjungierten Operator bezeichnet. Der erste Teil lässt sich mittels partieller Integration umformen zu

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \partial_t u(t), v(t) \rangle dt &= \left\langle u(T), \underbrace{v(T)}_{=0} \right\rangle - \left\langle \underbrace{u(0)}_{=g}, v(0) \right\rangle - \int_0^T \langle u(t), \partial_t v(t) \rangle dt \\ &= -\langle g, v(0) \rangle - \int_0^T \langle u(t), \partial_t v(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} &\int_0^T \langle f(t), v(t) \rangle dt + \langle g, v(0) \rangle \\ &= \int_0^T \langle \partial_t u(t), v(t) \rangle + \langle u(t), ip^*(t, x, D)v(t) \rangle dt + \langle g, v(0) \rangle \\ &= \int_0^T \langle u(t), -\partial_t v(t) + ip^*(t, x, D)v(t) \rangle dt. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Setze jetzt $w(t) := v(T - t) \Rightarrow w(0) = v(T) = 0$.

Sei $s(t, x, D) := p^*(T - t, x, D)$. Dann folgt

$$\partial_t w(t) + is(t, x, D)w(t) = -\partial_t v(T - t) + ip^*(T - t, x, D)v(T - t).$$

Nach Voraussetzung ist $w \in D \subset C^\infty([0, T], H^s(\mathbb{R}^n)) \forall s$ und genügt daher den Voraussetzungen für die Energieabschätzung (2.6). Also gilt

$$\begin{aligned}
& \sup_{t \in [0, T]} e^{-kt} \|v(t)\|_{-s} = \sup_{t \in [0, T]} e^{-kt} \|w(t)\|_{-s} \\
& \leq 0 + 2 \int_0^T e^{-kt} \|\partial_t w(t) + ir(t, x, D)w(t)\|_{-s} dt \\
& = 2 \int_0^T e^{-kt} \|(-\partial_t v(t) + ip^*(T-t, x, D)v(t))\|_{-s} dt \\
& \stackrel{T-t \rightarrow t}{=} -2 \int_T^0 e^{-k(T-t)} \|\partial_t v(t) - ip^*(t, x, D)v(t)\|_{-s} (dt) \\
& = 2e^{-kT} \int_0^T \underbrace{e^{kt}}_{\leq e^{kT}} \|-\partial_t v(t) + ip^*(t, x, D)v(t)\|_{-s} dt \\
& \leq 2 \int_0^T \|-\partial_t v(t) + ip^*(t, x, D)v(t)\|_{-s} dt =: 2 \int_0^T \|h(t)\|_{-s} dt,
\end{aligned}$$

wobei $h(t) := -\partial_t v(t) + ip^*(t, x, D)v(t)$. Da $v \in D(\mathbb{R}^{n+1})$, sind alle beteiligten Integrale endlich. Also lässt sich $v(t)$ durch eine Sobolevnorm von $h(t)$ abschätzen. Das bedeutet

$$\sup_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_{-s} \leq 2e^{kT} \int_0^T \|h(t)\|_{-s} dt. \quad (2.11)$$

Auch $\int_0^T \langle u(t), h(t) \rangle dt$ lässt sich ebenfalls durch eine Sobolevnorm derselben Ordnung von $h(t)$ abschätzen:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^T \langle u(t), h(t) \rangle dt \right| \stackrel{(2.10)}{=} \left| \int_0^T \langle f(t), v(t) \rangle dt + \langle g, v(0) \rangle \right| \\
& \stackrel{1.7}{\leq} \int_0^T \|f(t)\|_s \|v(t)\|_{-s} dt + \|g\|_s \|v(0)\|_{-s}
\end{aligned}$$

$$\leq \sup_{t \in [0, T]} (\|v(t)\|_{-s}) \left(\int_0^T \|f(t)\|_s dt + \|g\|_s \right). \quad (2.12)$$

Der Übergang zum Supremum ist möglich, da v einen kompakten Träger hat und die Abbildung $t \rightarrow \|v(t)\|_{-s}$ stetig ist.

Da nach Voraussetzung $f \in L^1((0; t), H^s(\mathbb{R}^n))$ und $g \in H^s(\mathbb{R}^n)$ sind, muss $\int_0^T \|f(t)\|_s dt + \|g\|_s$ durch eine positive von s abhängige Konstante c nach oben beschränkt sein. Daraus folgt

$$\left| \int_0^T \langle u(t), h(t) \rangle dt \right| \leq c \sup_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_{-s} \stackrel{(2.11)}{\leq} C \int_0^T \|h(t)\|_{-s},$$

wobei $C := ce^{2kT}$.

Betrachte nun das Funktional η , das auf dem Bildraum B von $\partial_t + ip(t, x, D)$ folgendermaßen definiert sei:

$$B \subseteq L^1((0; T), H^s(\mathbb{R}^n)) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$h \rightarrow \eta(h) = \int_0^T \langle f(t), v(t) \rangle dt + \langle g, v(0) \rangle$$

η ist wohldefiniert, denn

$$\eta(0) \stackrel{(2.10)}{=} \int_0^T \langle u(t), 0 \rangle dt = 0.$$

η ist additiv, da sowohl innere Produkte als auch Integrale additiv sind. Desweiteren gilt wegen (2.10) $\eta(\mu h) = \bar{\mu} \eta(h)$. Wegen (2.12) ist außerdem $|\eta(h)|$ durch eine Sobolevnorm beschränkt. Also ist η ein stetiges konjugiert lineares Funktional. Damit sind die Voraussetzungen für den Fortsetzungssatz von Hahn-Banach erfüllt. Eine Formulierung sowie ein Beweis hierzu finden sich in [7], Satz 36.1. Daraus lässt sich schlussfolgern, dass sich das Funktional η , das auf einem Teilraum des normierten Raumes L^1 definiert ist, auf ganz L^1 erweiterbar ist. Dabei bleibt Abschätzung 2.11 gültig. Der Dualraum von $L^1(\mathbb{R}^n)$ ist der Raum $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, und der Dualraum von $H^s(\mathbb{R}^n)$ ist wegen Satz 1.7 der Raum $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$. In [12], Theorem 8.20 wird allgemein bewiesen, dass dann $(L^1((0, T), H^{-s}(\mathbb{R}^n)))' = L^\infty((0, T), H^s(\mathbb{R}^n))$ gefolgert werden kann. Also

$$\exists u \in (L^1((0; T), H^{-s}(\mathbb{R}^n)))' = L^\infty((0; T), H^s(\mathbb{R}^n)): \eta(h) = \int_0^T \langle u(t), h(t) \rangle dt.$$

Geht man die im Beginn des Beweises vollzogenen Rechnungen noch einmal durch, so sieht man unmittelbar, dass dieses u die Pseudodifferentialgleichung (2.9) im distributionellen Sinn löst, also

$$\int_0^T \langle \partial_t u(t) + ip(t, x, D)u(t), v(t) \rangle dt = \int_0^T \langle f(t), v(t) \rangle dt \quad \forall v \in D([0, T] \times \mathbb{R}^n).$$

Das bedeutet

$$\partial_t u + ip(t, x, D)u = f \quad \text{in } D'((0, T) \times \mathbb{R}^n).$$

Damit sind nur noch die im Theorem angegebenen Regularitäten zu zeigen. Sei dazu vorläufig $f \in S(\mathbb{R}^{n+1}) \subseteq L^1((0, T), H^s(\mathbb{R}^n))$. Nach Satz 1.18 impliziert $u \in L^\infty((0, T), H^s(\mathbb{R}^n))$, dass $p(t, x, D)u \in L^\infty((0, T), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))$ gelten muss. Deshalb folgt wegen $S \subseteq L^\infty((0, T), H^{s-1}(\mathbb{R}^n))$

$$\partial_t u = f - \underbrace{ip(t, x, D)u}_{\in L^\infty} \in L^\infty((0, T), H^{s-1}(\mathbb{R}^n)).$$

In [16], Theorem 9, wird gezeigt, dass daraus $u \in C([0, T], H^{s-1}(\mathbb{R}^n))$ folgt. Das bedeutet aber wegen Satz 1.18 wiederum $p(t, x, D)u \in C([0, T], H^{s-2}(\mathbb{R}^n))$. Daher ist $\partial_t u \in C([0, T], H^{s-2}(\mathbb{R}^n))$ und somit $u \in C^1([0, T], H^{s-2}(\mathbb{R}^n))$. Damit muss u auch die Energieabschätzung (2.6) erfüllen (ersetze dort s durch $s+2$).

Wähle nun für beliebiges $f \in L^1((0, T), H^s(\mathbb{R}^n)) \supseteq S(\mathbb{R}^{n+1})$ und $g \in H^s(\mathbb{R}^n) \supseteq S(\mathbb{R}^n)$ zwei Folgen $f_n \in S(\mathbb{R}^{n+1})$ bzw. $g_n \in S(\mathbb{R}^n)$, sodass

$$\int_0^T \|f(t) - f_n(t)\|_s dt \rightarrow 0 \quad \text{sowie} \quad \|g - g_n\|_s \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Zu jedem $f_n \in S(\mathbb{R}^{n+1})$ bzw. $g_n \in S(\mathbb{R}^n)$ erhält man ein $u_n \in C^1([0, T], H^{s+1}(\mathbb{R}^n))$, welches das Cauchyproblem

$$\begin{aligned} \partial_t u_n + ip(t, x, D)u_n &= f_n \\ u_n(0) &= g_n. \end{aligned} \tag{2.13}$$

löst. Für zwei beliebige hinreichend große natürliche Zahlen m und n gilt daher

$$\begin{aligned} \|\partial_t(u_n - u_m) + ip(t, x, D)(u_n - u_m)\| &= \|f_n - f_m\| \rightarrow 0 \\ \|u_n(0) - u_m(0)\| &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Wegen der Energieabschätzung (2.6) muss u_n eine Cauchyfolge im vollständigen Raum $C([0, T], H^s(\mathbb{R}^n))$ sein. Der Grenzwert u dieser Folge ist die gesuchte Lösung. $\square$

2.9 Korollar:

Falls im Cauchyproblem (2.4) die Daten $f = 0$ und $g \in H^\infty(\mathbb{R}^n)$ gegeben sind, ist die Lösung $u \in C^1([0, T], H^\infty(\mathbb{R}^n))$. Für festes $t \in [0, T]$ ist daher $u(t, \cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

Beweis: Da nach Voraussetzung für jedes $s \in \mathbb{R}$ die Energieabschätzung (2.6) gelten muss, folgt

$$\sup_{t \in [0, T]} e^{-kt} \|u(t)\|_s \leq \|g\|_s \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

Daher ist nach Theorem 2.8 $u \in C([0, T], H^\infty(\mathbb{R}^n))$ und wegen $f = 0$ folgt aus Satz 1.18

$$\partial_t u = -ip(t, x, D)u \in C([0, T], H^\infty(\mathbb{R}^n)) \Rightarrow u \in C^1([0, T], H^\infty(\mathbb{R}^n)). \square$$

Kapitel 3

Colombeau-Algebren

Dieses Kapitel gibt eine kurz gehaltene Einführung in die Theorie der Colombeau-Algebren. Der Grund für die Einführung dieser Funktionenalgebra war, dass bei der Multiplikation von Distributionen Widersprüche entstehen, wie ein Beispiel später zeigen wird, und daher eine Algebra etabliert werden musste, in der die Multiplikation den üblichen Regeln einer Differentialalgebra gehorcht und andererseits Distributionen darin eingebettet werden können. In dieser Arbeit wird nur auf die Definition und grundlegende Eigenschaften eingegangen, für weitere Informationen ist beispielsweise [1] oder [11] zu empfehlen.

3.1 Die Colombeualgebra

3.1 Definition:

Eine Differentialalgebra A ist eine Algebra von glatten Funktionen, auf der sich ein Differentialoperator ∂ mit folgenden Eigenschaften definieren lässt: Für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $f \in A$ sowie $g \in A$ gilt:

- (i) $\partial^\alpha f \in A$
- (ii) $\partial^\alpha(kf) = k\partial^\alpha f \quad \forall k \in \mathbb{R}$
- (iii) $\partial^\alpha(f + g) = \partial^\alpha f + \partial^\alpha g$ (Summenregel)
- (iv) $\partial^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \cdot \partial^{\alpha-\beta} g$ (Leibnizregel)

Das folgende Beispiel soll zeigen, dass die Distributionenräume S' und D' keine kommutative Differentialalgebra im Sinne der Definition 3.1 sein können.

