



universität
wien

DIPLOMARBEIT

Geburts- und Todesprozesse in stetiger Zeit

verfasst von

Maria Summer

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Studienkennzahl: A 405
Studienrichtung: Diplomstudium Mathematik
Betreuer: Univ.Prof.Dr. Josef Hofbauer

Wien, April 2013

Inhaltsverzeichnis

1	Allgemeine Theorie	1
1.1	Markovketten	1
1.2	Erzeugermatrix Q	2
1.3	Vorwärts- und Rückwärts-Kolmogorov Gleichung	4
1.4	Eingebettete Markovketten	5
1.5	Klassifizierungen der Markovketten	6
1.6	Orthogonale Polynome	7
1.7	Erzeugende Funktionen	8
1.8	Verweilzeit	9
2	Geburts- und Todesprozesse	11
2.1	Geburts- und Todesprozess	11
2.1.1	Linearer Geburts- und Todesprozess	16
2.1.2	Linearer Geburts- und Todesprozess mit Zuwanderung	19
2.1.3	Absorbierender Zustand/Aussterben	22
2.1.4	Quasi-stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung	24
2.1.5	Inhomogener Geburts- und Todesprozess	27
2.1.6	Multidimensionaler Geburts- und Todesprozess	29
2.2	Geburtsprozess	30
2.2.1	Linearer Geburtsprozess/Yule Prozess	32
2.2.2	Explosiver Geburtsprozess	33
2.2.3	Linearer inhomogener Geburtsprozess/Polya Prozess	34
2.3	Todesprozess	35
2.3.1	Linearer Todesprozess	37
2.3.2	Linearer Todesprozess mit Zuwanderung	39
3	Anwendungen	40
3.1	Logistisches Wachstum	40
3.2	Epidemie	41
3.2.1	SI Modell	41
3.2.2	SIS Modell	42
3.2.3	SIR Modell	42
3.3	Chemische Reaktion	43

3.3.1	Monomolekulare Reaktion	43
3.3.2	Bimolekulare Reaktion	43
3.4	Genetik	45
3.5	Warteschlangentheorie	46
Abbildungsverzeichnis		47
Literatur		48

Vorwort

Diese Arbeit soll einen Überblick über die Geburts- und Todesprozesse in stetiger Zeit verschaffen. Dafür wurden Unterlagen wie zum Beispiel Bailey (1964) 'The Elements of Stochastic Processes with Applications to the Natural Sciences', Allen (2011) 'An Introduction to Stochastic Processes with Applications to Biology', Karlin, Taylor (1975) 'An Introduction to Stochastic Modelling, 3rd Edition', Bharucha-Reid (1997) 'Elements of the Theory of Markov Processes and their Applications' und andere zur Hilfe genommen. Zu Beginn wird kurz die in dieser Arbeit benötigte allgemeine Theorie der Markovketten zusammengefasst. Anschließend werden der Geburts- und Todesprozess, der Geburtsprozess und der Todesprozess beschrieben, jeweils mit einigen Spezialfällen. Zum Schluss werden einige Anwendungen genannt, die den Geburts- und Todesprozess als Grundlage haben.

1 Allgemeine Theorie

1.1 Markovketten

Es wird unterschieden zwischen dem Geburt- und Todesprozess in diskreter bzw. stetiger Zeit. In dieser Arbeit wird das Hauptaugenmerk auf das Modell in stetiger Zeit gelegt.

Ein *stochastischer Prozess* $X(t)_{t \in T}$ ist eine Funktion mit Parameter $t \in T$, wobei T ein endliches oder unendliches Intervall ist. Der Wert $X(t)$, $t \in T$ ist eine Zufallsvariable. Diese beschreibt den Zustand des Prozesses zum Zeitpunkt t und ist vom Zufall anhängig. Der Parameter t wird als Einheit für die Zeit betrachtet. Jede Zufallsvariable besitzt eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $\{p_i(t)\}_{i=0}^{\infty}$ mit der Zustandswahrscheinlichkeit $p_i(t) = \text{Prob}\{X(t) = i\}$ und dem Wahrscheinlichkeitsvektor $p(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots)^T$.

Der Zustandswechsel vom Zeitpunkt t nach $t + \Delta t$ eines stochastischen Prozesses $X(t)$ wird bezeichnet durch $\Delta X(t)$, also $\Delta X(t) = X(t + \Delta t) - X(t)$ für ein hinreichend kleines Zeitintervall Δt .

Zunächst definiere ich eine Markovkette in stetiger Zeit wie folgt:

Definition 1. [2] *Ein stochastischer Prozess $\{X(t)\}, t \geq 0$ mit stetiger Zeit und Zufallsvariablen in einem Zustandsraum S heißt Markovkette in stetiger Zeit, wenn folgende Bedingung für $n \geq 0, 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1}$ und $i_0, \dots, i_{n-1}, i, j \in S$ erfüllt ist:*

$$\begin{aligned} \text{Prob}\{X(t_{n+1}) = j | X(t_0) = i_0, X(t_1) = i_1, \dots, X(t_n) = i\} = \\ \text{Prob}\{X(t_{n+1}) = j | X(t_n) = i\} \end{aligned} \quad (1)$$

Die Bedingung (1) ist die Markovbedingung.

Bei Markovketten in stetiger Zeit findet die Zustandsänderung nicht so wie im diskreten Fall zu den Zeitpunkten $t = 1, 2, \dots$, sondern zu einem Zeitpunkt $t \geq 0$ statt. Der Übergang von Zustand i zu j zum Zeitpunkt t_{n+1} hängt nur vom Zustand i ab und nicht von den vorangegangenen. Diese Abhängigkeit ist durch die Übergangswahrscheinlichkeit $p_{i,j}$ gegeben.

Definition 2. [2] *Für $i, j = 0, 1, 2, \dots$ ist die Übergangswahrscheinlichkeit der Markovkette definiert durch $p_{i,j}(t, s) = \text{Prob}\{X(t) = j | X(s) = i\}, s < t$. Wenn die Übergangswahrscheinlichkeit nur von der Länge $t - s$ abhängt, dann heißt diese stationär oder homogen. Andernfalls heißt sie nichtstationär oder inhomogen.*

Falls nicht anders angenommen, werden stationäre/homogene Übergangswahrscheinlichkeiten vorausgesetzt, dh.

$$p_{i,j}(t-s) = \text{Prob}\{X(t) = j | X(s) = i\} = \text{Prob}\{X(t-s) = j | X(0) = i\}, \quad s < t \quad (2)$$

Folgender Satz gibt die Eigenschaften der Übergangswahrscheinlichkeiten an:

Satz 1.1. [13] Für $i, j \in S$ gilt:

1. $p_{i,j}(t) \geq 0 \quad \forall t \geq 0$, $p_{i,i}(0) = 1$ und $p_{i,j}(0) = 0$, $j \neq i$
2. $\sum_{j=0}^N p_{i,j}(t) = 1 \quad \forall t \geq 0$, dh. für endlichen Zustandsraum ist die Wahrscheinlichkeit eines Übergangs von Zustand i nach Zustand j im Zeitintervall $[0, \infty)$ gleich 1. Für explosive Prozesse, welche später noch genauer behandelt werden, hält diese Eigenschaft nicht, da diese nur im unendlichen Zustandsraum eintreten können. Somit gilt für den unendlichen Zustandsraum $\sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j} \leq 1$.
3. $p_{i,j}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{i,k}(t) p_{k,j}(s)$, dh. die Übergangswahrscheinlichkeiten erfüllen die Chapman-Kolmogorov Gleichung. Die Gleichung besagt, dass $X(t)$ im Falle eines Zustandswechsels $i \rightarrow j$ im Zeitintervall $t+s$ zum Zeitpunkt t von i in den Zustand k übergeht und in der verbleibenden Zeit s von k nach j wechselt, $i \rightarrow k$, $k \rightarrow j$.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten können als Matrix $P(t) = (p_{i,j}(t)), t \geq 0$ geschrieben werden. Die Matrix

$$P(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & p_{13}(t) & \dots \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & p_{23}(t) & \dots \\ p_{31}(t) & p_{32}(t) & p_{33}(t) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \forall t \geq 0$$

ist eine *stochastische Matrix*, dh. sie ist eine quadratische Matrix mit nichtnegativen Einträgen und Zeilensumme 1. $P(t)$ wird *Übergangsmatrix* genannt. Die oben erwähnte *Chapman-Kolmogorov Gleichung* kann in Matrixform

$$P(t+s) = P(t)P(s), \quad \forall t, s \in [0, \infty) \quad (3)$$

geschrieben werden.

Für $p_{i,j}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{i,k}(t) p_{k,j}(s)$ gilt $p_{i,j}(0) = \delta_{ij}$, wobei $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$ das *Kronecker Delta* bezeichnet.

Mittels der Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{i,j}$ erhält man die Übergangsraten $q_{i,j}$, welche die infinitesimale Erzeugermatrix Q bilden.

1.2 Erzeugermatrix Q

[2], [18, S. 394], [22, S. 165], [17], [11], [13] Wegen $\lim_{t \rightarrow 0} p_{i,j}(t) = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$ gilt $(p_{i,j}(0)) =$

$P(0) = I$, wobei I die Identitätsmatrix bezeichnet. Es folgt aus (3) mit $t > 0$ und $s = \Delta t > 0$ und der Eigenschaft $p_{i,j}(0) = \delta_{ij}$ erhalten wir

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} P(t + \Delta t) = P(t) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} P(\Delta t) = P(t)I = P(t) \quad (4)$$

Für $0 < \Delta t < t$ kann man (3) schreiben als $P(t - \Delta t)P(\Delta t) = P(t)$. Die Inverse $P(\Delta t)^{-1}$ existiert und nähert sich der Identitätsmatrix I , weil sich $P(\Delta t)$ für hinreichend kleines Δt der Matrix I nähert. Daher daraus folgt

$$P(t) = P(t) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (P(\Delta t))^{-1} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} P(t - \Delta t) \quad (5)$$

(4) und (5) zeigen, dass $P(t)$ stetig ist. Da die Übergangswahrscheinlichkeiten für $t \geq 0$ stetig und differenzierbar sind und

$$p_{i,j}(0) = 0, \quad j \neq i \quad \text{und} \quad p_{i,i}(0) = 1 \quad (6)$$

erfüllen, erhält man die Übergangsraten

$$\begin{aligned} q_{i,j} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{i,j}(\Delta t) - p_{i,j}(0)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{i,j}(\Delta t)}{\Delta t}, \quad j \neq i \end{aligned} \quad (7)$$

wobei aus $p_{i,j} \geq 0$ folgt $q_{i,j}(\Delta t) \geq 0$ und

$$\begin{aligned} q_{i,i} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{i,i}(\Delta t) - p_{i,i}(0)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{i,i}(\Delta t) - 1}{\Delta t} \end{aligned} \quad (8)$$

Es gilt

$$1 - p_{i,i}(\Delta t) = \sum_{j=0, j \neq i}^N p_{i,j}(\Delta t) \quad (9)$$

wegen der Bedingung 2 aus Satz 1.1 und $\sum_{j=0}^N p_{i,j}(\Delta t) = 1$. Durch Dividieren dieser Gleichung durch Δt und $\Delta t \rightarrow 0$ erhält man

$$\begin{aligned} -q_{i,i} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1 - p_{i,i}(\Delta t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sum_{j=0, j \neq i}^N p_{i,j}(\Delta t)}{\Delta t} \\ &= \sum_{j=0, j \neq i}^N q_{i,j}. \end{aligned} \quad (10)$$

$q_{i,j}$ und $q_{i,i}$ bezeichnen die Übergangsraten. Für $i \neq j$ gilt $q_{i,j} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} p_{i,j}(t) < \infty$. Eigenschaft (10) gilt nur für einen Prozess mit endlichem Zustandsraum.

Satz 1.2. [13, S. 28] Ist der Zustandsraum endlich, so gilt $q_{i,i} < \infty$ und $\sum_{j \neq i, j=0}^N q_{i,j}(t) = -q_{i,i}, \forall i = 0, 1, 2, \dots$. Ist der Zustandsraum unendlich, so gilt $\sum_{j \neq i, j=0}^N q_{i,j}(t) \leq -q_{i,i}, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Mit den Übergangsraten kann der Prozess beschrieben werden wie folgt:

$$\begin{aligned} p_{i,j}(\Delta t) &= \text{Prob}\{X(t + \Delta t) = j | X(t) = i\} = q_{i,j} \Delta t + o(\Delta t), \quad j \neq i \\ p_{i,i}(\Delta t) &= \text{Prob}\{X(t + \Delta t) = i | X(t) = i\} = 1 - q_{i,i} \Delta t + o(\Delta t) \end{aligned} \quad (11)$$

Für endlichen Zustandsraum folgt aus der Definition von $q_{i,j}$, $q_{i,i}$ und $q_{i,i} < \infty$, dass $\sum_{j=0}^N q_{i,j} = 0$ und $p_{i,j}(\Delta t) = \delta_{ij} + q_{i,j}\Delta t + o(\Delta t)$.

Wenn $q_{i,i} < \infty \forall i \in S$, dann heißt $(p(t), t \geq 0)$ *konservativ*.

Da wir nun die Übergangsraten definiert haben, können wir die Erzeugermatrix Q definieren.

Definition 3. Die Matrix Q , bestehend aus den Übergangsraten $(q_{i,j})$, die durch (7) und (8) definiert wurden, heißt Erzeugermatrix und ist von der Form

$$Q = \begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} & q_{02} & \dots \\ q_{10} & q_{11} & q_{12} & \dots \\ q_{20} & q_{21} & q_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum_{j=1}^{\infty} q_{0j} & q_{01} & \dots \\ q_{10} & -\sum_{j=0, j \neq 1}^{\infty} q_{1j} & \dots \\ q_{20} & q_{21} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (12)$$

und es gilt $\sum_j q_{i,j} = 0$.

Für die Übergangsmatrix $P(t)$, $t = 0$ gilt dann

$$P'(0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(0 + \Delta t) - P(0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(\Delta t) - I}{\Delta t} = Q \quad (13)$$

Aus dieser Eigenschaft und der Chapman-Kolmogorov Gleichung lässt sich die Matrixdifferentialgleichung

$$P'(t) = P(t)Q = QP(t) \quad (14)$$

herleiten:

$$\frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} = P(t) \frac{P(\Delta t) - I}{\Delta t} = \frac{P(\Delta t) - I}{\Delta t} P(t) \quad (15)$$

wobei $P'(t) = dP(t)/dt$.

Die Erzeugermatrix Q findet bei der Vorwärts- und Rückwärts-Kolmogorov Gleichung und der eingebetteten Markovkette Anwendung.

1.3 Vorwärts- und Rückwärts-Kolmogorov Gleichung

[10, S. 47], [2], [22, S. 166], [3, S. 157], [18, S. 360], [9, S. 180], [8] Aufgrund von Gleichung (14), der Definitionen der Erzeugermatrix und der Matrix $P(t)$ folgt, dass für $i, j = 0, 1, 2, \dots$ und $t > 0$

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t)Q \text{ geschrieben werden kann als } \frac{dp_{i,j}(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{i,k}(t)q_{k,j} \quad (16)$$

und

$$\frac{dP(t)}{dt} = QP(t) \text{ geschrieben werden kann als } \frac{dp_{i,j}(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} q_{i,k}p_{k,j}(t) \quad (17)$$

mit $\sum_{k=0}^{\infty} p_{k,j}(t) < \infty$. (16) wird die *Vorwärts-Kolmogorov Gleichung* und (17) die *Rückwärts-Kolmogorov Gleichung* genannt.

Sind der Zustandsraum endlich und die Vorwärts- und Rückwärts-Kolmogorov Gleichungen linear, dann existiert eine eindeutige Lösung, die durch

$$P(t) = e^{Qt}P(0) = e^{Qt} \quad (18)$$

gegeben ist, wobei $e^{Qt} = \sum_{k=0}^{\infty} Q^k \frac{t^k}{k!}$. Somit gilt

$$\frac{dP(t)}{dt} = e^{Qt}Q = P(t)Q \quad (19)$$

Die Vorwärts- und Rückwärts-Kolmogorov Gleichungen werden verwendet, um stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu bestimmen.

Definition 4. Eine stationäre Verteilung für die Übergangsmatrix $P(t)$ ist ein Vektor $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)^T$, sodass $\forall t \geq 0 \pi P(t) = \pi$, $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$ und $\pi_i \geq 0$ gilt. Hat $X(0)$ die Verteilung π , dann hat auch $X(t), \forall t \geq 0$ die Verteilung π .

Diese Definition gilt nur, wenn $P(t)$ bekannt und der Zustandsraum endlich ist.

Definition 5. Ist $X(t), t \geq 0$ eine Markovkette in stetiger Zeit mit Erzeugermatrix Q und für $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)^T$ gelte $\pi_i \geq 0$, $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$ und $Q\pi = 0$. Dann heißt π stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Ist der Zustandsraum endlich und $P(t)$ erfüllt die Vorwärts- und Rückwärts- Kolmogorov Gleichung, dann kann die Äquivalenz der Definitionen (4) und (5) leicht gezeigt werden.

Nun wird kurz erläutert, welche Rolle die Erzeugermatrix Q bei eingebetteten Markovketten spielt.

1.4 Eingebettete Markovketten

[2], [18], [13], [9], [8] Für einen Prozess, der von Zustand i nach j übergeht, sei der Ausgangszustand i . In diesem verweilt der Prozess eine Zeit lang. Die Verweilzeit ist exponentiell verteilt mit Parameter $q_{i,i}$. Von Zustand i geht der Prozess in Zustand j , $j \neq i$ über. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist gegeben durch $p_{i,j} = -\frac{q_{i,j}}{q_{i,i}}$. Für den Zustand j ist die Verweilzeit ebenfalls exponentiell verteilt, aber mit Parameter $q_{j,j}$.

$S_i := \inf\{t > S_{i-1} | X_t \neq X_{S_{i-1}}\}$, $i \geq 2$ bezeichnet die Sprungzeit und $T_i = S_{i+1} - S_i$ die Verweilzeit für $i = 0, 1, 2, \dots$

Definition 6. Sei Y_n die Zufallsvariable für einen Zustand einer Markovkette in stetiger Zeit $\{X(t), t \geq 0\}$ und n steht für den n -ten Sprung, also $Y_n = X(S_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Die Menge dieser Zufallsvariablen $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ ist bekannt als eingebettete Markovkette oder Sprungkette verbunden mit der Markovkette in stetiger Zeit $\{X(t), t \geq 0\}$.

Die eingebettete Markovkette ist diskret und hat die zugehörige Übergangsmatrix $T = (t_{i,j})$ mit $t_{i,j} = \text{Prob}\{Y_{n+1} = j | Y_n = i\}$.

Definition 7. [2], [17] Die Übergangsmatrix $T = (t_{ij})$, $i, j = 0, 1, 2, \dots$ der eingebetteten Markovkette ist definiert durch

$$t_{i,j} = \begin{cases} -\frac{q_{i,j}}{q_{i,i}} & , i \neq j \\ 0 & , i = j \end{cases} \text{ für } q_{i,i} \neq 0 \text{ und } t_{i,j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & , i \neq j \\ 1 & , i = j \end{cases} \text{ für } q_{i,i} = 0.$$

Für $q_{i,i} \neq 0$ ist die stochastische Matrix

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{q_{01}}{q_{00}} & -\frac{q_{02}}{q_{00}} & \cdots \\ -\frac{q_{10}}{q_{11}} & 0 & -\frac{q_{12}}{q_{11}} & \cdots \\ -\frac{q_{20}}{q_{22}} & -\frac{q_{21}}{q_{22}} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

und für $q_{i,i} = 0$ gilt

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Die Übergangswahrscheinlichkeiten der eingebetteten Markovkette sind homogen. Um Markovketten in stetiger Zeit zu klassifizieren, sind eingebettete Markovketten hilfreich.

