



universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Swiss Solvency Test für versicherungstechnische
Risiken in Nicht-Lebensversicherungen

Verfasser

Alina Mationi

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat)

Wien, im Februar 2013

Studienkennzahl lt. Studienblatt: A 405

Studienrichtung lt. Studienblatt: Mathematik

Betreuer: o. Univ.-Prof. Dr. Walter Schachermayer

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	1
0.1	Executive Summary	1
0.2	Danksagung	1
1	Historische Entwicklung	3
2	Kompatabilität mit Solvency II	5
3	Prinzipien des SST	7
3.1	Standardmodell vs. Interne Modelle	8
3.2	Risikomasse im SST	10
3.3	Bewertung der Liabilities	13
4	Das Standardmodell im SST	15
4.0.1	Allgemeine Annahmen	15
4.0.2	Aufteilung der Lines of Business	16
4.0.3	Trennung des Gesamtrisikos in versicherungs- technisches Risiko und Marktrisiko	17
4.0.3.1	Modellierung der CY-Schäden	17
4.0.3.2	Modellierung der PY-Schäden	19
4.0.3.3	Gemeinsame Modellierung der CY- und PY-Schäden	20
4.0.4	Bestimmung der Verteilung für das versicherungs- technische Ergebnis aus CY-Schäden	23
4.0.4.1	Panjer Algorithmus zur Berechnung der Gesamtgrossschadenverteilung	32
4.1	Modellierung der Elementarschäden	35
4.1.1	Modellierung des Elementarschadenpools inkl. "übriger Elementarschäden"	35
4.2	Bestimmung der Verteilung für das versicherungstechnische Ergebnis aus PY	37
4.3	Aggregation der versicherungstechnischen Risiken	39
	Anhang	41
	Literaturverzeichnis	44
	Lebenslauf	47

0 Einleitung

0.1 Executive Summary

Das Geschäftsumfeld für Versicherungsunternehmen hat sich in den letzten Jahren durch die Einbindung neuer Produkte und deren Komplexität und Internationalisierung stark verändert und hat viele neue Herausforderungen mit sich gebracht. Die damit verbundenen einbrechenden Kapitalmarkterträge haben ein neues Bewusstsein gegenüber dem versicherungstechnischen Ergebnis und dessen risikobehafteten Ausprägungen seitens der Versicherer aber auch der Aufsichtsbehörden geschaffen.

Um Kapitalmarkteinbrüche wie man sie nach der Jahrtausendwende erlebt hat, zu vermeiden, zielt Europa auf ein neues "risikobasiertes Aufsichtssystem" ab, welches die Risiken die zu schwerwiegenden Szenarien führen abfangen soll.

Die Schweiz hat bei diesem Unternehmen die Vorreiterrolle übernommen und hat bereits mit 1.1.2006 den "Swiss Solvency Test" für eine ökonomische Sichtweise des Versicherungsgeschäfts eingeführt. Dabei werden neben umfangreichen quantitativen Anforderungen die Versicherungs-, Kredit- und Finanzmarktrisiken bestimmt. Aktiva und Passiva werden dabei "marktnah" bewertet. Dieses neue Aufsichtsregime reicht vom SST bis zu "Internen Modellen" die als Risikomanagement-Tool für die Unternehmenssteuerung eingesetzt werden sollen.

In diesem Dokument wird der SST für versicherungstechnische Risiken in Nicht-Lebensversicherungen erläutert. In Kapitel 2 wird über die historische Entwicklung näher eingegangen worauf im Kapitel 3 die Kompatibilität des SST mit dem in Resteuropa entwickelten Systems namens SSolvency II". Kapitel 4 behandelt alle Rahmenbedingungen des SST inkl. dessen Bewertungsgrundsatz sowie der Definition des risikotragenden Kapitals. Schliesslich wird in Kapitel 5 die Herleitung des versicherungstechnischen Risikos anhand des Standardmodells im SST erläutert, unter Berücksichtigung aller Faktoren die dabei zum Tragen kommen.

0.2 Danksagung

An dieser Stelle möchte ich die Gelegenheit nutzen, um einigen Menschen zu danken, die mich während meines Studiums und meiner Fertigstellung der Diplomarbeit begleitet und unterstützt haben.

Zu Beginn möchte ich meinem Betreuer, Herrn Professor Schachermayer für die Möglich-

keit danken dieses praxisnahe Thema zu behandeln und für seine motivierenden Worte. Außerdem gilt ein besonderer Dank meiner ganzen Familie, die mich unermüdlich ermuntert, unterstützt und mir ein großes Maß an Geduld entgegengebracht haben. Weiters möchte ich meinen Freunden danken, dass sie mit mir die Freuden und Leiden während des Studiums geteilt haben.

you turned my wailing into dancing;
you removed my sackcloth and clothed me with joy,
that my heart may sing to you and not be silent.
psalm 30:12

1 Historische Entwicklung

Das Grundprinzip des Schweizer Solvenztest ist es, den Versicherungsnehmern (Einzelpersonen, Unternehmen oder andere juristische Personen) Schutz zu gewährleisten, in dem Sinne, dass jedes Versicherungsunternehmen (VU) über genügend Kapital verfügt, sodass eine Abwicklung des Portfolios auch in weniger wahrscheinlichen, schwerwiegenden, Situationen möglich ist. Das BPV (Bundesamt für Privatversicherungen, die in der Schweiz für Privatversicherungen zuständige Aufsichtsbehörde) konkretisiert diese Abwicklung als eine Übernahme des Portfolios (Assets und Liabilities) von einem Dritten. Dabei müssen genügend Assets vorhanden sein, um für die Liabilities und anfällige Kapitalkosten dieses Dritten aufkommen zu können.

Eine weitere Anforderung an den Solvenztest, der 2003 vom BPV initiiert wurde, ist eine risikobasierte Bewertung für die Solvenzspanne, die das bisherige statische System ablösen soll. Im Vorfeld wurde dafür eine Task Force eingerichtet die eine Neuausrichtung der Versicherungsaufsicht zum Ziel hat. Die neuen Regelungen fordern die Erfassung aller Risiken, denen ein VU ausgesetzt ist und diese mit adäquaten Eigenmitteln abzuwiegen.[2] Zusammenfassend sind folgende Ziele im Focus des Schweizer Solvenztests:

- Es soll ein risikobasiertes Solvabilitätssystem geschaffen werden, welches die spezifischen Risiken eines VU durch adäquate Kapitalanforderungen abwägt
- Versicherungsunternehmen sollen dazu geleitet werden ihre Risiken zu kennen, zu steuern und zu überwachen. Adäquates Risikomanagement und stabile interne Kontrollsysteme sollen mit niedrigeren Kapitalanforderungen belohnt werden
- Einführung einer risikoorientierten Aufsicht
- Erhöhung der Transparenz und der Offenlegungspflichten
- Es soll eine Konvergenz der regulatorischen Risikomessung erzielt werden sodass ein Anreiz für die Entwicklung von unternehmensspezifischen Risikomodellen geschaffen werden kann

[2]

2 Kompatibilität mit Solvency II

Mit der Neufassung des EU-weiten Aufsichtssystems unter Solvency II, sollte die Gesamtsolvabilität von Versicherungsunternehmen unter einem risikobasiertem Ansatz bestimmt werden. Die Grundüberlegungen dazu werden erstmals in der KPMG-Studie und im Sharma-Report 2002 erwähnt. Solvency II basiert wie Basel II auf einem 3-Säulen-Ansatz:

- SÄULE I: Kapitalanforderung
- SÄULE II: Supervisory Review Process (SRP) (Bankenaufsichtlicher Überprüfungsprozess)
- SÄULE III: Marktdisziplin und Veröffentlichungspflichten

Die **erste Säule** umfasst die qualitativen Anforderungen an die VU. Genau wie im SWISS Solvency Test sollen die möglichen Auswirkungen von Risiken durch eine entsprechende Kapitalanforderung gedeckt werden können. Zwei Grundbegriffe kommen hier zum Tragen:

Die **Solvenzkapitalanforderung (SCR)** bildet das Kapital das einem VU ermöglicht im folgenden Geschäftsjahr ein 200-Jahresereignis zu überstehen. Bei deren Berechnung sollen alle quantifizierbaren Risiken des VU berücksichtigt werden. Das SCR soll also denjenigen Kapitalbetrag darstellen, der zur Einhaltung einer bestimmten Insolvenzwahrscheinlichkeit erforderlich ist. Auch hier wird für die Berechnung des SCR eine Standardformel zur Verfügung gestellt, die teilweise oder völlig durch ein vom Unternehmen eigens entwickeltes Internes Modell ersetzt werden kann.

Die **Mindestkapitalanforderung (MCR)** bezeichnet das Mindestkapital, das ein VU zu jedem Zeitpunkt vorrätig halten muss. Eine Unterschreitung des MCRs führt zu einer Intervention durch die Aufsicht.

Die **zweite Säule** befasst sich mit allen **quantitativen Anforderungen**. Da alle, für ein VU relevante Risiken erfasst werden sollen, müssen diese, soweit quantifizierbar, mit Eigenmitteln unterlegt werden, oder im Rahmen der qualitativen Vorschriften berücksichtigt werden. Diese qualitativen Vorschriften betreffen einerseits die Überprüfungsverfahren der Aufsicht und andererseits die qualitativen Anforderungen an das VU. Ein Focus liegt hier insbesondere auf das Governance-System innerhalb des Risikomanagements, des internen Kontrollsystems, der internen Revision, der versicherungsmathematischen Funktion und betreffend der Rahmenbedingungen für das Outsourcing des VU.

Die **dritte Säule** bekundet die **Offenlegungs- und Berichtspflichten**, die außerhalb des VAG, noch einmal konkretisiert und vereinheitlicht werden. Diese sollen eine Selbstdisziplinierung der VU gegenüber dem Markt bewirken, um so eine möglichst gute Risikovorsorge zu betreiben. Weiters kann die Aufsicht die Reaktion der Marktteilnehmer als weitere Information für sich nutzen.

Aus gesetzgebungstechnischer Sicht, bildet die Rahmenrichtlinie den Rahmen für das neue Aufsichtsregime. Sie wurde innerhalb eines vierstufigen Rechtssetzungsverfahrens für den Finanzmarkt der EU erlassen. Dieses Verfahren wurde 2001 von den Regierungen der EU entwickelt und nach dem damaligen Vorsitzenden des Ausschusses der Weisen, Baron Alexandre Lamfalussy benannt.

Die Solvency II-Rahmenrichtlinie bildet die erste Rechtsebene (Level 1) dieses Verfahrens. Diese Gesetzgebung wurde von der Kommission vorgeschlagen und vom Europäischen Rat und Parlament im Jahr 2009 verabschiedet. (**Richtlinie 2009/138/EG vom 25. November 2009**).

Der auf Level 1 verabschiedete Rechtsakt enthält eine Ermächtigung der Kommission, Durchführungsmaßnahmen auf Level 2 zu diesen Prinzipien zu erlassen. Nach Konsultation des Level 2 Ausschusses - dem Ausschuss für das Versicherungswesen und die betriebliche Altersversorgung (European Insurance and Occupational Pensions Committee, EIOPC), fordert die Kommission zu allen auf Level 2 zu behandelnden Fragestellungen ein Fachgutachten vom Level 3 Ausschuss (European Insurance and Occupational Pensions Authority, EIOPA). Diese beinhalten konkretisierende Maßnahmen zu den Level 1 und Level 2 Rechtsakten. Schließlich erfolgt auf Level 4 die Überprüfung der nationalen Maßnahmen durch die Kommission zur Umsetzung des Unionrechts.

3 Prinzipien des SST

Im SST werden Assets und Liabilities “marktnah“ bewertet, d.h. sie werden gemäß ihrem Marktpreis bewertet. Für Assets gibt es meistens genügend vergleichbare Positionen am Markt die man als Näherungswerte verwenden kann. Da Liabilities im Gegenzug nicht am Markt gehandelt werden, verwendet man hierfür einen anderen Ansatz. Der Näherungswert ist in diesem Fall durch die Best Estimates (bestmöglicher Schätzwert der Erwartungswerte) der zukünftigen Zahlungsströme (Cashflows) gegeben, die mit der risikolosen Zinskurve zum Bewertungszeitpunkt diskontiert werden. (“discounted best estimates“)

Risikotragendes Kapital

Die Differenz des marktkonsistenten Wertes der Assets und der “discounted best estimates“ der Liabilities wird als “**risikotragendes Kapital**“ (**RTK**) bezeichnet.