3.2 Beispiel:

Betrachte in $\mathbb{R}$ die beiden temperierten Distributionen

$$H(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad (\text{Heavisidedistribution})$$

$$\delta : S \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in S \quad (\text{Deltadistributon}).$$

Sei $\varphi \in S$. Aus der Definition der Ableitung von Distributionen folgt (hier kann das reelle Skalarprodukt verwendet werden)

$$\langle H', \varphi \rangle = - \langle H, \varphi' \rangle = - \int_0^\infty \varphi'(x) dx = -\varphi(x)|_0^\infty = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

Damit gilt $H' = \delta$ im distributionellen Sinn.

Multipliziert man $H(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$ punktweise mit sich selbst, so ergibt sich $H^n = H \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Daher folgt unter Anwendung der Leibnizregel

$$\delta = H' = (H^2)' = 2HH' = 2H\delta \Rightarrow 2H\delta = \delta$$

und ebenso

$$2H\delta = (H^2)' = (H^3)' = 3H^2H' = 3H^2\delta = 3H\delta \Rightarrow H\delta = 0.$$

Bei Anwendung der üblichen Regeln für Differentiation und Multiplikation von $L^\infty(\mathbb{R})$ -Funktionen müsste damit $\delta = 0$ gelten, was aber nicht der Fall ist. Daher können in S' und analog in D' nicht alle Axiome einer Differentialalgebra gleichzeitig gültig sein. Dieses und einige weitere Beispiele finden sich in [3], Kapitel 1.

Dasselbe Problem bekommt man auch in $H^{-\infty}(\mathbb{R})$. Es gilt $\hat{1} = \delta$, weil

$$\langle \hat{1}, \varphi \rangle \stackrel{1.4(ii)}{=} \langle 1, \hat{\varphi} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi \cdot 0} \hat{\varphi}(\xi) d\xi = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

Wegen des Inversionssatzes 1.4 (i) muss $\hat{\delta} = (2\pi)^n$ sein. Daraus folgt $\delta \in H^s(\mathbb{R}) \quad \forall s < -\frac{1}{2}$, da $\lambda(\xi)^s \in L^2 \quad \forall s < -\frac{1}{2}$. Wegen Bemerkung 1.6 (iv) muss daher $H \in H^s(\mathbb{R}) \quad \forall s < \frac{1}{2}$ sein. Also sind H und δ jedenfalls $H^{-\infty}(\mathbb{R})$ -Distributionen. $\square$

3.3 Definition:

Seien $u_\epsilon \in H^\infty(X_T) \forall \epsilon \in I := (0, 1]$ mit $X_T := (0, T] \times \mathbb{R}^n$.

(i) Ein Netz $(u_\epsilon)_\epsilon$ solcher H^∞ -Funktionen heißt Regularisierung. (Grundlegendes über Netze findet der Leser beispielsweise in [14], Seite 249ff.)

(ii) Die Menge $E_{M,L^2}(X_T)$ der moderaten L^2 -Regularisierungen ist definiert durch

$$E_{M,L^2}(X_T) := \{(u_\epsilon)_\epsilon \in (H^\infty)^I : \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \exists p \geq 0 : \|\partial^\alpha u_\epsilon\|_0 = O(\epsilon^{-p})(\epsilon \rightarrow 0)\}.$$

Hierbei handelt es sich um jene Regularisierungen, die bezüglich der L^2 -Normen mitsamt ihren Ableitungen höchstens polynomial divergieren. Dabei darf p von der Ableitungsordnung α abhängen.

(iii) Die Menge $N_{L^2}(X_T)$ der L^2 -Nullregularisierungen ist definiert durch

$$N_{L^2}(X_T) := \{(u_\epsilon)_\epsilon \in E_{M,L^2}(X_T) : \forall q \geq 0 \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n : \|\partial^\alpha u_\epsilon\|_0 = O(\epsilon^q)(\epsilon \rightarrow 0)\}.$$

Die Nullregularisierungen sind also jene moderaten Regularisierungen, die zusammen mit ihren Ableitungen bezüglich der L^2 -Norm schneller als jedes Polynom gegen 0 gehen.

3.4 Definition:

Sei A eine Algebra und J eine Teilmenge von A , welche eine additive Untergruppe von A bildet. J heißt ein *Differentialideal* in A , wenn zusätzlich gilt:

(i) $\forall a \in A \forall j \in J$ folgt $aj \in J$ (Ideal)

(ii) $\partial^\alpha j \in J \forall j \in J$ Abseits von Differentialoperatoren können Ideale auch über Ringe definiert werden. Da mithilfe von (i) bereits eine Multiplikation in J definiert ist, muss ein Ideal in einer Algebra selbst eine Algebra sein.

3.5 Satz:

Definiert man alle Operationen in $E_{M,L^2}(X_T)$ und $N_{L^2}(X_T)$ komponentenweise für jedes ϵ , so wird

(i) $E_{M,L^2}(X_T)$ zu einer kommutativen Teildifferentialalgebra von $H^\infty(X_T)^I$

(ii) $N_{L^2}(X_T)$ zu einem Differentialideal in $E_{M,L^2}(X_T)$.

Beweis: (i) Die Gültigkeit von Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetzen für Addition und Multiplikation ist offensichtlich. Weiters übertragen sich alle Eigenschaften aus Definition 3.1 direkt durch deren Gültigkeit für H^∞ -Distributionen. Daher bleibt lediglich zu zeigen, dass die Moderattheitsabschätzungen auch für Summen und Produkte gültig sind.

Seien dazu $(u_\epsilon)_\epsilon \in E_{M,L^2}(X_T)$ und $(v_\epsilon)_\epsilon \in E_{M,L^2}(X_T)$. Es folgt $(u_\epsilon)_\epsilon + (v_\epsilon)_\epsilon \in E_{M,L^2}(X_T)$, weil

$$\|\partial^\alpha(u_\epsilon + v_\epsilon)\|_0 \leq \|\partial^\alpha u_\epsilon\|_0 + \|\partial^\alpha v_\epsilon\|_0 = O(\epsilon^{-p}) + O(\epsilon^{-q}) = O(\epsilon^{-\min(p,q)}).$$

Für die Multiplikation gilt

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha(u_\epsilon v_\epsilon)\|_0 &\stackrel{\text{Leibniz}}{=} \left\| \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta u_\epsilon \partial^{\alpha-\beta} v_\epsilon \right\|_0 \leq \\ &\sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \underbrace{\|\partial^\beta u_\epsilon\|_0}_{=O(\epsilon^{-p})} \underbrace{\|\partial^{\alpha-\beta} v_\epsilon\|_0}_{=O(\epsilon^{-q})} = O(\epsilon^{-p-q}). \end{aligned}$$

Die letzte Abschätzung gilt $\forall \beta \leq \alpha$, damit ist $(u_\epsilon)_\epsilon (v_\epsilon)_\epsilon \in E_{M,L^2}(X_T)$, was (i) beweist.

(ii) Sei $(u_\epsilon)_\epsilon \in E_{M,L^2}(X_T)$ sowie $(v_\epsilon)_\epsilon \in N_{L^2}(X_T)$. Es folgt direkt aus Definition 3.3, dass auch $\partial^\alpha(v_\epsilon)_\epsilon \in N_{L^2}(X_T) \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Eine leichte Modifikation obiger Rechnung ergibt

$$\|\partial^\alpha u_\epsilon v_\epsilon\|_0 \leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \underbrace{\|\partial^\beta u_\epsilon\|_0}_{=O(\epsilon^{-p})} \underbrace{\|\partial^{\alpha-\beta} v_\epsilon\|_0}_{=O(\epsilon^q) \forall q} = O(\epsilon^{-p+q}).$$

Diese Abschätzung muss von einem beliebigen nichtnegativen p und von allen nichtnegativen q erfüllt werden. Deshalb kann die Zahl $-p+q$ alle natürlichen Zahlen annehmen (wähle einfach $q = p+k$, um das Resultat für eine beliebige Ordnung $k \in \mathbb{N}_0$ zu beweisen). Somit ist (ii) gezeigt. $\square$

3.6 Beispiele:

(i) Sei $\epsilon \in (0, 1]$. Das Netz $(u_\epsilon)_\epsilon$ mit $u_\epsilon = \frac{1}{\epsilon^k} f(t, x)$ für $k > 0$ und $0 \neq f \in H^\infty(X_T)$ ist eine moderate Regularisierung, jedoch keine Nullregularisierung. Es gibt ein $C > 0$, sodass

$$\|\partial_x^\alpha u_\epsilon\|_0 \leq \frac{C}{\epsilon^k} = O(\epsilon^{-k}) \quad (\epsilon \rightarrow 0).$$

Damit erfüllt u_ϵ die Moderatheitsabschätzungen. Offensichtlich ist für positives k $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-k} = \infty$, womit es sich um keine Nullregularisierung handeln kann.

(ii) Sei $u_\epsilon = e^{-\frac{1}{\epsilon}} f(t, x)$ ($f(t, x, \cdot)$ wie vorher), dann ist u_ϵ eine Nullregularisierung. Denn es gilt

$$\|\partial_x^\alpha u_\epsilon\|_0 \leq C e^{-\frac{1}{\epsilon}}.$$

Um zu zeigen, dass $e^{-\frac{1}{\epsilon}}$ schneller als jedes Polynom konvergiert, kann man die Regel von l'Hospital verwenden. Sei dazu $q \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{\epsilon}}}{\epsilon^q} \stackrel{x=\epsilon^{-1}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{x^{-q}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^q}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q!}{e^x} = 0.$$

Desweiteren erfüllt u_ϵ die Moderatheitsabschätzungen für E_{M,L^2} , da

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{\epsilon}}}{\epsilon^{-p}} = 0 \quad \forall p \in \mathbb{N}_0.$$

Das ist richtig, weil der Zähler des Bruches gegen 0 und der Nenner gegen ∞ strebt. Also ist $(u_\epsilon)_\epsilon \in N_{L^2}$.

3.7 Definition: (Colombeau-Algebra)

Der Quotientenraum

$$G_{L^2}(X_T) := E_{M,L^2}(X_T)/N_{L^2}(X_T) \quad (3.1)$$

wird als L^2 -Colombeaualgebra bezeichnet. Die Objekte dieses Raums heißen verallgemeinerte Funktionen. Die in Gleichung (3.1) gegebene Definition stammt aus [4] und ist eine Abwandlung der ursprünglichen Definition der Colombeaualgebra, wie sie beispielsweise in [1] gegeben wird. Zwei verallgemeinerte Funktionen werden als gleich angesehen, falls ihre Differenz eine Nullregularisierung ist. Formal:

$$\forall u \in G_{L^2}(X_T) \quad \forall v \in G_{L^2}(X_T) \text{ gilt } u = v \Leftrightarrow u - v \in N_{L^2}.$$

Jede Klasse solcherart gleicher verallgemeinerter Funktionen ist eine Äquivalenzklasse und wird in der Form $[(u_\epsilon)_\epsilon]$ geschrieben. Ein Vertreter einer Äquivalenzklasse nennt man einen Repräsentanten.

3.8 Bemerkungen:

- (i) Da für jedes Netz $(u_\epsilon)_\epsilon \in E_{M,L^2}(X_T)$ auch $u_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ (Glattheit im abgeschlossenen Zeitintervall) ist, folgt, wie in [15] erläutert wird, dass $(u_\epsilon(0, \cdot))_\epsilon$ ein wohldefiniertes Element in $E_{M,L^2}(\mathbb{R}^n)$ ist.
- (ii) Sei $\rho \in S(\mathbb{R}^n)$ ein Glättungskern (englisch: mollifier) mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) dx = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^n} x^k \rho(x) dx = 0 \quad \forall k > 0.$$

Sei weiters $\rho_\epsilon(x) := \epsilon^{-n} \rho(\frac{x}{\epsilon})$. Dann kann mittels der Faltung

$$\iota(w) := [(w * (\rho_\epsilon))_\epsilon], \text{ wobei } w \in H^{-\infty}(\mathbb{R}^n) \quad (3.2)$$

der Distributionenraum $H^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ als Teilraum in $G_{L^2}(\mathbb{R}^n)$ eingebettet werden. Diese Einbettung macht $H^\infty(\mathbb{R}^n)$ zu einer Teilalgebra von $G_{L^2}(\mathbb{R}^n)$, d.h. $f \in H^\infty(\mathbb{R}^n)$ kann als Repräsentant von $[(f)_\epsilon]$ angesehen werden. Dieses Resultat wird in [15], Theorem 2.7(ii) bewiesen. Dasselbe funktioniert genauso für X_T statt $\mathbb{R}^n$.