1.5 Klassifizierungen der Markovketten

[5],[17, S. 41],[22], [3] Ein Zustand i heißt

$$\text{stabil} \Leftrightarrow 0 < q_{i,i} < \infty$$

$$\text{instabil} \Leftrightarrow q_{i,i} = \infty$$

$$\text{absorbierend} \Leftrightarrow q_{i,i} = 0$$

Ein Zustand j heißt *erreichbar* von Zustand i , $i \rightarrow j$, wenn $\exists t \geq 0$ mit $p_{i,j}(t) > 0$. Zwei Zustände i, j , jeweils erreichbar durch den anderen, *kommunizieren*, $i \leftrightarrow j$. Dabei wird unterschieden in

- Reflexivität $i \leftrightarrow i$
- Symmetrie: $i \rightarrow j \Rightarrow j \rightarrow i$
- Transitivität: $i \rightarrow k, k \rightarrow j \Rightarrow i \rightarrow j$

Kommunizieren alle Zustände miteinander, ist die Markovkette *irreduzibel*.

Eine Menge von Zuständen heißt *abgeschlossen*, wenn $p_{i,j}(t) = 0$, $t \geq 0$ für i enthalten und j nicht enthalten in dieser Menge.

[2], [20], [22], [5] Es gilt: Zwei Zustände einer Markovkette in stetiger Zeit kommunizieren genau dann, wenn diese in der eingebetteten Markovkette kommunizieren.

Die Markovkette $X(t)$ ist irreduzibel, wenn die eingebettete Markovkette $Y(n)$ irreduzibel ist. Ist $X(t)$ irreduzibel, so besitzt sie nur stabile Zustände.

Q ist irreduzibel $\Leftrightarrow T$ ist irreduzibel.

Um Rekurrenz und Transienz zu definieren, benötigen wir die erste Rückkehrzeit. $T_{i,i}$ bezeichne die *erste Rückkehrzeit*, also die Dauer, die benötigt wird um vom Ausgangspunkt $X(0) = i$ nach einigen Schritten zurück zu Zustand i zu gelangen. $T_{i,i} = \text{Prob}\{t > S_1, X(t) = i | X(0) = i\}$

Definition 8. [2],[22] Der Zustand i heißt rekurrent, wenn in einer Markovkette in stetiger Zeit $\{X(t)\}$, $t \geq 0$ die erste Rückkehrzeit $T_{i,i}$ endlich ist, dh. $\text{Prob}\{T_{i,i} < \infty | X(0) = i\} = 1$. Ist sie unendlich, so ist der Zustand transient und es gilt $\text{Prob}\{T_{i,i} < \infty | X(0) = i\} < 1$.

Theorem 1.3. [5] Ein Zustand i einer Markovkette in stetiger Zeit ist genau dann rekurrent/transient, wenn dieser Zustand i der eingebetteten Markovkette rekurrent/transient ist.

Definition 9. [5] Ein Zustand i einer Markovkette in stetiger Zeit heißt positiv rekurrent, wenn $\mu_{i,i} = \mathbb{E}[T_{i,i} | X(0) = i] < \infty$. Ist die erwartete Rückkehrzeit unendlich, ist der Zustand null rekurrent.

[22], [20] Sind alle Zustände einer Markovkette rekurrent oder transient, so nennt man die Markovkette rekurrent oder transient.

Definition 10. Sind alle Zustände eines Prozesses rekurrent, transient, positiv rekurrent oder null rekurrent, dann erfüllt auch der Prozess diese Eigenschaft.

[17, S. 63], [2] Da die Verweilzeiten der Markovkette in stetiger Zeit zufällig sind, ist diese aufgrund der nicht vorhandenen periodischen Zustände regulär. Nun folgt ein Theorem, das Basis Grenzwert Theorem, das verwendet werden kann, um $\mu_{i,i}$ zu bestimmen.

Theorem 1.4. Sei $\{X(t), t \geq 0\}$ eine nicht explosive Markovkette in stetiger Zeit. Ist die Erzeugermatrix Q irreduzibel und positiv rekurrent, dann gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{i,j}(t) = -\frac{1}{q_{i,i}\mu_{i,i}} \quad (20)$$

wobei $\mu_{i,i}$ die erwartete Rückkehrzeit ist. Im Allgemeinen ist eine endliche, irreduzible Markovkette in stetiger Zeit nicht explosiv, und der Grenzwert existiert und ist positiv.

Aus $0 < \mu_{i,i} < \infty$ folgt, dass irreduzible, endliche Markovketten positiv rekurrent sind.

1.6 Orthogonale Polynome

[15], [17, S. 107], [23], [16], [1, S. 115], [9, S. 185] Es wird für die Matrix $P(t)$ nach einer Integral-Darstellung, bestehend aus Termen der Erzeugermatrix, gesucht. Orthogonale Polynome werden verwendet, um das zeitabhängige Verhalten des Geburts- und Todesprozesses zu betrachten.

Definition 11. Eine Folge von Polynomen $\{Q_n(x)\}$, wo $Q_n(x)$ in x vom Grad n ist, heißt orthogonal mit Respekt zu einem Lebesgue-Stieltjes Maß $d\alpha(x)$, wenn

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q_m(x) Q_n(x) d\alpha(x) = 0, \quad m \neq n \quad (21)$$

wobei angenommen wird, dass die Momente

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n d\alpha(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

existieren und endlich sind.

Ist $\alpha(x)$ absolut stetig mit $d\alpha(x) = \omega(x)dx, \omega(x) \geq 0$, dann ist (21) von der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{Q}_m(x) \mathcal{Q}_n(x) \omega(x) dx = 0, \quad m \neq n. \quad (22)$$

$\{\mathcal{Q}_n(x)\}$ heißt dann *orthogonal mit Respekt zu der Gewichtsfunktion* $\omega(x)$. Ist $\alpha(x)$ eine Stufenfunktion mit Sprüngen ω_j bei $x = x_j, j = 0, 1, 2, \dots$, dann ist (21) von der Form

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \mathcal{Q}_m(x_j) \mathcal{Q}_n(x_j) \omega_j = 0, \quad m \neq n. \quad (23)$$

$\{\mathcal{Q}_n(x)\}$ sind in diesem Fall orthogonale Polynome einer diskreten Variable .

Orthogonale Polynome erfüllen folgende *Rekurrenzgleichung*

$$x \mathcal{Q}_n(x) = a_n \mathcal{Q}_{n+1}(x) + b_n \mathcal{Q}_n(x) + c_n \mathcal{Q}_{n-1}(x), \quad (24)$$

wobei $\mathcal{Q}_{-1}(x) = 0, \mathcal{Q}_0 = 1$ und $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{R}$ und $a_n c_{n+1} > 0, n = 0, 1, 2, \dots$

1.7 Erzeugende Funktionen

[2, S. 219], [4, S. 9, 12], [12], [7, S. 18, 439] Eine Möglichkeit, die Übergangs- oder Zustandswahrscheinlichkeiten zu erhalten, ist mittels der erzeugenden Funktionen. Mit diesen kann man das erwartete Verhalten der Markovkette untersuchen. Auch um Informationen über die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Markovkette in stetiger Zeit zu erhalten, kann das Verfahren der erzeugenden Funktionen verwendet werden. Bei diesem Verfahren wird eine partielle Differentialgleichung hergeleitet, deren Lösung die erzeugende Funktion ist.

Diese Lösung kann eine Wahrscheinlichkeit, Moment oder Kumulanten erzeugende Funktion sein. Diese sind für die Markovkette in stetiger Zeit $\{X(t), t \geq 0\}$ wie folgt definiert:

1. *Wahrscheinlichkeit erzeugende Funktion:*

$$P(z, t) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(t) z_i \quad (25)$$

mit Erwartungswert

$$m(t) = \left. \frac{dP(z, t)}{dz} \right|_{z=1} = \sum_{i=0}^{\infty} i p_i(t) \quad (26)$$

und Varianz

$$\sigma^2(t) = \left. \frac{d^2 P(z, t)}{dz^2} \right|_{z=1} + \left. \frac{dP(z, t)}{dz} \right|_{z=1} - \left(\left. \frac{dP(z, t)}{dz} \right|_{z=1} \right)^2 \quad (27)$$

2. *Moment erzeugende Funktion:*

$$M(\theta, t) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(t) e^{\theta i} \quad (28)$$

mit Erwartungswert

$$m(t) = \left. \frac{dM(\theta, t)}{d\theta} \right|_{\theta=0} \quad (29)$$

und Varianz

$$\sigma^2(t) = \left. \frac{d^2 M(\theta, t)}{d\theta^2} \right|_{\theta=0} - \left(\left. \frac{dM(\theta, t)}{d\theta} \right|_{\theta=0} \right)^2 \quad (30)$$

3. *Kumulanten erzeugende Funktion:*

$$K(\theta, t) = \ln M(\theta, t) \quad (31)$$

mit Erwartungswert

$$m(t) = \left. \frac{dK(\theta, t)}{d\theta} \right|_{\theta=0} \quad (32)$$

und Varianz

$$\sigma^2(t) = \left. \frac{d^2 K(\theta, t)}{d\theta^2} \right|_{\theta=0} \quad (33)$$

Aus der Rückwärts-Kolmogorov Gleichung (17) $\frac{dP(t)}{dt} = QP(t)$, die auch von den Zustandswahrscheinlichkeiten erfüllt wird und daher auch geschrieben werden kann als $\frac{dp_i(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} q_{ik}(t)p_k(t)$ erhält man die partielle Differentialgleichung für die Wahrscheinlichkeit erzeugende Funktion

$$\frac{dP(z, t)}{dt} = \sum_{i=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} q_{ik} p_k(t) z^i \right]. \quad (34)$$

Für die Moment erzeugende und Kumulanten erzeugende Funktion gelingt dies durch ähnliches Vorgehen.

1.8 Verweilzeit

[2], [17], [18] Wir wollen nun die Verteilung der Verweilzeiten des Prozesses in Zustand i berechnen. Die Verweilzeit ist $T_i = S_{i+1} - S_i$ und S_i bezeichnet den Zeitpunkt des i -ten Sprunges und es gilt $S_{i+1} > S_i$ und somit $T_i \in [0, \infty)$. Wie wir noch sehen werden ist T_i eine stetige und exponentielle Zufallsvariable.

$G_i(t)$ sei die Wahrscheinlichkeit, dass der Prozess für eine Dauer von $[S_{i+1}, S_i]$ in einem Zustand n verweilt, dh. $G_i(t) = \text{Prob}\{T_i > t\}$ und die Wahrscheinlichkeit eines Überganges $n \rightarrow j$ ist $\sum_{j=0, j \neq n}^{\infty} p_{jn}(\Delta t) = \alpha(n)\Delta t + o(\Delta t)$ und somit ist $p_{nn}(\Delta t) = 1 - \alpha(n)\Delta t + o(\Delta t)$. Ist n nicht absorbierend, dann gilt mit $G_i(0) = 1$ und für hinreichend kleines Δt folgt:

$$\begin{aligned} G_i(t + \Delta t) &= G_i(t)G_i(\Delta t) \\ &= G_i(t)[p_{nn}(\Delta t) + o(\Delta t)] \\ &= G_i(t)[1 - \alpha(n)\Delta t] + o(\Delta t) \end{aligned} \quad (35)$$

und weiters ist $dG_i(t)/dt = -\alpha(n)G_i(t)$ und die Lösung der Differentialgleichung ist gegeben durch $G_i(t) = e^{-\alpha(n)t}$. Somit ist $\text{Prob}\{T_i \leq t\} = 1 - G_i(t) = 1 - e^{-\alpha(n)t} = F_i(t)$, $t \geq 0$ und $F_i(t)$ bezeichnet die kumulative Verteilungsfunktion der Verweilzeit mit Dichtefunktion $F_i'(t) = \alpha(n)e^{-\alpha(n)t}$.

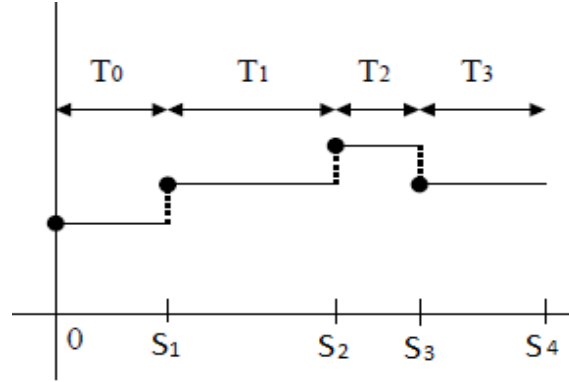


Abbildung 1: Sprung- und Verweilzeiten

Theorem 1.5. Sei $\{X(t), t \geq 0\}$ eine Markovkette in stetiger Zeit, sodass $1 - G_i(\Delta t) = \alpha(n)\Delta t + o(\Delta t)$ bzw. $G_i(\Delta t) = 1 - \alpha(n)\Delta t + o(\Delta t)$ für hinreichend kleines Δt . Dann ist die Verweilzeit $T_i = S_{i+1} - S_i$ mit gegebenem $X(S_i) = n$ eine exponentielle Zufallsvariable mit Parameter $\alpha(n)$. Die kumulative Verteilungsfunktion für T_i ist $F_i(t) = 1 - e^{-\alpha(n)t}$ und es gilt $\mathbb{E}[T_i] = \frac{1}{\alpha(n)}$ und $\text{Var}[T_i] = \frac{1}{[\alpha(n)]^2}$.

2 Geburts- und Todesprozesse

2.1 Geburts- und Todesprozess

Ein Geburts- und Todesprozess ist ein stochastischer Prozess, in dem eine Population betrachtet wird, in der Geburten und Tode stattfinden können. Diese Population sei in einem Zustand i (dh. die Population ist von der Größe i). Nach einem Zeitintervall Δt findet dann entweder eine Geburt oder ein Tod statt, sodass sich die Populationsgröße um 1 vergrößert oder verkleinert. Im Fall einer Geburt geht die Population vom Zustand i in den Zustand $i + 1$ über, $i \rightarrow i + 1$, und im Fall eines Todes geht diese von Zustand i zu $i - 1$ über, $i \rightarrow i - 1$.

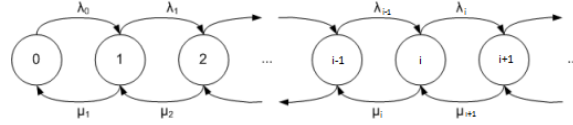


Abbildung 2: Geburts- und Todesprozess

[18],[5], [22] Sei nun $\{X(t), t \geq 0\}$ eine Markovkette in stetiger Zeit mit endlichem oder unendlichem Zustandsraum mit der Anfangsbedingung $X(t) = 0, t = 0$. Es wird angenommen, dass die Übergangswahrscheinlichkeiten des Geburts- und Todesprozesses folgendes erfüllen:

$$p_{i,j}(\Delta t) = \text{Prob}\{X(t + \Delta t) = j | X(t) = i\} = \quad (36)$$

$$= \begin{cases} \lambda_i \Delta t + o(\Delta t) & , j = i + 1 \\ \mu_i \Delta t + o(\Delta t) & , j = i - 1 \\ 1 - (\lambda_i + \mu_i) \Delta t + o(\Delta t) & , j = i \\ o(\Delta t) & , j \neq i - 1, i, i + 1 \end{cases},$$

für Δt hinreichend klein, $\lambda_i \geq 0$ und $\mu_i \geq 0$, $i = 0, 1, 2, \dots$, $\mu_0 = 0$ und $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$.

[22], [2, S. 201] $o(\Delta t)$ steht für einen vernachlässigbaren Rest, der die Wahrscheinlichkeit von mehr als einem Zustandswechsel im Zeitintervall Δt angibt. Es gilt $\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \rightarrow 0$ wenn $\Delta t \rightarrow 0$ und daraus folgt

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{i,i+1}(\Delta t) - \lambda_i \Delta t}{\Delta t} &= 0 \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{i,i-1}(\Delta t) - \mu_i \Delta t}{\Delta t} &= 0 \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{i,i}(\Delta t) - [1 - (\lambda_i + \mu_i) \Delta t]}{\Delta t} &= 0 \end{aligned} \quad (37)$$

und $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$. Im endlichen Zustandsraum ist die Anfangsübergangsmatrix $P(0) = (p_{ij}(0)) = I$ die Identitätsmatrix.

[18], [2], [7] Man betrachte nun das Zeitintervall $(0, t + \Delta t)$, das aufgeteilt wird in die Intervalle $(0, \Delta t)$ und $(\Delta t, t + \Delta t)$ für hinreichend kleines Δt . Hierbei beginnt man mit dem ersten Schritt, daher auch 'First Step Analysis' genannt.

[7, S. 87], [18, S.336, 360] Aufgrund von (36) und der Bedingung $p_{i,j}(t + \Delta t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{i,k}(\Delta t) p_{k,j}(t)$ können die Übergangswahrscheinlichkeiten zum Zeitpunkt t für hin-

reichend kleines Δt umgeschrieben werden wie folgt:

$$p_{i,j}(t + \Delta t) = p_{i,i-1}(\Delta t)p_{i-1,j}(t) + p_{i,i}(\Delta t)p_{i,j}(t) + p_{i,i+1}(\Delta t)p_{i+1,j}(t) \\ + \sum_{k \neq i-1, i, i+1} p_{i,k}(\Delta t)p_{k,j}(t),$$

wobei der letzte Term $\leq o(\Delta t)$ ist, da $\sum_{k \neq i-1, i, i+1} p_{k,j}(t) \leq 1$ und

$$\begin{aligned} \sum_{k \neq i-1, i, i+1} p_{i,k}(\Delta t)p_{k,j}(t) &\leq \sum_{k \neq i-1, i, i+1} p_{i,k}(\Delta t) \\ &= 1 - [p_{i,i-1}(\Delta t) + p_{i,i}(\Delta t) + p_{i,i+1}(\Delta t)] \\ &= 1 - [\mu_i \Delta t + o(\Delta t) + 1 - (\lambda_i + \mu_i) \Delta t + o(\Delta t) \\ &\quad + \lambda_i \Delta t + o(\Delta t)] \\ &= o(\Delta t) \end{aligned} \tag{38}$$

Unter Verwendung der Bedingungen in (36) erhält man dann

$$p_{i,j}(t + \Delta t) = \mu_i \Delta t p_{i-1,j}(t) + [1 - (\lambda_i + \mu_i) \Delta t] p_{i,j}(t) \\ + \lambda_{i+1} \Delta t p_{i+1,j}(t) + o(\Delta t) \tag{39}$$

Für den Anfangszustand $i = 0$ und für den Fall eines endlichen Zustandsraumes der Größe N und $i = N$ gilt

$$p_{0,j}(t + \Delta t) = \mu_0 \Delta t p_{-1,j}(t) + [1 - (\lambda_0 + \mu_0) \Delta t] p_{0,j}(t) + \lambda_0 \Delta t p_{1,j}(t) \\ = [1 - \lambda_0 \Delta t] p_{0,j}(t) + \mu_1 \Delta t p_{1,j}(t) + o(\Delta t)$$

$$p_{N,j}(t + \Delta t) = \mu_N \Delta t p_{N-1,j}(t) + [1 - (\lambda_N + \mu_N) \Delta t] p_{N,j}(t) + \lambda_N \Delta t p_{N+1,j}(t) \\ = \mu_N \Delta t p_{N-1,j}(t) + [1 - \mu_N \Delta t] p_{N,j}(t) + o(\Delta t)$$