Zielkapital

Das **Zielkapital (ZK)** quantifiziert die von einem VU eingegangenen Risiken. Im technischen Dokument zum Swiss Solvency Test [4] wird das Zielkapital folgendermaßen definiert:

Das Zielkapital “[...] ist definiert als die Summe der Market Value Margin und des Expected Shortfall der Differenz des diskontierten RTK in einem Jahr und des heutigen RTK.“

Wobei die “**Market Value Margin**“ (**MVM**) die Differenz des marktkonsistenten Wertes der Verpflichtungen und der “discounted best estimates“ ihrer Zahlungsströme bezeichnet und durch den “Kapitalkostenansatz“ approximiert wird. Vereinfachend gesagt, bezeichnet die MVM die Summe der diskontierten Zahlungsströme der Kapitalkosten die man für das zu haltende Kapital bis zum Run-Off des gesamten Portfolios vorlegen muss. Die Prinzipien des SST in Zusammenhang mit risikotragendem Kapital und Zielkapital wird im technischen Dokument zum Swiss Solvency Test [4] genau erläutert:

“Das Ziel des Swiss Solvency Test ist es, erstens über die Höhe der Risiken einer Versicherungsunternehmung und zweitens über deren finanziellen Fähigkeit, diese Risiken zu tragen, eine Aussage zu machen. Die Höhe des eingegangenen Risikos wird mit dem Zielkapital (ZK), die Fähigkeit, Risiken zu tragen, mit dem risikotragenden Kapital (RTK) gemessen.“

Durch den Vergleich von Zielkapital und risikotragendem Kapital soll die finanzielle Lage eines VU ermittelt werden. Der Zeithorizont des SST beträgt ein Jahr. Dabei stellt das einjährige Risiko das risikotragende Kapital dar, welches heute zu halten ist, damit die durchschnittlichen “ α ” – schlechtesten Ausfälle des RTK gleich oder größer der Market Value Margin ist. Anders formuliert, besteht das einjährige Risiko aus dem Expected Shortfall (ES) der Veränderung des RTKs.

3.1 Standardmodell vs. Interne Modelle

Neben einem vorgegebenen Standardmodell können für die Risikomessung auch unternehmensspezifische interne Modelle (IM) eigens entwickelt werden. Sie sollen das Risiko-profil des Unternehmen besser widerspiegeln und vor allem dann eingesetzt werden, wenn das Standardmodell die speziellen Risiken, denen ein VU ausgesetzt ist, nicht adäquat abbildet. Das Standardmodell kann somit teilweise oder vollständig durch (partielle) interne Modelle ersetzt werden. Ein internes Modell hat in weiterer Folge nicht nur die Aufgabe Risikokapital zu berechnen sondern soll auch in die Unternehmenssteuerung mit einbezogen werden und Risikomanagementprozesse / Management Regeln sollen danach ausgerichtet sein. Eine weitere Anforderung ist die Offenlegungspflicht – Aufbau und Annahmen innerhalb des Modells müssen dokumentiert und veröffentlicht werden. Ganz konkret muss die Dokumentation so gestaltet sein, dass sich eine externe sachkundige Person ein qualitatives Verständnis vom IM aneignen kann. Im Gegenzug dazu, werden innerhalb des Standardmodells eine Reihe von Szenarien ausgewertet um zum Risikokapital zu gelangen. Diese bestehen aus einer Hand von Szenarien die von der FINMA vorgegeben werden, und aus zusätzlichen unternehmensspezifischen Szenarien. Durch den modularen Aufbau kann das Standardmodell leicht erweitert werden. ([4])

Risiko

Im Standardmodell des SST werden versicherungstechnische (vt.) Risiken, Marktrisiken und Kreditrisiken gemessen. (Operationelle Risiken werden derzeit nicht gemessen). Im Rahmen dieser Diplomarbeit wird nur das versicherungstechnische Risiko im Nicht-Lebensversicherungsber behandelt. Im SST ([4])) ist das versicherungstechnische Risiko folgendermaßen definiert:

“Das versicherungstechnische Risiko, ist das Risiko, dass sich das RTK ändert aufgrund der Zufälligkeiten der versicherten Risiken und der Unsicherheiten in der Einschätzung von versicherungstechnischen Parametern.“

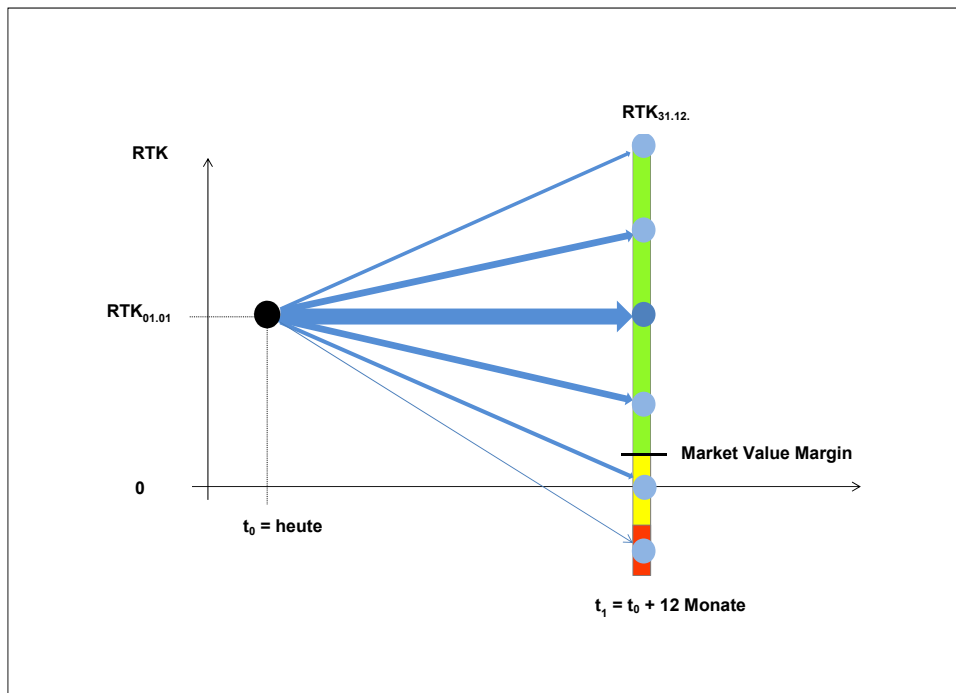
Definition des Risikos:

Abbildung 3.1: Risikotragendes Kapital zu den Zeitpunkten t_0 (bekannte Größe) und t_1 (unbekannte, stochastische Größe).

In Abbildung 3.1, kann man die möglichen Realisierungen des RTK zum Zeitpunkt t_1 (Ende des Jahres) im Vergleich zum RTK zum Zeitpunkt t_0 (Anfang des Jahres) sehen. In t_0 ist das RTK aus der Aufstellung von Assets und Liabilities bekannt. In t_1 hingegen ist das RTK unbekannt und von der Veränderung der Unternehmung abhängig. Der Marktwert der Assets steht dann in unterschiedlicher Ordnung zum Wert der Liabilities, wie in der folgenden Tabelle dargestellt ist:

$RTK < 0$	Assets < Best Estimate der Liabilities
$0 < RTK < MVM$	Best Estimate der Liabilities < Assets < Marktwert der Liabilities
$MVM < RTK$	Marktwert der Liabilities < Assets

In der Situation, in der das $RTK < MVM$ ist, ist nicht genügend Kapital vorhanden um die Abwicklungsrisiken zu tragen bzw. um die Risiken von einem externen Kapitalgeber übernommen werden zu können. Damit müsste das Abwicklungsrisiko von den Versicherungsnehmern gedeckt werden. Um dies zu verhindern und um den Schutz des Versiche-

rungsnehmers zu gewährleisten ist dieser Zustand zu vermeiden.

Die Kapitalanforderung (das Zielkapital) soll also so berechnet werden, dass mit großer Wahrscheinlichkeit so ein Zustand nicht eintritt.

3.2 Risikomasse im SST

Die Quantifizierung der extremen negativen Ausmaße des RTK erfolgt über das Risikomaß "Expected Shortfall" (ES) (auch bekannt unter "Tail Value-at-Risk"). Er repräsentiert den Durchschnitt der schlechtesten Ausfälle des RTK. Im Vergleich dazu betrachten wir auch ein alternatives Risikomaß, den "Value-at-Risk" (VaR), das lediglich ein Quantil der schlechtesten möglichen Ausfälle wiedergibt. Beide Risikomaße finden im SST Anwendung. ([4])

Definition eines kohärenten Risikomaßes nach Artzner und Delbaen:

Artzner und Delbaen haben eine Klasse von Risikomaßen definiert, die für die Messung und Überwachung finanzieller Risiken am besten geeignet sind. ([1]) Diese Klasse von Risikomaßen folgt vier Axiomen und wird als "kohärent" bezeichnet. Im Folgenden wird auf diese Klasse von Risiken näher eingegangen und die Axiome erläutert.

In diesem Zusammenhang wird **Risiko** mit der Veränderlichkeit des zukünftigen Wertes einer Position beschrieben, die sich auf Grund von verschiedenen Marktsituationen oder unvorhersehbaren Ereignissen auswirken kann. Deshalb betrachten wir im Folgenden Zufallsvariablen die uns zukünftige Werte solcher Positionen oder Portfolios liefern.

Bemerkung 3.2.1. Sei Ω die Menge aller natürlichen Zustände. Wir nehmen an, dass Ω endlich ist und betrachten es als die Menge der Ergebnisse eines Experiments. Sei X eine Zufallsvariable auf Ω . Sei G die Menge aller Risiken, d.h. die Menge aller reellen Funktionen auf Ω . Da wir Ω als endlich angenommen haben, kann G mit $\mathbb{R}^n$ identifiziert werden.

Definition 3.2.1 (Risikomaß). *Ein Risikomaß ist eine Abbildung von G nach $\mathbb{R}$. Falls $\rho(X)$, gegeben durch das Risikomaß ρ auf dem Risiko X , positiv ist, so wird es als der minimale Wert interpretiert, der für eine Risikoposition X zusätzlich gehalten und es in eine äquivalente Position investiert werden muss. Falls $\rho(X)$ negativ ist, so wird dieser Wert von der Position X abgezogen (oder als Entschädigung rückerstattet).*

Definition 3.2.2 (kohärentes Risikomaß). *Ein Risikomaß, welches alle vier Axiome: Translationsinvarianz, Subadditivität, Positive Homogenität und Monotonie erfüllt, heißt kohärent.*

Axiom T (Translationsinvarianz). *Für alle $X \in G$ und alle reellen Zahlen α gilt:*

$$\rho(X + \alpha \cdot r) = \rho(X) - \alpha.$$

D.h. durch Addieren (Subtrahieren) des sicheren Wertes α zur (von der) Anfangsposition und Investition in eine äquivalente Position (mit Anfangspreis 1 und Gesamtertrag r), reduziert (erhöht) sich das Risikomaß durch α .

Axiom S (Subadditivität). Für alle X_1 und $X_2 \in G$ gilt:

$\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$. Axiom S bedeutet, dass eine Fusionierung zweier Risikopositionen, kein extra Risiko mit sich bringt.

Axiom PH (Positive Homogenität). Für alle $\lambda \geq 0$ und alle $X \in G$ gilt: $\rho(\lambda \cdot X) = \lambda \cdot \rho(X)$.

Axiom M (Monotonie). Für alle X und $Y \in G$ mit $X \leq Y$, gilt $\rho(X) \leq \rho(Y)$.

Value-at-Risk Risikomaß: Der Value-at-Risk definiert ein Quantil einer Risikoposition zum Sicherheitsniveau α . Im Folgenden wird die Quantilsfunktion näher erläutert:

Definition 3.2.3 (Quantil). Die Zahl q bezeichnet ein α -Quantil der Zufallsvariable X bezüglich der Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathbb{P}$ mit $\alpha \in]0, 1[$ wenn eine der drei äquivalenten Eigenschaften erfüllt ist:

- a) $\mathbb{P}[X \leq q] \geq \alpha \geq \mathbb{P}[X < q]$
- b) $\mathbb{P}[Xq] \geq \alpha$ und $\mathbb{P}[X \geq q] \geq 1 - \alpha$.
- c) $F_X(q) \geq \alpha$ und $F_X(q_-) \leq \alpha$ wobei $F_X(q_-) = \lim_{x \rightarrow q, x < q} F(x)$, mit F_X die kumulative Wahrscheinlichkeitsverteilung von X .

Definition 3.2.4 (Value-at-Risk). Sei $\alpha \in]0, 1[$. Dann ist der Value-at-Risk zum Sicherheitsniveau $1 - \alpha$ einer Zufallsvariable X mit Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathbb{P}$, der Wert des Quantils von X , das ist:

$VaR_\alpha(X) = \sup\{x \mid \mathbb{P}[X \leq x] \leq \alpha\}$ oder anders ausgedrückt:

$VaR_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha)$.

Bemerkung 3.2.2. Ist die Zufallsvariable X negativ, so stellt es einen Verlust bzw. ein Risiko dar. Ein positives X kann mit Gewinn oder Ertrag interpretiert werden. Der VaR einer Zufallsvariable X ist also der kleinste Wert für den gilt, dass die Wahrscheinlichkeit dass X kleiner oder gleich x ist größer als α ist.

Der $VaR_{1\%}(X)$ entspricht dem Wert x , für den gilt, dass X in 1% aller Fälle kleiner und in 99% aller Fälle grösser als x ist.