3.9 Definition:

Unter einer regulären verallgemeinerten Funktion $u = [(u_\epsilon)_\epsilon]$ versteht man eine verallgemeinerte Funktion, deren Repräsentanten zusätzlich folgende Eigenschaft besitzen:

$$\exists p \geq 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n : \quad \|\partial_x^\alpha u_\epsilon\|_0 = O(\epsilon^{-p}) \quad (\epsilon \rightarrow 0). \quad (3.3)$$

Die Menge aller regulären verallgemeinerten Funktionen wird mit $G_{L^2}^\infty$ bezeichnet. Es ist zu beachten, dass diese Definition nicht identisch mit der Definition von E_{M,L^2} ist, die Stellung von p und α ist vertauscht.

Ist $u_\epsilon = w * \rho_\epsilon$ für ein $w \in H^\infty$, so erfüllt u_ϵ wegen $\partial_x^\alpha u_\epsilon = \partial_x^\alpha w * \rho_\epsilon$ die Abschätzung (3.3) für $p = 0$.

3.2 Verallgemeinerte Pseudodifferentialsymbole

3.10 Notation:

Sei $p \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{R}$, $\lambda(\xi) = \sqrt{1 + |\xi|^2}$ und $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}_0^{2n}$. Definiere nun folgende Halbnormen:

$$c_{\alpha,\beta}^m(p) := \sup_{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}} \lambda(\xi)^{|\alpha|-m} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x, \xi)| \quad (3.4)$$

$$q_{k,l}^m(p) := \max_{|\alpha| \leq k, |\beta| \leq l} c_{\alpha,\beta}^m(p). \quad (3.5)$$

Diese Halbnormen sind endlich, falls p ein Symbol der Ordnung m ist. Handelt es sich ferner um ein in der Zeitvariable glattes Symbol, also $p(t, x, \xi)$ mit $p \in C^\infty([0, T], S^m)$, so definiere die Halbnormen

$$Q_{j,k,l}^m(p) := \max_{0 \leq i \leq j} \sup_{t \in [0, T]} q_{k,l}^m(\partial_t^i p(t, \cdot, \cdot)). \quad (3.6)$$

Diese Halbnormen werden im vierten Kapitel abgeschätzt.

3.11 Definition:

Sei $\epsilon \in (0, 1]$. Unter einem verallgemeinerten Symbol der Ordnung m versteht man ein Netz $(p_\epsilon)_\epsilon$ mit $p_\epsilon \in S^m(\mathbb{R}^n)$ und

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \forall l \in \mathbb{N}_0 \exists N \in \mathbb{N}_0, \text{ sodass } q_{k,l}^m(p_\epsilon) = O(\epsilon^{-N}) \quad (\epsilon \rightarrow 0). \quad (3.7)$$

Ein verallgemeinertes Symbol mit Parameter t ist eine Familie $(p_\epsilon(t, x, \xi))_\epsilon$ mit $p_\epsilon \in C^\infty([0, T], S^m)$, deren Halbnormen die Moderatheitsabschätzungen

$$\forall j \in \mathbb{N}_0 \forall k \in \mathbb{N}_0 \forall l \in \mathbb{N}_0 \exists N \in \mathbb{N}_0, \text{ sodass } Q_{j,k,l}^m(p_\epsilon) = O(\epsilon^{-N}) \quad (\epsilon \rightarrow 0) \quad (3.8)$$

erfüllen.

Ein Beispiel dieser Symbolklasse erhält man leicht, indem man $p_\epsilon = \frac{p(t, x, \xi)}{\epsilon^N}$ für ein beliebiges $p \in C^\infty([0, T], S^m)$ wählt, da (3.8) direkt aus der Symboldefinition folgt.

3.12 Definition:

Sei $(u_\epsilon)_\epsilon \in E_{M,L^2}(X_T)$ sowie $p_\epsilon \in C^\infty([0, T], S^m)$. Die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} P : G_{L^2}(X_T) &\rightarrow G_{L^2}(X_T) \\ (u_\epsilon)_\epsilon &\rightarrow (p_\epsilon(t, x, D)u_\epsilon)_\epsilon \end{aligned}$$

wird als verallgemeinerter Pseudodifferentialoperator der Ordnung m mit dem zugehörigen verallgemeinerten Symbol $(p_\epsilon(t, x, \xi))_\epsilon$ bezeichnet. Für festes $\epsilon \in (0, 1]$ entspricht dieser Operator dem in Kapitel 1, Definition 1.14 definierten klassischen Pseudodifferentialoperator. Wegen Satz 1.18 und aufgrund der Glattheit in t gilt für jedes feste $\epsilon \in (0, 1]$

$$\exists c > 0 : \quad \|p_\epsilon(t, x, D)u_\epsilon\|_0 \leq c_\epsilon \|u_\epsilon\|_m.$$

Die Konstante c_ϵ ist selbst moderat, falls $(p_\epsilon(t, x, \xi))_\epsilon$ moderat ist. Das lässt sich beispielsweise durch eine Analyse des Beweises von [9], Satz 2.7 verifizieren. Damit folgt für die Operatornormen von $p_\epsilon(t, x, D)$

$$\exists (j, k, l) \in \mathbb{N}_0^3 \quad \|\partial_t^j \partial_x^k p_\epsilon(t, x, D)\|_{Op} \leq Q_{j,k,l}^m(p_\epsilon).$$

Daher übertragen sich die Moderatheitsabschätzungen direkt von u_ϵ auf $p_\epsilon u_\epsilon$. Das bedeutet, dass sowohl moderate Regularisierungen in moderate Regularisierungen als auch Nullregularisierungen in Nullregularisierungen abgebildet werden. Damit ist der zugehörige Operator P auf jeder Äquivalenzklasse $[(u_\epsilon)_\epsilon]$ wohldefiniert.

Kapitel 4

Das verallgemeinerte Cauchyproblem

Analog zu Kapitel 2 wird es erneut um das Cauchyproblem für einen hyperbolischen Operator erster Ordnung gehen, diesmal allerdings in verallgemeinerter Form. Konkret widmet sich dieses Kapitel dem folgenden Problem, welches ebenso wie der Existenzsatz für die Lösbarkeit in [4] zu finden ist. Die dortigen Beweismethoden haben wesentlichen Einfluss auf die Bearbeitung dieses Kapitels.

$$\begin{aligned}\partial_t u + iP u &= f \text{ in } X_T := \mathbb{R}^n \times (0, T] \\ u(0) &= g.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Hierbei ist

$$\begin{aligned}P : G_{L^2}(X_T) &\rightarrow G_{L^2}(X_T) \\ [(u_\epsilon)_\epsilon] &\rightarrow [(ip_\epsilon(t, x, D)u_\epsilon)_\epsilon].\end{aligned}$$

ein verallgemeinerter Pseudodifferentialoperator 1. Ordnung, dessen verallgemeinertes Symbol (1. Ordnung) mit Parameter $t \in [0, T]$ durch $(p_\epsilon(t, x, D))_\epsilon$ gegeben ist. Die Daten sind $f \in G_{L^2}(X_T)$ sowie $g \in G_{L^2}(\mathbb{R}^n)$.

Damit es sich bei $Q := \partial_t + iP$ um einen verallgemeinerten hyperbolischen Operator handelt, muss analog zu Definition 2.2 zusätzlich angenommen werden, dass $\exists p_{1,\epsilon} \in C^\infty([0, T], S^1)$ reellwertig und $\exists p_{0,\epsilon} \in C^\infty([0, T], S^0)$ mit

$$p_\epsilon = p_{1,\epsilon} + p_{0,\epsilon} \quad \forall \epsilon \in (0, 1].\tag{4.2}$$

Unter der Annahme der Stetigkeit in der Zeitvariable t lässt sich die Berechnung des adjungierten Operators in Abschnitt 1.13 analog für $p_\epsilon(t, x, D)$ durchführen. Wegen $p_{1,\epsilon} = \overline{p_{1,\epsilon}}$ ist (4.2) in Analogie zur Definition 2.2 äquivalent zu der Annahme

$$p_\epsilon(t, x, D) - p_\epsilon(t, x, D)^* \in C^\infty([0, T], S^0).\tag{4.3}$$

Bevor Aussagen über die Lösbarkeit von (4.1) gemacht werden können, muss zur Vorbereitung eine zum Ergebnis in Kapitel 2 ähnliche Energieabschätzung gezeigt werden. Zur Vorbereitung darauf werden zwei Ungleichungen, die im folgenden gebraucht werden, bewiesen.

4.1 Lemma: (*Ungleichung von Peetre*)

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ gilt } \left(\frac{1 + |x|^2}{1 + |y|^2} \right)^t \leq 2^{|t|} (1 + |x - y|^2)^{|t|}$$

Beweis: Durch Setzen von $x - y = z$ ist diese Ungleichung äquivalent zu

$$\left(\frac{1 + |y + z|^2}{1 + |y|^2} \right)^t \leq 2^{|t|} (1 + |z|^2)^{|t|}.$$

Außerdem muss wegen $|x - y| = |y - x|$ die Ungleichung richtig bleiben, wenn man auf der linken Seite den Kehrwert bildet. Die Anwendung elementarer Rechenregeln sowie der Ungleichung von Cauchy-Schwarz liefert

$$\begin{aligned} 1 + |y + z|^2 &= 1 + |y|^2 + |z|^2 + 2 \langle y, z \rangle \leq 1 + |y|^2 + |z|^2 + 2|y||z| \\ &\leq 1 + 2|y|^2 + 2|z|^2 \leq 2 + 2|y|^2 + 2|z|^2 + 2|y|^2|z|^2 = 2(1 + |y|^2)(1 + |z|^2). \end{aligned}$$

Durch Umformung und Rücksubstitution $x = y + z$ ergibt sich

$$\frac{1 + |x|^2}{1 + |y|^2} \leq 2(1 + |x - y|^2).$$

Für $t > 0$ kann wegen der Monotonie der Potenzfunktion direkt auf die Gültigkeit der Ungleichung geschlossen werden. Für $t < 0$ ist $|t| = -t > 0$ und es folgt

$$\left(\frac{1 + |x|^2}{1 + |y|^2} \right)^t = \left(\frac{1 + |y|^2}{1 + |x|^2} \right)^{-t} \leq 2^{|t|} (1 + |x - y|^2)^{|t|}. \square$$

4.2 Ungleichung von Gronwall:

Seien $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sowie $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ stetig, sodass

$$u(t) \leq v(t) + \int_a^t w(s)u(s)ds.$$

Dann folgt $\forall t \in [a, b]$

$$u(t) \leq v(t) + \int_a^t v(s)w(s) \exp\left(\int_s^t w(\sigma)d\sigma\right)ds. \quad (4.4)$$

Ist zusätzlich v monoton wachsend, verschärft sich die Ungleichung zu

$$u(t) \leq v(t) \exp\left(\int_a^t w(\sigma)d\sigma\right). \quad (4.5)$$

Beweis: Setze $y(t) = \exp\left(-\int_a^t w(\sigma)d\sigma\right) \int_a^t w(s)u(s)ds$. Diese Funktion ist als Parameterintegral differenzierbar. Nach Verwendung von Kettenregel, Produktregel und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt

$$\begin{aligned} y'(t) &= \exp\left(-\int_a^t w(\sigma)d\sigma\right)(-w(t)) \int_a^t w(s)u(s)ds + w(t)u(t) \exp\left(-\int_a^t w(\sigma)d\sigma\right) \\ &= w(t) \exp\left(-\int_a^t w(\sigma)d\sigma\right) \underbrace{\left(u(t) - \int_a^t w(s)u(s)ds\right)}_{\leq v(t)} \leq v(t)w(t) \exp\left(-\int_a^t w(\sigma)d\sigma\right). \end{aligned}$$

Nun wird die entstandene Ungleichung von a bis t integriert, wobei das Relationszeichen erhalten bleibt.

$$\int_a^t y'(s)ds = y(t) - \underbrace{y(a)}_{=0} \leq \int_a^t v(s)w(s) \exp\left(-\int_a^s w(\sigma)d\sigma\right)ds \quad (*) .$$