Man erhält nun sehr leicht ein System von Differentialgleichungen mit der Anfangsbedingung $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t + \Delta t) - p_{ij}(t)}{\Delta t} &= \frac{dp_{ij}(t)}{dt} = \\ &= \mu_i p_{i-1,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i) p_{ij}(t) + \lambda_i p_{i+1,j}(t) \end{aligned} \tag{40}$$

das die Rückwärts-Kolmogorov Gleichung $dP(t)/dt = QP(t)$ mit $P(t) = (p_{ij}(t))$ darstellt. Um ein System von Differentialgleichungen zu erhalten, das die Vorwärts-Kolmogorov Gleichung erfüllt, betrachtet man das Zeitintervall $(0, t + \Delta t)$ aufgeteilt in die Intervalle $(0, t)$ und $(t, t + \Delta t)$. Nun betrachtet man den letzten Schritt, da diese Differentialgleichung aus der 'Last Step Analysis' resultiert. Man erhält wieder aufgrund der Chapman-Kolmogorov Gleichung $p_{i,j}(t + \Delta t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{i,k}(t)p_{k,j}(\Delta t)$ die Übergangswahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt $t + \Delta t$:

$$p_{i,j}(t + \Delta t) = p_{i,j-1}(t)p_{j-1,j}(\Delta t) + p_{i,j}(t)p_{j,j}(\Delta t) + p_{i,j+1}(t)p_{j+1,j}(\Delta t) \\ + \sum_{k \neq j-1, j, j+1} p_{i,k}(t)p_{k,j}(\Delta t),$$

wobei der letzte Term, wie für die Rückwärts-Kolmogorov Gleichung schon gezeigt wurde, $\leq o(\Delta t)$ ist. Diese Gleichung lässt sich wieder wegen (36) umschreiben in

$$p_{i,j}(t + \Delta t) = p_{i,j-1}(t)\lambda_{j-1}\Delta t + p_{i,j}(t)[1 - (\lambda_j + \mu_j)\Delta t] \\ + p_{i,j+1}(t)\mu_{j+1}\Delta t + o(\Delta t) \tag{41}$$

Setzt man erneut die Zustände $j = 0$ und $j = N$ ein, so erhält man nun

$$\begin{aligned} p_{i,0}(t + \Delta t) &= p_{i,-1}(t)\lambda_{-1}\Delta t + p_{i,0}(t)[1 - (\lambda_0 + \mu_0)\Delta t] + p_{i,1}(t)\mu_1\Delta t \\ &= p_{i,0}[1 - \lambda_0\Delta t] + p_{i,1}(t)\mu_1\Delta t + o(\Delta t) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} p_{i,N}(t + \Delta t) &= p_{i,N-1}(t)\lambda_{N-1}\Delta t + p_{i,N}(t)[1 - (\lambda_N + \mu_N)\Delta t] + p_{i,N+1}(t)\mu_{N+1}\Delta t \\ &= p_{i,N-1}(t)\lambda_{N-1}\Delta t + p_{i,N}[1 - \mu_N\Delta t] + o(\Delta t) \end{aligned}$$

Als Ergebnis bekommt man ein System von Differentialgleichungen, das nun die Vorwärts-Kolmogorov Gleichung $dP(t)/dt = P(t)Q$ darstellt, gegeben durch

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t + \Delta t) - p_{ij}(t)}{\Delta t} &= \frac{dp_{ij}(t)}{dt} = \\ &= p_{i,j-1}(t)\lambda_{j-1} - p_{ij}(t)(\lambda_j + \mu_j) + p_{i,j+1}(t)\mu_{j+1} \end{aligned} \quad (42)$$

Ist der Anfangszustand ein fixer Wert, so wird die Rückwärts-Kolmogorov Gleichung $dp(t)/dt = Qp(t)$ durch $p(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots)^T$ erfüllt, wobei $p_i(t) = \text{Prob}\{X(t) = i\}$ die Zustandswahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt t ist und somit ist

$$\begin{aligned} p_i(t + \Delta t) &= \lambda_{i-1}\Delta t p_{i-1}(t) + [1 - (\lambda_i + \mu_i)\Delta t]p_i(t) \\ &\quad + \mu_{i+1}\Delta t p_{i+1}(t) + o(\Delta t) \end{aligned} \quad (43)$$

Durch Differenzieren erhalten wir auch dafür die Differentialgleichung

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \lambda_{i-1}p_{i-1}(t) - (\lambda_i + \mu_i)p_i(t) + \mu_{i+1}p_{i+1}(t) \quad (44)$$

[16], [9, S. 186] Nun kann man die Spektraltheorie für den unendlichen Zustandsraum einführen. So haben wir durch die Rekurrenzgleichungen (24) ein System von Polynomen gegeben

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_0(x) &= 1 \\ -x\mathcal{Q}_0(x) &= \lambda_0\mathcal{Q}_1(x) - (\lambda_0 + \mu_0)\mathcal{Q}_0(x) \\ -x\mathcal{Q}_n(x) &= \mu_n\mathcal{Q}_{n-1}(x) + \lambda_n\mathcal{Q}_{n+1}(x) - (\lambda_n + \mu_n)\mathcal{Q}_n(x) \end{aligned} \quad (45)$$

Dann existiert eine Verteilungsfunktion $\phi(x)$ auf $[0, \infty)$, die die orthogonale Relation

$$\int_0^\infty \mathcal{Q}_i(x)\mathcal{Q}_j(x)d\phi(x) = \frac{\delta_{ij}}{\theta_j} \quad (46)$$

wobei $\theta_0 = 1$ und $\theta_j = \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}$, $j \geq 1$ erfüllt. Die Spektral Repräsentation der Übergangsmatrix $P(t)$ ist gegeben durch

$$P_{ij}(t) = \theta_j \int_0^\infty e^{-xt} \mathcal{Q}_i(x)\mathcal{Q}_j(x)d\phi(x) \quad (47)$$

Man hat bereits die Übergangsraten $(q_{ij}) = Q$, welche die Elemente der Erzeugermatrix Q sind, gegeben. [16], [2] Die Übergangsraten für den Geburts- und Todesprozess sind $q_{i,i+1} = \lambda_i$, $q_{i,i} = -(\lambda_i + \mu_i)$, $q_{i,i-1} = \mu_i$, $q_{0,1} = \lambda_0$ und $q_{0,0} = -\lambda_0$. Somit ist die Erzeugermatrix für den Geburts- und Todesprozess mit unendlichem Zustandsraum

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & \dots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3 + \mu_3) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \text{ und} \quad (48)$$

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_N & -\mu_N \end{pmatrix} \quad (49)$$

mit endlichem Zustandsraum.

Wie aus Kapitel 1.4 bekannt ist, kann man die Übergangsmatrix T mittels der Übergangsraten angeben, da diese die Übergangswahrscheinlichkeiten der eingebetteten Markovkette Y_n sind. Die Übergangsmatrix $T = (t_{i,j})$ mit $t_{i,j} = \text{Prob}\{Y_{n+1} = j | Y_n = i\}$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, im n -ten Sprung von i nach j zu springen, dh. in den Zustand, in dem die Population einer weniger (durch Tod), mehr (durch Geburt) oder gleich ist, an. Nun ist die Übergangsmatrix der Erzeugermatrix (48) gegeben durch

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} & 0 & \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2} & 0 & \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{\mu_3}{\lambda_3 + \mu_3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (50)$$

und für (49)

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} & 0 & \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (51)$$

mit $\lambda_i + \mu_i > 0, i = 0, 1, 2, \dots$, da der Zustand i für $\lambda_i + \mu_i = 0, i = 0, 1, 2, \dots$ absorbierend wäre.

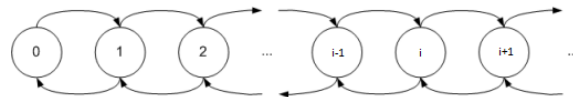


Abbildung 3: eingebettete Markovkette mit $\lambda_0 > 0$ und $\lambda_i + \mu_i > 0$

[2, S.244] Ist $\lambda_i > 0$ und $\mu_{i+1} > 0, i = 0, 1, 2, \dots$ dann kann durch Matrix T und mit Hilfe von Figur 3 leicht gesehen werden, dass die Markovkette irreduzibel ist.

[2],[18] Die Verweilzeiten für den Geburts- und Todesprozess sind dann

$$G_i(t + \Delta t) = G_i(t)[1 - (\lambda_i + \mu_i)\Delta t] + o(\Delta t)$$

$$\frac{dG_i(t)}{dt} = -(\lambda_i + \mu_i)G_i(t). \quad (52)$$

Mit der Anfangsbedingung $G_i(0) = 1$ ist die Lösung der Gleichung gegeben durch $G_i(t) = e^{-(\lambda_i + \mu_i)t}$. Somit ist S_i exponentiell verteilt mit Erwartungswert $(\lambda_i + \mu_i)^{-1}$. Aus der Tatsache, dass der Übergang in einer Zeitlänge Δt von Zustand i nach $i + 1$ mit Wahrscheinlichkeit $\lambda_i \Delta t + o(\Delta t)$ und der von i nach $i - 1$ mit $\mu_i \Delta t + o(\Delta t)$ erfolgt, erhält man die Übergangswahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt t von $i \rightarrow i + 1$ gegeben durch $\lambda_i / (\lambda_i + \mu_i)$ und von $i \rightarrow i - 1$ gegeben durch $\mu_i / (\lambda_i + \mu_i)$.

[1, S. 115] [18, S. 366],[17, S. 194], [2, S. 214], [8, S. 238], [19], [21] Die Übergangsmatrizen sind nützlich um zu klassifizieren, doch vorab betrachten wir noch das Grenzwertverhalten des Geburts- und Todesprozesses, also das Verhalten von $p_{i,j}(t)$, wenn t groß wird. Nun betrachte man den Limes

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{i,j}(t) = \pi_j \geq 0 \quad (53)$$

Erfüllt π_j die Bedingungen in Definition 5., dann ist π_j eine stationäre Verteilung und wegen der Chapman-Kolmogorov Gleichung, der Bedingung (53) und $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$ gilt $\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{i,j}(t)$, dh. wenn in Zustand i mit Wahrscheinlichkeit π_i gestartet wird, ist der Prozess zum Zeitpunkt t mit der gleichen Wahrscheinlichkeit im gleichen Zustand.

Aufgrund der Bedingung $\pi Q = 0$ in Definition 5, der Vorwärts-Kolmogorov Gleichung und (53) erhält man:

$$-\lambda_0 \pi_0 + \mu_1 \pi_1 = 0 \quad (54)$$

$$\lambda_{j-1} \pi_{j-1} - (\lambda_j + \mu_j) \pi_j + \mu_{j+1} \pi_{j+1} = 0, j \geq 1$$

Sei nun $\theta_0 = 1$ und $\theta_j = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_j}$, $j \geq 1$. Angenommen $\pi_k = \theta_k \pi_0$, $k = 1, \dots, j$, dann gilt

$$\begin{aligned} \mu_{j+1} \pi_{j+1} &= (\lambda_j + \mu_j) \theta_j \pi_0 - \lambda_{j-1} \theta_{j-1} \pi_0 \\ &= \lambda_j \theta_j \pi_0 + (\mu_j \theta_j - \lambda_{j-1} \theta_{j-1}) \pi_0 \\ &= \lambda_j \theta_j \pi_0 \end{aligned} \quad (55)$$

und somit $\pi_{j+1} = \theta_{j+1} \pi_0$. Ist $\sum \theta_j < \infty$ dann ist $\pi_j = \frac{\theta_j}{\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k}$. Die stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung existiert nur dann, wenn $\lambda_i > 0$ und $\mu_{i+1} > 0$, $\forall i$.

Theorem 2.1. [17, S. 134],[5, Satz 1.3],[3, S. 166] Ist $\{X(t), t \geq 0\}$ eine rekurrente und irreduzible Markovkette. Dann hat $\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{i,j}$, $j = 0, 1, 2, \dots$ mit $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$ und $\pi_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots$ eine eindeutige Lösung und π_j ist eine stationäre Verteilung.

Beweis. siehe [17, Seite 134, Theorem 3.4] □

Theorem 2.2. [3, S. 178] Für den Geburts- und Todesprozess existiert eine stationäre Verteilung genau dann, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k} < \infty$. In diesem Falls ist

$$\pi_0 = \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}\right)^{-1}, \text{ wobei der Term für } k = 0 \text{ gleich } 1 \text{ ist und für } k \geq 1 \text{ ist}$$

$$\pi_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k} \pi_0.$$

[7, S. 94],[16, S. 6, 7] Der Geburts- und Todesprozess wird mittels folgender Bedingungen klassifiziert:

Ein Geburts- und Todesprozess

- ist *rekurrent* $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k \theta_k} = \infty$
- ist *positiv rekurrent* $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k < \infty$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k \theta_k} = \infty$
- ist *null rekurrent* $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k = \infty$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k \theta_k} = \infty$
- ist *transient* $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k = \infty$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k \theta_k} < \infty$

2.1.1 Linearer Geburts- und Todesprozess

[7, S. 87],[4, S. 91], [2] Nun betrachtet man erneut den Fall einer Population, in der entweder eine Geburt $i \rightarrow i+1$ oder ein Tod $i \rightarrow i-1$ stattfindet. Im linearen Geburts- und Todesprozess gebärt bzw. stirbt ein Individuum mit Rate λ bzw. μ . Besteht die Population aus i Individuen, so ist die Geburtenrate bzw. die Sterberate gegeben durch λi bzw. μi . Also setzt man $\lambda_i = \lambda i$ und $\mu_i = \mu i$ mit $\lambda, \mu > 0$. $X(t)$ sei die Populationsgröße zum Zeitpunkt t mit der Anfangsbedingung $X(0) = N$. Somit sind die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{i,j}(\Delta t) = \text{Prob}\{X(t + \Delta t) = j | X(t) = i\} = \quad (56)$$

$$= \begin{cases} \lambda i \Delta t + o(\Delta t) & , j = i + 1 \\ \mu i \Delta t + o(\Delta t) & , j = i - 1 \\ 1 - (\lambda i + \mu i) \Delta t + o(\Delta t) & , j = i \\ o(\Delta t) & , j \neq i - 1, i, i + 1 \end{cases},$$

für Δt hinreichend klein. Die Erzeugermatrix ist

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 2\mu & -2(\lambda + \mu) & 2\lambda & \dots \\ 0 & 0 & 3\mu & -3(\lambda + \mu) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Die Zustandswahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ ist dann gegeben durch

$$p_i(t + \Delta t) = \lambda(i-1)\Delta t p_{i-1}(t) + [1 - (\lambda i + \mu i)\Delta t] p_i(t) + \mu(i+1)\Delta t p_{i+1}(t) + o(\Delta t). \quad (57)$$

Wir erhalten, wie im Allgemeinen Kapitel, die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dp_i(t)}{dt} &= \lambda(i-1)p_{i-1}(t) - (\lambda + \mu)i p_i(t) + \mu(i+1)p_{i+1}(t), \quad i = 1, 2, \dots \\ \frac{dp_0(t)}{dt} &= \mu p_1(t), \quad i = 0 \end{aligned} \quad (58)$$

die die Rückwärts-Kolmogorov Gleichung $dp/dt = Qp$ erfüllen. Es gilt $\lambda 0 = \mu 0 = 0$ und somit ist 0 ein absorbierender Zustand und die Anfangsbedingung $p_{i,j}(0) = \delta_{i,N}$. Unter der Verwendung der Technik der erzeugenden Funktionen können die Wahrscheinlichkeit

und Moment erzeugende Funktion hergeleitet werden. Die partielle Differentialgleichung für die Wahrscheinlichkeit erzeugende Funktion ist

$$\frac{dP(z,t)}{dt} = [\lambda z(z-1) + \mu(1-z)] \frac{dP(z,t)}{dz} \quad (59)$$

mit $P(z,0) = z^N$ falls $X(0) = N$. Durch Ersetzen von z durch e^θ erhält man

$$\frac{dM(\theta,t)}{dt} = [\lambda(e^\theta - 1) + \mu(e^{-\theta} - 1)] \frac{dM(\theta,t)}{d\theta} \quad (60)$$

mit $M(\theta,0) = e^{N\theta}$ falls $X(0) = N$.

Hat man eine Gleichung der Form $A \frac{dz}{dx} + B \frac{dz}{dy} = C$, wobei A , B , C die Funktionen von x , y , z sind, so kann man die Nebengleichung $\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = \frac{dz}{C}$ herleiten. Dies wird zur Herleitung der Wahrscheinlichkeit und Moment erzeugenden Funktion benötigt.

Die Wahrscheinlichkeit und Moment erzeugende Funktion erhält man aus

$$\frac{dt}{1} = \frac{-d\theta}{\lambda(e^\theta - 1) + \mu(e^{-\theta} - 1)} = \frac{dM}{0} \quad (61)$$

Es gilt

$$dt = \frac{-e^\theta d\theta}{(e^{\theta-1})(\lambda e^\theta) - \mu} \quad (62)$$

und

$$t = \begin{cases} c_1 - \frac{1}{\lambda - \mu} \log \frac{e^\theta - 1}{\lambda e^{\theta - \mu}}, & \lambda \neq \mu \\ c_2 + \frac{1}{\lambda(e^\theta - 1)}, & \lambda = \mu \end{cases}$$

wobei c_1 und c_2 Konstanten sind. Um zum gewünschten Ergebnis zu kommen, muss obiges umgeformt werden zu

$$\begin{aligned} \frac{(e^\theta - 1)e^{(\lambda - \mu)t}}{\lambda e^\theta - \mu} &= c_1, & \lambda \neq \mu \\ \lambda t - \frac{1}{e^\theta - 1} &= c_2, & \lambda = \mu \end{aligned} \quad (63)$$

Nun kann für $\lambda \neq \mu$ die Moment erzeugende Funktion gefunden werden, da aufgrund der Anfangsbedingung $M(\theta,0) = e^{N\theta}$ gilt, dass $e^{N\theta} = \left(\frac{\mu\nu(\theta,0)-1}{\lambda\nu(\theta,0)-1} \right)^N$, wobei $\nu(\theta,0) = \frac{(e^\theta - 1)}{\lambda e^\theta - \mu}$ und daraus folgt

$$M(\theta,t) = \left(\frac{\mu\nu(\theta,t)-1}{\lambda\nu(\theta,t)-1} \right)^N \quad (64)$$

wobei

$$\nu(\theta,t) = \frac{(e^\theta - 1)e^{(\lambda - \mu)t}}{\lambda e^\theta - \mu}. \quad (65)$$

Wie zu Beginn ersetzen wir nun e^θ durch z und erhalten für $\lambda \neq \mu$ die Wahrscheinlichkeit erzeugende Funktion des linearen Geburts- und Todesprozesses, gegeben durch

$$P(z,t) = \left(\frac{\mu\omega(z,t)-1}{\lambda\omega(z,t)-1} \right)^N \quad (66)$$

wobei

$$\omega(z, t) = \frac{(z-1)e^{(\lambda-\mu)t}}{\lambda z - \mu}. \quad (67)$$

Für den Fall, dass $X(0) = N = 1$, ist die Wahrscheinlichkeit erzeugende Funktion gegeben durch

$$P(z, t) = \frac{\mu(1 - e^{(\lambda-\mu)t}) - (\lambda - \mu e^{(\lambda-\mu)t})z}{\mu - \lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \lambda(1 - e^{(\lambda-\mu)t})z} \quad (68)$$

und die Koeffizienten von z^i sind gegeben durch

$$\begin{aligned} p_i(t) &= [1 - \alpha(t)][1 - \beta(t)][\beta(t)]^{i-1}, i = 1, 2, \dots \\ p_0(t) &= \alpha(t) \end{aligned} \quad (69)$$

wobei

$$\alpha(t) = \frac{\mu(e^{(\lambda-\mu)t} - 1)}{\lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \mu}, \quad \beta(t) = \frac{\lambda(e^{(\lambda-\mu)t} - 1)}{\lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \mu} \quad (70)$$

Für $X(0) = N > 1$ sind die Zustandswahrscheinlichkeiten etwas komplizierter

$$\begin{aligned} p_i(t) &= \sum_{k=0}^{\min(N,i)} \binom{N}{k} \binom{N+i-k-1}{N-1} \alpha^{N-k} \beta^{i-k} (1 - \alpha - \beta)^k \\ p_0(t) &= \alpha^N \end{aligned} \quad (71)$$

Erwartungswert und Varianz erhält man für $N \geq 1$ wie in Kapitel 1.7, (26), (27)

- $\lambda \neq \mu$

$$m(t) = N e^{(\lambda-\mu)t}, \quad \sigma^2(t) = \frac{N(\lambda+\mu)}{(\lambda-\mu)} e^{(\lambda-\mu)t} (e^{(\lambda-\mu)t} - 1) \quad (72)$$