Bemerkung 3.2.3. Der Value-at-Risk fällt nicht in die Menge der kohärenten Risikomaße, da es zwar translationsinvariant, positiv homogen und monoton aber nicht subadditiv ist, wie das folgende Beispiel anhand von Finanzoptionen zeigt. ([1])

Beispiel 3.2.1. Man betrachte zwei binäre Optionen A und B (Optionen mit nur zwei möglichen Szenarien) auf einen zugrundeliegenden Finanztitel mit fixiertem Auszahlungszeitpunkt T . Die erste Option A habe einen Kaufpreis von u und zahle den Betrag von 1000 aus, wenn der Finanztitel zum Zeitpunkt T größer als ein vorgegebener Wert U ist und nichts sonst, sodass A einen Nettobetrag von X_1 unter folgenden zwei möglichen Szenarien ergibt:

$$X_1 = \begin{cases} 1000 - u & S_T \geq U \\ -u & S_T < U \end{cases}$$

Die zweite Option B hat einen Kaufpreis von l und zahle ebenfalls den Betrag von 1000 aus, wenn der Finanztitel zum Zeitpunkt T kleiner als ein vorgegebener Wert L ist (mit $L < U$) und nichts sonst, sodass B einen Nettobetrag von X_2 unter folgenden zwei möglichen Szenarien ergibt:

$$X_2 = \begin{cases} 1000 - l & S_T < L \\ -l & S_T \geq L \end{cases}$$

Man wähle L und U so, dass $\mathbb{P}[S_T < L] = \mathbb{P}[S_T > U] = 0,008$ und man betrachte den jeweiligen 1%-Value-at-Risk ($\alpha = 1\%$) der Nettoposition X_1 und X_2 , der für die Option A durch den Wert

$$VaR_{1\%}(X_1) = \sup\{x \mid \mathbb{P}[X_1 \leq x] \leq 0,01\} = -u$$

gegeben ist, da diese Situation im Fall $\mathbb{P}[S_T > U]$ gegeben ist. Analog ist der 1%-Value-at-Risk der Nettoposition X_2 durch den Wert $-l$ gegeben, da dies durch den Fall $\mathbb{P}[S_T < L]$ gegeben ist.

Betrachtet man nun den 1%-Value-at-Risk vom Nettobetrag beim Halten beider Optionen gemeinsam, also vom Betrag

$$X_1 + X_2 = 1000 - l - u,$$

der in beiden Szenarien $S_T \geq U$ und $S_T < L$ erzielt wird, so erhält man ebenfalls einen positiven 1%-Value-at-Risk von $100 - l - u$, woraus folgt dass die Subadditivität für den Value-at-Risk nicht erfüllt ist.

Bemerkung 3.2.4. Da der Value-at-Risk nur ein Quantil darstellt sagt es nichts darüber aus, wie schlecht die Ereignisse jenseits dieses Quantils ausgeprägt sind. Um diese Frage zu beantworten kann man den Tail Value-at-Risk (TVaR) als Risikomaß heranziehen.

Definition 3.2.5 (Tail Value-at-Risk). (*Tail Conditional Expectation, Expected Shortfall*) Sei $\mathbb{P}$ eine Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω und X eine Zufallsvariable. Für $\alpha \in]0, 1[$ ist $TVaR_\alpha(X) = TCE_\alpha(X) = ES_\alpha(X) = \mathbb{E}[X \mid X \leq VaR_\alpha(X)]$ der Tail Value-at-Risk von X .

Der $TVaR$ ist also der Erwartungswert von X , unter der Bedingung, dass X kleiner oder gleich dem Value-at-Risk zum Sicherheitsniveau $1 - \alpha$ ist.

Der $TVaR$ gibt also nicht nur an wie schlecht sich ein extremes Ereignis auswirken kann, sondern es misst den erwarteten "tail" der Verteilung ab dem Quantil der durch den VaR gegeben ist. Somit gilt der $TVaR$ als konservativer zum gleichen Sicherheitsniveau als der VaR . Zusätzlich erfüllt der $TVaR$ die mathematische Eigenschaft der Kohärenz.

Der in Kapitel 3 zu vermeidende Zustand, in der das $RTK < MVM$ ist, kann nun mittels dem $TVaR$ genauer ermittelt werden. Das risikotragende Kapital zur Zeit t_0 muss so groß sein, dass es zur Zeit t_1 mit grosser Wahrscheinlichkeit grösser oder gleich der Market Value Margin ist:

$$TVaR_\alpha[RTK(t_1) \mid RTK(t_0) = ZK] = MVM \quad (3.1)$$

Der $TVaR$ gewährleistet, dass das $RTK(t_1)$ mit geringer Wahrscheinlichkeit unter der Market Value Margin liegt wenn das heutige $RTK(t_0)$ genügend gross also gleich dem Zielkapital ist. Daraus ergibt sich im Sinne des SST eine (im wesentlichen äquivalente)

Gleichung für das Zielkapital:

$$ZK = -TVaR_{\alpha} \left(\frac{RTK(t_1)}{1 + r_1^{(0)}} - RTK(t_0) \right) + \frac{MVM}{1 + r_1^{(0)}} \quad (3.2)$$

wobei $r_1^{(0)}$ für den heutigen einjährigen Zinssatz steht.

Das Zielkapital besteht aus dem Tail Value-at-Risk des risikotragenden Kapitals für das einjährige Risiko und der Market Value Margin. Diese MVM ist der Preis für das zukünftig zu haltende Risikokapital welches bei der Übernahme des Portfolios durch ein anderes Versicherungsunternehmen oder einen Investor fällig wäre. Es deckt also alle Kosten im Zusammenhang mit der Beschaffung aller zukünftigen Kapitalie die einem Versicherungsunternehmen bei der Übernahme des Portfolios anfallen. Somit wird die MVM auch als Risikoprämie für den Run-off der Liabilities bezeichnet.

3.3 Bewertung der Liabilities

Die Rückstellungen und Verbindlichkeiten für Nicht-Lebensversicherer stellen sich aus den folgenden Werten zusammen:

- bestmöglicher Schätzwert der Barwerte der Erwartungswerte der zukünftigen Zahlungen für Schäden, deren Schadendatum in der Vergangenheit liegt, inkl. IBNyR-Schäden¹
- Rückstellungen für zukünftige Kosten im Zusammenhang mit den oben genannten Schadenfällen (ULAE-Rückstellungen²)
- Prämienübertrag – eingenommene, aber noch nicht verdiente Prämien (UPR³)
- diskontierter Best Estimate Wert der weiteren Rückstellungen und Verpflichtungen, welche nicht risikotragend sind

Die diskontierten Best Estimates der Schadenrückstellungen ist die bestmögliche Schätzung der heutigen Barwerte zukünftiger Zahlungen für Schäden die in der Vergangenheit, also vor dem Betrachtungszeitpunkt liegen. Dabei müssen alle, bis zum Betrachtungszeitpunkt, vorhandenen Informationen mit einbezogen werden um zu gewährleisten dass die geschätzten Reserven erwartungstreu gesetzt sind. ([4])

Dafür müssen die zukünftigen Zahlungen pro Risikoparte (Line of Business) bestmöglich geschätzt werden und auf den Zeitpunkt t_0 mittels den risikofreien Zinssätzen $v_j^{(0)}$ abdiskontiert werden. Für die Diskontierung wird das Zahlungsmuster der undiskontierten Best Estimate Reserven herangezogen und auf die zukünftigen Zahlungen angewendet.

¹Incurred but not yet reported – Schäden die bereits eingetreten sind, aber noch nicht gemeldet wurden

²Unallocated loss adjustment expenses

³Unearned premium reserve

Die diskontierten Best Estimate Reserven zum Zeitpunkt t_0 werden somit wie folgt berechnet:

$$\sum_{k \geq 1} v_k^{(0)} \beta_{k-1} \cdot R_{PY}^{(0)} = \sum_{k \geq 1} d_{PY}^{(0)} \cdot R_{PY}^{(0)}, \quad (3.3)$$

wobei $R_{PY}^{(0)}$ die undiskontierten Schadenrückstellungen zum Zeitpunkt t_0 ("Prior Year" (PY)-Schäden) sind und die Koeffizienten $(\beta_k)_{k \geq 0}$ das Auszahlungsmuster pro LoB (Line of Business) bezeichnet. Im SST werden Standards $(\alpha_k)_{k \geq 0}$ solcher Auszahlungsmuster für die grössten LoBs bereitgestellt. Diese sind vom Schadenjahr unabhängig und sind von den großen Portfolios am schweizerischen Versicherungsmarkt abgeleitet worden. Um sie für die Berechnung der Schadenreserven verwenden zu können müssen sie allerdings umskaliert werden damit sie als $(\beta_k)_{k \geq 0}$ mit in die Berechnung einfließen können.

4 Das Standardmodell im SST

Dieses Kapitel befasst sich mit der Untersuchung des Zielkapitals wie es in Formel 3.2 definiert ist. Wir betrachten ein Geschäftsjahr mit $t_0 = 0$ und $t_1 = 1$, mit entsprechender Anpassung der Formel 3.2:

$$ZK = -TVaR_\alpha \left(\frac{RTK(1)}{1 + r_1^{(0)}} - RTK(0) \right) + \frac{MVM(1)}{1 + r_1^{(0)}}$$

Zu Beginn wird versucht für den ersten Term $\frac{RTK(1)}{1 + r_1^{(0)}} - RTK(0)$ eine Verteilung zu finden um den TVaR zum Sicherheitsniveau $1 - \alpha$ für diesen Term berechnen zu können. Aus der Definition des risikotragenden Kapitals – als Differenz zwischen Marktwert der Assets und diskontierter BE Wert der Liabilities:

$$RTK(t) = A(t) - L(t)$$

kann somit der erste Term folgendermaßen umschrieben werden:

$$\frac{RTK(1)}{1 + r_1^{(0)}} - RTK(0) = \left(\frac{A(1)}{1 + r_1^{(0)}} - A(0) \right) - \left(\frac{L(1)}{1 + r_1^{(0)}} - L(0) \right) \quad (4.1)$$

Dieser dient als Ausgangslage für unsere weiteren Berechnungen.

4.0.1 Allgemeine Annahmen

Die Risiken im Standardmodell für Nicht-Lebensversicherer sind im SST genau festgelegt. Es wird klar zwischen stochastischen (mit Risiken behafteten) und deterministischen Größen unterschieden:

- Risikobehaftete Größen
 - die Anlagen (Wertänderungen und Ausfall) und die zukünftige Zinskurve mit Auswirkungen auf Aktiva und Passiva
 - der Schadenaufwand der Neuschäden ("Current Year" (CY)–Schäden)
 - die Schadenrückstellungen
- Deterministische Größen
 - die verdienten Prämien P für das aktuelle Jahr (CY)
 - die Betriebs- und Verwaltungskosten K

- die Abwicklungsmuster $(\alpha_k)_{k \geq 0}$ und $(\beta_k)_{k \geq 0}$ für CY- bzw. PY-Schäden (nur die Höhe der Rückstellungen ist stochastisch; das Abwicklungsmuster bleibt deterministisch)

Im Standardmodell wird angenommen, dass die zukünftigen Zinsen unabhängig von den versicherungstechnischen Variablen (Schadenhöhe und Schadenrückstellungen) sind. Die Rückstellungen im Standardmodell sind nach dem Best Estimate Prinzip gesetzt. Das heißt dass die Schadenrückstellungen im Erwartungswert einen Abwicklungsgewinn von 0 ergeben.

Bemerkung 4.0.1. Sie $R_{PY}^{(0)}$ der Best Estimate der Schadenrückstellungen am 1. Januar des CY für PY-Schäden. Mit $C_{PY} \times R_{PY}^{(0)}$ wird die Neuberuteilung des Aufwandes $R_{PY}^{(0)}$ am 31. Dezember des CY bezeichnet. D.h. die Neubeurteilung der Zahlungen im CY und der Ausgangsrückstellungen für PY-Schäden am 31.12. des CY. Dabei ist C_{PY} ein stochastischer Korrekturfaktor. Das undiskontierte Abwicklungsergebnis wird dann mittels $(1 - C_{PY})R_{PY}^{(0)}$ berechnet, sodass nach dem oben genannten Best Estimate Prinzip $E[C_{PY}] = 1$ ergibt.

Der Cash-in- und out-flow wird innerhalb eines Jahres so festgelegt, dass Prämien und Kosten zu Beginn des Jahres und Schadenzahlungen am Ende des Jahres fließen. Der Zeitpunkt der Zahlungsströme ist wichtig, weil im SST nicht die Nominalwerte sondern die Barwerte betrachtet werden.

Ein Prämienübertrag zu Beginn des Jahres wird nicht berücksichtigt. (Dies deutet darauf hin, dass kein Neugeschäft berücksichtigt wird, welches nach Ende des aktuellen Jahres entsteht.)

Kostenarten

Man unterscheidet zwischen Schadenbearbeitungskosten und Betriebs- und Verwaltungskosten K . Die Schadenbearbeitungskosten werden weiters unterteilt in

- Nicht allozierbare Schadenbearbeitungskosten (ULAE-Kosten, Kosten die nicht einem einzelnen Schaden zugeordnet werden können, wie Löhne der Sachbearbeiter, Betrieb der IT-Systeme und andere Schadenverwaltungskosten)
- Allozierbare Schadenbearbeitungskosten (ALAE-Kosten¹, Kosten die einem einzelnen Schaden zugeordnet werden können, wie Gerichtskosten)

Schadenbearbeitungskosten für vergangene Schäden werden als Rückstellungen ausgewiesen. ALAE-Kosten sind meistens schon in den Schadenrückstellungen enthalten. Die ULAE-Rückstellungen müssen daher meistens separat betrachtet werden.