Damit folgt aus (*), dass

$$u(t) - v(t) \leq \int_a^t w(s)u(s)ds = y(t) \exp\left(\int_a^t w(\sigma)d\sigma\right)$$

$$\stackrel{(*)}{\leq} \int_a^t v(s)w(s) \exp\left(-\int_a^s w(\sigma)d\sigma\right) \exp\left(\int_a^t w(\sigma)d\sigma\right) = \int_a^t v(s)w(s) \exp\left(\int_s^t w(\sigma)d\sigma\right),$$

was (4.4) beweist. Sei nun v eine monoton wachsende Funktion, d.h. $v(s) \leq v(t) \forall s \leq t$. Dann folgt

$$\begin{aligned} u(t) &\stackrel{(4.4)}{\leq} v(t) + \int_a^t \underbrace{v(s)}_{\leq v(t)} w(s) \exp\left(\int_s^t w(\sigma)d\sigma\right) ds \\ &\leq v(t) \left(1 + \int_a^t w(s) \exp\left(\int_s^t w(\sigma)d\sigma\right) ds\right) \\ &= v(t) \left(1 + \int_a^t \left(-\exp\left(\int_s^t w(\sigma)d\sigma\right)\right)'(s) ds\right) \\ &= v(t) \left(1 - \exp\left(\int_t^t w(\sigma)d\sigma\right) + \exp\left(\int_a^t w(\sigma)d\sigma\right)\right) = v(t) \exp\left(\int_a^t w(\sigma)d\sigma\right). \end{aligned}$$

Damit ist auch (4.5) gezeigt. $\square$

4.1 Die Energieabschätzung

4.3 Satz:

Sei $Q := \partial_t + ip(t, x, D)$ mit $p \in C^\infty([0, T], S^1)$. Darüberhinaus erfülle für $\epsilon \in (0, 1]$ das zugehörige Symbol $p_\epsilon(t, x, \xi)$ die Hyperbolizitätsannahme (4.2) bzw. (4.3). Sei weiters $u \in C([0, T], H^1(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, T], H^0(\mathbb{R}^n))$. Dann ist $f := Qu \in C([0, T], H^0(\mathbb{R}^n))$ und es gibt ein positives C , sodass die Energieabschätzung

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_0^2 &\leq \|u(0)\|_0^2 + \int_0^t \|f(\tau)\|_0^2 d\tau + C(1 + Q_{0, k'_n, l'_n}^0(p_0) \\ &\quad + Q_{0, k_n, l_n}^1(p_1) \int_0^t \|u(\tau)\|_0^2 d\tau \end{aligned} \tag{4.6}$$

gilt. Die Konstanten C, k_n, l_n, k'_n, l'_n sind unabhängig von u und hängen nur von der Dimension n ab. Im Detail kann, wie sich im Beweis herausstellen wird,

$$k_n = 2n + 4, \quad l_n = 3\left(\frac{n}{2} + 1\right), \quad k'_n = l'_n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$$

gewählt werden.

4.4 Bemerkung:

Falls $p(t, x, \xi) \in \mathbb{R}$, kann der Term $Q_{0, k'_n, l'_n}^0(p_0)$ in (4.6) weggelassen werden.

Beweis (4.3): Zerlege den reellwertigen Anteil in $p_1 = \frac{p_1 + p_1^*}{2} + \frac{p_1 - p_1^*}{2}$. Der erste Summand ist daher selbstadjungiert. Für die Ableitung der Sobolevnorm gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_0^2 &= 2\Re \langle \partial_t u(t), u(t) \rangle = \\ &= 2\Re \langle f(t), u(t) \rangle - 2\Re \langle ip(t, x, D)u(t), u(t) \rangle \stackrel{\Re(iz) = -\Im(z)}{=} \\ &= 2\Re \langle f(t), u(t) \rangle + 2\Im \langle p(t, x, D)u(t), u(t) \rangle = \\ &= 2\Re \langle f(t), u(t) \rangle + 2\Im \langle p_0(t, x, D)u(t), u(t) \rangle + \\ &\quad \Im \langle (p_1 + p_1^*)(t, x, D)u(t), u(t) \rangle + \Im \langle (p_1 - p_1^*)(t, x, D)u(t), u(t) \rangle \quad (*). \end{aligned}$$

Da für reellwertiges $p(t, x, \xi)$ klarerweise $\Im \langle p_0(t, x, D)u(t), u(t) \rangle = 0$ ist, ist damit Bemerkung (4.4) erledigt.

Da weiters für selbstadjungierte Operatoren A die quadratische Form $\langle Ax, x \rangle$ stets reellwertig ist (siehe [7], Satz 29.4), ist

$\Im \langle (p_1 + p_1^*)(t, x, D)u(t), u(t) \rangle = 0$. Durch Anwenden der binomischen Formel auf den ersten Term und der Ungleichung von Cauchy-Schwarz auf die restlichen Terme von (*) ergibt sich die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_0^2 &\leq \|f(t)\|_0^2 + \|u(t)\|_0^2 + 2\|p_0(t, x, D)\|_{Op} \|u(t)\|_0^2 \\ &\quad + \|(p_1 - p_1^*)(t, x, D)\|_{Op} \|u(t)\|_0^2 \Rightarrow \\ \frac{d}{dt} \|u(t)\|_0^2 &\leq \|f(t)\|_0^2 + (1 + 2\|p_0(t, x, D)\|_{Op} + \|(p_1 - p_1^*)(t, x, D)\|_{Op}) \|u(t)\|_0^2. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Hierbei ist mit $\|\cdot\|_{Op}$ die L^2 -Operatornorm gemeint. Die beiden oben auftretenden Operatornormen sind endlich, da ihre Symbole nach Voraussetzung bzw. Annahme (4.3) Ordnung 0 haben. Ein allgemeiner Beweis hierzu findet sich in [6], Theorem 18.1.11.

Als nächstes werden diese Operatornormen abgeschätzt. Sei dazu $b_1(t, x, D) := p_1(t, x, D) - p_1(t, x, D)^*$. In weiterer Folge wird auf die explizite Angabe der Zeitabhängigkeit verzichtet, da aufgrund der Stetigkeit in der Zeit für jedes $t \in [0, T]$ eine gleichmäßige Abschätzung gilt. Laut Abschnitt 1.13 hat die Adjungierte $p_1^*(t, x, D)$ die Form

$$p_1(x, D)^* u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\eta(x-y)} \overline{p_1(y, \eta)} u(y) dy d\eta$$

$$= (2\pi)^{-2n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\eta(x-y)+i\xi y} \overline{p_1(y, \eta)} \hat{u}(\xi) d\xi dy d\eta.$$

Dieses Integral ist im oszillatorischen Sinne konvergent (siehe [5], Theorem 2.23) und kann nach Anwendung des Satzes von Fubini mit Hilfe der Transformation $\eta \rightarrow \eta + \xi$ in der Form

$$(2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} \hat{u}(\xi) \underbrace{(2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\eta(x-y)} \overline{p_1(y, \eta + \xi)} dy d\eta}_{:= p_1^*(x, \xi)} d\xi$$

geschrieben werden. Nach dem Satz von Taylor mit dem Restglied in Integralform mit dem Entwicklungsmittelpunkt ξ ist

$$\overline{p_1(y, \xi + \eta)} = \overline{p_1(y, \xi)} + \int_0^1 \eta \partial_\xi \overline{p_1(y, \xi + \theta\eta)} d\theta.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} (2\pi)^n p_1^*(x, \xi) &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\eta(x-y)} \overline{p_1(y, \eta + \xi)} dy d\eta \stackrel{\text{Taylor} + \text{Fubini}}{=} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\eta(x-y)} \overline{p_1(y, \xi)} dy d\eta + \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} (e^{i\eta(x-y)}) \eta \partial_\xi \overline{p_1(y, \xi + \theta\eta)} dy d\eta d\theta \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\eta x} \overline{F(p_1(y, \xi))(\eta)} d\eta + \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} i \partial_y (e^{i\eta(x-y)}) \partial_\xi \overline{p_1(y, \xi + \theta\eta)} dy d\eta d\theta \\ &= (2\pi)^n \overline{p_1(x, \xi)} + (2\pi)^{-n} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} i \partial_y (e^{i\eta(x-y)}) \partial_\xi \overline{p_1(y, \xi + \theta\eta)} dy d\eta d\theta. \end{aligned}$$

Integriert man den letzten Term partiell nach der ersten Variable, so ergibt sich

$$\begin{aligned} p_1^*(x, \xi) &= \overline{p_1(x, \xi)} + (2\pi)^{-n} i \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\eta(x-y)} \partial_x \partial_\xi \overline{p_1(y, \xi + \theta\eta)} dy d\eta d\theta \stackrel{y \rightarrow x+y}{=} \\ &= \overline{p_1(x, \xi)} + (2\pi)^{-n} i \underbrace{\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\eta y} \partial_x \partial_\xi \overline{p_1(x+y, \xi + \theta\eta)} dy d\eta d\theta}_{:= r_\theta(t, x, \xi)}. \end{aligned}$$

Also hat das Symbol des Operators $b_1(t, x, D)$ wegen $p_1(t, x, \xi) - \overline{p_1(t, x, \xi)} = 0$ die Darstellung

$$b_1(t, x, \xi) = -i \int_0^1 r_\theta(t, x, \xi) d\theta \quad (4.8)$$

Zur Abschätzung von r_θ benötigen wir folgende Regel:

4.5 Lemma:

$$\forall y \in \mathbb{R}^n \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^n \quad \forall \mu \in \mathbb{N} \quad \text{gilt} \quad \left(\frac{1 - \Delta_\eta}{1 + |y|^2} \right)^\mu (e^{-i\eta y}) = e^{-i\eta y}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \Delta_\eta(e^{-i\eta y}) &= \nabla(\nabla_\eta(e^{-i\eta y})) = \nabla_\eta(e^{-i\eta y}(-i\mathbf{y})) = e^{-i\eta y}(-|y|^2) \quad . \Rightarrow \\ (1 - \Delta_\eta)(e^{-i\eta y}) &= (1 + |y|^2)(e^{-i\eta y}) \quad . \Rightarrow \\ (1 - \Delta_\eta)^\mu(e^{-i\eta y}) &= (1 + |y|^2)^\mu(e^{-i\eta y}). \end{aligned}$$

Division durch den von η unabhängigen Faktor $(1 + |y|^2)$ liefert das gewünschte Ergebnis. $\square$

Wegen Lemma 4.5 lässt sich $r_\theta(t, x, \xi)$ in der Form

$$(2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\eta y} \underbrace{(1 + |y|^2)^{-\mu} (1 - \Delta_\eta)^\mu (\partial_x \partial_\xi \overline{p_1(t, x + y, \xi + \theta\eta)})}_{:= s_\theta(t, x, \xi; y, \eta)} dy d\eta$$

schreiben, wobei s_θ für $\mu > \frac{n}{2}$ L^1 -integrierbar ist. Nun gilt $\forall t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta s_\theta(t, x, \xi; y, \eta)| &= |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta [(1 + |y|^2)^{-\mu} (1 - \Delta_\eta)^\mu (\partial_x \partial_\xi \overline{p_1(t, x + y, \xi + \theta\eta)})]|. \\ &= (1 + |y|^2)^{-\mu} |\partial_x^{\alpha+1} \partial_\xi^{\beta+1} (1 - \Delta_\eta)^\mu p_1(t, x + y, \xi + \theta\eta)|. \end{aligned}$$