- $\lambda = \mu$

$$m(t) = N, \quad \sigma^2(t) = 2N\lambda t \quad (73)$$

Anhand des Erwartungswertes sieht man, wie sich die Population mit $X(0) = N$ entwickelt.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = 0, \quad \lambda < \mu \quad (74)$$

$$= N, \quad \lambda = \mu$$

$$= \infty, \quad \lambda > \mu$$

$$(75)$$

[7, S. 91], [4, S. 94] Nun wollen wir die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{i,j}(t)$ ausdrücken. Die Wahrscheinlichkeit erzeugende Funktion ist nun

$$[P(z, t)]^i = \left(\frac{\mu\omega(z, t) - 1}{\lambda\omega(z, t) - 1} \right)^i \quad (76)$$

wobei

$$\omega(z, t) = \frac{(z-1)e^{(\lambda-\mu)t}}{\lambda z - \mu} \quad (77)$$

oder

$$[P(z, t)]^i = \left[\frac{\alpha(t) + [1 - \alpha(t) - \beta(t)]z}{1 - \beta(t)z} \right]^{-i} \quad (78)$$

wobei $\alpha(t), \beta(t)$ definiert sind wie (70). Es gilt

$$[\alpha(t) + [1 - \alpha(t) - \beta(t)]z]^i = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{i}{k} [\alpha(t)]^i [1 - \alpha(t) - \beta(t)]^k z^k$$

und

$$[1 - \beta(t)z]^{-i} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{i+k-1}{k} [\beta(t)]^k z^k, \quad |\beta(t)z| < 1$$

Somit haben wir die Übergangswahrscheinlichkeit

$$p_{i,j}(t) = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \binom{i+j-k-1}{i-1} [\alpha(t)]^{i-k} [\beta(t)]^{j-k} [1 - \alpha(t) + \beta(t)]^k, \quad i \geq j \quad (79)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Population zum Zeitpunkt t ausstirbt, ist gegeben durch

$$p_0(t) = \left(\frac{\mu(e^{(\lambda-\mu)t} - 1)}{\lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \mu} \right)^N \quad (80)$$

Lässt man $t \rightarrow \infty$ gehen, so erhält man

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} p_0(t) &= 1, & \lambda < \mu \\ &= \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^N, & \lambda > \mu \end{aligned} \quad (81)$$

2.1.2 Linearer Geburts- und Todesprozess mit Zuwanderung

[18, S. 361, 368], [4, S. 97], [2], [7, S. 174] Der Unterschied zwischen dem linearen Geburts- und Todesprozess und dem mit Zuwanderung ist, dass in diesem Kapitel zufällige Zugänge mit Zuwanderungsrate v stattfinden. Die Anfangspopulationsgröße ist $X(0) = N$. Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind

$$\begin{aligned} p_{i,j}(\Delta t) &= \text{Prob}\{X(t + \Delta t) = j | X(t) = i\} = \\ &= \begin{cases} (\lambda i + v)\Delta t + o(\Delta t) & , j = i + 1 \\ \mu i \Delta t + o(\Delta t) & , j = i - 1 \\ 1 - [v + (\lambda i + \mu i)]\Delta t + o(\Delta t) & , j = i \\ o(\Delta t) & , j \neq i - 1, i, i + 1 \end{cases}, \end{aligned} \quad (82)$$

für Δt hinreichend klein und $\lambda 0 = v > 0$. Die Zustandswahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} p_i(t + \Delta t) &= [\lambda(i-1) + v]\Delta t p_{i-1}(t) + [1 - ((\lambda i + v) + \mu i)\Delta t]p_i(t) \\ &\quad + \mu(i+1)\Delta t p_{i+1}(t) + o(\Delta t). \end{aligned} \quad (83)$$

Wir erhalten die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{dp_i(t)}{dt} &= [\lambda(i-1) + v]p_{i-1}(t) - [v + (\lambda + \mu)j]p_i(t) + \mu(i+1)p_{i+1}(t), \quad i = 1, 2, \dots \\ \frac{dp_0(t)}{dt} &= -vp_0(t) + \mu p_1(t), \quad i = 0\end{aligned}\quad (84)$$

die die Rückwärts-Kolmogorov Gleichung $dp/dt = Qp$ erfüllen mit der Anfangsbedingung $p_i(0) = \delta_{i,N}$. Unter der Verwendung der Technik der erzeugenden Funktionen können die Wahrscheinlichkeit und Moment erzeugende Funktion hergeleitet werden.

Die partielle Differentialgleichung für die Wahrscheinlichkeit erzeugende Funktion ist

$$\frac{dP(z, t)}{dt} = [\lambda(z-1) + \mu(z^{-1} - 1)]\frac{dP(z, t)}{dz} + v(z-1)P(z, t) \quad (85)$$

mit $P(z, 0) = z^N$ falls $X(0) = N$ und durch Ersetzen von z durch e^θ erhält man

$$\frac{dM(\theta, t)}{dt} = [\lambda(e^\theta - 1) + \mu(e^{-\theta} - 1)]\frac{dM(\theta, t)}{d\theta} + v(e^\theta - 1)M(\theta, t) \quad (86)$$

mit $M(\theta, 0) = e^{N\theta}$ falls $X(0) = N$. Die Wahrscheinlichkeit und Moment erzeugende Funktion erhält man aus

$$\frac{dt}{1} = 1 \frac{-d\theta}{\lambda(e^\theta - 1) + \mu(e^{-\theta} - 1)} = \frac{dM}{v(e^\theta - 1)M} \quad (87)$$

und daher ist

$$dt = \frac{-e^\theta d\theta}{(e^{\theta-1})(\lambda e^\theta) - \mu} \quad (88)$$

und

$$\frac{(e^\theta - 1)e^{(\lambda-\mu)t}}{\lambda e^\theta - \mu} = c_1 \quad (89)$$

$$(\lambda e^\theta - \mu)M = c_2 \quad (90)$$

$$(91)$$

wobei $c_{1,2}$ Konstanten sind.

Nun kann für $\lambda \neq \mu$ die Moment erzeugende Funktion gefunden werden, da aufgrund der Anfangsbedingung $M(\theta, 0) = e^{N\theta}$ gilt, dass $e^{N\theta} = \left(\frac{\mu\nu(\theta, 0)-1}{\lambda\nu(\theta, 0)-1}\right)^N \left(\frac{\mu-\lambda}{\lambda\nu-1}\right)^{\frac{v}{\lambda}}$, wobei $\nu(\theta, t) = \frac{(e^\theta-1)e^{(\lambda-\mu)t}}{\lambda e^\theta - \mu}$ und daraus folgt

$$M(\theta, t) = \frac{(\lambda - \mu)^{\frac{v}{\lambda}} [\mu(e^{(\lambda-\mu)t} - 1) - (\mu e^{(\lambda-\mu)t} - \lambda)e^\theta]^N}{[(\lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \mu) - \lambda(e^{(\lambda-\mu)t} - 1)e^\theta]^{N + \frac{v}{\lambda}}} \quad (92)$$

Sei nun $X(0) = 0$ und wir ersetzen e^θ durch z , um für $\lambda \neq \mu$ die Wahrscheinlichkeit erzeugende Funktion zu erhalten

$$P(z, t) = \left(\frac{\lambda - \mu}{\lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \mu}\right)^{\frac{v}{\lambda}} \left[1 - \frac{\lambda(e^{(\lambda-\mu)t} - 1)}{\lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \mu} z\right]^{-\frac{v}{\lambda}} \quad (93)$$

Man sieht, dass eine negative Binomialverteilung vorliegt und wir erhalten den Erwartungswert

$$m(t) = \frac{v}{\lambda - \mu} (e^{(\lambda-\mu)t} - 1) \quad (94)$$

mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = \frac{v}{\lambda - \mu} e^{(\lambda - \mu)t}, \quad \lambda > \mu \quad (95)$$

$$vt, \quad \lambda = \mu \quad (96)$$

$$\frac{v}{\lambda - \mu}, \quad \lambda < \mu \quad (97)$$

Nun betrachten wir den Fall $\lambda < \mu$, in dem weniger Geburten als Tode stattfinden. Aus (93) erhalten wir

$$P(z, t) = \left(\frac{\mu - \lambda z}{\mu - \lambda} \right)^{-\frac{v}{\lambda}} \quad (98)$$

für $t \rightarrow \infty$ und $e^{(\lambda - \mu)t} \rightarrow 0$.

Nun wollen wir die stationäre Verteilung für den linearen Geburts- und Todesprozess mit Zuwanderung für $\lambda < \mu$ herleiten. Wegen Theorem 2.2 existiert eine stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung, da

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v(v + \lambda) \cdots (v + (k-1)\lambda)}{k! \mu!} < \infty \quad (99)$$

Für $c > 0$, $v = c\lambda$ gilt dann

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c(c+1) \cdots (c+k-1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \quad (100)$$

Dies konvergiert genau dann, wenn $\lambda < \mu$, also existiert eine stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung. Die Wahrscheinlichkeit erzeugende Funktion für die stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung erhält man aus (98) für $t \rightarrow \infty$. Diese ist eine negative Binomialverteilung, wenn $\frac{v}{\mu} > 0$.

Sei $\theta_0 = 1$, $\theta_1 = \frac{v}{\mu}$, $\theta_3 = \frac{v(v+\lambda)(v+2\lambda)}{[\mu(2\mu)(3\mu)]}$ und $\theta_k = \binom{(\frac{v}{\lambda}) + k - 1}{k} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k$ und wir erhalten

$$\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{(\frac{v}{\lambda}) + k - 1}{k} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu} \right)^{-\left(\frac{v}{\lambda}\right)} \quad (101)$$

und somit für $k > 1$

$$\pi_0 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu} \right)^{\frac{v}{\lambda}}, \quad \pi_k = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \frac{\left(\frac{v}{\lambda}\right) \left[\left(\frac{v}{\lambda}\right) + 1\right] \cdots \left[\left(\frac{v}{\lambda}\right) + k - 1\right]}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu} \right)^{\frac{v}{\lambda}} \quad (102)$$

Mit Hilfe der Gleichung (98) kann man, indem $\lambda \rightarrow 0$, also keine Geburten mehr stattfinden, den Todesprozess mit Zuwanderung betrachten. Dazu kommen wir in einem späteren Kapitel. [4, S. 100] Nun zu dem Fall, dass die Zuwanderungsrate immer kleiner wird, $v \rightarrow 0$. So kommt es zwar dazu, dass eine Population ausstirbt, allerdings durch Zuwanderung wieder neue Individuen dazukommen und somit erneut Geburten und Tode stattfinden können. Dafür setzt man $\frac{v}{\lambda} = \gamma$ und schreibt Gleichung (93) um zu

$$P(z, t) = \left(\frac{\lambda - \mu}{\lambda e^{(\lambda - \mu)t} - \mu} \right)^{\gamma} \left[1 - \frac{\lambda(e^{(\lambda - \mu)t} - 1)}{\lambda e^{(\lambda - \mu)t} - \mu} z \right]^{-\gamma} \quad (103)$$

um einfacher den Grenzwert für $\gamma \rightarrow 0$ zu erhalten.

2.1.3 Absorbierender Zustand/Aussterben

[8, S. 237, 309], [18, S. 380], [17, S. 202], [12], [2, S. 262], [21] Die Anfangspopulationsgröße ist $X(0) = i$ und wir wissen, dass die Übergangswahrscheinlichkeit von Zustand $i \rightarrow i+1$ bzw. $i \rightarrow i-1$ gegeben ist durch $\frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}$ bzw. $\frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}$. Mit Hilfe der 'First step analysis' erhalten wir die Absorptionswahrscheinlichkeit im Zustand 0 gegeben durch

$$a_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} a_{i+1} + \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} a_{i-1}, \quad i \geq 1 \quad (104)$$

wobei $a_0 = 1$. Nun erhalten wir durch einfaches Umformen folgende Gleichung

$$(-a_i + a_{i+1}) = \frac{\mu_i}{\lambda_i} (a_i - a_{i-1}) \quad (105)$$

und setzen $\alpha_i = -a_i + a_{i+1}$. Dann ist

$$\alpha_i = \frac{\mu_i}{\lambda_i} \alpha_{i-1} \quad (106)$$

Setzt man nun $\rho_0 = 1$ und $\rho_i = \frac{\prod_{j=1}^i \mu_j}{\prod_{j=1}^i \lambda_j}$ dann ist $\alpha_i = \rho_i \alpha_0$ und es gilt

$$-a_i + a_{i+1} = \rho_i (a_1 - 1), \quad i \geq 1 \quad (107)$$

Also erhalten wir

$$-a_1 + a_n = (a_1 - 1) \sum_{i=1}^{n-1} \rho_i, \quad n > 1 \quad (108)$$

- $0 \leq a_i \leq 1$: Wegen

$$\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i = \infty \quad (109)$$

gilt $a_0 = 1, a_n = 1, \forall n \neq 2$, also ist die Absorption bei 0, unabhängig vom Ausgangszustand, sicher.

- $0 < a_1 < 1$: Es gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i < \infty \quad (110)$$

und für $n \rightarrow \infty$ folgt aus (108), dass $a_1 = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i}$ und ist a_n durch

$$a_n = \frac{\sum_{i=n}^{\infty} \rho_i}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i}, \quad n \geq 1 \quad (111)$$

gegeben ist. Somit ist $a_n \rightarrow 0$ gezeigt. Die Absorptionswahrscheinlichkeit bei 0 von Zustand n sinkt in n , da der Übergang $n \rightarrow 0$ das Besuchen der dazwischenliegenden Zustände erfordert.

Das Ganze nun zusammengefasst in einem Theorem:

Theorem 2.3. *Es sei $\lambda_0 = 0 = \mu_0$ mit der Anfangspopulationsgröße $X(0) = n \geq 1$.*

1. $\mu_i > 0, \lambda_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots$

- $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i}{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_i} = \infty \quad \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} p_0(t) = 1$
- $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i}{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_i} < \infty \quad \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} p_0(t) = \frac{\sum_{i=n}^{\infty} \frac{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i}{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_i}}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i}{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_i}}$

2. $\mu_i > 0, i = 1, 2, \dots, \lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, N-1$ und $\lambda_i = 0, i = N, N+1, \dots$

Dann gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} p_0(t) = 1$

Wir haben bereits die Wahrscheinlichkeit des Aussterbens untersucht und wollen nun die erwartete Zeit bis zum Aussterben betrachten. Es sei $T_{i,i+1}$ die Verweilzeit, die benötigte Zeit für den Zustandswechsel $i \rightarrow i+1$. Die durchschnittliche Verweilzeit in i ist $(\lambda_i + \mu_i)^{-1}$ und ist exponentiell verteilt mit Parameter $\lambda_i + \mu_i$. Wir erhalten nun die erwartete 'first passage time'

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T_{i,i+1}) &= \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} \left(\frac{1}{\lambda_i + \mu_i} \right) + \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \left(\frac{1}{\lambda_i + \mu_i} + \mathbb{E}(T_{i-1,i}) + \mathbb{E}(T_{i,i+1}) \right) \\ &= \frac{1}{\lambda_i + \mu_i} + \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} [\mathbb{E}(T_{i-1,i}) + \mathbb{E}(T_{i,i+1})] \\ &= \frac{1}{\lambda_i} + \frac{\mu_i}{\lambda_i} \mathbb{E}(T_{i-1,i}) \end{aligned} \quad (112)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T_{i,i-1}) &= \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \left(\frac{1}{\lambda_i + \mu_i} \right) + \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} \left(\frac{1}{\lambda_i + \mu_i} + \mathbb{E}(T_{i+1,i}) + \mathbb{E}(T_{i,i-1}) \right) \\ &= \frac{1}{\lambda_i + \mu_i} + \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} [\mathbb{E}(T_{i+1,i}) + \mathbb{E}(T_{i,i-1})] \\ &= \frac{1}{\mu_i} + \frac{\lambda_i}{\mu_i} \mathbb{E}(T_{i+1,i}) \end{aligned} \quad (113)$$

Anhand dieser kann man die erwartete Zeit bis zum Aussterben $\mathbb{E}(T_{i,0})$ herleiten. Es sei $\mathbb{E}(T_{0,0}) = 0$. Die erwartete Zeit bis zum Aussterben sei dann für ein kleines Intervall Δt gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T_{i,0}) &= \lambda_i \Delta t (\mathbb{E}(T_{i+1,0}) + \Delta t) + \mu_i \Delta t (\mathbb{E}(T_{i-1,0}) + \Delta t) \\ &\quad + [1 - (\lambda_i + \mu_i \Delta t)] (\mathbb{E}(T_{i,0}) + \Delta t) + o(\Delta t) \end{aligned} \quad (114)$$

Für $\Delta t \rightarrow 0$ folgt

$$\mathbb{E}(T_{i,0}) = \frac{1}{\lambda_i + \mu_i} + \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} \mathbb{E}(T_{i+1,0}) + \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \mathbb{E}(T_{i-1,0}) \quad (115)$$

und daher gilt $\mathbb{E}(T_{i,i+1}) = \mathbb{E}(T_{i,0}) - \mathbb{E}(T_{i+1,0})$.

Es sei nun

$$\mathbb{E}(T_{n,n+1}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \prod_{j=i+1}^n \frac{\mu_j}{\lambda_j} + \left(\prod_{j=1}^n \frac{\mu_j}{\lambda_j} \right) \mathbb{E}(T_{0,1}) \quad (116)$$

und wenn $\mathbb{E}(T_{n,n+1}) = \mathbb{E}(T_{0,n}) - \mathbb{E}(T_{0,n+1})$ und $\mathbb{E}(T_{0,1}) = \mathbb{E}(T_{0,0}) - \mathbb{E}(T_{0,1})$ gilt und wegen $\rho_0 = 1$ und $\rho_i = \frac{\prod_{i \geq 1} \mu_i}{\prod_{i \geq 1} \lambda_i}$ ist

$$\frac{1}{\rho_n} (\mathbb{E}(T_{0,n}) - \mathbb{E}(T_{0,n+1})) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i \rho_i} - \mathbb{E}(T_{0,1}) \quad (117)$$

Wenn

- $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i \rho_i} = \infty$, dann ist es notwendig, dass $\mathbb{E}(T_{0,1}) = \infty$
- $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i \rho_i} < \infty$, dann ist für $n \rightarrow \infty$

$$\mathbb{E}(T_{0,1}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i \rho_i} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho_n} (\mathbb{E}(T_{0,n}) - \mathbb{E}(T_{0,n+1})) \quad (118)$$

und wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho_n} (\mathbb{E}(T_{0,n}) - \mathbb{E}(T_{0,n+1})) = 0$ ist dann $\mathbb{E}(T_{0,1}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i \rho_i}$

Um das ganze kompakter anzugeben, gibt es ein Theorem:

Theorem 2.4. [18, S. 384], [2, S. 266], [21, S. 13] Es sei für einen Geburts- und Todesprozess in stetiger Zeit mit Anfangsbedingungen $X(0) = n \geq 1$, $\lambda_0 = 0 = \mu_0$ und für $i = 1, 2, \dots$, $\lambda_i > 0$, $\mu_i > 0$. Also ist 0 ein absorbierender Zustand, dh. $\lim_{t \rightarrow \infty} p_0 = 1$. Die erwartete Zeit bis zum Aussterben ist dann gegeben durch

$$\mathbb{E}(T_{n,0}) = \begin{cases} \infty, & \text{für } \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i \rho_i} = \infty \\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i \rho_i} + \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j \rho_j}, & \text{für } \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i \rho_i} < \infty \end{cases}$$

wobei $\rho_0 = 1$ und $\rho_i = \frac{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_i}$.

Dies gilt auch für endlichen Zustandsraum. Man muss beachten, dass $\mathbb{E}(T_{0,n})$ und $\mathbb{E}(T_{n,0})$ nicht das gleiche bedeuten. Denn für $n \rightarrow \infty$ ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(T_{0,n}) = \infty$ und somit erreicht die erwartete Zeit des Aussterbens unendlich und es liegt ein nicht explosiver Prozess vor. Betrachtet man den Ausdruck $\mathbb{E}(T_{n,0})$ mit $\lambda_0 = 0$, dann ist der Zustand 0 absorbierend. Hingegen ist der Zustand 0 nicht absorbierend, wenn $\mathbb{E}(T_{0,n})$ mit $\lambda_0 > 0$ gilt.