4.0.2 Aufteilung der Lines of Business

Im SST für Nicht-Lebensversicherer sind die zu modellierenden Sparten auf dreizehn Lines of Business unterteilt. Die Risiken für die Schadenrückstellungen werden gemäß der in Anhang 3 genannten LoBs modelliert, allerdings nicht alle Risiken aus Neuschäden.

¹Allocated loss adjustment expenses

Man unterscheidet zwischen drei Arten von Schäden: Elementarschäden, Großschäden und CAT-Schäden. Elementarschäden setzen sich aus Schäden zusammen die in einem Elementarschadenpool (ES-Pool) gesammelt werden und anderen Elementarschäden, wie z.B. Betriebsunterbruchsschäden, die durch ein Elementarereignis entstanden sind. Die Neuschadenrisiken der Elementarschäden werden aus der Sachsparte ausgemustert und separat behandelt.

4.0.3 Trennung des Gesamtrisikos in versicherungs-technisches Risiko und Marktrisiko

Das Gesamtrisiko eines Schadens besteht sowohl aus einem versicherungstechnischen Risiko als auch einem Marktrisiko, der durch die Verzinsung der Verpflichtungen entsteht. Einerseits wird der Nominalwert des Schadens an sich als versicherungstechnisches Risiko betrachtet und andererseits die Diskontierung der Verpflichtungen als Zinsrisiko mitberücksichtigt.

Das Gesamtrisiko besteht aus der Multiplikation dieser beiden Risiken. Im Folgenden werden sie mittels einer vereinfachenden Linearisierung des mathematischen Produkts separat modelliert. (Taylorentwicklung 1. Ordnung des Produktes zweier unabhängiger Variablen im Punkt der Erwartungswerte der beiden Variablen.)

4.0.3.1 Modellierung der CY-Schäden

Wir betrachten die Formel 4.1 nur für CY-Schäden und beginnen mit Assets $A(0)$. Als Liabilities für CY-Schäden betrachten wir nur die Reserven für die Prämienüberträge $L(0) = UPR$.

Wie in Kapitel 4.0.1 bereits erwähnt, fließen die Prämien P und Verwaltungskosten K gleich zu Beginn des Jahres was auf ein Ergebnis von

$$A(0) + (P - UPR) - K$$

führt und einen zufälligen Return R_1 im Laufe des Jahres mit sich bringt.

Die Neuschäden (CY-Schäden) ergeben sich während des Jahres und werden am Jahresende ausbezahlt. Insgesamt wird der undiskontierte Jahresschadenaufwand mit S_{CY} bezeichnet. Somit lässt sich der Wert der Assets am Ende des Jahres wie folgt ermitteln:

$$A(1) = (A(0) + (P - UPR) - K)(1 + R_1) - \alpha_0 S_{CY} \quad (4.2)$$

Die Liabilities am Ende des Jahres (d.h. im Zeitpunkt t_1) setzen sich aus dem Barwert der zukünftigen Schadenzahlungen $(t_2, t_3, t_4, \dots)$ für CY-Schäden, d.h.

$$L(1) = (V_1^{(1)} \cdot \alpha_1 + V_2^{(1)} \cdot \alpha_2 + \dots + V_n^{(1)} \cdot \alpha_n) \cdot S_{CY} \quad (4.3)$$

wobei $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ das Auszahlungsmuster für CY-Schäden und $V_1^{(1)}, \dots, V_n^{(1)}$ die Diskontfaktoren der (aus Sicht vom 01.01 CY unsicheren) Zinskurve am 31.12.CY bezeichnet.

Daraus ergibt sich mit Berücksichtigung des Diskontierungseffektes folgende Veränderung des RTK für CY-Schäden:

$$\begin{aligned} \frac{RTK(1)}{1 + r_1^{(0)}} - RTK(0) = & \frac{1}{1 + r_1^{(0)}} \left[(A(0) - UPR + P - K) \cdot (1 + R_1) - \right. \\ & \left. D_{CY}^{(1)} \cdot S_{CY} - (1 + r_1^{(0)}) \cdot (A(0) - UPR) \right] \end{aligned} \quad (4.4)$$

wobei $D_{CY}^{(1)}$ der Diskontfaktor für CY-Schäden ist:

$$D_{CY}^{(1)} \cdot S_{CY} = (V_0^{(1)} \cdot \alpha_0 + V_1^{(1)} \cdot \alpha_1 + \dots + V_n^{(1)} \cdot \alpha_n) \cdot S_{CY} \quad (4.5)$$

Die obige Formel stellt ein Produkt von zwei Zufallsvariablen dar, da sowohl die Diskontfaktoren $V_j^{(1)}$ als auch der Schadenaufwand S_{CY} stochastisch sind. Der erste Faktor stellt das Marktrisiko und der zweite das versicherungstechnische Risiko. Die folgende Linearisierung trennt die beiden Risikoarten voneinander:

$$\begin{aligned} D_{CY}^{(1)} \cdot S_{CY} \approx & E[D_{CY}^{(1)}] \cdot E[S_{CY}] + \\ & (D_{CY}^{(1)} - E[D_{CY}^{(1)}]) \cdot E[S_{CY}] + \\ & E[D_{CY}^{(1)}] \cdot (S_{CY} - E[S_{CY}]) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Dabei bezeichnet der erste Term das Produkt vom erwarteten Diskontierungseffekt und dem erwarteten Schadenaufwand. Der zweite Term bezeichnet die Auswirkung der Zinssunsicherheit auf den Schadenaufwand und der dritte Term beschreibt die Schwankung des Schadenaufwandes bei festem, erwartetem Diskontfaktor.

Formel 4.4 lässt sich somit wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} \frac{RTK(1)}{1 + r_1^{(0)}} - RTK(0) \approx & \frac{1}{1 + r_1^{(0)}} \left((R_1 - E[R_1]) \cdot (A(0) - UPR + P - K) - \right. \\ & (D_{CY}^{(1)} - E[D_{CY}^{(1)}]) \cdot E[S_{CY}] \\ & + (E[R_1] - r_1^{(0)}) \cdot (A(0) - UPR + P - K) + r_1^{(0)} \cdot (P - K) \\ & + (P - K) - E[D_{CY}^{(1)}] \cdot E[S_{CY}] \\ & \left. - E[D_{CY}^{(1)}] \cdot (S_{CY} - E[S_{CY}]) \right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Zeile 1 und 2 der Formel bezeichnet das Finanz- und ALM²-Risiko, Zeile 3 beschreibt die erwarteten Kapitalerträge auf den Assets, Zeile 4 das erwartete vt. Ergebnis und Zeile 5 das vt. Risiko.

²Asset-Liability-Management

4.0.3.2 Modellierung der PY-Schäden

Wir betrachten dieselbe Formel 4.1, welche den ersten Teil der Formel 3.2, die das Zielkapital beschreibt, für PY-Schäden. Das sind Schäden die sich in der Vergangenheit also bereits vor dem "current year" ereignet haben.

Der diskontierte Wert der Best Estimate Rückstellungen zum Zeitpunkt t_0 sei gegeben durch

$$L_{PY}^{(0)} = \sum_{j=0} v_{j+1}^{(0)} \beta_j R_{PY}^{(0)} = d_{PY}^{(0)} R_{PY}^{(0)} \quad (4.8)$$

wobei $R_{PY}^{(0)}$ den undiskontierten (nominellen) Wert der BE Rückstellungen beschreibt und $d_{PY}^{(0)}$ den durch obige Gleichung definierte Diskontfaktor.

Aufgrund von neuen Informationen die während des Jahres einfließen, kann der geschätzte Best Estimate Wert kurz vor der Zahlung am Ende des Jahres einer Korrektur unterzogen werden. Diese erfolgt, wie bereits in Bemerkung 4.0.1 erwähnt durch den Korrekturfaktor C_{PY} .

Die neue Schätzung für die zukünftigen Zahlungen ist somit durch $C_{PY} R_{PY}^{(0)}$ gegeben. Die Zahlung die am Ende des Jahres (Zeitpunkt t_1) erfolgt, ist gegeben durch $\beta_0 \cdot C_{PY} R_{PY}^{(0)}$ und die zukünftigen Zahlungen entsprechend durch $\beta_i \cdot C_{PY} R_{PY}^{(0)}$ für $i = 1, 2, 3, \dots$

Nach der Zahlung (Zeitpunkt t_1) ist der diskontierte Wert der Best Estimates somit gegeben durch:

$$L_{PY}^{(1)} = \sum_{i=1} V_i^{(1)} \cdot \beta_i \cdot C_{PY} R_{PY}^{(0)} \quad (4.9)$$

Der Wert der Assets zum Zeitpunkt t_0 sei $A(0)$. Am Ende des Jahres wird dieser durch den Wert der Zahlung $\beta_0 \cdot C_{PY} R_{PY}^{(0)}$ verringert. Formel 4.1 liefert uns durch Einsetzen somit folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned} \frac{RTK(1)}{1 + r_1^{(0)}} - RTK(0) &= \\ &- \frac{\beta_0 \cdot C_{PY} R_{PY}^{(0)} + \sum_{i=1} V_i^{(1)} \cdot \beta_i \cdot C_{PY} R_{PY}^{(0)}}{1 + r_1^{(0)}} + d_{PY}^{(0)} R_{PY}^{(0)} = \\ &- \frac{\sum_{j=0} V_j^{(1)} \cdot \beta_j \cdot C_{PY} R_{PY}^{(0)}}{1 + r_1^{(0)}} + d_{PY}^{(0)} R_{PY}^{(0)} = \\ &- \frac{D_{PY}^{(1)} \cdot C_{PY} R_{PY}^{(0)}}{1 + r_1^{(0)}} + d_{PY}^{(0)} R_{PY}^{(0)} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Wie bei den CY-Schäden besteht das BE Rückstellungsrisiko aus einem Produkt von Zinsrisiko (gegeben durch $D_{PY}^{(1)}$ und dem Risiko der Änderung des nominellen Wertes der BE Rückstellungen (gegeben durch C_{PY}).

Dieses Produkt lässt sich wie bei den CY-Schäden linearisieren:

$$\begin{aligned}
 D_{PY}^{(1)} \cdot C_{PY} &\approx \\
 &E[D_{PY}^{(1)}] \cdot E[C_{PY}] + E[D_{PY}^{(1)}] \cdot (C_{PY} - E[C_{PY}]) + \\
 &(D_{PY}^{(1)} - E[D_{PY}^{(1)}]) \cdot E[C_{PY}] \\
 &= E[D_{PY}^{(1)}] + E[D_{PY}^{(1)}] \cdot (C_{PY} - 1) + [D_{PY}^{(1)} - E[D_{PY}^{(1)}]] \\
 &= E[D_{PY}^{(1)}] \cdot (C_{PY} - 1) + D_{PY}^{(1)}
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

wobei $E[C_{PY}] = 1$ verwendet wurde. Durch Einsetzen in die obige Formel ergibt somit:

$$\begin{aligned}
 \frac{RTK(1)}{1 + r_1^{(0)}} - RTK(0) &\approx \\
 &- \frac{D_{PY}^{(1)} R_{PY}^{(0)} + E[D_{PY}^{(1)}] (C_{PY} - 1) R_{PY}^{(0)}}{1 + r_1^{(0)}} + d_{PY}^{(0)} R_{PY}^{(0)} = \\
 &- \frac{D_{PY}^{(1)} - E[D_{PY}^{(1)}]}{1 + r_1^{(0)}} R_{PY}^{(0)} - \left(\frac{E[D_{PY}^{(1)}]}{1 + r_1^{(0)}} C_{PY} - d_{PY}^{(0)} \right) R_{PY}^{(0)}
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Wieder kann der erste Term in der letzten Zeile mit der Zinsunsicherheit auf den Rückstellungen interpretiert werden und der zweite Term mit dem Risiko der Veränderung der nominellen Höhe der Rückstellungen.