Die höchsten vorkommenden Ableitungsordnungen sind $|\alpha| + 1$ in der ersten und wegen des Laplace-Operators $|\beta| + 1 + 2\mu$ in der zweiten Variable. Da nach Voraussetzung $p_1(t, x, \xi) \in S^1(\mathbb{R}^n) \quad \forall t \in [0, T]$ und keine t-Ableitungen vorkommen, ergibt sich für s_θ hinsichtlich der Definition der Q-Halbnormen in 3.10 die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta s_\theta| &\leq c_{n, \alpha, \beta} Q_{0, |\alpha|+1, |\beta|+1+2\mu}^1(p_1) (1 + |y|^2)^{-\mu} (1 + |\xi + \theta\eta|^2)^{\frac{1-1-|\beta|-2\mu}{2}} \\ &\stackrel{\mu > \frac{n}{2} > 0}{\leq} c_{n, \alpha, \beta} Q_{0, |\alpha|+1, |\beta|+1+2\mu}^1(p_1) (1 + |y|^2)^{-\mu} (1 + |\xi + \theta\eta|^2)^{-\frac{|\beta|}{2}}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Die Konstante $c_{n,\alpha,\beta}$ ist unabhängig von $\theta \in [0, 1]$. Zur Abschätzung von $r_\theta(t, x, \xi)$ wird das Integral in 2 Teile zerlegt, wobei sich der erste Teil leicht zu behandeln ist und beim zweiten Teil partielle Integration und die Ungleichung von Peetre verwendet wird. Also schreibe

$$\begin{aligned} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta r_\theta(t, x, \xi) &= (2\pi)^{-n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{|\eta| \leq \frac{|\xi|}{2}} e^{-i\eta y} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta s_\theta(t, x, \xi; y, \eta) dy d\eta \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|\eta| \geq \frac{|\xi|}{2}} e^{-i\eta y} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta s_\theta(t, x, \xi; y, \eta) dy d\eta \right) := I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Falls $|\eta| \leq \frac{|\xi|}{2}$, folgt für jedes $\theta \in [0, 1]$

$$|\xi + \theta\eta| \geq |\xi| - \theta|\eta| \geq |\xi| - |\eta| \geq |\xi| - \frac{|\xi|}{2} = \frac{|\xi|}{2}.$$

Damit folgt aus Gleichung (4.9) wegen des negativen Exponenten von $1 + |\xi + \theta\eta|^2$ unter Berücksichtigung, dass $|e^{-i\eta y}| = 1$,

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|\eta| \leq \frac{|\xi|}{2}} c_{n,\alpha,\beta} Q_{0,|\alpha|+1,|\beta|+1+2\mu}^1(p_1) (1 + |y|^2)^{-\mu} \left(1 + \frac{|\xi|^2}{4}\right)^{-\frac{\beta}{2}} dy d\eta \\ &\leq^{2\mu > n} c_{n,\alpha,\beta} Q_{0,|\alpha|+1,|\beta|+2+n}^1(p_1) \lambda(\xi)^{-\beta}. \end{aligned}$$

Wegen Lemma 4.5 ist $(\Delta_y)^d (e^{-i\eta y}) = (-i)^d |\eta|^{2d} (e^{-i\eta y})$. Damit ergibt sich durch 2d-fache partielle Integration

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|\eta| \geq \frac{|\xi|}{2}} \frac{(\Delta_y)^d}{|\eta|^{2d}} (e^{-i\eta y}) |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta s_\theta(t, x, \xi; y, \eta)| dy d\eta \stackrel{\text{part. Int.}}{=} \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|\eta| \geq \frac{|\xi|}{2}} \overbrace{\frac{|e^{-i\eta y}|}{|\eta|^{2d}}}^{=1} |(\Delta_y)^d (\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta s_\theta(t, x, \xi; y, \eta))| dy d\eta \stackrel{(4.9)}{\leq} \\ &\quad c_{n,\alpha,\beta,k,\mu} Q_{0,|\alpha|+1+2d,|\beta|+1+2\mu}^1(p_1) \int_{|\eta| \geq \frac{|\xi|}{2}} \frac{(1 + |\xi + \theta\eta|^2)^{-\frac{\beta}{2}}}{|\eta|^{2d}} dy d\eta \stackrel{4.1}{\leq} \\ &\quad c_{n,\alpha,\beta} Q_{0,|\alpha|+1+2d,|\beta|+2+n}^1(p_1) \int_{|\eta| \geq \frac{|\xi|}{2}} \frac{2^{\frac{|\beta|}{2}}}{|\eta|^{2d}} (1 + |\theta\eta|^2)^{\frac{|\beta|}{2}} (1 + |\xi|^2)^{-\frac{|\beta|}{2}} d\eta. \end{aligned}$$

Damit das letzte Integral endlich ist, muss $2d > n + |\beta|$ sein. In diesem Fall ergibt sich

$$|I_2| \leq c_{n,\alpha,\beta} Q_{0,|\alpha|+|\beta|+2+n,|\beta|+2+n}^1(p_1) \lambda(\xi)^{-|\beta|}.$$

Fasst man die letzten Rechnungen zusammen, so ist r_θ mitsamt allen Ableitungen gleichmäßig in $\theta \in [0, 1]$ abgeschätzt und es folgt $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}_0^{2n} \forall c \in \mathbb{N}_0$

$$|\partial_t^c \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta r_\theta(t, x, \xi)| \leq C_{c,\alpha,\beta} Q_{c,|\alpha|+|\beta|+2+n,|\beta|+2+n}^1(p_1) \lambda(\xi)^{-|\beta|}.$$

Beachtet man noch, dass nach Definition der Q-Seminormen $|\alpha| \leq k$ und $|\beta| \leq l$ sein muss, lässt sich obige Zeile in der Form

$$\|b_1(t, x, D)\|_{Op} \leq C_{k,l} Q_{0,k+l+2+n,k+2+n}^1(p_1) \quad (4.10)$$

für ein positives $C_{k,l}$ schreiben.

Zur Abschätzung von p_0 lässt sich der Satz von Calderon-Vaillancourt in der Version, wie er in [10], Chapter 3, Corollary 1.3 formuliert wird, heranziehen. Dort wird gezeigt, dass

$$\|p_0\| \leq C'_n Q_{0, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^0(p_0). \quad (4.11)$$

Betrachtet man (4.7), (4.10) und (4.11) und die Tatsache, dass aufgrund der Voraussetzungen an b_1 und p_0

$$Q_{0,k,l}^0(b_1 + 2p_0) \leq C_{k,l} Q_{0,k+l+2+n,k+2+n}^1(p_1) + 2Q_{0,k,l}^0(p_0)$$

gelten muss, so sieht man, dass als Mindestordnungen $k = l = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ gewählt werden können. Wie man sich durch elementares Rechnen überzeugen kann, ist

$$n + 2 + 2(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1) \leq 2(n + 2) \text{ sowie } n + 2 + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq 3(\frac{n}{2} + 1).$$

Zusammenfassend ergibt das

$$1 + 2\|p_0(t, x, D)\|_{Op} + \|(p_1 - p_1^*)(t, x, D)\|_{Op} \leq C_n(1 + Q_{0,k'_n,l'_n}^0(p_0) + Q_{0,k_n,l_n}^1(p_1)),$$

wobei $k'_n = l'_n = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ und $k_n = 2n + 4$, $l_n = 3(\frac{n}{2} + 1)$ gewählt werden können. Durch Integration der Ungleichung (4.7) von 0 bis t erhält man

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_0^2 - \|u(0)\|_0^2 &\leq \int_0^t \|f(\tau)\|_0^2 d\tau + \\ &+ C(1 + Q_{0,k'_n,l'_n}^0(p_0) + Q_{0,k_n,l_n}^1(p_1)) \int_0^t \|u(\tau)\|_0^2 d\tau, \end{aligned}$$

was nichts anderes als das zu zeigende Resultat ist. $\square$

4.6 Satz:

Seien Q und u wie in Satz 4.3. Zusätzlich sei das Symbol p für große x konstant, d.h. $\exists r \geq 0$, sodass $p(t, x, \xi) = h(t, \xi) \forall |x| \geq r$. Dann kann in der Energieabschätzung (4.6) $k_n = n + 2$, $l_n = 1$, $k'_n = n + 1$ und $l'_n = 0$ gewählt werden.

Beweis: Sei $\chi \in D(\mathbb{R}^n)$ eine Abschneidefunktion (englisch: cut-off) mit $0 \leq \chi \leq 1$ und $\chi(x) = 1$ für $|x| < r$. Derartige Funktionen gibt es, in [3], 0.31 wird eine Konstruktionsanleitung gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} p(t, x, \xi) - \overline{p(t, x, \xi)} &= p_0(t, x, \xi) - \overline{p_0(t, x, \xi)} = \\ &= \underbrace{\chi(x)(p_0(t, x, \xi) - \overline{p_0(t, x, \xi)})}_{:=b_0(t, x, \xi)} + (1 - \chi(x)) \underbrace{(h(t, \xi) - \overline{h(t, \xi)})}_{:=h_0(t, \xi)}. \end{aligned}$$

Diese Darstellung ist korrekt, da für $|x| \leq r$ nur der erste Term auftritt und für $|x| \geq r$ sich die Terme, an denen $\chi(x)$ beteiligt ist, aufheben. Nach Voraussetzung gilt $h_0 \in S^0(\mathbb{R}^n)$. Damit ist die L^2 -Operatornorm des zweiten Terms beschränkt und es folgt

$$\|(1 - \chi(x))h_0(t, D)\|_{Op} \leq \underbrace{\|1 - \chi(x)\|_{L^\infty}}_{\leq 1} \|h_0\|_{L^\infty} \leq 2\|p_0\|_{L^\infty}.$$

Der letzte Teil der Ungleichung folgt aus der Dreiecksungleichung.

Das Symbol b_0 ist ebenfalls von Ordnung 0. Sei $B_0 := b_0(t, x, D)$ und sei $\tilde{B}_0 := F \circ B_0 \circ F^{-1}$, wobei F die Fouriertransformierte und F^{-1} ihre Inverse ist. Aufgrund des Inversionssatzes 1.4 (i) gilt $\|\tilde{B}_0\|_{Op} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|B_0\|_{Op}$. Nun wird der Kern dieses „fouriertransformierten“ Operators berechnet. Sei dazu $f \in S'$. Es folgt

$$\begin{aligned} \tilde{B}_0 f(t, \xi) &= F \circ B_0 \circ F^{-1} f(t, \xi) = F((2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\eta x} b_0(t, x, \eta) F(F^{-1} f)(\eta) d\eta) \\ &= F((2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\eta x} b_0(t, x, \eta) f(\eta) d\eta) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x} e^{i\eta x} b_0(t, x, \eta) f(\eta) d\eta dx, \end{aligned}$$

was nach dem Satz von Fubini umgeformt werden kann zu

$$= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\xi-\eta)x} b_0(t, x, \eta) dx \right) f(\eta) d\eta.$$

Daher hat der Integralkern $\tilde{K}_0$ die Form

$$\tilde{K}_0(t, \xi, \eta) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\xi-\eta)x} b_0(t, x, \eta) dx = (2\pi)^{-n} F(b_0(t, \cdot, \eta))(\xi - \eta). \quad (4.12)$$

Weil $\text{supp}(b_0)$ nach Voraussetzung kompakt ist, ist $\tilde{K}_0 \in C^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^{2n})$. Betrachte nun den im Beweises von Satz 4.3 definierten Term r_θ , dieser war

$$\begin{aligned} r_\theta(t, x, \xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\eta y} \partial_x \overline{\partial_\xi p_1(t, x + y, \xi + \theta\eta)} dy d\eta \stackrel{x+y=z}{=} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\eta x} e^{-i\eta z} \underbrace{\partial_x \overline{\partial_\xi p_1(t, z, \xi + \theta\eta)}}_{:=c(t, z, \xi + \theta\eta)} dz d\eta = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\eta x} F(c(t, \cdot, \xi + \eta\theta))(\eta) d\eta. \end{aligned}$$

Damit lässt sich r_θ schreiben in der Form

$$r_\theta(t, x, \xi) = F_{\eta \rightarrow x}^{-1}(F(c(t, \cdot, \xi + \eta\theta))(\eta)). \quad (4.13)$$

Nach Voraussetzung hat auch $c(t, z, \zeta)$ mit $\zeta := \xi + \theta\eta$ seinen Träger in $\{z : |z| \leq r\}$. Definiere analog zu vorher die Operatoren $R_\theta := r_\theta(t, x, D)$ sowie $\tilde{R}_\theta := F \circ R_\theta \circ F^{-1}$. Der Schwartzkern dieses Operators berechnet sich auf genau dieselbe Weise wie in (4.12) und das Ergebnis lautet

$$\begin{aligned} \tilde{K}_\theta(t, \xi, \eta) &= (2\pi)^{-n} F(r_\theta(t, \cdot, \eta))(\xi - \eta) \stackrel{(4.13), 1.4(i)}{=} \\ &= (2\pi)^{-n} F(c(t, \cdot, \eta + \theta(\xi - \eta)))(\xi - \eta). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Aus den Gleichungen (4.12) und (4.14) erkennt man, dass die Symbole b_0 und c jeweils einen glatten Kern von der gleichen Struktur besitzen. Damit lassen sich beide Integralkerne und damit die Operatoren B_0 und R_θ simultan abschätzen. Dazu schreibe

$$\tilde{K}(t, \xi, \eta) := (2\pi)^{-n} F(d(t, \cdot, f(\xi, \eta)))(\xi - \eta).$$