Beim Geburts- und Todesprozess mit absorbierendem Zustand liegt keine stationäre Verteilung vor. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist aber möglicherweise für ein längeres Zeitintervall stationär, also spricht man von einer quasi-stationären Verteilung. Diese werden wir nun im folgenden Kapitel betrachten.

2.1.4 Quasi-stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung

[2, S. 274], [19], [21, S. 12] Sei nun $q_j(t)$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung bedingt durch Nicht-Aussterben der Population. Diese ist gegeben durch

$$q_j(t) = \frac{p_j(t)}{1 - p_0(t)} \quad (119)$$

Durch Differenzieren erhält man

$$\frac{dq_j(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{p_j(t)}{1 - p_0(t)} = \frac{dp_j(t)}{dt} \frac{1}{1 - p_0(t)} + \frac{dp_0(t)}{dt} \frac{p_j(t)}{(1 - p_0(t))^2} \quad (120)$$

Angenommen q_j sei eine quasi-stationäre Verteilung, dann ist $q_j(t)$ unabhängig von t und $\frac{dq_j(t)}{dt} = 0$. Durch die Anwendung der Rückwärts-Kolmogorov Gleichung erhalten wir für

$$\bullet \quad j \geq 2: \quad \frac{dq_j(t)}{dt} = \lambda_{j-1} q_{j-1} - (\lambda_j + \mu_j) q_j + \mu_{j+1} q_{j+1} + \mu_1 q_1 q_j$$

- $j = 1$: $\frac{dq_1(t)}{dt} = -(\lambda_1 + \mu_1)q_1 + \mu_2q_2 + \mu_1q_1^2$

Eine Möglichkeit, eine quasi-stationäre Verteilung zu erhalten, ist durch Annäherung einer stationären Verteilung $\tilde{\pi}$ an die quasi-stationäre Verteilung. Da die quasi-stationären Wahrscheinlichkeiten das System von Differentialgleichungen $\frac{dq_j(t)}{dt} = Q_jq_j$ mit $\lambda_0 = 0 = \mu_0$ erfüllen, nehmen wir für $\frac{dq_j(t)}{dt}$ an, dass $\mu_1 = 0$ ist. Daher erhalten wir ein System von Differentialgleichungen $\frac{dq_j(t)}{dt} = \tilde{Q}_j q_j$ mit der Erzeugermatrix

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \dots \\ \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_1 & \dots \\ 0 & \mu_3 & -(\lambda_3 + \mu_3) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Für dieses System existiert nur dann eine eindeutige stationäre Verteilung $\tilde{\pi}$, wenn diese Theorem 2.2. erfüllt. $\tilde{\pi}$ ist dann die angenäherte quasi-stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Nun ein Theorem, das Bedingungen an eine quasi-stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung angibt

Theorem 2.5. [21, S.16] Die Folge $q_j, j \geq 1$ ist eine quasi-stationäre Verteilung genau dann, wenn

- $q_j \geq 0, \forall j \geq 1$ und $\sum_{j \geq 1} q_j = 1$
- $\forall j \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned} \lambda_{j-1}q_{j-1} - (\lambda_j + \mu_j)q_j + \mu_{j+1}q_{j+1} &= -\mu_1q_1q_j \\ -(\lambda_1 + \mu_1)q_1 + \mu_2q_2 &= -\mu_1q_1^2 \end{aligned}$$

Beweis. siehe [21, S.16] □

Definition 12. Sei q eine Wahrscheinlichkeitsverteilung definiert auf dem Zustandsraum $S = \{1, 2, \dots\}$. q ist genau dann eine quasi-stationäre Verteilung, wenn für alle Borel-Mengen $A \subseteq S, \forall t \geq 0$ gilt:

$$\text{Prob}\{X(t) \in A | T_0 > t\} = q(A) \quad (121)$$

wobei $T_0 = \inf\{t > 0, X(t) = 0\}$ der Zeitpunkt des Aussterbens ist.

Definition 13. Der Yaglom Grenzwert ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung φ aus der Menge der Wahrscheinlichkeitsverteilungen definiert auf S . Diese ist definiert durch

$$\lim_{t \rightarrow 0} \text{Prob}\{X(t) \in A | T_0 > t\} = \varphi(A) \quad (122)$$

für $t > 0, A \in S$ und einen Zustand $i > 0$, vorausgesetzt der Grenzwert existiert und ist unabhängig vom Zustand i aus S .

Der Yaglom Grenzwert ist ebenfalls eine quasi-stationäre Verteilung, was auch das folgende Theorem aussagt

Theorem 2.6. [21, S. 7] Angenommen der Yaglom Grenzwert des Prozesses $X(t)$ existiert und ist gleich der Wahrscheinlichkeitsverteilung φ definiert auf S , dann ist dieses auch eine quasi-stationäre Verteilung.

Nun wollen wir die Existenz und Eindeutigkeit der quasi-stationären Verteilung für den Geburts- und Todesprozess zeigen.

Vorab definieren wir eine Folge von orthogonalen Polynomen $\{\mathcal{Q}_n(x)\}$ wie in Kapitel 1.6. Es sei $\mathcal{Q}_1(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Für $n \geq 2$ sei

$$\begin{aligned}\lambda_n \mathcal{Q}_{n+1}(x) &= (\lambda_n + \mu_n - x) \mathcal{Q}_n(x) - \mu_{n-1} \mathcal{Q}_{n-1}(x) \\ \lambda_1 \mathcal{Q}_2(x) &= \lambda_1 + \mu_1 - x\end{aligned}\tag{123}$$

Es gilt $x \leq \xi_1 \Leftrightarrow \mathcal{Q}_n(x) > 0$, $\forall n \geq 1$, wobei $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_1} = \xi_1$ und x_{n_1} das kleinste der Polynome $\mathcal{Q}_n$, die für $n-1$ ungleich 0 sind, ist.

Nun stellen wir einen Zusammenhang zwischen der Folge θ_j , $j \geq 1$ aus Kapitel 2.1 und der quasi-stationären Verteilung $q_j, j \geq 1$ her.

Theorem 2.7. [21, S. 18] Die Folge θ_j , $j \geq 1$ gegeben durch $\theta_0 = 1$ und $\theta_j = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_j}$, $j \geq 1$. Die quasi-stationäre Verteilung erfüllt $\forall j \geq 1$

$$q_j = q_1 \theta_j \mathcal{Q}_j(\mu_1 q_1)\tag{124}$$

Beweis. Der Beweis folgt aus Theorem 2.5 und (123). □

Es gibt keine quasi-stationäre Verteilung, wenn $\xi_1 = 0$. Diese Aussage erhalten wir aus der Eigenschaft

$$\mathcal{Q}_j(\mu_1 q_1) \geq 0, \forall j \geq 1 \Leftrightarrow 0 < \mu_1 q_1 \leq \xi_1,\tag{125}$$

wenn für ein j , $q_j \geq 0$ und für genau ein j , $q_j > 0$ ist. Sei nun $S_n = \frac{1}{\lambda_n \theta_n} \sum_{i=n+1}^{\infty} \theta_i$. Dann gilt für $S_n = \infty$

- Es existiert keine quasi-stationäre Verteilung, wenn $\xi_1 = 0$.
- Es existieren unendlich viele quasi-stationäre Verteilungen, gegeben durch $\tilde{q}_j(x) = \frac{1}{\mu_1} \theta_j x \mathcal{Q}_j(x)$ mit $0 < x \leq \xi_1$ und $\mu_1 q_1 = x$, wenn $\xi_1 > 0$.

Ist aber $S_n < \infty$, dann finden wir einen Yaglom Grenzwert, da $\xi_1 > 0$ und eine eindeutige quasi-stationäre Verteilung für $j \geq 1$ existiert. Diese ist definiert durch $q_j(x) = \frac{1}{\mu_1} \theta_j \xi_1 \mathcal{Q}_j(\xi_1)$.

[19, S. 29] Im linearen Geburts- und Todesprozess kann man mit Hilfe der erzeugenden Funktionen eine quasi-stationäre Verteilung erhalten. Wie in Kapitel 2.1.1. haben wir die Geburts- bzw. Todesrate gegeben durch λ bzw. μ mit $0 < \lambda < \mu$, für die gilt $\lambda_i = i\lambda$, $\mu_i = i\mu$, $i \geq 0$.

Die Wahrscheinlichkeit erzeugende Funktion ist gegeben durch

$$[P(z, t)]^i = \left(\frac{\mu \omega(z, t) - 1}{\lambda \omega(z, t) - 1} \right)^i\tag{126}$$

mit

$$\omega(z, t) = \frac{(z-1)e^{(\lambda-\mu)t}}{\lambda z - \mu} \quad (127)$$

Setzt man $\iota = e^{(\lambda-\mu)t}$, $\kappa = \frac{\lambda}{\mu}$ dann können wir obige Gleichung umschreiben in

$$[P(z, t)]^i = \left(\frac{1 - \iota + (\iota - \kappa)z}{1 - \iota\kappa - z\kappa(1 - \iota)} \right)^i \quad (128)$$

mit $i \geq 1$, $|z| \leq 1$.

Es gilt dann

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \iota^{-1}(P(z, t) - 1) &= iA(z), \quad i \geq 1 \\ A(z) &= \frac{(1 - \kappa)(z - 1)}{1 - \kappa z}, \quad 0 \leq z \leq 1 \end{aligned} \quad (129)$$

Da die Wahrscheinlichkeit, dass die Population zum Zeitpunkt T nicht ausstirbt, gegeben ist durch $Prob\{T > t\} = P(1, t) - P(0, t)$. Mit dieser Bedingung erhält man aus $P(z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} P_{i,j}(t)z^j$ und (129)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} Prob\{X(t) = j | T > t\} z^j = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P(z, t) - P(0, t)}{P(1, t) - P(0, t)} = \frac{A(z) - A(0)}{A(1) - A(0)} = \frac{z - z\kappa}{1 - z\kappa} \quad (130)$$

und somit ist die quasi-stationäre Verteilung $q_j = \lim_{t \rightarrow \infty} Prob\{X(t) = j | T > t\} = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j-1}$, $j \geq 1$ eine geometrische Verteilung mit Parameter $\frac{\lambda}{\mu}$.

2.1.5 Inhomogener Geburts- und Todesprozess

[2, S. 278], [4, S. 110], [7, S. 169], [24, S. 6] Der Vollständigkeit halber werfen wir einen kurzen Blick auf den inhomogenen Geburts- und Todesprozess. Dieser ist im Gegensatz zum homogenen Prozess abhängig von der Zeit. Die Geburts- bzw. Todesraten sind dann gegeben durch $\lambda(i, t)$ bzw. $\mu(i, t)$. Die Übergangswahrscheinlichkeiten von Zustand i nach $i+1$ oder $i-1$ sind dann

$$p_{i,j}(\Delta t) = \begin{cases} \lambda(i, t)\Delta t + o(\Delta t) & , j = i+1 \\ \mu(i, t)\Delta t + o(\Delta t) & , j = i-1 \\ 1 - (\lambda(i, t) + \mu(i, t))\Delta t + o(\Delta t) & , j = i \\ o(\Delta t) & , j \neq i-1, i, i+1 \end{cases}$$

für Δt hinreichend klein.

Dadurch erhalten wir die Zustandswahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt $t + \Delta t$

$$\begin{aligned} p_i(t + \Delta t) &= (\lambda(i-1, t)\Delta t + o(\Delta t))p_{i-1}(t) + (\mu(i+1, t)\Delta t + o(\Delta t))p_{i+1}(t) \\ &\quad + (1 - (\lambda(i, t) + \mu(i, t))\Delta t + 2o(\Delta t))p_i(t) \end{aligned} \quad (131)$$

wodurch wir zu den Differentialgleichungen, welche die Rückwärts-Kolmogorov Gleichung erfüllen,

$$\begin{aligned} \frac{dp_i(t)}{dt} &= \lambda(i-1, t)p_{i-1}(t) + \mu(i+1, t)p_{i+1}(t) - (\lambda(i, t) + \mu(i, t))p_i(t) \\ \frac{dp_0(t)}{dt} &= \mu(1, t)p_1(t) - (\lambda(0, t) + \mu(0, t))p_0(t) \end{aligned} \quad (132)$$

gelangen. Wegen $P(z, t) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(t) z^i$ haben wir

$$\frac{dP(z, t)}{dt} = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda(i-1, t) p_{i-1}(t) z^i + \sum_{i=0}^{\infty} \mu(i+1, t) p_{i+1}(t) z^i - \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda(i, t) + \mu(i, t)) p_i(t) z^i \quad (133)$$

die partielle Differentialgleichung der Wahrscheinlichkeit erzeugenden Funktion. Nun kann man Erwartungswert und Varianz berechnen.

Linearer inhomogener Geburts- und Todesprozess: [7, S. 169], [2, S. 278], [24, S. 12] Wie auch im homogenen Fall gibt es einen linearen inhomogenen Geburts- und Todesprozess. Hier sind ähnlich dem linearen homogenen Prozess die Übergangswahrscheinlichkeiten von Zustand i nach $i+1$ oder $i-1$ gegeben durch

$$p_{i,j}(\Delta t) = \begin{cases} i\lambda(t)\Delta t + o(\Delta t) & , j = i+1 \\ i\mu(t)\Delta t + o(\Delta t) & , j = i-1 \\ 1 - (i\lambda(t) + i\mu(t))\Delta t + o(\Delta t) & , j = i \\ o(\Delta t) & , j \neq i-1, i, i+1 \end{cases}$$

für Δt hinreichend klein. Und das System der Differential Gleichungen ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{dp_i(t)}{dt} &= (i-1)\lambda(t)p_{i-1}(t) + (i+1)\mu(t)p_{i+1}(t) - i(\lambda(t) + \mu(t))p_i(t) \\ \frac{dp_0(t)}{dt} &= \mu(t)p_1(t) \end{aligned} \quad (134)$$

Wir erhalten wie im nichtlinearen Prozess die partielle Differentialgleichung der Wahrscheinlichkeit erzeugenden Funktion

$$\begin{aligned} \frac{dP(z, t)}{dt} &= \sum_{i=0}^{\infty} (i-1)\lambda(t)p_{i-1}(t)z^i + \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)\mu(t)p_{i+1}(t)z^i - \sum_{i=0}^{\infty} i(\lambda(t) + \mu(t))p_i(t)z^i \\ &= \lambda(t)z^2 \sum_{i=0}^{\infty} ip_{i-1}(t)z^{i-1} + \mu(t) \sum_{i=0}^{\infty} ip_{i+1}(t)z^{i-1} - (\lambda(t) + \mu(t))z \sum_{i=0}^{\infty} ip_i(t)z^{i-1} \\ &= \lambda(t)z^2 \frac{dP(z, t)}{dz} + \mu(t) \frac{dP(z, t)}{dz} - (\lambda(t) + \mu(t))z \frac{dP(z, t)}{dz} \end{aligned} \quad (135)$$

und daraus folgt

$$\frac{dP(z, t)}{dt} = (z-1)(\lambda(t)z - \mu(t)) \frac{dP(z, t)}{dz} \quad (136)$$

mit der Anfangsbedingung $P(z, 0) = z^N$. Die Wahrscheinlichkeit erzeugende Funktion ist

$$P(z, t) = \left[1 + \frac{1}{\frac{e^{\varrho(t)}}{z-1} - \int_0^t \lambda(\varsigma) e^{\varrho(\varsigma)} d\varsigma} \right]^N \quad (137)$$

wobei $\varrho(t) = \int_0^t [\mu(\varsigma) - \lambda(\varsigma)] d\varsigma$. Wodurch man zu den Zustandswahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} p_i(t) &= \sum_{k=0}^{\min(N,i)} \binom{N}{k} \binom{N+i-k-1}{N-1} \alpha^{N-k} \beta^{i-k} (1-\alpha-\beta)^k \\ p_0(t) &= \alpha^N \end{aligned} \quad (138)$$

mit $\alpha = 1 - \frac{1}{e^{\varrho(t)} + A(t)}$, $\beta = 1 - \frac{e^{\varrho(t)}}{e^{\varrho(t)} + A(t)}$, $A(t) = \int_0^t \lambda(\varsigma) e^{\varrho(\varsigma)} d\varsigma$ gelangt.

Die Wahrscheinlichkeit des Aussterbens ist dann gegeben durch

$$p_0(t) = \left[1 - \frac{1}{e^{\varrho(t)} + A(t)} \right]^N = \left[\frac{\int_0^t \mu(\varsigma) e^{\varrho(\varsigma)} d\varsigma}{1 + \int_0^t \mu(\varsigma) e^{\varrho(\varsigma)} d\varsigma} \right]^N \quad (139)$$

und somit gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} p_0(t) = 1$ genau dann, wenn $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \mu(\varsigma) e^{\varrho(\varsigma)} d\varsigma = \infty$ gilt.

2.1.6 Multidimensionaler Geburts- und Todesprozess

[4, S. 119], [7, S. 175, 204], [9, S. 189] Ein multidimensionaler Geburts- und Todesprozess ist zum Beispiel ein Geburts- und Todesprozess mit zwei Geschlechtern, dh. die Population setzt sich aus männlichen $Y(t)$ und weiblichen $X(t)$ Individuen zum Zeitpunkt $t \geq 0$ zusammen. Gebären kann nur ein weibliches Individuum. λ_1 bzw. λ_2 steht für die Rate, mit der ein weibliches bzw. männliches Individuum geboren wird und μ_1 bzw. μ_2 für die Sterberate eines weiblichen bzw. männlichen Individuums. Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind dann gegeben durch

$$\begin{aligned} p_{(k,l),(i,j)}(\Delta t) &= \text{Prob}\{X(t+\Delta t) = k, Y(t+\Delta t) = l | X(t) = i, Y(t) = j\} = \\ &= \begin{cases} i\lambda_1\Delta t + o(\Delta t) & , k = i+1, l = j \\ i\lambda_2\Delta t + o(\Delta t) & , k = i, l = j+1 \\ i\mu_1\Delta t + o(\Delta t) & , k = i-1, l = j \\ j\mu_2\Delta t + o(\Delta t) & , k = i, l = j-1 \\ 1 - [i\lambda_1 + i\lambda_2 + i\mu_1 + j\mu_2]\Delta t + o(\Delta t) & , k = i, l = j \\ o(\Delta t) & , \text{sonst} \end{cases} \end{aligned} \quad (140)$$

Diese erfüllen die Vorwärts-Kolmogorov Gleichung, sodass man die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{dp_{(i,j)}(t)}{dt} &= (i-1)\lambda_1 p_{(i-1,j)}(t) + i\lambda_2 p_{(i,j-1)}(t) \\ &\quad + (i+1)\mu_1 p_{(i+1,j)}(t) + (j+1)\mu_2 p_{(i,j+1)}(t) \\ &\quad - [i\lambda_1 + i\lambda_2 + i\mu_1 + j\mu_2] p_{(i,j)}(t) \end{aligned}$$

erhält. Man erhält dann die Wahrscheinlichkeit erzeugende Funktion für den Multidimensionalen Prozess $P(z_1, z_2, t) = \sum_{i,j=0}^{\infty} z_1^i z_2^j p_{(i,j)}(t)$ und somit

$$\begin{aligned} \frac{dP(z_1, z_2, t)}{dt} = & [-\mu_1 z_1 - (\lambda_1 + \lambda_2) z_1 + \mu_1 + \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_1 z_2] \frac{dP(z_1, z_2, t)}{dz_1} \\ & + \mu_2 (1 - z_2) \frac{dP(z_1, z_2, t)}{dz_2} \end{aligned}$$

Um die Kumulanten erzeugende Funktion zu erhalten, setzt man $z_1 = e^{-\theta_1}$, $z_2 = e^{-\theta_2}$ und es ist $K(\theta_1, \theta_2, t) = \log P(z_1, z_2, t)$. Und die partielle Differentialgleichung ist

$$\begin{aligned} \frac{dK(\theta_1, \theta_2, t)}{dt} = & [\mu_1 + \lambda_1 + \lambda_2 - \mu_1 - \lambda_1 e^{-\theta_1} + \lambda_2 e^{-\theta_2}] \frac{dK(\theta_1, \theta_2, t)}{d\theta_1} \\ & - \mu_2 (-1 + e^{-\theta_2}) \frac{dK(\theta_1, \theta_2, t)}{d\theta_2} \end{aligned}$$

Wegen (31), (32), (33) und $m_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} k p_{(k,l)}(t)$ bzw. $m_Y(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} l p_{(k,l)}(t)$ und $\sigma_X^2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} k^2 p_{(k,l)}(t) - m_X^2(t)$ bzw. $\sigma_Y^2(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} l^2 p_{(k,l)}(t) - m_Y^2(t)$ erhalten wir die erwartete Anzahl von Individuen des jeweiligen Geschlechts zum Zeitpunkt t . Die erwartete Anzahl von weiblichen Individuen ist

$$m_X(t) = N_1 e^{(\lambda_1 - \mu_1)t} \quad (141)$$

und die erwartete Anzahl der männlichen Individuen ist

$$m_Y(t) = \frac{\lambda_2 N_1}{\lambda_1 - \mu_1 + \mu_2} e^{(\lambda_1 - \mu_1)t} + \left(N_2 - \frac{\lambda_2 N_1}{\lambda_1 - \mu_1 + \mu_2} \right) e^{-\mu_2 t} \quad (142)$$

wobei $X(0) = N_1$ die Anfangszahl der weiblichen und $Y(0) = N_2$ die der männlichen Individuen der Population.