4.0.3.3 Gemeinsame Modellierung der CY- und PY-Schäden

Da wir bereits die Veränderung des RTK innerhalb eines Jahres für CY-Schäden und PY-Schäden getrennt bereits berechnet haben und sie einer Linearisierung unterzogen haben, die das Zinsrisiko vom versicherungstechnischen Risiko trennt, bleibt nur noch übrig, die beiden Formeln 4.12 und 4.7 zusammenzuführen. Daraus ergibt sich folgende zentrale Formel für die Veränderung des risikotragenden Kapitals innerhalb eines Betrachtungs-jahres:

$$\begin{aligned}
 \frac{RTK(1)}{1 + r_1^{(0)}} - RTK(0) &\approx \\
 &\frac{R_1 - \mathbb{E}[R_1]}{1 + r_1^{(0)}} \cdot (A(0) + (P - UPR) - K) \\
 &- \frac{D_{CY}^{(1)} - \mathbb{E}[D_{CY}^{(1)}]}{1 + r_1^{(0)}} \cdot \mathbb{E}[S_{CY}] - \frac{D_{PY}^{(1)} - \mathbb{E}[D_{PY}^{(1)}]}{1 + r_1^{(0)}} \cdot R_{PY}^{(0)} \\
 &+ \frac{\mathbb{E}[R_1] - r_1^{(0)}}{1 + r_1^{(0)}} \cdot (A(0) + (P - UPR) - K) \\
 &+ (P - K) - \frac{\mathbb{E}[D_{CY}^{(1)}]}{1 + r_1^{(0)}} \cdot \mathbb{E}[S_{CY}] \\
 &- \frac{\mathbb{E}[D_{CY}^{(1)}]}{1 + r_1^{(0)}} \cdot (S_{CY} - \mathbb{E}[S_{CY}]) - \left(\frac{\mathbb{E}[D_{PY}^{(1)}]}{1 + r_1^{(0)}} \cdot C_{PY} - d_{PY}^{(0)} \right) \cdot R_{PY}^{(0)}
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Diese fünfzeilige Formel lässt sich wie folgt interpretieren:

- Die erste und zweite Zeile enthalten Zufallsgrößen die das Marktrisiko beschreiben. Die unsicheren Werte sind durch den Return R_1 und den Diskontfaktoren $D_{CY}^{(1)}$ und $D_{PY}^{(1)}$ gegeben, die als Differenz zu ihren Erwartungswerten $\mathbb{E}[D_{CY}^{(1)}]$, $\mathbb{E}[D_{PY}^{(1)}]$ und $\mathbb{E}[R_1]$ auftreten.
- Die dritte Zeile bezeichnet den zu erwarteten Return auf den vorhandenen Assets unter dem einjährigen risikofreien Zinssatz.
- Die vierte Zeile bezeichnet das erwartete versicherungstechnische Ergebnis.
- Die fünfte Zeile ist wie die ersten beiden von zufälliger Natur. Darin kommt die Abweichung des versicherungstechnischen Ergebnisses von dessen Erwartungswert vor, die von der unbekannten Höhe der CY-Schäden und dem unbekannten Abwicklungsergebnis der PY-Schäden abhängt.

Da die vorliegende Arbeit vorrangig auf versicherungstechnische Risiken abzielt, werden hier die Terme die das Marktrisiko beschreiben außen vor gelassen und lediglich die Terme für versicherungstechnische Risiken betrachtet (Zeilen 4 und 5 der obigen Formel).

Um die Formel noch weiter zu vereinfachen, wird im SST eine Annahme verwendet die die Diskontfaktoren approximiert:

$$\frac{\mathbb{E}[D_{CY}^{(1)}]}{1 + r_1^{(0)}} \approx d_{CY}^{(0)}$$

und

$$\frac{\mathbb{E}[D_{PY}^{(1)}]}{1 + r_1^{(0)}} \approx d_{PY}^{(0)} \tag{4.14}$$

Auf der linken Seite steht jeweils der auf den Zeitpunkt t_0 abdiskontierte Wert von $\mathbb{E}[D_{CY}^{(1)}]$ bzw. $\mathbb{E}[D_{PY}^{(1)}]$. Es wird also mit der in t_1 aktuellen Zinskurve auf t_1 und dann mit $1 + r_1^{(0)}$ auf t_0 diskontiert. Auf der rechten Seite befindet sich schon der Diskontierungsfaktor der zur Zeit t_0 die vorhandene Zinskurve zur Diskontierung auf den Zeitpunkt t_0 verwendet.

Demnach wird hier eine Annahme über den Erwartungswert eines zukünftigen Diskontfaktors getroffen was zur Folge den Erwartungswert der zukünftigen Zinsen $R_i^{(1)}$ mit sich bringt.

Die rechte und linke Seite stimmen genau dann vollständig überein, wenn die Zinskurve flach und zeitlich konstant wäre ($r_k^{(0)} = r_{k+1}^{(0)} = \mathbb{E}[R_k^{(1)}] = \mathbb{E}[R_{k+1}^{(1)}] = r$), was im allgemeinen nicht der Fall ist.

Diese Annahme ist aber für die Einführung der Vereinfachung notwendig, welche die diskontierten Rückstellungen zu einem erwarteten versicherungstechnischen Ergebnis von

null führt. Jede andere Annahme über zukünftige Zinsen würde zu einem Abwicklungsergebnis auf diskontierter Basis ungleich null führen.

Es ist aber möglich im Standardmodell eine andere Annahme über den Erwartungswert der zukünftigen Zinsen zu treffen als diese, solange diese Annahme sowohl für die Assets als auch für die Liabilities gilt, da sich in einem Portfolio mit gleichem Zahlungsmuster für Assets und Liabilities die beiden Auswirkungen der Diskontierung exakt aufheben. (siehe [4], Kapitel 4.4.4.5 für weitere Erläuterungen zu dieser Annahme)

Wird die Näherung angewendet, so kann das versicherungstechnische Risiko, also Zeilen 4 und 5 der Formel 4.13 vereinfachend dargestellt werden und liefert uns die zentrale Formel für das versicherungstechnische Risiko:

$$(P - K - d_{CY}^{(0)} \mathbb{E}[S_{CY}]) - d_{CY}^{(0)} (S_{CY} - \mathbb{E}[S_{CY}]) - d_{PY}^{(0)} (C_{PY} - 1) R_{PY}^{(0)} \quad (4.15)$$

Für die Berechnung dieses Terms sind folgende Größen notwendig:

- die Schätzung der Prämien P und Kosten K für das CY
- die Schätzung der Abwicklungsmuster (α_i) und (β_j) und die daraus abgeleiteten Diskontfaktoren $d_{CY}^{(0)}$ und $d_{PY}^{(0)}$
- die Schätzung des erwarteten Schadenaufwands $\mathbb{E}[S_{CY}]$ für CY-Schäden
- die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsvariable S_{CY} der CY-Schäden
- die Wahrscheinlichkeitsverteilung für das Abwicklungsergebnis $(1 - C_{PY}) \cdot R_{PY}^{(0)}$

Mit dieser Darstellung des versicherungstechnischen Risikos lautet die Formel 4.13 folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \frac{RTK(1)}{1 + r_1^{(0)}} - RTK(0) &\approx \\ &\frac{R_1 - \mathbb{E}[R_1]}{1 + r_1^{(0)}} \cdot (A(0) + (P - UPR) - K) \\ &- \frac{D_{CY}^{(1)} - \mathbb{E}[D_{CY}^{(1)}]}{1 + r_1^{(0)}} \cdot \mathbb{E}[S_{CY}] - \frac{D_{PY}^{(1)} - \mathbb{E}[D_{PY}^{(1)}]}{1 + r_1^{(0)}} \cdot R_{PY}^{(0)} \\ &+ \frac{\mathbb{E}[R_1] - r_1^{(0)}}{1 + r_1^{(0)}} \cdot (A(0) + (P - UPR) - K) \\ &+ (P - K - d_{CY}^{(0)} \mathbb{E}[S_{CY}]) \\ &- d_{CY}^{(0)} (S_{CY} - \mathbb{E}[S_{CY}]) - d_{PY}^{(0)} (C_{PY} - 1) R_{PY}^{(0)} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Der dritte und vierte Term der rechten Seite der Formel haben beide Erwartungswert null und beschreiben das Markt- und Versicherungsrisiko. Die erwartete Veränderung

des risikotragenden Kapital wird durch den ersten, zweiten und fünften Term beschrieben, welche das erwartete versicherungstechnische Ergebnis und das erwartete finanztechnische Ergebnis gegeben ist.

Das **erwartete versicherungstechnische Ergebnis** besteht aus den erwarteten verdienten Prämien abzüglich des diskontierten Erwartungswertes der Neuschäden und der erwarteten Kosten. Es ist hier anzumerken, dass aus der in Formel 4.14 getroffenen Annahme kein Beitrag an das erwartete versicherungstechnische Ergebnis aus den Rückstellungen für PY-Schäden entstehen. (Eine Ausnahme bilden Rentenrückstellungen welche in dieser Arbeit nicht berücksichtigt werden)

Das **erwartete Finanzergebnis** ist gleich der Performance der Assets abzüglich des einjährigen risikofreien Zinssatzes. Dies resultiert aus der Definition 4.1 als Teil des Zielkapitals und der Regelung, dass für das Halten eines Portfolios welches genau aus einer einjährigen Bundesobligation besteht, ein Zielkapital von null entsteht.

Falls die Annahme 4.14 getroffen wird, so ist die Performance der risikofreien Obligationen dem einjährigen risikofreien Zinssatz gleichzusetzen.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der versicherungstechnischen Zufallsvariablen S_{CY} und $(1 - C_{PY}) \cdot R_{PY}^{(0)}$ werden in Kapitel 4.0.4 und 4.2 bestimmt.

4.0.4 Bestimmung der Verteilung für das versicherungstechnische Ergebnis aus CY-Schäden

Im Folgenden wird die Modellierung des Jahresschadenaufwandes S_{CY} im Standardmodell beschrieben. Für die Formel 4.16 ist die Differenz von S_{CY} und ihrem Erwartungswert zu bilden.

Für die Modellierung werden die Schäden in zwei Klassen,

- **Kleinschäden** (Normalschäden, die häufig auftreten und einen kleinen Schadenaufwand nachweisen)

und

- **Grossschäden** (Einzelgrossschäden und Kumulschäden, die z.B. von Naturereignissen wie Hagel oder Überschwemmung herführen.)

unterteilt.

Der Grund für die Separierung der Schäden in diese zwei Klassen ist dass keine vernünftige Wahrscheinlichkeitsverteilung existiert, die sowohl für Kleinschäden als auch Grossschäden passend ist.

Für die Unterteilung zwischen Klein- und Grossschäden stehen im SST zwei Grenzen (Grossschadengrenze β) von 1 Mio. CHF und 5 Mio. CHF zur Auswahl.

Somit wird die Verteilung des Gesamtschadenaufwandes als Summe zwischen Normal- und Grossschäden gesucht:

$$S_{CY} = S_{CY}^{NS} + S_{CY}^{GS} \quad (4.17)$$

Im SST wird angenommen, dass die Grossschäden unabhängig von den Normalschäden sind, sodass sich S_{CY} durch die Faltung der beiden Verteilungen ergibt, die zu bestimmen sind.

Verteilung der Normalschäden

Es gilt die übliche Branchenaufteilung (wie sie in Tabelle ?? gegeben ist) für die kleinen CY-Schäden. (Eine Ausnahme bilden die Normalschäden im "Elementarschadenpool" welches Bestandteil der separaten ESP-Modellierung ist. Siehe dazu Kapitel 4.1)

Der Jahresschadenaufwand der Normalschäden wird im Standardmodell mittels Erwartungswert und Varianz modelliert. Dafür wird der Erwartungswert und die Varianz für die gesamten Normalschäden (über alle Branchen) berechnet.

Der **Erwartungswert** für den Normalschadenaufwand S_{CY} ist die Summe der einzelnen Erwartungswerte pro Branche i:

$$\mathbb{E}[S_{CY}^{NS}] = \sum_{i=1}^{12} \mathbb{E}[S_{CY,i}^{NS}] \quad (4.18)$$

wobei der erwartete Schadenaufwand pro Branche $\mathbb{E}[S_{CY,i}^{NS}]$ z.B. als Produkt von Schadensatz und der erwarteten verdienten Prämie berechnet werden kann:

$$\mathbb{E}[S_{CY,i}^{NS}] = LR_i \cdot P_i \quad (i = 1, 2, \dots, 12) \quad (4.19)$$

wobei der Schadensatz LR_i ("Loss Ratio" pro Branche i) den erwarteten Schaden pro verdienter Bruttoprämie darstellt.

Die **Varianz** des gesamten Normalschadenaufwandes wird anhand der Varianzen und Kovarianzen des Normalschadens pro Branche berechnet:

$$\begin{aligned} VAR(S_{CY}^{NS}) &= \sum_{i=1}^{12} VAR(S_{CY,i}^{NS}) + \sum_{i,j=1 \text{ und } i \neq j}^{12} Cov(S_{CY,i}^{NS}, S_{CY,j}^{NS}) \\ &= \sum_{i=1}^{12} (VK_i \cdot \mathbb{E}[S_{CY,i}^{NS}])^2 \\ &\quad + \sum_{i,j=1 \text{ und } i \neq j}^{12} \rho_{i,j} \cdot (VK_i \cdot \mathbb{E}[S_{CY,i}^{NS}]) \cdot (VK_j \cdot \mathbb{E}[S_{CY,j}^{NS}]) \end{aligned} \quad (4.20)$$

wobei VK_i der Variationskoeffizient der Branche i ist, definiert durch:

$$VK_i = \frac{\sigma(S_{CY,i}^{NS})}{\mathbb{E}[S_{CY,i}^{NS}]} \quad (4.21)$$

mit $\sigma(S_{CY,i}^{NS})$ die Standardabweichung des Normalschadenaufwandes $S_{CY,i}^{NS}$ der Branche i und $\rho_{i,j}$ der Korrelationskoeffizient zwischen den Branchen i und j darstellt. (Die Korrelationen zwischen den einzelnen Branchen ist im Standardmodell fix vorgegeben und ist im Anhang 1 zu finden.)

Die Varianz des Jahresschadenaufwandes wird von zwei Risiken beeinflusst. Einerseits gibt es eine Unsicherheit in den statistischen Schwankungen der Schadenanzahl und Schadenhöhe um ihren Erwartungswert, welches Zufalls- oder Prozessrisiko genannt wird. Andererseits besteht eine Unsicherheit in der Ermittlung der Parameter der Verteilung, welches Parameterrisiko genannt wird. (Die Parameter der Verteilung sind unbekannt und müssen ebenfalls anhand von Statistiken geschätzt werden.)