Hierbei ist d ein glattes Symbol von Ordnung 0 mit Parameter t sowie kompaktem Träger und $f : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine in ξ und η lineare Abbildung. $\tilde{K}(t, \xi, \eta)$ ist L^1 -integrierbar und es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{K}(t, \xi, \eta)| d\xi &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |F(d(t, \cdot, f(\xi, \eta)))(\xi - \eta)| d\xi \stackrel{\xi - \eta \rightarrow \eta}{=} \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |F(d(t, \cdot, f(\xi + \eta, \eta)))(\xi)| d\xi \leq (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{t, \zeta} |F(d(t, \cdot, \zeta))(\xi)| d\xi \end{aligned}$$

sowie

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{K}(t, \xi, \eta)| d\eta \stackrel{\xi - \eta \rightarrow \eta}{=} (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |F(d(t, \cdot, f(\xi, \xi - \eta)))(\eta)| d\eta$$

$$\leq (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{t, \zeta} |F(d(t, \cdot, \zeta))(\eta)| d\eta. \quad (4.15)$$

Sei $D := d(t, x, D)$ der zum Symbol d gehörige Operator, also $Dg(t, \xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{K}(t, \xi, \eta) g(\eta) d\eta \forall g \in S \subseteq L^2$. Dann folgt aus dem Lemma von Schur 1.21

$$\|Dg\|_0 \leq (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{t, \zeta} |F(d(t, \cdot, \zeta))(\mu) d\mu| \|g\|_0 \Rightarrow$$

$$\|D\|_{Op} \leq (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{t, \zeta} |F(d(t, \cdot, \zeta))(\mu) d\mu|.$$

Um den Beweis zu vervollständigen, ist es noch notwendig, den Ausdruck (4.15) abzuschätzen. Dies geschieht durch eine Vorgangsweise, welche zum Beweis von [6], Theorem 18.1.11' durchgeführt wird. Da $\text{supp}(d) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\}$,

$$\exists c_n \geq 0 : \forall \beta \in \mathbb{N}_0^n \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_x^\alpha d(t, x, \xi)| dx \stackrel{|x| \leq r}{\leq} c_n r^n \|\partial_x^\alpha d(t, \cdot, \xi)\|_{L^\infty} := C(r, n).$$

Für $u \in S$ berechnet man

$$\begin{aligned} F(d(t, x, D))u(t, \eta) &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\eta x} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} d(t, x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi dx \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\xi - \eta)x} d(t, x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi dx \stackrel{\xi - \eta \rightharpoonup -\eta}{=} \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\eta x} d(t, x, \xi) dx \right) \hat{u}(\xi) d\xi := (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} A(t, \xi, \eta) \hat{u}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Für den Integralkern $A(t, \xi, \eta)$ ergibt sich mittels $(n+1)$ -facher partieller Integration

$$\begin{aligned} |A(t, \xi, \eta)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\eta x} d(t, x, \xi) dx \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-i\eta x}}{(-i\eta)^{n+1}} \partial_x^{n+1} d(t, x, \xi) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{\eta^{n+1}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} |\partial_x^\alpha d(t, x, \xi) dx|}_{\leq C(n, r)} \leq \frac{C(n, r)}{\eta^{n+1}}. \end{aligned}$$

Aufgrund dieser Abschätzung ist $A(t, \xi, \eta)$ bezüglich η L^1 -integrierbar. Tauscht man in der obigen Rechnung ξ und η gegeneinander aus, so lässt sich das gleiche auch bezüglich ξ folgern. In obiger Rechnung fielen auf das Symbol $d(t, x\xi)$ $(n+1)$ Ableitungen in x . Durch erneutes Anwenden von Lemma 1.21 erhält man

$$\begin{aligned} \|F(d(t, x, D))u\|_0 &\leq c'(n, r)Q_{0, n+1, 0}^0(d)\|\hat{u}\|_0 \Rightarrow \\ \|F(d(t, x, D))\|_{Op} &\leq c'(n, r)Q_{0, n+1, 0}^0(d) \text{ und daher ebenso} \\ \sup_{(t, \xi)} |F(d(t, x, \xi))| &\leq c(n, r)Q_{0, n+1, 0}^0(d) \end{aligned}$$

Erinnert man sich, dass $d(t, x, \xi)$ stellvertretend für die Symbole $b_0(t, x, \xi)$ bzw. $c(t, z, \zeta)$ stand, und beachtet ferner, dass in $c(t, z, \zeta)$ jeweils eine zusätzliche Ableitung sowohl in x als auch in ξ vorkommt, so erkennt man, dass die Energieabschätzung (4.6) für die Konstanten $k_n = n + 2$, $l_n = 1$, $k'_n = n + 1$, und $l'_n = 0$ bewiesen ist. $\square$

4.2 Der Existenzsatz

Betrachte erneut das Cauchyproblem (4.1), das war

$$\begin{aligned} \partial_t u + iPu &= f \text{ in } X_T := \mathbb{R}^n \times (0, T] \\ u(0) &= g \end{aligned} \tag{4.16}$$

mit $f \in G_{L^2}(X_T)$ und $g \in G_{L^2}(\mathbb{R}^n)$ (wie dort) und einem verallgemeinerten Pseudodifferentialoperator 1. Ordnung P . Für $\epsilon \in (0, 1]$ sei $(ip_\epsilon(t, x, D))_\epsilon$ ein Repräsentant seines verallgemeinertes Symbols. Wie sich im Beweis des nächsten Satzes herausstellen wird, muss wegen der Form der Energieabschätzung (4.6), die nun von ϵ abhängt, eine zusätzlich Annahme für $(p_\epsilon)_\epsilon$ vorausgesetzt werden, welche nachfolgend definiert wird.

4.7 Definition:

Ein verallgemeinertes Symbol $(p_\epsilon)_\epsilon$ von der Ordnung m heißt *logarithmisch wachsend* (engl. log-type) bis zur Ordnung (k, l) , falls

$$Q_{0, k, l}^m(p_\epsilon) = O(\log(\frac{1}{\epsilon})) \text{ für } \epsilon \rightarrow 0. \tag{4.17}$$

Da logarithmisches Wachstum langsamer als polynomiales Wachstum ist, sind Polynome in ϵ beispielsweise nicht „log-type“.

4.8 Theorem:

Sei P ein verallgemeinerter Pseudodifferentialoperator, $(p_\epsilon)_\epsilon$ sein zugehöriges Symbol ($\epsilon \in (0, 1]$) mit Parameter $t \in [0, T]$. Weiters gelte die Hyperbolizitätsannahme (4.2), also $p_\epsilon = p_{1,\epsilon} + p_{0,\epsilon}$. Sei ferner $(p_{1,\epsilon})_\epsilon$ logarithmisch wachsend bis zur Ordnung $(2n + 5, 3(\frac{n}{2} + 1))$ sowie $(p_{0,\epsilon})_\epsilon$ logarithmisch wachsend bis zur Ordnung $(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)$.

Dann hat das verallgemeinerte Cauchyproblem (4.16) für alle $f \in G_{L^2}(X_T)$ bzw. $g \in G_{L^2}(\mathbb{R}^n)$ eine *eindeutige Lösung* $u \in G_{L^2}(X_T)$.

Falls das Symbol p_ϵ reellwertig ist, sind keine „log-type“-Voraussetzungen an $p_{0,\epsilon}$ notwendig.

Beweis: Sei ($\epsilon \in (0, 1]$) fest und seien $(f_\epsilon)_\epsilon$ und $(g_\epsilon)_\epsilon$ Repräsentanten von f und g , also $f_\epsilon, g_\epsilon \in H^\infty(X_T)$. Das für diese Repräsentanten betrachtete (klassische) Cauchyproblem

$$\begin{aligned} \partial_t u_\epsilon + ip_\epsilon(t, x, D)u_\epsilon &= f_\epsilon \\ u_\epsilon(0) &= g_\epsilon \end{aligned} \quad (4.18)$$

hat für jedes $\epsilon \in (0, 1]$ eine eindeutige Lösung $u_\epsilon \in C^\infty([0, T], H^\infty(\mathbb{R}^n))$, wie in Theorem 2.8 gezeigt wurde. Jetzt muss gezeigt werden, dass dieser Lösungskandidat $(u_\epsilon)_\epsilon \in E_{M,L^2}(X_T)$ erfüllt. Wegen Korollar 2.9 muss für u_ϵ die Energieabschätzung (4.6) gelten.

Definiere $C_\epsilon := C(1 + Q_{0,k'_n,l'_n}^0(p_{0,\epsilon}) + Q_{0,k_n,l_n}^1(p_{1,\epsilon}))$, wobei C, k_n, k'_n, l_n und l'_n so wie in (4.6) zu wählen sind. Setzt man nun in der Ungleichung von Gronwall (4.5) $u(t) = \|u_\epsilon(t)\|_0^2$, $v(t) = \|g_\epsilon\|_0^2 + \int_0^t \|f_\epsilon(\tau)\|_0^2 d\tau$, $w(t) \equiv C_\epsilon$ sowie $a = 0$, so folgt aus der Energieabschätzung (4.6) und der Tatsache, dass $v(t)$ streng monoton steigend ist,

$$\|u_\epsilon(t)\|_0^2 \leq (\|g_\epsilon\|_0^2 + \int_0^t \|f_\epsilon(\tau)\|_0^2 d\tau) e^{C_\epsilon t}, \quad (4.19)$$

da klarerweise $\int_0^t C_\epsilon d\sigma = C_\epsilon t$.

Eindeutigkeit: Da nach Voraussetzung $C_\epsilon = O(\log(\frac{1}{\epsilon})) \Rightarrow e^{C_\epsilon t} = O(\frac{1}{\epsilon})$ $\forall t \in [0, T]$ für $\epsilon \rightarrow 0$ gilt, muss jede Nullabschätzung im Sinne der Definition 3.3, welche für f_ϵ und g_ϵ Gültigkeit hat, ebenso für u_ϵ gelten. Das bedeutet:

$$\forall q \in \mathbb{N}_0: (\|f_\epsilon\|_0 = O(\epsilon^q) \wedge \|g_\epsilon\|_0 = O(\epsilon^q)) \Rightarrow \|u_\epsilon\|_0 = O(\epsilon^q) \quad (\epsilon \rightarrow 0).$$

Damit ist u nach Definition der Colombeaualgebra eindeutig.