2.2 Geburtsprozess

[2], [4], [7], [18], [17] Beim Geburtsprozess ist im Gegensatz zum Geburts- und Todesprozess das einzige Ereignis, das stattfinden kann, eine Geburt, dh. es findet ein Wechsel von Zustand i nach $i+1$ oder keine Änderung statt. Die Anfangspopulationsgröße ist $X(0) = 0$.

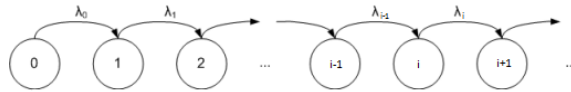


Abbildung 4: Geburtsprozess

Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind gegeben durch

$$\begin{aligned} p_{i,j}(\Delta t) = & \text{Prob}\{X(t + \Delta t) = j | X(t) = i\} = \\ = & \begin{cases} \lambda_i \Delta t + o(\Delta t) & , j = i + 1 \\ 1 - \lambda_i \Delta t + o(\Delta t) & , j = i \\ 0 & , j \neq i, i + 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (143)$$

für Δt hinreichend klein und mit der Anfangsbedingung $p_{i,j}(0) = \delta_{i,j}$. Wir erhalten ein System von Differentialgleichungen

$$\frac{dp_{i,j}(t)}{dt} = -\lambda_j p_{i,j}(t) + \lambda_{j-1} p_{i,j-1}(t), \quad j > i, \quad i, j = 1, 2, \dots \quad (144)$$

$$\frac{dp_{i,j}(t)}{dt} = -\lambda_i p_{i,j}(t) + \lambda_i p_{i+1,j}(t), \quad j > i, \quad i, j = 1, 2, \dots \quad (145)$$

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda_0 p_0(t)$$

wobei (145) die Vorwärts- und (144) die Rückwärts-Kolmogorov Gleichung erfüllt. Die Wahrscheinlichkeit einer Geburt zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} p_{i,j}(t + \Delta t) = & p_{i,j}(t) p_{j,j}(\Delta t) + p_{i,j+1}(t) p_{j+1,j}(\Delta t) \\ & + \sum_{k \neq j-1, j, j+1} p_{i,k}(t) p_{k,j}(\Delta t), \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} p_{i,j}(t + \Delta t) = & p_{i,i}(\Delta t) p_{i,j}(t) + p_{i,i-1}(\Delta t) p_{i-1,j}(t) \\ & + \sum_{k \neq i-1, i, i+1} p_{i,k}(\Delta t) p_{k,j}(t), \end{aligned}$$

wobei der letzte Term, wie in Kapitel 2.1 schon gezeigt wurde, $\leq o(\Delta t)$ ist. Setzt man die Übergangswahrscheinlichkeiten (143) ein, erhält man

$$p_{i,j}(t + \Delta t) = p_{i,j-1}(t) \lambda_{j-1} \Delta t + p_{i,j}(t) [1 - \lambda_j \Delta t] + o(\Delta t) \quad (146)$$

oder

$$p_{i,j}(t + \Delta t) = \lambda_i \Delta t p_{i+1,j}(t) + [1 - \lambda_i \Delta t] p_{i,j}(t) + o(\Delta t) \quad (147)$$

Die Erzeugermatrix ist

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Im Geburtsprozess gilt für die Verweilzeit T_i mit $S_k = \sum_{i=0}^{k-1} T_i$

$$p_{i,j}(t) = \text{Prob}\left\{\sum_{i=0}^{j-1} T_i \leq t < \sum_{i=0}^j T_i\right\} \quad (148)$$

Wegen der dritten Gleichung im oben erwähnten System von Differentialgleichungen weiß man, dass die Wahrscheinlichkeit, dass keine Geburt stattfindet, durch

$$p_0(t) = e^{-\lambda_0 t}, \quad t > 0 \quad (149)$$

gegeben ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Sprungzeitpunkt $\leq t$ ist, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass zum Zeitpunkt t eine Geburt stattfindet, dh

$$\text{Prob}\{T_0 \leq t\} = 1 - \text{Prob}\{X(t) = 0\} = 1 - e^{-\lambda_0 t} \quad (150)$$

Wie auch im Geburts- und Todesprozess haben die Verweilzeiten T_i eine exponentielle Verteilung mit Parameter λ_i .

2.2.1 Linearer Geburtsprozess/Yule Prozess

[2], [4], [7, S. 77], [18], [17] Der lineare Geburtsprozess oder auch Yule-Prozess ist ein Spezialfall des Geburtsprozesses. Hier wird angenommen, dass in einem bestimmten Zeitintervall jedes Individuum die Möglichkeit einer Geburt hat und nicht, so wie im Geburtsprozess, nur eine Geburt stattfinden kann. Wie auch schon in Kapitel 2.1.1 setzten wir für den linearen Geburtsprozess $\lambda_i = \lambda i$ für $\lambda > 0$. Die Anfangspopulationsgröße ist $X(0) = N$.

$$p_{i,j}(\Delta t) = \text{Prob}\{X(t + \Delta t) = j | X(t) = i\} = \begin{cases} \lambda i \Delta t + o(\Delta t) & , j = i + 1 \\ 1 - \lambda i \Delta t + o(\Delta t) & , j = i \\ 0 & , j \neq i, i + 1 \end{cases}, \quad (151)$$

für Δt hinreichend klein. Die Erzeugermatrix ist

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -2\lambda & 2\lambda & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -3\lambda & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Die Zustandswahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ ist gegeben durch

$$p_i(t + \Delta t) = \lambda(i - 1)\Delta t p_{i-1}(t) + [1 - \lambda i \Delta t]p_i(t) + o(\Delta t). \quad (152)$$

und die Differentialgleichungen sind

$$\begin{aligned} \frac{dp_i(t)}{dt} &= \lambda(i - 1)p_{i-1}(t) - \lambda i p_i(t), \quad i = N + 1, \dots \\ \frac{dp_i(t)}{dt} &= 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N - 1 \end{aligned} \quad (153)$$

mit der Anfangsbedingung $p_i(0) = \delta_{i,N}$. Die Rückwärts-Kolmogorov Gleichung $dp/dt = Qp$ wird von (153) erfüllt. Es kann wie in Kapitel 2.1.1. mit Hilfe der erzeugenden Funktionen die Wahrscheinlichkeit und Moment erzeugende Funktion angegeben werden. Die partielle Differentialgleichung der Moment erzeugenden Funktion ist

$$\frac{dM}{dt} = \lambda(e^\theta - 1) \frac{dM}{d\theta} \quad (154)$$

mit der Anfangsbedingung $M(\theta, 0) = e^{N\theta}$ für $X(0) = N$. Durch Umformen gelangen wir zu

$$\frac{dt}{1} = \frac{d\theta}{-\lambda(e^\theta - 1)} = \frac{dM}{d\theta} \quad (155)$$

und

$$dt = \frac{e^{-\theta} d\theta}{-\lambda(1 - e^\theta)} \quad (156)$$

Durch Integration folgt

$$\begin{aligned} t &= -\frac{1}{\lambda} \log(1 - e^{-\theta}) + c \\ e^{\lambda t} (1 - e^{-\theta}) &= c \end{aligned}$$

wobei c eine Konstante ist. Es gilt nun wegen der Anfangsbedingung $M(\theta, 0) = e^{N\theta}$, dass $e^{N\theta} = (1 - (1 - e^{-\theta}))^{-N}$ und daraus folgt

$$M(\theta, t) = (1 - e^{\lambda t}(1 - e^{-\theta}))^{-N} \quad (157)$$

die Moment erzeugende Funktion. Nun ersetzt man wieder e^θ durch z , um die Wahrscheinlichkeit erzeugende Funktion

$$P(z, t) = (1 - e^{\lambda t}(1 - z^{-1}))^{-N} \quad (158)$$

zu erhalten. Sei nun $X(0) = 1$, dann ist $P(z, t) = \frac{ze^{-\lambda t}}{1 - (1 - e^{-\lambda t})z}$ und die Zustandswahrscheinlichkeit ist dann $p_i(t) = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{i-1}$. Es ist zu sehen, dass die Wahrscheinlichkeit erzeugende Funktion einer negativen Binomialverteilung entspricht.

Nun wollen wir, wie im linearen Geburts- und Todesprozess, mit Hilfe der Wahrscheinlichkeit erzeugenden Funktion die Übergangswahrscheinlichkeiten angeben. Sei $X(0) = i$ die Anfangspopulationsgröße.

$$[P(z, t)]^i = \left(\frac{\alpha(t)z}{1 - (\beta(t)z)} \right)^i \quad (159)$$

wobei $\alpha(t) = e^{-\lambda t}$ und $\beta(t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Und somit erhalten wir die Übergangswahrscheinlichkeit

$$p_{i,j}(t) = \begin{cases} \binom{j-1}{j-i} e^{-i\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{j-i}, & j \geq i \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (160)$$

Erwartungswert und Varianz sind dann

$$m(t) = ie^{\lambda t}, \quad \sigma^2(t) = ie^{\lambda t}(e^{\lambda t} - 1) \quad (161)$$

Aus (112) folgt, dass die erwartete Zeit, um von Zustand i zu $i+1$ zu gelangen, für den linearen Geburtsprozess gegeben ist durch

$$\mathbb{E}(T_{i,i+1}) = \frac{1}{\lambda_i} \quad (162)$$

für $\lambda_i = \lambda i$.

Seien nun die Zustände $n < m$. Die erwartete Zeit $\mathbb{E}(T_{n,m}) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{m-1} \right)$ hat die Grenzen $\log\left(\frac{m}{n}\right) \leq \sum_{i=n}^{m-1} \frac{1}{i} \leq \log\left(\frac{m-1}{n-1}\right)$. Wegen $\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^k \frac{1}{i} - \log(k) \right] = \gamma$, wobei γ die Euler'sche Zahl bezeichnet, kann man die erwartete Zeit wie folgt annähern:

$$\mathbb{E}(T_{n,m}) \approx \frac{1}{\lambda} \log\left(\frac{m}{n}\right) \quad (163)$$

2.2.2 Explosiver Geburtsprozess

[2], [4, S. 89], [7, S. 80], [11, S. 451], [8, S. 288], [18, S. 337], [9, S. 162], [10, S. 53] Ein Geburtsprozess, dessen Populationsgröße in einem endlichen Zeitintervall gegen ∞ geht, nennt man *explosiv*. Das ist dann der Fall, wenn die Geburtenrate λ_i , die vom Zustand i des Prozesses zum Zeitpunkt t abhängig ist, schnell ansteigt und die Wahrscheinlichkeit eines Überganges von Zustand i in j kleiner 1 ist, also

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j}(t) < 1 \quad (164)$$

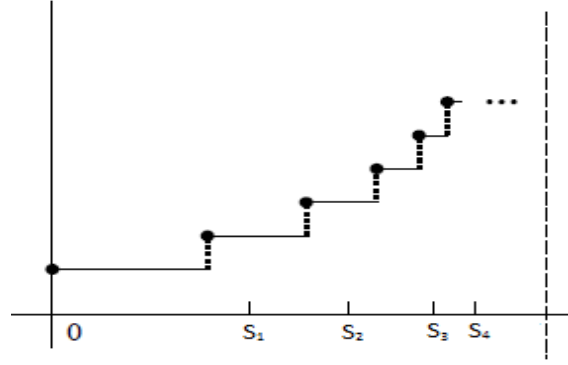


Abbildung 5: Sprungzeiten für den explosiven Geburtsprozess

T sei die Explosionszeit mit Verweilzeiten T_i , $T = \sum_{i=0}^{\infty} T_i$ und in diesem Fall $< \infty$. $S = \sup_i \{S_i\}$, $i = 0, 1, 2, \dots$ sind die Sprungzeiten.

Der Geburtsprozess ist also genau dann *explosiv*, wenn

$$\text{Prob}\{S < \infty | X(0) = i\} > 0 \quad \text{oder} \quad \text{Prob}\{T < \infty | X(0) = i\} > 0. \quad (165)$$

Also gilt

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j}(T) < 1 \quad (166)$$

für $T < \infty$. Ist aber $\sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j} = 1$, $\forall t \geq 0$, dann ist der Geburtsprozess *nicht explosiv*.

Nun folgt ein Theorem, das die Bedingung für die Geburtenrate angibt:

Theorem 2.8. [7, S. 81] Für einen Geburtsprozess mit Parameter λ_i gilt $\sum_{i=0}^{\infty} p_i(t) = 1, \forall t$ genau dann, wenn $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \infty$.

2.2.3 Linearer inhomogener Geburtsprozess/Polya Prozess

[4, S. 107], [7, S. 82] Wie schon für den linearen Geburts- und Todesprozess wollen wir auch hier einen kurzen Blick auf den inhomogenen linearen Geburtsprozess werfen. Die Übergangswahrscheinlichkeit sei

$$p_{i,j}(\Delta t) = \begin{cases} \lambda \left(\frac{1+\alpha i}{1+\alpha \lambda t} \right) \Delta t + o(\Delta t) & , j = i+1 \\ 1 - \lambda \left(\frac{1+\alpha i}{1+\alpha \lambda t} \right) \Delta t - o(\Delta t) & , j = i \\ 0 & , j \neq i, i+1 \end{cases},$$

für Δt hinreichend klein und α, λ sind Konstanten. Dadurch erhalten wir die Zustandswahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt $t + \Delta t$

$$p_i(t + \Delta t) = \left(\lambda \left(\frac{1+\alpha(i-1)}{1+\alpha \lambda t} \right) \Delta t + o(\Delta t) \right) p_{i-1}(t) + \left(1 - \lambda \left(\frac{1+\alpha i}{1+\alpha \lambda t} \right) \Delta t - o(\Delta t) \right) p_i(t) \quad (167)$$

Das System der Differentialgleichungen, welche die Rückwärts-Kolmogorov Gleichung erfüllen, ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\frac{dp_i(t)}{dt} &= 1 - \lambda \left(\frac{1 + \alpha(i-1)}{1 + \alpha\lambda t} \right) p_{i-1}(t) - \lambda \left(\frac{1 + \alpha i}{1 + \alpha\lambda t} \right) p_i(t) \\ \frac{dp_0(t)}{dt} &= - \left(\frac{\lambda}{1 + \alpha\lambda t} \right) p_0(t)\end{aligned}\quad (168)$$

Und wieder erhalten wir mittels

$$\frac{dM(\theta, t)}{dt} = \frac{\lambda(e^\theta - 1)}{1 + \lambda\alpha t} \left(M(\theta, t) + \alpha \frac{dM(\theta, t)}{d\theta} \right) \quad (169)$$

die Moment erzeugende Funktion

$$M(\theta, t) = [1 - \lambda\alpha t(e^\theta - 1)]^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (170)$$

Durch $e^\theta = z$ erhalten wir die Wahrscheinlichkeit erzeugende Funktion

$$P(z, t) = [1 - \lambda\alpha t(z - 1)]^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (171)$$

und man sieht, dass wieder eine negative Binomialverteilung vorliegt. Die Zustandswahrscheinlichkeit ist

$$p_i(t) = \frac{(\lambda t)^i}{i!} (1 + \lambda\alpha t)^{-i-\frac{1}{\alpha}} \prod_{k=1}^{i-1} (1 + k\alpha), \quad i = 1, 2, \dots \quad (172)$$

Erwartungswert und Varianz können dann einfach berechnet werden.

2.3 Todesprozess

[2], [4], [9], [7], [17], [18] Im Gegensatz zum Geburtsprozess wird beim Todesprozess angenommen, dass das einzige stattfindende Ereignis ein Tod ist. Es ist ein Zustandswechsel nur von der Form $i \rightarrow i-1$ möglich. Wir beginnen bei einer Anfangspopulationsgröße $X(0) = N, N \geq 1$.

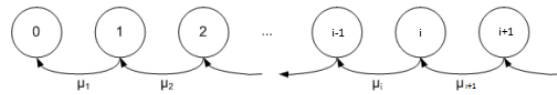


Abbildung 6: Todesprozess

Für diesen Prozess sind die Übergangswahrscheinlichkeiten gegeben durch

$$\begin{aligned}p_{i,j}(\Delta t) &= \text{Prob}\{X(t + \Delta t) = j | X(t) = i\} = \\ &= \begin{cases} \mu_i \Delta t + o(\Delta t) & , j = i-1 \\ 1 - \mu_i \Delta t + o(\Delta t) & , j = i \\ 0 & , j \neq i, i-1 \end{cases},\end{aligned}\quad (173)$$

für Δt hinreichend klein und mit der Anfangsbedingung $p_{i,j}(0) = \delta_{i,j}$. Auch im Todesprozess werden die Vorwärts- und Rückwärts-Kolmogorov Gleichungen erfüllt und man erhält ein System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{dp_{i,j}(t)}{dt} &= -\mu_j p_{i,j}(t) + \mu_{j+1} p_{i,j+1}(t), & j > i, \quad i, j = 1, 2, \dots \\ \frac{dp_{i,j}(t)}{dt} &= -\mu_i p_{i,j}(t) + \mu_i p_{i-1,j}(t), & j > i, \quad i, j = 1, 2, \dots \\ \frac{dp_N(t)}{dt} &= -\mu_N p_N(t)\end{aligned}\tag{174}$$

Die Wahrscheinlichkeit eines Todes zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}p_{i,j}(t + \Delta t) &= p_{i,j}(t)p_{j,j}(\Delta t) + p_{i,j+1}(t)p_{j+1,j}(\Delta t) \\ &\quad + \sum_{k \neq j-1, j, j+1} p_{i,k}(t)p_{k,j}(\Delta t),\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}p_{i,j}(t + \Delta t) &= p_{i,i}(\Delta t)p_{i,j}(t) + p_{i,i-1}(\Delta t)p_{i-1,j}(t) \\ &\quad + \sum_{k \neq i-1, i, i+1} p_{i,k}(\Delta t)p_{k,j}(t),\end{aligned}$$

wobei der letzte Term, wie in Kapitel 2.1 schon gezeigt wurde, $\leq o(\Delta t)$ ist.

Setzt man die Übergangswahrscheinlichkeiten (173) ein, so erhält man

$$p_{i,j}(t + \Delta t) = p_{i,j+1}(t)\mu_{j+1}\Delta t + p_{i,j}(t)[1 - \mu_j\Delta t] + o(\Delta t)\tag{175}$$

oder

$$p_{i,j}(t + \Delta t) = \mu_{i+1}\Delta t p_{i+1,j}(t) + [1 - \mu_i\Delta t]p_{i,j}(t) + o(\Delta t)\tag{176}$$

Die Erzeugermatrix ist

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -\mu_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -\mu_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -\mu_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Wegen $\frac{dp_N(t)}{dt}$ weiß man, dass die Wahrscheinlichkeit, dass kein Tod stattfindet, durch

$$p_N(t) = e^{-\mu_N t}, \quad t > 0\tag{177}$$

gegeben ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass zum Zeitpunkt t ein Tod stattfindet, ist dann

$$Prob\{T_N > t\} = e^{-\mu_N t}\tag{178}$$

Wie auch im Geburts- und Todesprozess haben die Verweilzeiten T_i eine exponentielle Verteilung mit Parameter μ_i .