Um die Varianz des Jahresschadenaufwandes pro Branche i in das Parameterrisiko und in das Zufallsrisiko zu unterteilen, formen wir die Varianz einer Zufallsvariablen S folgendermaßen um:

$$\begin{aligned} VAR(S) &= \mathbb{E}[S^2] - \mathbb{E}^2[S] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[S^2|\Theta]] - \mathbb{E}^2[\mathbb{E}[S|\Theta]] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}^2[S|\Theta]] - \mathbb{E}^2[\mathbb{E}[S|\Theta]] + \mathbb{E}[\mathbb{E}[S^2|\Theta] - \mathbb{E}^2[S|\Theta]] \\ &= VAR(\mathbb{E}[S|\Theta]) + \mathbb{E}[VAR(S|\Theta)] \end{aligned} \quad (4.22)$$

Ersetzt man in der Formel die Zufallsvariable S durch $S_{CY,i}^{NS}$, so kommt man auf folgende Darstellung der Varianz des Jahresschadenaufwandes pro Branche i :

$$VAR(S_{CY,i}^{NS}) = VAR(\mathbb{E}[S_{CY,i}^{NS}|\Theta_i]) + \mathbb{E}[VAR(S_{CY,i}^{NS}|\Theta_i)] \quad (4.23)$$

Der erste Term der Formel bezeichnet das Parameterrisiko, welches die durch äußere Umstände verursachte Variabilität der Parameter von einem Jahr zum anderen beschreibt. Diese Parameter sind unsicher, weil entweder durch die kleine vorhandene statistische Basis keine genaue Schätzung vorgenommen werden kann, oder sich die Parameter von Jahr zu Jahr aufgrund von äußeren Umständen ändern. Diese sind zu Beginn des Jahres, wenn die Parameter geschätzt werden sollen, noch nicht bekannt.

Die Gesamtheit dieser äußeren Umstände wird durch die Zufallsvariable Θ_i charakterisiert, die dieses Risiko misst.

Der zweite Term beschreibt das Zufallsrisiko, das aus der Unsicherheit der Jahresschadenhöhe bei gegebenem Risikoparameter Θ_i (äußere Umstände, Verteilungsparameter) resultiert. Es geht also darum, wie sich die Zufallsvariable der Schadenanzahl verhält wenn die äußeren Umstände bereits bekannt sind und in die Verteilung mit eingebunden wurden.

Im Folgenden wird in einem Beispiel der Variationskoeffizient des Gesamtschadenaufwandes $S_{CY,i}^{NS}$ einer Branche i berechnet, in der die Schadenanzahl N_i als poissonverteilt angenommen wird. Im Beispiel wird der Begriff der “zusammengesetzten Poissonverteilung” verwendet, die im Folgenden beschrieben wird:

Definition 4.0.1. Seien $X_1, X_2, \dots$ i.i.d. (unabhängig identisch verteilte) Zufallsvariable und sei N eine weitere von $X_1, X_2, \dots$ unabhängige Zufallsvariable die poissonverteilt mit Poissonparameter λ ist. ($N \stackrel{d}{=} P_\lambda$, mit charakteristischer Funktion $\varphi_N(s) = e^{-\lambda(1-e^{is})}$). Dann ist

$$S := X_1 + \dots + X_N$$

eine **zusammengesetzte Poissonverteilung** mit charakteristischer Funktion

$$\varphi_S(s) = e^{-\lambda(1-\varphi_N(s))}$$

Beispiel 4.0.1. Die Schadenanzahl N_i der Branche i (bei gegebenem Risikoparameter Θ_i) sei poissonverteilt mit Poissonparameter λ_i (= erwartete Schadenanzahl). Der Gesamtschadenaufwand $S_{CY,i}^{NS}$ sei gegeben durch die stochastische Summe

$$S_{CY,i}^{NS} = \sum_j^{N_i} Y_j$$

der Einzelschadenhöhen Y_j gegeben.

Die beiden Momente der Einzelschadenhöhe Y_j seien gegeben durch:

$$\mathbb{E}[Y_j|\Theta] = \mu_Y(\vartheta) \quad \text{und} \quad \text{Var}(Y_j|\Theta) = \sigma_Y^2(\vartheta)$$

Für die Schadenanzahl N_i folgt aus der Annahme der Poissonverteilung:

$$\mathbb{E}[N_i|\Theta] = \text{Var}(N_i|\Theta) = \lambda_i(\vartheta)$$

Mittels Formel 4.22 lässt sich der Variationskoeffizient einer Zufallsvariable S folgendermaßen darstellen:

$$Vko^2(S) = \frac{\text{Var}(S)}{\mathbb{E}^2[S]} = \frac{\text{Var}[\mathbb{E}[S|\Theta]]}{\mathbb{E}^2[S]} + \frac{\mathbb{E}[\text{Var}(S|\Theta)]}{\mathbb{E}^2[S]} \quad (4.24)$$

Der erste Term bezeichnet den Variationskoeffizienten $VK_{p,i}^2$ von S bezüglich des Parametrisikos. Es bleibt den zweiten Term für das Zufallsrisiko zu berechnen.

Unter der Annahme, dass $\Theta = \vartheta$ und die Schadenhöhe $S_{CY,i}^{NS}$ von der Schadenanzahl N_i unabhängig ist, ist $S_{CY,i}^{NS}$ nach Definition 4.0.1 eine zusammengesetzte Poissonverteilung

mit Varianz

$$\begin{aligned} \text{Var}(S_{CY,i}^{NS}|\Theta = \vartheta) \\ &= \text{Var}(Y_j|\Theta = \vartheta) \cdot \mathbb{E}[N_i|\Theta = \vartheta] + \mathbb{E}^2[Y_j|\Theta = \vartheta] \cdot \text{Var}(Y_j|\Theta = \vartheta) \\ &= \sigma_Y^2(\vartheta) \cdot \lambda(\vartheta) + \mu_Y^2(\vartheta) \cdot \lambda(\vartheta) \end{aligned}$$

Durch Bilden des Erwartungswertes folgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\text{Var}(S_{CY,i}^{NS}|\Theta)] &= \mathbb{E}[\sigma^2(\Theta) \cdot \lambda(\Theta) + \mu^2(\Theta) \cdot \lambda(\Theta)] \\ &= \sigma_Y^2 \cdot \lambda + \mu_Y^2 \cdot \lambda \end{aligned}$$

wobei λ_i , μ_Y^2 und σ_Y^2 die Erwartungswerte $\mathbb{E}[\lambda(\Theta)]$, $\mathbb{E}[\mu_Y^2(\Theta)]$ und $\mathbb{E}[\sigma_Y^2(\Theta)]$ sind.

Setzt man diesen Ausdruck in Formel 4.24 ein, so erhält man folgenden Variationskoeffizienten für $S_{CY,i}^{NS}$:

$$\begin{aligned} \text{Vko}^2(S_{CY,i}^{NS}) &= VK_{p,i}^2 + \frac{\mathbb{E}[\text{Var}(S_{CY,i}^{NS}|\Theta)]}{\mathbb{E}^2[S_{CY,i}^{NS}]} \\ &= VK_{p,i}^2 + \frac{\sigma_Y^2 \cdot \lambda + \mu_Y^2 \cdot \lambda}{\mu_Y^2 \cdot \lambda^2} \\ &= VK_{p,i}^2 + \frac{1}{\lambda} \cdot \left(\frac{\sigma_Y^2}{\mu_Y^2} + 1 \right) \\ &= VK_{p,i}^2 + \frac{1}{\lambda} \cdot (\text{Vko}^2(Y_j) + 1) \end{aligned} \tag{4.25}$$

Bemerkung 4.0.2. Bei der Bildung des Erwartungswertes über Θ wird der Erwartungswert eines Produktes durch das Produkt der Erwartungswerte ersetzt, was nur dann gilt wenn die einzelnen Faktoren unabhängig sind. Das heißt Θ muss einerseits auf $\mu_Y^2(\Theta)$ und $\sigma_Y^2(\Theta)$, und andererseits auf $\lambda(\Theta)$ unabhängig wirken. Dies wird allerdings erreicht, indem man Θ in zwei unabhängige Teile Θ_Y und Θ_N zerfallen lässt, sodass Θ_Y nur auf $\mu_Y^2(\Theta)$ und $\sigma_Y^2(\Theta)$ wirkt, und Θ_N nur auf $\lambda(\Theta)$.

Wie bereits oben erwähnt bezeichnet der erste Term in Formel 4.25 den Beitrag des Parameterrisikos und der zweite Term den Beitrag des Zufallsrisikos.

Das **Parameterrisiko** pro Branche i das durch den Variationskoeffizienten $VK_{p,i}$ dargestellt ist, besteht einerseits aus der Parameterunsicherheit bzgl. des Erwartungswertes der Einzelschadenhöhe $\mathbb{E}[Y_{i,j}]$ und andererseits aus der Parameterunsicherheit bzgl. des Erwartungswertes der Anzahl der Einzelschäden $\mathbb{E}[N_i]$.

Diese Unsicherheiten betreffen sowohl kleine als auch große Versicherungsunternehmen und lassen sich nicht wegdiversifizieren.

Im SST werden deshalb Standardwerte für die Variationskoeffizienten des Parameterrisikos zur Verfügung gestellt, die auf Gemeinschaftsstatistiken der Versicherer basieren und pro Branche vorhanden sind. (Die Tabelle der einzelnen Koeffizienten pro Branche ist im Anhang 2 zu finden).

Das **Zufallsrisiko** ist hauptsächlich durch die Variabilität der Einzelschadenhöhen $Y_{i,j}$ der Branche i gegeben, welche durch den Variationskoeffizienten $VK(Y_{i,j})$ gegeben ist. Auch in diesem Fall werden im SST Standardwerte für die Variationskoeffizienten der Einzelschadenhöhe pro Branche zur Verfügung gestellt. (Die Tabelle der einzelnen Koeffizienten pro Branche ist im Anhang 2 zu finden).

Falls die Standardwerte für $VK_{p,i}$ und $VK(Y_{i,j})$ verwendet werden, so muss für die Formel 4.25 nur noch die erwartete Anzahl der Schäden pro Branche ermittelt werden. Und mittels der Aggregation der Varianzen über alle Branchen mittels der Formel 4.20 kann die Varianz der Normalschadenverteilung bestimmt werden.

Verteilung der Grossschäden

Die Grossschäden werden unterteilt in

- **einzelne Grossschäden** (mit einer großen Schadenhöhe, treten vor allem in Sach- und Haftpflichtbranchen auf)

und

- **Kumulschäden** (eine Menge von Schäden, die durch ein und dasselbe Ereignis ausgelöst wurden, z.B. durch ein Hagel- oder Sturmereignis. Obwohl die Einzelschäden nicht groß sein müssen und der gesamte Schadenaufwand durch die große Zahl von Einzelschäden groß sein kann, werden diese Schäden weder als Normal- noch als Grossschäden modelliert, da sie durch ihre Abhängigkeit (Kumulereignis) bestimmt sind.

Im SST-Grossschadenmodell sind die zu modellierenden Ereignistypen pro Branche vorgegeben. Eine detaillierte Auflistung ist in Kapitel 4.4.8 von [4] ersichtlich.

Die Gesamtschadenhöhe der Grossschäden $S_{CY,i}^{GS}$ wird analog zu den Normalschäden als Summe der Einzelschadenhöhen $Y_{i,j}^{GS}$ pro Branche i anhand einer zusammengesetzten Poissonverteilung berechnet:

$$S_{CY,i}^{GS} = \sum_{j=1}^{N_i^{GS}} Y_{i,j}^{GS} \quad (4.26)$$

wobei $Y_{i,j}^{GS}$ die Einzelschadenhöhe und N_i^{GS} die Schadenanzahl der Branche i ist, wobei die Schadenanzahl poissonverteilt mit Erwartungswert λ_i^{GS} ist.

Unter der Annahme dass die einzelnen Grossschäden $Y_{i,j}^{GS}$ unabhängig voneinander sind und innerhalb der Branche i identisch verteilt sind, wird eine Paretoverteilung für ihre Modellierung verwendet:

$$F_{Y_{i,j}^{GS}} = \mathbb{P}(Y_{i,j}^{GS} \leq y) = \begin{cases} 0 & y < \beta \\ 1 - \left(\frac{y}{\beta}\right)^{-\alpha_i} & y \geq \beta \end{cases} \quad (4.27)$$

wobei β der kleinste Schaden innerhalb der Grossschäden ist, der auch als “Threshold“ oder Grossschadengrenze bezeichnet wird.

Wie bereits zu Beginn des Kapitels erwähnt kann innerhalb des SST's aus zwei verschiedenen Grossschadengrenzen, 1 Mio. CHF und 5 Mio. CHF, gewählt werden. Dies muss für jede Branche separat erfolgen.

Es gibt eine Reihe von Verteilungen die man für die Modellierung der Grossschadenhöhe ansetzen könnte. Die Wahl auf die Paretoverteilung wird im SST so gerechtfertigt, da sie die Eigenschaft hat hohen Schäden mehr Gewicht zu verleihen als andere Verteilungen. Dabei wird die Gewichtung durch den Parameter α_i bestimmt: je kleiner α_i umso mehr Gewicht wird den großen Schäden beigemessen.

Im SST sind die Werte für α_i pro Branche i laut Tabelle 4.0.4 fix vorgegeben.