Existenz: Aufgrund der Moderatheit von f_ϵ und g_ϵ gibt es wegen (4.19) ein $N \in \mathbb{N}_0$, so dass $\|u_\epsilon\|_{L^2(X_T)} \leq T \sup_{t \in [0, T]} \|u_\epsilon(t)\|_0 = O(\epsilon^{-N})$. Damit müssen die Moderatheitsabschätzungen nur noch für die Ableitungen von u_ϵ gezeigt werden.

x-Ableitungen: Sei $\alpha \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}$. Dann folgt aus (4.16)

$$\partial_x^\alpha \partial_t u_\epsilon + i \partial_x^\alpha (p_\epsilon(t, x, D) u_\epsilon) = \partial_x^\alpha f_\epsilon.$$

Daraus ergibt sich unter Verwendung der Leibnizregel, der Möglichkeit, die Reihenfolge mehrfacher Ableitungen zu vertauschen (Satz von Schwarz) und der Zerlegung $p_\epsilon = p_{1,\epsilon} + p_{0,\epsilon}$

$$\begin{aligned} & \underbrace{\partial_t \partial_x^\alpha u_\epsilon + i p_\epsilon(t, x, D) \partial_x^\alpha u_\epsilon + i \sum_{\substack{j=1 \\ \alpha_j \neq 0}}^n \partial_{x_j} p_{1,\epsilon}(t, x, D) \partial_x^{\alpha - e_j} u_\epsilon}_{:= F_{\epsilon, \alpha}} + \\ & + \sum_{\substack{j=1 \\ \alpha_j \neq 0}}^n \partial_{x_j} p_{0,\epsilon}(t, x, D) \partial_x^{\alpha - e_j} u_\epsilon + \sum_{\substack{\beta \leq \alpha \\ |\beta| \geq 2}} \binom{\alpha}{\beta} \partial_x^\beta p_\epsilon(t, x, D) \partial_x^{\alpha - \beta} u_\epsilon = \partial_x^\alpha f_\epsilon. \end{aligned}$$

Also ist

$$F_{\epsilon, \alpha} = \partial_x^\alpha f_\epsilon - \sum_{\substack{j=1 \\ \alpha_j \neq 0}}^n \partial_{x_j} p_{0,\epsilon}(t, x, D) \partial_x^{\alpha - e_j} u_\epsilon - \sum_{\substack{\eta \leq \alpha \\ |\beta| \geq 2}} \binom{\alpha}{\beta} \partial_x^\beta p_\epsilon(t, x, D) \partial_x^{\alpha - \beta} u_\epsilon. \quad (4.20)$$

Hierbei ist e_j der j -te Standardbasisvektor des $\mathbb{R}^n$. Wegen Ungleichung (1.11) für $s = m = 1$ gilt

$$\begin{aligned} & \|\partial_x^\beta p_\epsilon(t, x, D) \partial_x^{\alpha - \beta} u_\epsilon(t)\|_0 \leq C_1 \|\partial_x^\beta p_\epsilon(t, x, D)\|_{Op} \|\partial_x^{\alpha - \beta} u_\epsilon(t)\|_1 \\ & \stackrel{\partial_x^\beta p_\epsilon \in S^1}{\leq} C_1 Q_{0,k,l}^1(\partial_x^\beta p_\epsilon) \|\partial_x^{\alpha - \beta} u_\epsilon(t)\|_1 \stackrel{|\beta| \geq 2}{\leq} C'_1 Q_{0,k_n,l_n}^1(\partial_x^\beta p_\epsilon) \max_{|\gamma| < |\alpha|} \|\partial_x^\gamma u_\epsilon(t)\|_0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

(Es ist zu beachten, dass x-Ableitungen an der Ordnung eines Symbols nichts ändern). Der letzte Teil der Ungleichung stimmt wegen (1.11), wenn man die Ableitungsordnung um eins vermindert. Für $p_{0,\epsilon}$ gilt analog

$$\begin{aligned} \|\partial_{x_j} p_{0,\epsilon}(t, x, D) \partial_x^{\alpha - e_j} u_\epsilon\|_0 & \stackrel{\partial_{x_j} p_{0,\epsilon} \in S^0}{\leq} C_2 Q_{0, \lfloor \frac{n}{2} + 1 \rfloor, \lfloor \frac{n}{2} + 1 \rfloor}^0(\partial_{x_j} p_{0,\epsilon}) \|\partial_x^{\alpha - e_j} u_\epsilon(t)\|_0 \\ & \leq C'_2 Q_{0, \lfloor \frac{n}{2} + 1 \rfloor, \lfloor \frac{n}{2} + 1 \rfloor}^0(\partial_{x_j} p_{0,\epsilon}) \max_{|\gamma| < |\alpha|} \|\partial_x^\gamma u_\epsilon(t)\|_0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Die Konstanten C_1, C'_1, C_2 und C'_2 hängen nur von n ab.

Setzt man die Gültigkeit der Moderatheitsabschätzungen von $\partial_x^\gamma u_\epsilon(t)$ für $|\gamma| < |\alpha|$ voraus (für $\gamma = 0$ folgt deren Richtigkeit schon aus der Ungleichung von Gronwall), also

$$\exists N \geq 0 : \|\partial_x^\gamma u_\epsilon(t)\|_0 = O(\epsilon^{-N}) \quad (\epsilon \rightarrow 0),$$

so folgt wegen den Ungleichungen (4.21) und (4.22) sowie der Tatsache, dass $\|\partial_x^\alpha f_\epsilon\|_0 = O(\epsilon^{-N})$ nach Voraussetzung gilt, sofort aus (4.20), dass

$$\|F_{\epsilon,\alpha}\|_0 \leq n \underbrace{\|\partial_x^\beta p_\epsilon(t, x, D) \partial_x^{\alpha-\beta} u_\epsilon\|_0}_{=O(\epsilon^{-N})} + 2^{|\alpha|} \underbrace{\|\partial_{x_j} p_{0,\epsilon}(t, x, D) \partial_x^{\alpha-e_j} u_\epsilon\|_0}_{=O(\epsilon^{-N})} + \underbrace{\|\partial_x^\alpha f_\epsilon\|_0}_{=O(\epsilon^{-N})}$$

$$\Rightarrow \exists N \geq 0, \text{ sodass } \|F_{\epsilon,\alpha}\|_0 = O(\epsilon^{-N}) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \quad (\epsilon \rightarrow 0).$$

Betrachte nun die Pseudodifferentialgleichung

$$\partial_t \partial_x^\alpha u_\epsilon + ip_\epsilon(t, x, D) \partial_x^\alpha u_\epsilon + i \sum_{\substack{j=1 \\ \alpha_j \neq 0}}^n \partial_{x_j} p_{1,\epsilon}(t, x, D) \partial_x^{\alpha-e_j} u_\epsilon = F_{\epsilon,\alpha}.$$

Setzt man nun $v_\epsilon := \partial_x^\alpha u_\epsilon$ sowie $v_\epsilon(0) = \partial_x^\alpha u_\epsilon(0) = \partial_x^\alpha g_\epsilon$, so ergibt sich das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \partial_t v_\epsilon + ip_\epsilon(t, x, D) v_\epsilon + i \sum_{\substack{j=1 \\ \alpha_j \neq 0}}^n \partial_{x_j} p_{1,\epsilon}(t, x, D) \partial_x^{\alpha-e_j} u_\epsilon &= F_{\epsilon,\alpha} \\ v_\epsilon(0) &= \partial_x^\alpha g_\epsilon. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Ähnlich wie im Beginn des Beweises von Satz 4.3 rechnet man

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|v_\epsilon(t)\|_0^2 &= 2\Re \langle \partial_t v_\epsilon(t), v_\epsilon(t) \rangle \\ &= 2\Re \left\langle F_{\epsilon,\alpha} - ip_\epsilon(t, x, D) v_\epsilon(t) - i \sum_{\substack{j=1 \\ \alpha_j \neq 0}}^n \partial_{x_j} p_{1,\epsilon}(t, x, D) \partial_x^{\alpha-e_j} u_\epsilon(t), v_\epsilon(t) \right\rangle \\ &= 2\Re \langle F_{\epsilon,\alpha}, v_\epsilon(t) \rangle + 2\Im \langle p_\epsilon(t, x, D) v_\epsilon(t), v_\epsilon(t) \rangle \\ &\quad + 2\Im \left\langle \sum_{\substack{j=1 \\ \alpha_j \neq 0}}^n \partial_{x_j} p_{1,\epsilon}(t, x, D) \partial_x^{\alpha-e_j} u_\epsilon(t), v_\epsilon(t) \right\rangle. \end{aligned}$$

Mittels der Zerlegung $p_\epsilon = \frac{p_\epsilon + p_\epsilon^*}{2} + \frac{p_\epsilon - p_\epsilon^*}{2}$ bzw. $p_{1,\epsilon} = \frac{p_{1,\epsilon} + p_{1,\epsilon}^*}{2} + \frac{p_{1,\epsilon} - p_{1,\epsilon}^*}{2}$ kommt man analog zum Beweis von Satz 4.3 unter Verwendung der Ungleichung von

Cauchy-Schwarz und der Tatsache, dass $\frac{p_\epsilon + p_\epsilon^*}{2}$ ebenso wie $\frac{p_{1,\epsilon} + p_{1,\epsilon}^*}{2}$, selbstadjungiert sind, zur Abschätzung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|v_\epsilon(t)\|_0^2 &\leq \|F_{\epsilon,\alpha}(t)\|_0^2 + \|v_\epsilon(t)\|_0^2 + \|p_\epsilon(t, x, D) - p_\epsilon(t, x, D)^*\|_{Op} \|v_\epsilon(t)\|_0^2 \\ &+ \sum_{\substack{j=1 \\ \alpha_j \neq 0}}^n \|(\partial_{x_j} p_{1,\epsilon})(t, x, D) - (\partial_{x_j} p_{1,\epsilon})(t, x, D)^*\|_{Op} \|\partial_x^{\alpha - e_j} u_\epsilon(t)\|_0^2 + \|v_\epsilon(t)\|_0^2. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Definiere nun $G(\partial_x p_{1,\epsilon})(t) := \sum_{j=1}^n \|\partial_x p_{1,\epsilon}(t, x, D) - \partial_x p_{1,\epsilon}(t, x, D)^*\|_{Op}$. Dann sieht (4.24) so aus:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|v_\epsilon(t)\|_0^2 &\leq \|F_{\epsilon,\alpha}(t)\|_0^2 + G(\partial_x p_{1,\epsilon})(t) \underbrace{\|\partial_x^{\alpha - e_j} u_\epsilon(t)\|_0^2}_{\leq \max_{|\gamma| < |\alpha|} \|\partial_x^\gamma u_\epsilon(t)\|_0^2} + \\ &\quad (1 + \|p_\epsilon(t, x, D) - p_\epsilon(t, x, D)^*\|_{Op} + G(\partial_x p_{1,\epsilon})(t)) \|v_\epsilon(t)\|_0^2. \end{aligned}$$

Wie bereits gezeigt wurde, ist $\|F_{\epsilon,\alpha}(t)\|_0 = O(\epsilon^{-N})$ sowie $\|\partial_x^\gamma u_\epsilon(t)\|_0 = O(\epsilon^{-N})$. Weiters ist, wie im Beweis von Satz 4.3 berechnet wurde,

$$G(\partial_x p_{1,\epsilon})(t) \leq C_n \sum_{j=1}^n Q_{0,k_n,l_n}^1(\partial_x p_{1,\epsilon}) = O(\log(\frac{1}{\epsilon})), \text{ da } \partial_x p_{1,\epsilon} \in S^1(\mathbb{R}^n). \text{ Ebenfalls im Beweis von Satz 4.3 wurde berechnet, dass, wenn man } p_\epsilon = p_{1,\epsilon} + p_{0,\epsilon}$$

schreibt, sich die Abschätzung $\|p_\epsilon(t, x, D) - p_\epsilon(t, x, D)^*\|_{Op} \leq C'_n(Q_{0,k'_n,l'_n}^0(p_{0,\epsilon}) + Q_{0,k_n,l_n}^1(p_{1,\epsilon}))$ ergibt. Die Konstanten k_n, l_n, k'_n und l'_n sind wie in Ungleichung (4.6) zu wählen. Zusammenfassend bedeutet das, dass für $\epsilon \rightarrow 0$

$$\exists N \geq 0 : H_{\epsilon,\alpha}(t) := \|F_{\epsilon,\alpha}(t)\|_0^2 + G(\partial_x p_{1,\epsilon})(t) \max_{|\gamma| < |\alpha|} \|\partial_x^\gamma u_\epsilon(t)\|_0^2$$

$$= O(\epsilon^{-N}) + O(\log(\frac{1}{\epsilon})) O(\epsilon^{-N}) = O(\epsilon^{-N-1}) \Rightarrow \text{moderat}$$

$$\text{sowie } \exists C \geq 0 \text{ mit } 1 + \|p_\epsilon(t, x, D) - p_\epsilon(t, x, D)^*\| + G(\partial_x p_{1,\epsilon})(t)$$

$$\leq 1 + C(\underbrace{Q_{0,k'_n,l'_n}^0(p_{0,\epsilon})}_{=O(\log(\frac{1}{\epsilon}))} + \underbrace{Q_{0,k_n,l_n}^1(p_{1,\epsilon})}_{=O(\log(\frac{1}{\epsilon}))} + \sum_{j=1}^n \underbrace{Q_{0,k_n,l_n}^1(\partial_x p_{1,\epsilon})}_{=O(\log(\frac{1}{\epsilon}))}) := \tilde{C}_\epsilon.$$

Aufgrund der im Satz gemachten Voraussetzungen ist daher $\tilde{C}_\epsilon$ logarithmisch wachsend. Hier zeigt sich auch, warum es notwendig war, vorauszusetzen,

dass $(p_{1,\epsilon})_\epsilon$ bezüglich der x-Ableitungen bis zu einer Ordnung höher logarithmisch beschränkt als in der Energieabschätzung vorgegeben sei.