2.3.1 Linearer Todesprozess

[2], [4, S. 90], [7, S. 85], [18] Beim linearen Todesprozess setzt man nun, wie bereits in Kapitel 2.1.1. und 2.2.1., die Variable eines Todes $\mu_i = \mu i$. Die Anfangsbedingung sei $X(0) = N$ und die Übergangswahrscheinlichkeiten sind gegeben durch

$$p_{i,j}(\Delta t) = \text{Prob}\{X(t + \Delta t) = j | X(t) = i\} = \begin{cases} \mu i \Delta t + o(\Delta t) & , j = i - 1 \\ 1 - \mu i \Delta t + o(\Delta t) & , j = i \\ o(\Delta t) & , j \neq i - 1, i \end{cases}, \quad (179)$$

für Δt hinreichend klein und $p_i(0) = \delta_{iN}$. Die Erzeugermatrix ist

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -\mu & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2\mu & -2\mu & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3\mu & -3\mu & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

und die Zustandswahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ ist

$$p_i(t + \Delta t) = \mu(i + 1)\Delta t p_{i+1}(t) + [1 - \mu i \Delta t] p_i(t) + o(\Delta t) \quad (180)$$

und die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dp_i(t)}{dt} &= \mu(i + 1)p_{i+1}(t) - \mu i p_i(t), & i = 0, 1, \dots, N - 1 \\ \frac{dp_N(t)}{dt} &= -N\mu p_N(t) \end{aligned} \quad (181)$$

Die Rückwärts-Kolmogorov Gleichung $dp/dt = Qp$ wird von (181) erfüllt. Wie in Kapitel 2.1.1. und 2.2.1. kann mit Hilfe der erzeugenden Funktionen die Wahrscheinlichkeit und Moment erzeugende Funktion angegeben werden. Für die Moment erzeugende Funktion ist die partielle Differentialgleichung

$$\frac{dM}{dt} = \mu(e^{-\theta} - 1) \frac{dM}{d\theta} \quad (182)$$

mit der Anfangsbedingung $M(\theta, 0) = e^{N\theta}$ für $X(0) = N$. Durch Umformen gelangen wir wieder zu

$$\frac{dt}{1} = \frac{d\theta}{\mu(e^{-\theta} - 1)} = \frac{dM}{d\theta} \quad (183)$$

und

$$dt = \frac{e^\theta d\theta}{\mu(1 - e^{-\theta})} \quad (184)$$

Durch Integration folgt

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\mu} \log(1 - e^\theta) + c \\ e^{\mu t} (1 - e^\theta) &= c \end{aligned}$$

wobei c wieder eine Konstante ist. Wegen $M(\theta, 0) = e^{N\theta}$ gilt, dass $e^{N\theta} = (1 - (1 - e^\theta))^N$ und somit ist

$$M(\theta, t) = (1 - e^{-\mu t}(1 - e^\theta))^N \quad (185)$$

die Moment erzeugende Funktion. Es wird e^θ durch z , ersetzt um die Wahrscheinlichkeit erzeugende Funktion

$$P(z, t) = (1 - e^{-\mu t}(1 - z))^N \quad (186)$$

zu erhalten. Es ist nun leicht zu sehen, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung für den linearen Todesprozess die Binomialverteilung ist.

Nun haben wir auch hier

$$[P(z, t)]^i = \left(\frac{\alpha(t)z}{1 - (\beta(t)z)} \right)^i \quad (187)$$

wobei $\alpha(t) = e^{-\mu t}$ und $\beta(t) = 1 - e^{-\mu t}$. Somit erhalten wir die Übergangswahrscheinlichkeit

$$p_i(t) = \begin{cases} \binom{N}{i} e^{-N\mu t} (1 - e^{-\mu t})^{N-i}, & N \geq i \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (188)$$

Erwartungswert und Varianz sind dann

$$m(t) = Ne^{-\mu t}, \quad \sigma^2(t) = Ne^{-\mu t}(e^{-\mu t} - 1) \quad (189)$$

Aus (113) folgt, dass die erwartete Zeit, um von Zustand i zu $i - 1$ zu gelangen, für den linearen Todesprozess gegeben ist durch

$$\mathbb{E}(T_{i,i-1}) = \frac{1}{\mu_i} \quad (190)$$

für $\mu_i = \mu i$.

Seien nun die Zustände $n > m$. Die erwartete Zeit $\mathbb{E}(T_{n,m}) = \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{m+1} \right)$ hat die Grenzen $\log \left(\frac{n+1}{m+1} \right) \leq \sum_{i=n}^{m+1} \frac{1}{i} \leq \log \left(\frac{n}{m} \right)$. Wegen $\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^k \frac{1}{i} - \log(k) \right] = \gamma$, wobei γ die Euler'sche Zahl bezeichnet, kann man die erwartete Zeit wie folgt annähern:

$$\mathbb{E}(T_{n,m}) \approx \frac{1}{\mu} \log \left(\frac{n}{m} \right) \quad (191)$$

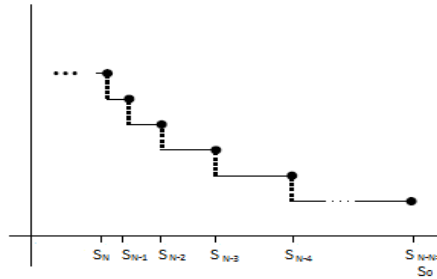


Abbildung 7: Sprungzeiten für den Todesprozess bis zum Aussterben

Dass beim Todesprozess das Aussterben der Population eintritt, ist offensichtlich, da man von einer Anfangspopulationsgröße $X(0) = N$ ausgeht und die einzigen Ereignisse, die stattfinden können, sind entweder ein Tod oder kein Tod, sprich kein Zustandswechsel. Somit wird die Population früher oder später aussterben, dh. $\lim_{t \rightarrow \infty} p_0(t) = 1$.

2.3.2 Linearer Todesprozess mit Zuwanderung

[4, S. 100], [9, S. 168] Wir betrachten nun, wie in Kapitel 2.1.2. erwähnt, den Fall eines linearen Todesprozess mit Zuwanderung. $X(t) = N$ sei wieder die Populationsgröße zum Zeitpunkt t . Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind

$$p_{i,j}(\Delta t) = \text{Prob}\{X(t + \Delta t) = j | X(t) = i\} = \quad (192)$$

$$= \begin{cases} v\Delta t + o(\Delta t) & , j = i + 1 \\ \mu i\Delta t + o(\Delta t) & , j = i - 1 \\ 1 - [v + \mu i]\Delta t + o(\Delta t) & , j = i \\ o(\Delta t) & , j \neq i - 1, i, i + 1 \end{cases},$$

für Δt hinreichend klein und $v > 0$. Die Zustandswahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ ist dann gegeben durch

$$p_i(t + \Delta t) = v\Delta t p_{i-1}(t) + [1 - (v + \mu i)\Delta t]p_i(t) + \mu(i + 1)\Delta t p_{i+1}(t) + o(\Delta t). \quad (193)$$

Die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dp_i(t)}{dt} &= v p_{i-1}(t) - [v + \mu i]p_i(t) + \mu(i + 1)p_{i+1}(t), \quad i = 1, 2, \dots \\ \frac{dp_0(t)}{dt} &= -v p_0(t) + \mu p_1(t), \quad i = 0 \end{aligned} \quad (194)$$

erfüllen die Vorwärts-Kolmogorov Gleichung $dp/dt = pQ$ mit der Anfangsbedingung $p_i(0) = \delta_{i,N}$. Unter der Verwendung der Technik der erzeugenden Funktionen können die Wahrscheinlichkeit und Moment erzeugende Funktion hergeleitet werden. Es sei

$$\frac{dP(z, t)}{dt} + \mu(z + 1)\frac{dP(z, t)}{dz} = v(z - 1)P(z, t) \quad (195)$$

und

$$\frac{dM(\theta, t)}{dt} + \mu(e^\theta + 1)\frac{dM(\theta, t)}{d\theta} = v(e^\theta - 1)M(\theta, t) \quad (196)$$

Man erhält wieder

$$\frac{dt}{1} = \frac{dz}{\mu(z - 1)} = \frac{dG(z, t)}{v(z - 1)P(z, t)} \quad (197)$$

und wie in den vorherigen Kapiteln erhält man darauf die Wahrscheinlichkeit und Moment erzeugende Funktion

$$P(z, t) = e^{\frac{v}{\mu}(z-1)(1-e^{-\mu t})}[1 + (z - 1)e^{-\mu t}]^N \quad (198)$$

$$M(\theta, t) = e^{\frac{v}{\mu}(e^\theta - 1)(1-e^{-\mu t})}[1 + (e^\theta - 1)e^{-\mu t}]^N \quad (199)$$

und für $t \rightarrow \infty$ ist $\lim_{t \rightarrow \infty} P(z, t) = e^{\frac{v}{\mu}(z-1)}$.

3 Anwendungen

Nun einige Anwendungen, die den Geburts- und Todesprozess als Grundlage haben.

3.1 Logistisches Wachstum

[2, S. 268], [7, S. 175], [12], [17, S. 200] Das Modell des logistischen Wachstums ist in der deterministischen Theorie besonders bekannt, vor allem unter der Bezeichnung Verhulst-Gleichung. Diese wird durch die Gleichung

$$\frac{dX(t)}{dt} = rX(t)\left(1 - \frac{X(t)}{K}\right) = rX(t) - \frac{r}{K}X(t)^2 \quad (200)$$

wobei K die Kapazität der Population, $X(t)$ die Populationsgröße zum Zeitpunkt t und r die intrinsische Wachstumsrate ist. Die Populationsgröße $X(t)$ ist durch die Kapazität K beschränkt, dh. $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = K$. Die Population wird nie mehr Individuen haben als K .

Für das stochastische Modell mit Populationsgröße $X(t) = i$ zum Zeitpunkt t gilt $\lambda_i - \mu_i = ri - \frac{r}{K}i^2$ mit $\lambda_0 = 0 = \mu_0$, $\mu_K = \lambda_K$. Wenn die Populationsgröße $X(t)$ für $t \geq 0$ größer als K ist, finden solange nur Tode statt, bis ein Zustand $< K$ erreicht ist. Die intrinsische Wachstumsrate sei $r = b_1 - d_1 > 0$ und die Kapazität $K = \frac{b_1 - d_1}{d_2 - b_2} > 0$, wobei $b_{1,2}$, $d_{1,2}$ Konstanten sind. Setzt man dies in die obige Differentialgleichung (200) ein, so erhält man

$$\frac{dX(t)}{dt} = rX(t) - \frac{r}{K}X(t)^2 \quad (201)$$

$$= (b_1 - d_1)X(t) - \left(\frac{b_1 - d_1}{\frac{b_1 - d_1}{d_2 - b_2}}\right)X(t)^2 \quad (202)$$

$$= (b_1 - d_1)X(t) - (d_2 - b_2)X(t)^2 \quad (203)$$

Und wir erhalten

$$\lambda_i - \mu_i = (b_1 - d_1)i - (d_2 - b_2)i^2 = b_1i + b_2i^2 - (d_1i + d_2i^2) \quad (204)$$

Also sind die Geburts- bzw. die Todesrate gegeben durch

- $\lambda_i = b_1i + b_2i^2 > 0$
- $\mu_i = d_1i + d_2i^2 > 0$

für i aus dem Zustandsraum $\{0, 1, 2, \dots\}$ und

- $\lambda_i = \begin{cases} b_1i + b_2i^2 > 0, & i = 1, 2, \dots, N-1 \\ 0, & i = N \end{cases}$
- $\mu_i = d_1i + d_2i^2 > 0$

für i aus dem endlichen Zustandsraum $\{0, 1, 2, \dots, N\}$. Sind $b_2, d_2 \neq 0$, dann ist $\frac{\lambda_i}{i}, \frac{\mu_i}{i}$ von der Populationsgröße abhängig. Aus diesen Bedingungen und Theorem 2.3. und 2.4. folgt, dass das Aussterben mit Wahrscheinlichkeit 1 stattfindet und die erwartete Zeit bis zum Aussterben endlich ist. Erwartungswert und Varianz können berechnet werden mit Hilfe

der Technik der erzeugenden Funktionen. Dafür sei die Moment erzeugende Funktion gegeben durch

$$\frac{dM(\theta, t)}{dt} = [b_1(e^\theta - 1) + d_1(e^{-\theta} - 1)] \frac{dM(\theta, t)}{d\theta} + [b_2(e^\theta - 1) + d_2(e^{-\theta} - 1)] \frac{dM(\theta, t)^2}{d\theta^2} \quad (205)$$

mit $M(\theta, 0) = e^{N\theta}$ für $X(0) = N$. Daraus erhält man durch Differenzieren und für $\theta = 0$ den Erwartungswert

$$\frac{dm(t)}{dt} = [b_1 - d_1]m(t) + [b_2 - d_2]\mathbb{E}(X^2(t)) \quad (206)$$

und somit ist $\frac{dm(t)}{dt} = rm(t) - \frac{r}{K}\mathbb{E}(X^2(t))$. Die Varianz ist dann $\sigma^2(t) = \mathbb{E}(X^2(t)) - m^2(t) > 0$, und daher gilt für $m(t) \geq 0$

$$\frac{dm(t)}{dt} < rm(t) - \frac{rm(t)^2}{K} \quad (207)$$

3.2 Epidemie

[2], [9, S. 164], [4, S. 164] Es gibt mehrere Epidemie Modelle. Das einfachste ist das, bei dem die Anfangspopulation aus einem Infizierten und N nicht infizierter Individuen besteht. Zum Zeitpunkt t gibt es dann $S(t)$ nicht infizierte und $N - S(t) + 1$ infizierte Individuen.

Wir betrachten nun etwas genauer drei Epidemie Modelle, das SI, SIS und SIR Modell.

3.2.1 SI Modell

Beim SI Modell geht man davon aus, dass sich die konstante Populationsgröße $N = S(t) + I(t)$ aus zwei Arten von Individuen zusammensetzt. Es gibt die, die zum Zeitpunkt t noch nicht infiziert sind, sich aber durchaus noch infizieren können, bezeichnet mit $S(t)$, und die, die zum Zeitpunkt t bereits infiziert sind, bezeichnet mit $I(t)$. Das SI Modell entspricht einem Geburtsprozess mit Geburtenrate bzw. hier Infektionsrate $\lambda_i = \frac{\beta}{N}i(N-i)$, wobei β die Kontaktrate ist. Die Übergangswahrscheinlichkeit, sprich das Ereignis einer Ansteckung, ist gegeben durch

$$\begin{aligned} p_{i,j}(\Delta t) &= \text{Prob}\{I(t + \Delta t) = j | I(t) = i\} = \\ &= \begin{cases} \frac{\beta}{N}i(N-i)\Delta t + o(\Delta) & , j = i + 1 \\ 1 - \frac{\beta}{N}i(N-i)\Delta t + o(\Delta) & , j = i \\ o(\Delta) & , j \neq i, i + 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (208)$$

Diese erfüllen die Rückwärts-Kolmogorov Gleichung $\frac{dp}{dt} = Qp$. Zustand N ist absorbierend und es existiert eine eindeutige stationäre Verteilung $\pi = (0, 0, \dots, 1)^T$, die der Grenzwert Verteilung entspricht, dh. $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \pi$. Die erwartete Zeit bis zur Absorption bzw. bis zu dem Zeitpunkt, zu dem alle Individuen infiziert sind, ist gegeben durch

$$\mathbb{E}(T_{N,1}) = \sum_{i=1}^{N-1} \mathbb{E}(T_{i+1,i}) = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{N}{\beta i(N-i)} = \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{N}{i(N-i)} \quad (209)$$

und die Varianz ist

$$\text{Var}(T_{N,1}) = \sum_{i=1}^{N-1} \text{Var}(T_{i+1,i}) = \frac{1}{\beta^2} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{N^2}{[i(N-i)]^2} \quad (210)$$

Diese ist einfach zu berechnen, da für die Varianz einer mit Parameter λ exponentialverteilten Zufallsvariable $X(t)$ mit $\mathbb{E}(X(t)) = \frac{1}{\lambda}$ gilt, dass $Var(X(t)) = \frac{1}{\lambda^2}$.

3.2.2 SIS Modell

Das SI Modell ist ein stark vereinfachtes Modell. Im Gegensatz dazu wird im SIS Modell ein weiterer Parameter γ , der für die Heilungsrate steht, eingeführt. Daher entspricht dieses Modell dem Geburts- und Todesprozess, wobei die Geburtenrate bzw. Infektionsrate gegeben ist durch $\lambda_i = \frac{\beta}{N}i(N-i)$ und die Todesrate bzw. die Rate, mit der ein Individuum gesund wird, gegeben ist durch $\mu_i = (b+\gamma)i$. Dann ist die Übergangswahrscheinlichkeit, also der Wechsel vom Zustand i der Infizierten in Zustand $i+1$, gegeben durch

$$p_{i,j}(\Delta t) = Prob\{I(t+\Delta t) = j | I(t) = i\} = \quad (211)$$

$$= \begin{cases} \frac{\beta}{N}i(N-i)\Delta t + o(\Delta) & , j = i+1 \\ (b+\gamma)i\Delta t + o(\Delta) & , j = i-1 \\ 1 - [(b+\gamma)i + \frac{\beta}{N}i(N-i)]\Delta t + o(\Delta) & , j = i \\ o(\Delta) & , j \neq i-1, i, i+1 \end{cases}$$

In diesem Fall ist 0 ein absorbierender Zustand, dh. für $t \rightarrow \infty$ gibt es früher oder später keine Infizierten mehr.

Aus Kapitel 3.1. ist bekannt, dass $\lambda_i - \mu_i$ gleich der Ableitung $\frac{dX(t)}{dt}$ ist. Man erhält für $X(t) = i$, $\lambda_i = \frac{\beta}{N}i(N-i)$, $\mu_i = (b+\gamma)i$ die Gleichung

$$\frac{dX(t)}{dt} = \beta i(1 - \frac{i}{N}) - (b+\gamma)i \quad (212)$$

wobei $\beta = r$, $N = K$ und $(b+\gamma) = q$ ist. Also ist $\frac{dX(t)}{dt} = rX(t)(1 - \frac{X(t)}{K}) - qX(t)$ ein Spezialfall des logistischen Wachstumsmodell, bekannt als 'maximum sustainable yield (MSY)'.

3.2.3 SIR Modell

[2, S. 319] Das SIR Modell ist im Vergleich zum SIS Modell ein zweidimensionales Modell. Im SIR Modell setzt sich die Population N zum Zeitpunkt t aus der Anzahl der Infizierten $I(t)$, der Immunen $R(t)$ und derer, die noch nicht infiziert sind, aber für die Infektion empfänglich sind, zusammen, also $N = I(t) + R(t) + S(t)$. γ ist wieder die Heilungsrate, vergleichbar mit der Sterberate und β die Infektionsrate vergleichbar mit der Geburtenrate. Dann sind die Übergangswahrscheinlichkeiten gegeben durch

$$p_{(i,j)}(\Delta t) = Prob\{I(t+\Delta t) = \tilde{i}, S(t+\Delta t) = \tilde{s} | I(t) = i, S(t) = s\} = \quad (213)$$

$$= \begin{cases} \frac{\beta}{N}is\Delta t + o(\Delta) & , \tilde{i} = i+1, \tilde{s} = s-1 \\ \gamma i\Delta t + o(\Delta) & , \tilde{i} = i-1, \tilde{s} = s \\ 1 - [\gamma i + \frac{\beta}{N}is]\Delta t + o(\Delta) & , \tilde{i} = i, \tilde{s} = s \\ o(\Delta) & , sonst \end{cases}$$

mit der Anfangsbedingung $(I(0), S(0)) = (i_0, s_0)$, $s_0 \geq 0$, $i_0 > 0$. Diese erfüllen die Rückwärts-Kolmogorov Gleichung, und somit ist die Differentialgleichung gegeben durch

$$\frac{dp_{(i,s)}(t)}{dt} = \frac{\beta}{N}(s+1)(i-1)p_{(i-1,s+1)}(t) + \gamma(i+1)p_{(i+1,s)}(t) - [\frac{\beta}{N}is + \gamma i]p_{(i,s)}(t) \quad (214)$$

für $i = 0, 1, \dots, N$, $s = 0, 1, \dots, N - 1$ und $i + s \leq N$. Die durchschnittliche Anzahl der neu infizierten Individuen ist dann gegeben durch $\frac{\bar{S}(0)}{N} \frac{\beta}{\gamma}$. Ist dann $S(0) = N - i \approx N$, $I(0) = i$ dann entspricht die durchschnittliche Anzahl der neu infizierten Individuen $\frac{\beta}{\gamma}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass keine Epidemie ausbricht ist
$$\begin{cases} 1 & , \beta \leq \gamma \\ \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^i & , \beta > \gamma \end{cases}$$

3.3 Chemische Reaktion

[2, S. 312], [12, S. 206], [7, S. 361] Ein weiterer Bereich, indem das Modell des Geburts- und Todesprozesses eingesetzt wird, ist die Enzymkinetik. Wir betrachten nun das einfachste Modell der monomolekularen Reaktion.