Branche	bei $\beta = 1$ Mio. CHF	bei $\beta = 5$ Mio. CHF
MFH	2,50	2,80
MFH-Hagel	1,85	1,85
Sach	1,40	1,50
Haftpflicht	1,80	2,00
UVG inkl. UVGZ	2,00	2,00
Kollektiv Kranken	3,00	3,00
Einzelkranken	3,00	3,00
Transport	1,50	1,50
Finanz und Kautio	0,75	0,75
Andere	1,50	1,50

Tabelle 4.1: Parameter α_i der Paretoverteilung

Durch die Anwendung der Paretoverteilung können beliebig hohe Schadenhöhen auftreten. Da aber in manchen Branchen die vertraglich zu leistende Schadenaufände in Wirklichkeit durch maximale Versicherungssummen begrenzt sind, wird auch bei der Paretoverteilung ab einer gewissen Schadenhöhe abgeschnitten. Die Abschneidepunkte sind pro Branche festgelegt und werden im SST angeführt. Die Richtlinien für die Limiten sind allerdings nicht zwingend zu verwenden, solange Abweichungen davon gerechtfertigt werden können.

Modellierung der Kumulschäden aufgrund von Hagelereignissen

Neben der Modellierung der einzelnen Grossschäden werden die Kumulschäden und Elementarschäden separat modelliert. Es handelt sich dabei nicht um gesellschaftsindividuelle Schäden sondern um solche die alle Versicherer betreffen. Daher wird ein anderer Ansatz zur Modellierung als bisher verwendet. Der marktweite Schaden wird insgesamt modelliert und dieser wird auf die Versicherer so verteilt, ein Versicherer jenen Anteil des Schadens zugeteilt wird der mit dem Marktanteil des Versicherers übereinstimmt.

Die Hagelkumulschäden werden, wie bei den Grossschäden, durch eine Poisson- und Paretoverteilung modelliert.

Der Erwartungswert der Schadenanzahl > 45 Mio. CHF (= Markt-Hagelgrossschaden-

grenze $\beta_{Hagel}^{(Markt;0)}$ ist $\lambda_{Hagel}^{(0)} = 0,9$ und der Paretoparameter ist $\alpha_{Hagel} = 1,85$.

Pro Versicherungsunternehmen wird die Grossschadengrenze anhand der eigens gewählten Grenze β und dem Marktanteil an den Hagelschäden m_{Hagel} gesetzt. Somit werden pro Versicherungsunternehmen nur Marktschäden oberhalb der Grenze

$$\beta_{Hagel}^{(Markt)} = \frac{\beta}{m_{Hagel}}$$

berücksichtigt. Die erwartete Schadenanzahl ergibt sich dann aus der Paretoverteilung:

$$\lambda_{Hagel} = \lambda_{Hagel}^{(0)} \cdot \left(\frac{\beta_{Hagel}^{(Markt)}}{\beta_{Hagel}^{(Markt;0)}} \right)^{-\alpha_{Hagel}}$$

Die Paretoverteilung für die Schadenhöhe des Markthagelschadens kann bei 1,5 Mrd. CHF abgeschnitten werden.

Kumulereignisse in der Unfallversicherung

Die Kumulereignisse in der Unfallversicherung werden pro Versicherungsunternehmen analog wie bei den Hagelkumulschäden als Marktanteil m_{Unfall} an einem marktweiten Kumulschaden modelliert.

Die Marktschadenverteilung ist eine zusammengesetzte Poissonverteilung mit Threshold $\beta_{Unfall}^{(Markt;0)} = 20$ Mio. CHF.

Das heißt die Schadenanzahl wird wieder anhand einer Poissonverteilung mit Parameter λ_{Unfall} und die Schadenhöhe anhand einer Paretoverteilung mit Parameter $\alpha_{Unfall} = 2$. Analog wie bei den Hagelkumulschäden sei $\lambda_{Unfall}^{(0)} = 0,1$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kumulschaden grösser gleich der Threshold von $\beta_{Unfall}^{(Markt;0)}$ eintritt.

Pro Versicherer erhält man dann wieder einen angepassten kleinsten betrachteten Marktschaden $\beta_{Unfall}^{(Markt)}$ und eine erwartete Häufigkeit λ_{Unfall} die mit dem Marktanteil und der eigenen Grossschadengrenze konsistent ist:

$$\beta_{Unfall}^{(Markt)} = \frac{\beta}{m_{Unfall}}$$

$$\lambda_{Unfall} = \lambda_{Unfall}^{(0)} \cdot \left(\frac{\beta_{Unfall}^{(Markt)}}{\beta_{Unfall}^{(Markt;0)}} \right)^{-\alpha_{Unfall}}$$

Aggregation der Grossschadenverteilungen

Die unterschiedlichen Grossschadenverteilungen, die aus zusammengesetzten Poissonverteilungen pro Branche bestehen, werden in diesem Kapitel aggregiert. Dies geschieht anhand des "Panjer-Algorithmus", der ebenfalls hier erläutert wird. Die Aggregation ist

möglich weil die Summe unabhängiger Zufallsvariable, die zusammengesetzt poissonverteilt ist, ebenfalls zusammengesetzt poissonverteilt ist. Außerdem lässt sich eine zusammengesetzte Poissonverteilung anhand des Panjer-Algorithmus numerisch einfach herleiten.

Zur Erinnerung lässt sich die **Gesamtschaden-Verteilung** pro Branche i als stochastische Summe der einzelnen (Brutto-) Schäden $Y_{i,j}^{GS,B}$ darstellen:

$$S_{CY,i}^{GS,B} = \sum_{j=1} N_i^{GS} Y_{i,j}^{GS,B}. \quad (4.28)$$

Hier ist noch anzumerken, dass nur Einzel-Grossschäden, Hagelkumulschäden und Unfallkumulschäden berücksichtigt sind, wohingegen Schäden aus dem Elementarschadenpool erst später hinzugefügt werden.

Die Schadenanzahl pro Branche i ist poissonverteilt mit Poissonparameter λ_i^{GS} :

$$N_i^{GS} \stackrel{d}{=} P_{\lambda_i^{GS}}.$$

Die Schadenhöhenverteilung der Bruttoschäden pro Branche i ist eine Paretoverteilung:

$$Y_{i,j}^{GS,B} \stackrel{d}{=} \text{Pareto}_{\alpha_i, \beta},$$

oder

$$Y_{i,j}^{GS,B} \stackrel{d}{=} \text{Pareto}_{\alpha_i, \beta_i},$$

falls die Grossschadengrenze individuell pro Branche gesetzt wird.

Die Verteilung der **Nettoschadenhöhe pro Schaden**, $Y_{i,j}^{GS,N}$, erfolgt mittels Anwendung der XL-Rückversicherungsdeckung auf die Bruttoschadenhöhen aus der Paretoverteilung und wird beschrieben als:

$$Y_{i,j}^{GS,N} \stackrel{d}{=} F_{Y_{i,j}^{GS,B}}$$

Die Summe der Jahresschadenaufwände über alle Branchen (netto und brutto)

$$S_{CY}^{GS} = \sum_i S_{CY,i}^{GS} = \sum_i \sum_{j=1}^{N_i^{GS}} Y_{i,j}^{GS}$$

ist wiederum zusammengesetzt poissonverteilt sodass S_{CY}^{GS} folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$S_{CY}^{GS} = \sum_{k=1}^{N^{GS}}$$

wobei die Anzahl der Schäden N^{GS} poissonverteilt

$$N^{GS} \stackrel{d}{=} P_{\sum_i \lambda_i^{GS}}$$

und die Verteilung der Einzelschäden Y_k als gewichtetes Mittel der Verteilungsfunktionen der Einzelschäden aus den einzelnen Branchen gewonnen werden kann:

$$F_Y(y) = \frac{1}{\sum_i \lambda_i} \cdot \sum_i \left(\lambda_i \cdot F_{Y_{CY,i}^{GS}}(y) \right) \quad (4.29)$$

4.0.4.1 Panjer Algorithmus zur Berechnung der Gesamtgrossschadenverteilung

Die Gesamtgrossschadenverteilung S kann nun anhand des Panjer-Algorithmus berechnet werden. (oder alternativ mit der Fast Fourier Transformation). Es stellt eine rekursive Definition der Verteilung der Gesamtschäden für eine Familie von Schadenanzahlverteilungen und einer beliebigen Schadenhöhenverteilung. Wenn die Schadenhöhe diskret ist, so kann die Rekursion verwendet werden um die Verteilung der Gesamtschäden ohne die Verwendung von Faltungen zu berechnen.

Im Folgenden wird die Panjer-Rekursion wie sie in [7] vorkommt erläutert. Dafür betrachten wir im Vorfeld eine Familie von Schadenanzahlverteilungen die die Rekursion

$$p_n = p_{n-1}(a + b/n), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.30)$$

erfüllt, wobei p_n die Wahrscheinlichkeit ist, dass genau n Schäden in einem fixen Zeitintervall entstehen.

In unserem Fall ist die Schadenanzahl poissonverteilt, d.h.

$$p_n = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.31)$$

und die obige Rekursion ist erfüllt mit

$$\begin{aligned} \frac{p_n}{p_{n-1}} &= \frac{\lambda}{n}, \quad p_0 = e^{-\lambda} \\ a &= 0, \quad b = \lambda \end{aligned} \quad (4.32)$$

Weiters betrachten wir eine zusammengesetzte Verteilung mit Verteilungsfunktion

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n F^{*n}(\lambda), \quad x > 0 \\ &= p_0, \quad x = 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

für eine beliebige Schadenhöhenverteilung $F(x), x > 0$. Unter der Annahme dass $F(x), x > 0$ stetig ist, kann die Dichte der Gesamtschäden dargestellt werden als

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n f^{*n}(x), \quad x > 0 \\ &= p_0, \quad x = 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

wobei $f(x)$ die Dichtefunktion bzgl. $F(x)$ ist.

Für den Beweis des Panjer-Algorithmus werden die folgenden zwei Eigenschaften der Faltung von Funktionen verwendet:

1.

$$\int_0^x f(y) f^{*n}(x-y) dy = f^{*n+1}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

2.

$$\int_0^x \frac{y f(y) f^{*n}(x-y)}{f^{*n+1}(x)} dy = \frac{x}{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Gleichung 1. beschreibt die übliche rekursive Definition der Faltung von Funktionen. Die 2. Gleichung ist die bedingte Erwartung eines Elements der Summe von $n+1$ unabhängig identisch verteilten Elementen, unter der Bedingung dass die Summe genau x ist. Der Erwartungswert beträgt $\frac{x}{n+1}$ als Folgerung der Symmetrie zwischen den Elementen der Summe.

Theorem 4.0.1 (Panjer-Algorithmus). Für p_n und $g(x)$ definiert durch 4.30 und 4.34 und eine stetige Funktion $f(x)$ für $x > 0$, gilt die folgende

Rekursion:

$$g(x) = p_1 f(x) + \int_0^x \left(a + b \frac{y}{x}\right) f(y) g(x-y) dy, \quad x > 0 \quad (4.35)$$

Beweis. Setzt man 4.34 in 4.35 ein, so erhält man

$$\begin{aligned} p_1 f(x) + \int_0^x \left(a + b \frac{y}{x}\right) f(y) g(x-y) dy \\ &= p_1 f(x) + \int_0^x \left(a + b \frac{y}{x}\right) f(y) \sum_{n=1}^{\infty} p_n f^{*n}(x-y) dy \\ &= p_1 f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} p_n \int_0^x \left(a + b \frac{y}{x}\right) f(y) f^{*n}(x-y) dy \\ &= p_1 f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} p_n a + \frac{b}{(n+1)} f^{*n+1}(x) \quad (\text{aus 1. und 2.}) \\ &= p_1 f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} p_{n+1} f^{*n+1}(x) \quad (\text{aus 1.}) \\ &= p_1 f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} p_n f^{*n}(x) \quad (\text{da } f * 1(x) = f(x)) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

□

Im Falle dass die Schadenhöhenverteilung diskret ist, ist die zugehörige rekursive Defi-

nition der Gesamtschäden gegeben durch:

$$g_i = \sum_{j=1}^i (a + b \frac{j}{i}) f_j g_{i-j}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

mit $g_0 = p_o$, oder analog durch:

$$g_i = \sum_{j=1}^i p_n f_i^{*n}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.36)$$

Im speziellen Fall der Poisson Verteilung lässt sich $g(x)$ im stetigen Fall, anhand von 4.32, zu

$$g(x) = \lambda e^{-\lambda} f(x) + \frac{\lambda}{x} \int_0^x y f(y) g(x-y) dy$$

berechnen, und im diskreten Fall zu:

$$g_i = \frac{\lambda}{i} \sum_{j=1}^i j f_j g_{i-j}.$$

4.1 Modellierung der Elementarschäden

Elementarschäden setzen sich aus Groß- und Normalschäden aus dem Elementarschadenpool zusammen, die durch "Elementarereignisse" hervorgerufen werden. Der alleinige Grund für eine getrennte Modellierung der Elementarschäden ist die Verwendung einer **Jahres-Stop-Loss** Rückversicherungsdeckung für den Elementarschadenpool, die im Anschluß näher erläutert wird. Zusammen mit den Elementarschäden werden "übrige Elementarschäden" modelliert, die mit den Elementarschäden gekoppelt sind und vor allem Schäden aus der Betriebsunterbruchsversicherung (BU) darstellen.