Setzt man wieder $v_\epsilon = \partial^\alpha u_\epsilon$, so erhält man

$$\frac{d}{dt} \|\partial^\alpha u_\epsilon(t)\|_0^2 \leq H_{\epsilon,\alpha}(t) + \tilde{C}_\epsilon \|\partial^\alpha u_\epsilon(t)\|_0^2.$$

Integration von 0 bis t liefert

$$\|\partial^\alpha u_\epsilon(t)\|_0^2 \leq \|\partial^\alpha u_\epsilon(0)\|_0^2 + \int_0^t H_{\epsilon,\alpha}(\tau) d\tau + \int_0^t \tilde{C}_\epsilon \|\partial^\alpha u_\epsilon(\tau)\|_0^2 d\tau.$$

Durch erneutes Anwenden der Ungleichung von Gronwall (4.5) erhält man analog zu (4.19) $\forall t \in [0, T]$

$$\|\partial^\alpha u_\epsilon(t)\|_0^2 \leq (\|\partial^\alpha u_\epsilon(0)\|_0^2 + \int_0^t H_{\epsilon,\alpha}(\tau) d\tau) e^{\tilde{C}_\epsilon T} = O(\log(\frac{1}{\epsilon})) O(\frac{1}{\epsilon}) = O(\epsilon^{-2}).$$

Damit gelten die Moderatheitsabschätzungen für beliebige x-Ableitungen gleichmäßig $\forall t \in [0, T]$.

t-Ableitungen: Es muss $\|\partial_t \partial_x^\alpha u_\epsilon(t)\|_0 = O(\epsilon^{-N})$ (*) für ein passendes $N \in \mathbb{N}$ gelten, da alle anderen Terme in Gleichung (4.20) die Moderatheitsabschätzungen erfüllen. Durch Differentiation des Cauchyproblems (4.18) erhält man nach der Produktregel

$$\partial_t^2 u_\epsilon + i(\partial_t p_\epsilon(t, x, D))u_\epsilon + ip_\epsilon(t, x, D)\partial_t u_\epsilon = \partial_t f_\epsilon.$$

Da die t-Ableitung nichts an der Ordnung der Symbole und daher an den Voraussetzungen für die Moderatheit ändert, müssen, wie zuletzt bewiesen,

$$\|(\partial_t p_\epsilon(t, x, D))u_\epsilon\|_0 = O(\epsilon^{-N}), \quad \|p_\epsilon(t, x, D)\partial_t u_\epsilon\|_0 = O(\epsilon^{-N}) \text{ siehe } (*),$$

$$\text{und } \|\partial_t f_\epsilon\|_0 = O(\epsilon^{-N})$$

für ein geeignetes $N \in \mathbb{N}$ sein. Deshalb ist auch $\|\partial_t^2 u_\epsilon(t)\|_0 = O(\epsilon^{-N})$. Durch erneutes Differenzieren von (4.18) sieht man sukzessive, dass

$$\exists N \in \mathbb{N} : \quad \|\partial_t^j u_\epsilon(t)\|_0 = O(\epsilon^{-N}) \quad \forall j \in \mathbb{N}_0.$$

Bei gemischten Ableitungen treten keine unbewiesenen Fälle mehr auf, also folgt $(u_\epsilon)_\epsilon \in E_{M,L^2}$, was zu zeigen war.

Aus dem Beweis ist unmittelbar ersichtlich, dass für reellwertige Symbole keine Voraussetzungen an $p_{0,\epsilon}$ notwendig sind. $\square$

4.9 Korollar:

Falls es ein $r > 0$ gibt, sodass $p_\epsilon(t, x, \xi) = h_\epsilon(t, \xi)$ für alle x mit $|x| \geq r$, so reicht es aus, dass in Satz 4.8 $(p_{1,\epsilon})_\epsilon$ bis zur Ordnung $(n+2, 2)$ sowie $(p_{0,\epsilon})_\epsilon$ bis zur Ordnung $(n+1, 0)$ logarithmisch beschränkt ist.

Beweis: Diese Aussage folgt direkt aus Satz 4.6. $\square$

4.10 Korollar:

Sei p ein glattes Symbol 1. Ordnung mit Parameter t , d.h. $p \in C^\infty([0, T]; S^1)$, also $p_\epsilon = p \ \forall \epsilon \in (0, 1]$.

Für $f \in H^\infty(X_T)$ und $g \in H^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist die Lösung des Cauchyproblems (4.16) gleich der klassischen Lösung.

Beweis: Für f und g können die konstanten Netze $(f)_\epsilon$ und $(g)_\epsilon$ als Repräsentanten in G_{L^2} herangezogen werden. Dann muss aber auch die klassische Lösung u_ϵ ein Repräsentant der verallgemeinerten Lösung u sein. $\square$

4.11 Definition:

(i) Ein Netz $(r_\epsilon)_\epsilon \in C$ heißt schwach skaliert (englisch: slow scale), wenn

$$\forall p \geq 0 : |r_\epsilon|^p = O\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \quad (\epsilon \rightarrow 0).$$

(ii) Ein Netz $(s_\epsilon)_\epsilon$ heißt logarithmisch schwach skaliert (englisch: slow scale log type), falls es ein reellwertiges schwach skaliertes Netz $(r_\epsilon)_\epsilon$ mit $r_\epsilon \geq 1$ gibt, sodass

$$|s_\epsilon| = O(\log(r_\epsilon)) \quad (\epsilon \rightarrow 0).$$

4.12 Beispiel:

Ein Beispiel eines schwach skalierten Netzes ist $(r_\epsilon)_\epsilon$ mit $r_\epsilon = \log(\frac{1}{\epsilon})$. Damit $|r_\epsilon|^p = O(\log(\frac{1}{\epsilon}))$ gilt, reicht es aus, dass $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log^p(\frac{1}{\epsilon})}{\frac{1}{\epsilon}} = 0$. Der Nachweis erfolgt mit der Regel von l'Hospital. Es gilt

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log^p(\frac{1}{\epsilon})}{\frac{1}{\epsilon}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log^p x}{x}.$$

$$p = 1 : \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log^p x}{x} = 0 \quad \forall p \leq 1.$$

$$p = 2 : \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2 \log x}{x}}{1} \stackrel{\text{oben}}{=} 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log^p x}{x} = 0 \quad \forall p \leq 2.$$

Weil nach der Kettenregel $(\log^p x)' = \frac{p \log^{p-1} x}{x}$ gilt, folgt induktiv, dass der Grenzwert für jedes positive p null ergibt. Damit ist $|\log(\frac{1}{\epsilon})|^p = O(\frac{1}{\epsilon}) \ \forall p \in \mathbb{R}^+$. $\square$

4.13 Satz:

Betrachte erneut das Cauchyproblem (4.16) mit folgenden Änderungen in den Voraussetzungen: Seien die Daten $f \in G_{L^2}^\infty(X_T)$ und $g \in G_{L^2}^\infty(\mathbb{R}^n)$ beide logarithmisch schwach skaliert. Sei weiters das Symbol p_ϵ schwach skaliert in allen Ableitungen, d.h. $Q_{j,k,l}^1(p_\epsilon) = O(r_\epsilon)$, wobei $(r_\epsilon)_\epsilon$ ein schwach skaliertes Netz positiver reeller Zahlen ist.

Dann ist die Lösung u ebenfalls in $G_{L^2}^\infty(X_T)$

Beweis: Da $f \in G_{L^2}^\infty(X_T)$ und $g \in G_{L^2}^\infty(\mathbb{R}^n)$, gibt es eine positive Zahl M , sodass

$$\|\partial_t^j \partial_x^\alpha f_\epsilon\|_0 = O(\epsilon^{-M}) \text{ und } \|\partial_x^\alpha g_\epsilon\|_0 = O(\epsilon^{-M}) \quad \forall j \in \mathbb{N}_0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \quad \forall \epsilon \in (0, 1].$$

Weil $Q_{j,k,l}^1(p_\epsilon) = O(r_\epsilon)$ angenommen wurde, produzieren die im Beweis von Theorem 4.8 durch Q-Seminormen vorgenommenen Symbolabschätzungen von p_ϵ nur schwach skalierte Faktoren. Daher lässt sich der dortige Beweis adaptieren und es folgt induktiv, dass

$$\|\partial_t^j \partial_x^\alpha u_\epsilon\| = O(r_\epsilon \epsilon^{-M}) \stackrel{\text{schw. skal.}}{=} O(\epsilon^{-M-1}) \quad \forall j \in \mathbb{N}_0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \quad (\epsilon \rightarrow 0).$$

Wählt man $N = M + 1$, so sieht man, dass $u \in G_{L^2}^\infty$. $\square$

Die Bedeutung des Satz 4.13 liegt darin, dass man unter den oben genannten Voraussetzungen aus regulären Daten und einem regulären Symbol auch eine reguläre Lösung erhält.

Literaturverzeichnis

- [1] Grosser, Kunzinger, Oberguggenberger, Steinbauer: *Geometric theory of generalized functions*, Kluwer Academic, Dordrecht, 2001.
- [2] G.B. Folland: *introduction to partial differential equations*, Princeton university, New Jersey, 1995.
- [3] Michael Grosser: *Vorlesung „Ausgewählte Kapitel aus Analysis“: Colombeaualgebren*, Manuskript, Universität Wien, 2005.
- [4] Günther Hörmann: *First order hyperbolic pseudodifferential equations with generalized symbols*, J. Math. Anal. Appl. 293(2004), 40-56.
- [5] Roland Steinbauer: *Vorlesung: Pseudodifferentialoperatoren*, Manuskript, Universität Wien, 2007.
- [6] Lars Hörmander: *The analysis of linear partial differential operators III*, Springer-Verlag, 1985, Nachdruck 1994.
- [7] Harro Heuser: *Funktionalanalysis*, Teubner Verlag, Stuttgart 1992
- [8] Martin Werner Licht: *Gårding's inequality and the theorem of Calderon-Vaillancourt*, www.uni-bonn.de/~mlicht/pdogarding.pdf, 2009
- [9] Hitoshi Kumano-Go: *Pseudodifferential operators*, Massachusetts Institute of Technology, 1981
- [10] H.O.Cordes: *The technique of pseudidifferential operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995
- [11] H.A. Biagoni, M. Oberguggenberger: *Generalized solutions to the Korteweg-de Vries and the regularized long-wave equations*, J.Math.Anal. 23(1992), 923-940

- [12] R.E.Edwards: *Functional analysis: theory and applications*, Dover Publications, New York, 1965
- [13] K. Chandrasekharan: *Classical Fourier Transforms*, Springer Verlag, 1989
- [14] Harro Heuser: *Lehrbuch der Analysis Teil 1*, 13. Auflage, Teubner Verlag, Stuttgart, 2000
- [15] H.A. Biagoni, M.Oberguggenberger: *Generalized solutions to the Korteweg-de Vries and the regularized long-wave equations*, J, Math. Anal. 23 (1992), 923-940
- [16] J. Diestel, J.J. Uhl: *Vector measures*, Providence RI, American Mathematical Soc., 4. Auflage, 1998

Lebenslauf

- vollständiger Name: Hermann Robert Lametschwandtner
- Geburtsdatum: 24.06.1980 in Salzburg

Ausbildung:

- 1987 - 1991 Volksschule
- 1991 - 1999 BG Nonntal, Salzburg, Matura am 23.06.1999
- Seit WS 2000 Studium Mathematik und Physik an der Universität Wien

Berufliche Tätigkeiten:

- August 1999 Merkur
- Sommerferien 2001 - 2003 Österreichische Post
- Sommerferien 2004 - 2005 Gerling Versicherungen
- Jänner 2004 - April 2008 Nachhilfelehrer bei Kogler Lernstudio
- seit Mai 2008 Nachhilfelehrer bei mobile Nachhilfe
- seit 2003 Arbeit als Privatlehrer für Mathematik

Sonstiges:

- Oktober 1999 - September 2000 Zivildienst bei Lebenshilfe Salzburg
- Juni 1999 Teilnahme am Bundesbewerb der Mathematikolympiade

SACHERSCHLIESSUNG

der

Fachbereichsbibliothek Mathematik, Statistik, Informatik der Universität Wien**Klassifikation**

Aufstellungsort:

☒ HoA☐ HoD

MSC2010: 35L02 – 35L03 – 35S05 – 35S10

BK: 31.45

Schlagwortketten nach RSWKPseudodifferentialgleichung – Hyperbolische Differentialgleichung –
Cauchy-Anfangswertproblem (213, 321)

Kontrollvermerk der Fachbibliothek:

15. Apr. 2013

Datum



Unterschrift