3.3.1 Monomolekulare Reaktion

Es gibt zwei Arten von Molekülen. Moleküle A , die Reaktanten und B , die Produkte, zu denen Moleküle A nach der chemischen Reaktion werden, dh. $A \xrightarrow{k} B$, wobei die Reaktionsrate durch $k > 0$ gegeben ist. Sei $X(t)$ die Konzentration der A Moleküle zum Zeitpunkt t mit der Anfangsbedingung $X(0) = m$ für $i \in \{m, m - 1, m - 2, \dots, 0\}$. Das Modell der monomolekularen Reaktion basiert auf dem Modell des Todesprozesses mit Todes- bzw. Reaktionsrate $\mu_i = ki$. Die Übergangswahrscheinlichkeit ist gegeben durch

$$\begin{aligned} p_{i,j}(\Delta t) &= \text{Prob}\{X(t + \Delta t) = j | X(t) = i\} \\ &= \begin{cases} ki\Delta t + o(\Delta t) & , j = i - 1 \\ 1 - ki\Delta t + o(\Delta t) & , j = i \\ o(\Delta t) & , j \neq i, i - 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (215)$$

Eine Umkehrreaktion $B \rightarrow A$ ist ausgeschlossen, dh. diese tritt mit Wahrscheinlichkeit 0 ein. Da die Übergangswahrscheinlichkeiten die Rückwärts-Kolmogorov Gleichung erfüllen, erhalten wir die Differentialgleichung

$$\frac{dp_{i,j}(t)}{dt} = k(i + 1)p_{i,i+1}(t) - kip_{i,i}(t) \quad (216)$$

Die Zustandswahrscheinlichkeit ist dann gegeben durch

$$p_i(t) = \binom{m}{i} e^{-mkt} (e^{kt} - 1)^{m-i}, \quad 0 \leq i \leq m \quad (217)$$

Erwartungswert und Varianz sind

$$m(t) = me^{-kt}, \quad \sigma^2(t) = me^{-kt}(1 - e^{-kt}) \quad (218)$$

3.3.2 Bimolekulare Reaktion

Bei einer bimolekularen Reaktion $A + B \xrightarrow{k} C$ nimmt man an, dass bei der Reaktion von Molekül A und B ein neues Molekül C entsteht, wobei die Reaktionsrate wieder durch $k > 0$ gegeben ist. Dieses Modell ist dem monomolekularen Modell sehr ähnlich. Der Unterschied bei den Übergangswahrscheinlichkeiten ist der, dass der Wechsel der Konzentration der

Moleküle C von $i \rightarrow i+1$ k mal dem Produkt der Konzentration der Moleküle von A und B ist.

Seien $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ die Konzentration der Moleküle A , B , C zum Zeitpunkt t . Die Umkehrreaktion ist wieder ausgeschlossen. Die Übergangswahrscheinlichkeit ist in diesem Modell gegeben durch

$$\begin{aligned} p_{(a,b,c)}(\Delta t) &= \text{Prob}\{A(t+\Delta t) = \tilde{a}, B(t+\Delta t) = \tilde{b}, C(t+\Delta t) = \tilde{c} | \\ &\quad A(t) = a, B(t) = b, C(t) = c\} = \\ &= \begin{cases} kab\Delta t + o(\Delta t) & , \tilde{a} = a-1, \tilde{b} = b-1, \tilde{c} = c+1 \\ 1 - kab\Delta t + o(\Delta t) & , \tilde{a} = a, \tilde{b} = b, \tilde{c} = c \\ o(\Delta t) & , \text{sonst} \end{cases} \end{aligned} \quad (219)$$

und wir erhalten die Differentialgleichung

$$\frac{dp_{(a,b,c)}(t)}{dt} = k(a+1)(b+1)p_{(a+1,b+1,c-1)}(t) - kabp_{(a,b,c)}(t) \quad (220)$$

Ein etwas komplizierteres Modell der bimolekularen Reaktion in dem auch Kettenreaktionen eintreten, beschreibt der Michaelis-Menten Mechanismus, der nun betrachtet wird.

Michaelis-Menten In diesem Modell gibt es ein Enzym E , eine Trägerschicht S , ein Zwischenprodukt $X(=ES)$ und ein Produkt P .



wobei k_i , $i = 1, 2, 3, 4$ die Reaktionsraten sind. Dieser Mechanismus ist bekannt als Michaelis-Menten Mechanismus. Die Übergangswahrscheinlichkeit ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} p_{(e,s,x,p)}(\Delta t) &= \text{Prob}\{E(t+\Delta t) = \tilde{e}, S(t+\Delta t) = \tilde{s}, X(t+\Delta t) = \tilde{x}, P(t+\Delta t) = \tilde{p} | \\ &\quad E(t) = e, S(t) = s, X(t) = x, P(t) = p\} = \\ &= \begin{cases} k_1 es\Delta t + o(\Delta t) & , \tilde{e} = e-1, \tilde{s} = s-1, \tilde{x} = x+1, \tilde{p} = p \\ k_2 x\Delta t + o(\Delta t) & , \tilde{e} = e+1, \tilde{s} = s+1, \tilde{x} = x-1, \tilde{p} = p \\ k_3 x\Delta t + o(\Delta t) & , \tilde{e} = e+1, \tilde{s} = s, \tilde{x} = x-1, \tilde{p} = p+1 \\ k_4 ep\Delta t + o(\Delta t) & , \tilde{e} = e-1, \tilde{s} = s, \tilde{x} = x+1, \tilde{p} = p-1 \\ 1 - [k_1 es + k_2 x + k_3 x + k_4 ep]\Delta t \\ \quad + o(\Delta t) & , \tilde{e} = e, \tilde{s} = s, \tilde{x} = x, \tilde{p} = p \end{cases} \end{aligned} \quad (222)$$

Wir erhalten daraus die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{dp_{(e,s,x,p)}(t)}{dt} &= k_1(e+1)(s+1)p_{(e+1,s+1,x-1,p)}(t) \\ &\quad + k_2(x+1)p_{(e-1,s-1,x+1,p)}(t) \\ &\quad + k_e(x+1)p_{(e-1,s,x+1,p-1)}(t) \\ &\quad + k_4(p+1)p_{(e+1,s,x-1,p+1)}(t) \\ &\quad - [k_1 es + k_2 x + k_3 x + k_4 ep]p_{(e,s,x,p)}(t) \end{aligned}$$

Diese lässt sich, indem man $E + X$ gleich der Anfangskonzentration der Enzyme E_0 und $S + X + P$ gleich der Anfangskonzentration der Trägerschicht S_0 setzt, vereinfachen. Durch Umformen erhalten wir die Differentialgleichung eines zweidimensionalen Modells

$$\begin{aligned} \frac{dp_{(e,s)}(t)}{dt} = & k_1(e+1)(s+1)p_{(e+1,s+1,x-1,p)}(t) \\ & + k_2(E_0 - e + 1)p_{(e-1,s-1)}(t) \\ & + k_e(E_0 - e + 1)p_{(e-1,s)}(t) \\ & + k_4(S_0 - E_0 - s + e + 1)p_{(e+1,s)}(t) \\ & - [k_1es + k_2 + k_3(E_0 - e) + k_4(S_0 - E_0 - s + e)]p_{(e,s)}(t) \end{aligned}$$

mit $p_{(e,s)}(0) = 1$ für $e = E_0$, $s = S_0$ und $= 0$ sonst. Setzt man $k_4 = 0$ und schließt damit die Umkehrreaktion $E + P \xrightarrow{k_4} X$ aus, ist 0 ein absorbierender Zustand.

3.4 Genetik

[9, S. 248], [17, S. 197], [14, S. 179] Auch in der Genetik ist der Geburts- und Todesprozess die Grundlage einiger Modelle. Angenommen wir haben eine Population, bestehend aus N Individuen zum Zeitpunkt t . Diese Population setzt sich zusammen aus einer Anzahl von Individuen $X(t)$ vom Gentyp a und $Y(t)$ vom Gentyp A . Ein neues Individuum mit Gentyp a kommt dazu, mit Wahrscheinlichkeit $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$. Wenn ein Individuum 'stirbt' bzw. durch ein anderes ersetzt wird, kann es zu einer Mutation kommen. Wenn $X(t) = i$ die Anzahl der Individuen vom Gentyp a ist, wird ein Individuum mit Wahrscheinlichkeit $\frac{i}{N}$ durch ein Individuum mit Gentyp a und mit Wahrscheinlichkeit $1 - \frac{i}{N}$ durch eines vom Gentyp A ersetzt. Das neue Individuum mutiert dann entweder von Gentyp a zu A mit Wahrscheinlichkeit M_1 oder von Gentyp A zu a mit Wahrscheinlichkeit M_2 . Also wird mit Wahrscheinlichkeit $\frac{i}{N}(1 - M_1)$ ein Individuum mit Gentyp a eingesetzt, das nicht mutiert und mit Wahrscheinlichkeit $(1 - \frac{i}{N})M_2$ ein Individuum mit Gentyp A , das zu a mutiert. Somit ergeben sich folgende Übergangswahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} p_{i,j}(\Delta t) = \text{Prob}\{X(t + \Delta t) = j | X(t) = i\} = \\ = \begin{cases} \lambda \left(1 - \frac{i}{N}\right) \left[\frac{i}{N}(1 - M_1) + (1 - \frac{i}{N})M_2\right] \Delta t + o(\Delta t) & , j = i + 1 \\ \lambda \frac{i}{N} \left[\left(1 - \frac{i}{N}\right)(1 - M_2) + \left(\frac{i}{N}\right)M_1\right] \Delta t + o(\Delta t) & , j = i - 1 \\ 1 - \left[\lambda \left(1 - \frac{i}{N}\right) \left[\frac{i}{N}(1 - M_1) + (1 - \frac{i}{N})M_2\right] \right. \\ \quad \left. + \lambda \frac{i}{N} \left[\left(1 - \frac{i}{N}\right)(1 - M_2) + \left(\frac{i}{N}\right)M_1\right]\right] \Delta t + o(\Delta t) & , j = i \\ o(\Delta t) & , \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Man sieht leicht, dass die Übergangswahrscheinlichkeit für $j = i + 1$ einer Geburt und für $j = i - 1$ einem Tod entspricht. Das Modell hat als Grundlage den Geburts- und Todesprozess. Um das Verhalten der stationären Verteilung zu untersuchen, betrachtet man die Populationsgröße für $N \rightarrow \infty$ oder die Mutationsraten $M_1 \rightarrow 0$, $M_2 \rightarrow 0$. Dazu mehr in [17].

3.5 Warteschlangentheorie

[13], [2], [17, S. 196], [9, S. 169], [6], [11, S. 458] Ein wichtiges Modell, das dem Geburts- und Todesprozess entspricht, ist der Warteschlangenprozess. Dieser beschreibt die Situation einer Warteschlange vor einer Servicestelle und das Verhalten der Verbraucher, die diese bilden. Wir nehmen an, dass die Verbraucher mit Rate a ankommen und mit Rate v die Servicestelle wieder verlassen. $X(t) = i$ sei die Anzahl der Verbraucher zum Zeitpunkt t . Eine Ankunft findet mit Wahrscheinlichkeit $\frac{a}{a+v}$ und ein Verlassen mit Wahrscheinlichkeit $\frac{v}{a+v}$ statt. Die Übergangswahrscheinlichkeit ist dann gegeben durch

$$p_{i,j}(\Delta t) = \text{Prob}\{X(t + \Delta t) = j | X(t) = i\} = \quad (223)$$

$$= \begin{cases} a\Delta t + o(\Delta t) & , j = i + 1 \\ v\Delta t + o(\Delta t) & , j = i - 1 \\ 1 - (a + v)\Delta t + o(\Delta t) & , j = i \\ o(\Delta t) & , j \neq i - 1, i, i + 1 \end{cases},$$

Die Zustandswahrscheinlichkeiten $p_i(t)$ erfüllen die Rückwärts-Kolmogorov Gleichung und es gilt

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = -(a + v)p_i(t) + vp_{i+1}(t) + ap_{i-1}(t)$$

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -ap_0(t) + vp_1(t)$$

Wir nehmen an, dass die Ankunftsrate kleiner ist als die Rate des Verlassens, also $a < v$, da sonst die Schlange immer länger werden würde. Dieses Verhältnis $\frac{a}{v} < 1$ nennt man die Verkehrsintensität. Wir erhalten aus den obigen Differentialgleichungen

$$0 = -(a + v)\pi_i + v\pi_{i+1} + a\pi_{i-1}$$

$$0 = -a\pi_0 + v\pi_1$$

die stationäre Verteilung $\pi_i = (1 - \frac{a}{v}) (\frac{a}{v})^i$. Die Anzahl der Verbraucher ist geometrisch verteilt. Die durchschnittliche Verbraucherzahl ist dann gegeben durch $\sum_{i=1}^{\infty} i\pi_i = (1 - \frac{a}{v}) \sum_{i=1}^{\infty} i (\frac{a}{v})^i$. Die durchschnittliche Wartezeit ist das Verhältnis der durchschnittlichen Verbraucherzahl zur durchschnittlichen Ankunftsrate.

Nun nehmen wir an, dass höchstens N Verbraucher in der Schlange warten können, dh. die Ankunftsrate ist a bis zu dem Zeitpunkt, zu dem Verbraucher N eintrifft, danach ist sie 0. Die Verlassensrate ist v . Auch in diesem Modell existiert eine stationäre Verteilung $\pi_i = (\frac{a}{v})^i \frac{1 - \frac{a}{v}}{1 - (\frac{a}{v})^{N+1}}$ für $i = 0, 1, \dots, N$.

Und wenn man andererseits annimmt, dass die Ankunftsrate der Verbraucher a ist und es s Servicestellen, jeweils mit exponentiell verteilter Bedienzeit mit Parameter v gibt, ist die durchschnittliche Verlassensrate iv , $i = 0, 1, \dots, s - 1$ und sv , $i = s, s + 1, \dots$, da ja nur s Servicestellen vorhanden sind, somit nur s Verbraucher gleichzeitig bedient werden können und alle anderen in der Schlange warten müssen. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Verbraucher eintrifft, ist $\frac{a}{a+v}$ und dass ein Verbraucher die Servicestelle verlässt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{iv}{a+iv}$, $i < s$ und $\frac{sv}{a+sv}$, $i > s$. Auch hier existiert eine stationäre Verteilung $\pi_i = \frac{(\frac{a}{v})^i}{i!} \pi_0$ für $i < s$ und $\pi_i = \frac{(\frac{a}{v})^i s^{s-i}}{s!} \pi_0$ für $i \geq s$, wenn $\frac{a}{v} < s$.

Abbildungsverzeichnis

1	Sprung- und Verweilzeiten	10
2	Geburts- und Todesprozess	11
3	eingebettete Markovkette mit $\lambda_0 > 0$ und $\lambda_i + \mu_i > 0$	14
4	Geburtsprozess	30
5	Sprungzeiten für den explosiven Geburtsprozess	34
6	Todesprozess	35
7	Sprungzeiten für den Todesprozess bis zum Aussterben	38

Literatur

- [1] Birth and Death Processes and Order Statistics,
<http://neutrino.aquaphoenix.com/ReactionDiffusion/SERC5chap4.pdf>
- [2] L. J. S. Allen, *An Introduction to Stochastic Processes with Applications to Biology*, CRC Press, Boca Raton, Fla., 2nd ed. edition, 2011
- [3] D. F. Anderson, Introduction to Stochastic Processes with Applications in the Biosciences, <http://www.math.wisc.edu/~anderson/605F11/Notes/StochBio.pdf>, 2011
- [4] N. T. J. Bailey, *The Elements of Stochastic Processes with Applications to the Natural Sciences*, John Wiley & Sons, New York, 1964
- [5] N. Bäuerle, Stochastische Prozesse, 2004
<http://www.statistik.lmu.de/~gertheiss/Lehre/StoPro2012/skript.pdf>
- [6] K. Berger, P. Christodoulides, and K. Grill, *Warteschlangentheorie*,
<http://www.ci.tuwien.ac.at/~grill/download/ws.zip>, 1999
- [7] A. T. Bharucha-Reid, *Elements of the Theory of Markov Processes and their Applications*, Dover Pub., New York, 1997
- [8] R. N. Bhattacharya and E. C. Waymire, *Stochastic Processes with Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1990
- [9] D. R. Cox and H. D. Miller, *The Theory of Stochastic Processes*, Chapman and Hall, London, 1978
- [10] A. Depperschmidt, *Markovketten*, Universität Freiburg, 2011,
<http://www.stochastik.uni-freiburg.de/Vorlesungen/vvSS2011/VorMarkovketten/markovketten.pdf>
- [11] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications, Volume 1*, John Wiley & Sons, New York, 3rd edition, 1950
- [12] N. S. Goel and N. Richter-Dyn, *Stochastic Models in Biology*, Academic Press Inc., New York, 1974
- [13] F. Hofbauer, *Stochastische Prozesse*, Universität Wien, 2002
- [14] M. Iosifescu and P. Tautu, *Stochastic Processes and Applications in Biology and Medicine II*, Springer Verlag, Bukarest, 1973
- [15] S. Karlin and J. L. McGregor, *The Differential Equations of Birth-and-Death Processes, and the Stieltjes Moment Problem*, Transactions of the American Mathematical Society, 56:489–546, 1957
- [16] S. Karlin and J. L. McGregor, *Linear Growth, Birth and Death Processes*, Math. Mech, 7:643–662, 1958
- [17] S. Karlin and H. M. Taylor, *A First Course in Stochastic Processes*, Academic Press Inc., New York, 1975
- [18] S. Karlin and H. M. Taylor, *An Introduction to Stochastic Modeling 3rd Edition*, Academic Press Inc., San Diego, 1998

- [19] W. Liu and H. Zhang, Quasi-Stationary Distributions in Linear Birth and Death Processes, *Journal of Mathematics Research*, 3(1):27–32, 2011
- [20] J. Medhi, *Stochastic Processes*, Wiley Eastern Limited, New Delhi, 1982
- [21] S. Méléard, Quasi-Stationary Distributions and Population Processes, *Probability Surveys*, 9:340–410, 2012
- [22] J. A. Rosanow, *Stochastische Prozesse: Eine Einführung*, Akademie-Verlag, Berlin, 1975
- [23] E. A. van Doorn, Birth - Death Processes and Associated Polynomials, *Journal of computational and applied mathematics*, 153:497–506, 2003
- [24] M. Wang, Nonhomogeneous birth death process, California State Polytechnic University, Pomona, 2005, <http://www.csupomona.edu/~mawang/Master%27s%20Thesis.pdf>

Persönliche Daten

Name:	Maria Summer
Geburtsort:	Wien, Österreich
Geburtstag:	03.Februar 1987
Nationalität:	Österreich

Ausbildung

1993 - 1997	Volksschule Kenyongasse, 1070 Wien
1997 - 2005	Wirtschaftskundliches Realgymnasium Kenyongasse, 1070 Wien
20.06.2005	Matura
WS 05/06-WS 12/13	Studium an der Universität Wien, Mathematik (Diplom)