4.1.1 Modellierung des Elementarschadenpools inkl. "übriger Elementarschäden"

Gross- und Normalschäden des Elementarschadenpools werden durch eine fix vorgegebene Grenze von 50 Mio. CHF unterschieden. Dabei werden Schäden mit einem Aufwand grösser oder gleich 50 Mio. CHF als Grossschäden bewertet. Der Modellierungsansatz geht von einem marktweiten Elementarschadenpool aus der anteilmäßig auf die Elementarschadenversicherer aufgeteilt wird.

Im Weiteren wird auf die unterschiedlichen Ansätze der Modellierung der Grossschäden und Normalschäden und deren gemeinsame Anwendung der Stop-Loss Deckung eingegangen.

Die Jahresschadenhöhe S_{ESP}^{GS} der **Grossschäden aus dem ESP** besteht aus einer zusammengesetzten Poissonverteilung und ist gegeben durch:

$$S_{ESP}^{GS} = \sum_j^N \min(500, Y_j) \quad (4.37)$$

wobei Y_i die marktweiten Ereignisschadenhöhen darstellen. Diese folgen einer verallgemeinerten Paretoverteilung die bei 500 Mio. CHF abgeschnitten wird und folgende kumulative Verteilungsfunktion hat:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x_0+b}{x+b}\right)^\alpha & x \geq x_0 \\ 0 & x < x_0 \end{cases}$$

Der Schweizerische Versicherungsverband (SSV) hat eine Auswertung der Daten aus dem Elementarschadenpool vorgenommen.

Diese resultiert mit $x_0 = 50$ Mio. CHF auf die Parameter $\alpha = 1,2499$ und $b = 18.7761$ Mio. CHF, die zur Ereignisschadenhöhe beitragen.

Bei der Modellierung der Jahresschadensumme S_{ESP}^{KS} der **Normalschäden aus dem ESP** geht man von einer Lognormalverteilung aus, mit den Momenten

$$\mathbb{E}[S_{ESP}^{KS}] = 97,48 \text{ Mio. CHF}$$

und

$$\sqrt{\text{Var}(S_{ESP}^{KS})} = 0,3071 \cdot \mathbb{E}[S_{ESP}^{KS}].$$

Summe von Gross- und Normalschäden im ESP

Bei der Aggregation der Gross- und Normalschäden im ESP kommt es zum Einsatz der Jahres-Stop-Loss Deckung. Stop-Loss beschreibt dabei einen Rückversicherungsvertrag, der für einen Anteil des Jahresgesamtschadens aufkommt, den der Erstversicherer erleidet.

Der Jahres-Stop Loss, der im SST für die Gross- und Normalschäden des ESP angewendet wird, hat eine Haftung von 750 Mio. CHF und eine Priorität von 450 Mio. CHF (750 xs 450 Mio. CHF). Erleidet der Erstversicherer einen Jahresschaden von x , so ist der vom Rückversicherer getragene Schaden $SL_{750xs450}(x)$ über den Stop-Loss-Vertrag folgendermaßen definiert:

$$SL_{750xs450}(x) := \min(x, \max(x - 750 \text{ MCHF}, 450 \text{ MCHF}))$$

Der für den Erstversicherer verbleibende Jahresschaden S_{ESP} beträgt somit

$$S_{ESP} = SL_{750xs450}(S_{ESP}^{KS} + \sum_i^N \min(500, Y_i)) \quad (4.38)$$

Im SST wird allerdings vereinfachend angenommen, dass die Normalschadenhöhe durch ihren Erwartungswert ausreichend genau approximiert werden kann, der ziemlich genau 100 Mio. CHF entspricht. Dadurch kann der Jahresschaden des ESP dargestellt werden als:

$$S_{ESP} = \mathbb{E}[S_{ESP}^{KS}] + SL_{750xs450}(\sum_i^N \min(500, Y_i)) \quad (4.39)$$

Die **“übrigen Elementarschäden”** werden mit den ESP-Grossschäden eng in Verbindung gesetzt. Bezeichnet Y_j einen ESP-Grossschaden, so wird im SST angenommen, dass ein zusätzlicher Schaden von $0,2 \times Y_j$ eintritt. Diese zusätzlichen Schäden sind auch mit einer oberen Grenze von 1000 Mio. CHF beschränkt und führen somit zu einer Jahreschadensumme von

$$S_{\text{übr.Elementar}}^{GS} = \sum_i^N \min(1000, 0,2 \cdot Y_i). \quad (4.40)$$

Aus den Formeln 4.39 und 4.40 ergibt sich dann die Summe $S_{\text{Elementar}}^{\text{Markt}}$ der ESP-Schäden und der übrigen Elementarschäden für den gesamten Versicherungsmarkt wie folgt:

$$S_{\text{Elementar}}^{\text{Markt}} = \mathbb{E}[S_{ESP}^{KS}] + SL_{750xs450}(\sum_i^N \min(500, Y_i)) + \sum_i^N \min(1000, 0,2 \cdot Y_i) \quad (4.41)$$

Der einzelne Versicherer ist an dieser Gesamtschadensumme je nach Geschäftsvolumina prozentuell beteiligt.

Bezeichnet m_{ESP} dabei den Marktanteil in der Feuerversicherung und m_{BU} den Marktanteil in der Betriebsunterbrechung eines einzelnen Versicherers so ergibt sich für den einzelnen Versicherer folgender Schaden:

$$\begin{aligned} S_{Elementar}^{individual} = m_{ESP} \cdot \left(\mathbb{E}[S_{ESP}^{KS}] + SL_{750xs450} \left(\sum_i^N \min(500, Y_i) \right) \right) \\ + m_{BU} \cdot \sum_i^N \min(1000, 0, 2 \cdot Y_i) \end{aligned} \quad (4.42)$$

Von dieser Summe muss anschließend die Verteilung berechnet und das Ergebnis mit den Ergebnissen der Klein- und Grossschäden aus den anderen Branchen aggregiert werden.

4.2 Bestimmung der Verteilung für das versicherungstechnische Ergebnis aus PY

In diesem Abschnitt betrachten wir die Größe $C_{PY} \cdot R_{PY}^{(0)}$ die das Risiko in der Unsicherheit des Abwicklungsergebnisses darstellt wie sie in Bemerkung 4.0.1 erwähnt ist.

Unter der Annahme dass $C_{PY} \cdot R_{PY}^{(0)}$ lognormal verteilt ist mit Erwartungswert $R_{PY}^{(0)}$ muss nur noch die Varianz dieser Größe bestimmt werden, da nach dem Best Estimate Ansatz $\mathbb{E}[C_{PY}] = 1$ ergibt, wie in Bemerkung 4.0.1 festgestellt wurde.

Analog wie bei den Neuschäden werden Zufallsrisiko und Parameterrisiko getrennt betrachtet.

Für das Zufallsrisiko, das sich aus falschen Einschätzungen der einzelnen Schäden ergibt, werden (pro Gesellschaft) aus den Abwicklungsergebnissen der Vorjahre die Varianzen der Rückstellungen

$$Var_Z(C_{PY,i} \cdot R_{PY,i}^{(0)}), \quad i = 1, \dots, 12$$

pro Branche i ermittelt.

Die Schätzung des Parameterrisikos, welches sich durch die Unsicherheit der Parameter in der Rückstellungsberechnung ergibt, ist im SST noch nicht ausdefiniert. Anstatt einer Berechnung wird somit auf Variationskoeffizienten für Rückstellungen bzgl. des Parameterrisikos, die vom BPV zur Verfügung gestellt werden, zurückgegriffen.

Daraus ergibt sich pro Branche i folgende Varianz bzgl. des Parametersisikos:

$$Var_Z(C_{PY,i} \cdot R_{PY,i}^{(0)}) = (R_{PY,i}^{(0)} \cdot Vko_P(C_{PY,i}))^2, \quad i = 1, \dots, 12$$

wobei Vko_P den Variationskoeffizienten pro Branche i bezeichnet. (siehe Anhang 4)

Betrachtet man Zufallsrisiko und Parameterrisiko gemeinsam, so erhält man

$$Var(C_{PY,i} \cdot R_{PY,i}^{(0)}) = Var_P(C_{PY,i} \cdot R_{PY,i}^{(0)}) + Var_Z(C_{PY,i} \cdot R_{PY,i}^{(0)}), \quad i = 1, \dots, 12$$

pro Branche i , und

$$\text{Var}(C_{PY,i} \cdot R_{PY,i}^{(0)}) = \sum_i^{12} \text{Var}(C_{PY,i} \cdot R_{PY,i}^{(0)})$$

über alle Branchen aggregiert, wobei keine Korrelation zwischen den Branchen unterstellt ist.

Wie in Bemerkung 4.0.1 gezeigt wurde, bezeichnet $(1 - C_{PY})R_{PY}^{(0)}$ das undiskontierte Abwicklungsergebnis.

Aus obigem folgt daher dass $\text{Var}(C_{PY,i} \cdot R_{PY,i}^{(0)})$ die Varianz und Null der Erwartungswert für das Abwicklungsergebnis $(1 - C_{PY})R_{PY}^{(0)}$ ist.

4.3 Aggregation der versicherungstechnischen Risiken

Um die ermittelten Verteilungen für CY-Schäden S_{CY} und für das Abwicklungsergebnis $(1 - C_{PY}) \cdot R_{PY}^{(0)}$ (wie sie in den vorhergehenden Kapiteln beschrieben wurden) zu aggregieren, sind im SST zwei Varianten möglich:

- durch Faltung der beiden Verteilungen
- über die vereinfachende Annahme, dass die Summe lognormal verteilt ist

Um die Aggregation möglich zu machen, benötigt man eine gemeinsame Verteilung des versicherungstechnischen Risikos, wie in Formel 4.15:

$$(P - K - d_{CY}^{(0)} \mathbb{E}[S_{CY}]) - d_{CY}^{(0)} (S_{CY} - \mathbb{E}[S_{CY}]) - d_{PY}^{(0)} (C_{PY} - 1) R_{PY}^{(0)}$$

Die Aggregation kann dann, je nach Methode, wie folgt vollzogen werden:

1) Aggregation durch Faltung

Hierbei werden zuerst die Normalschäden mit den Grossschäden über die Faltung der beiden Verteilungen aggregiert und anschließend wird das Ergebnis mit der Verteilung der Rückstellungen ebenfalls über die Faltung der beiden Verteilungen (unter Berücksichtigung der Diskontfaktoren) zusammengeführt.

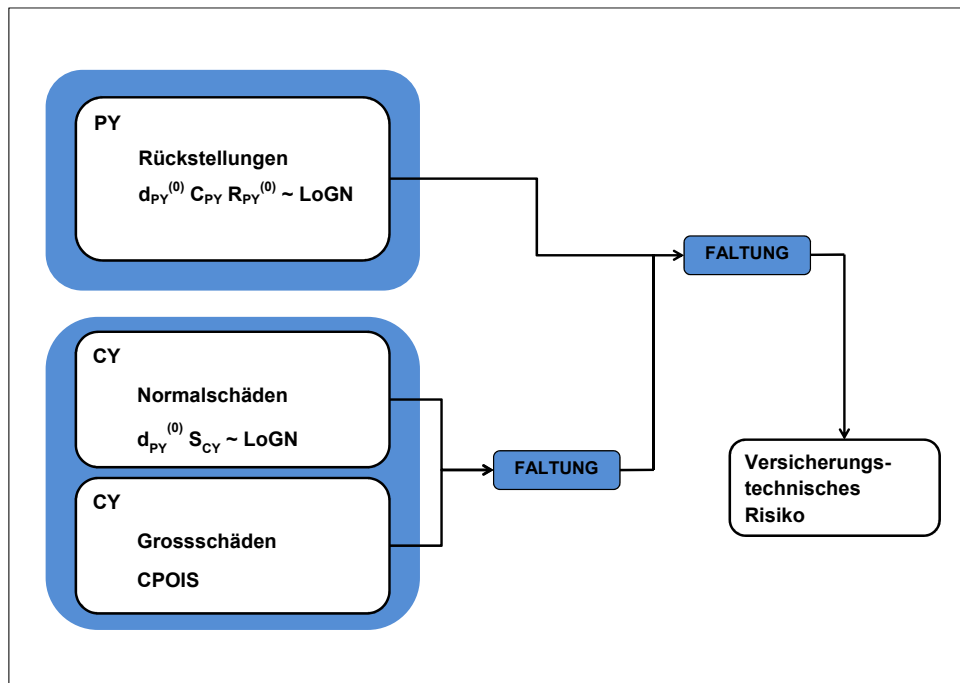


Abbildung 4.1: Aggregation der vt. Risiken nach Methode 1

2) Aggregation durch Annahme einer Lognormalverteilung

Die zweite Methode aggregiert zuerst die Verteilung der Normalschäden aus CY mit derjenigen für die Unsicherheit der Rückstellungen durch Addition der entsprechenden Erwartungswerte und Varianzen mit der Annahme, dass die daraus entstehende Verteilung ebenfalls lognormal verteilt ist. Über die Faltung wird dann die gewonnene Verteilung mit derjenigen für Grossschäden aggregiert.

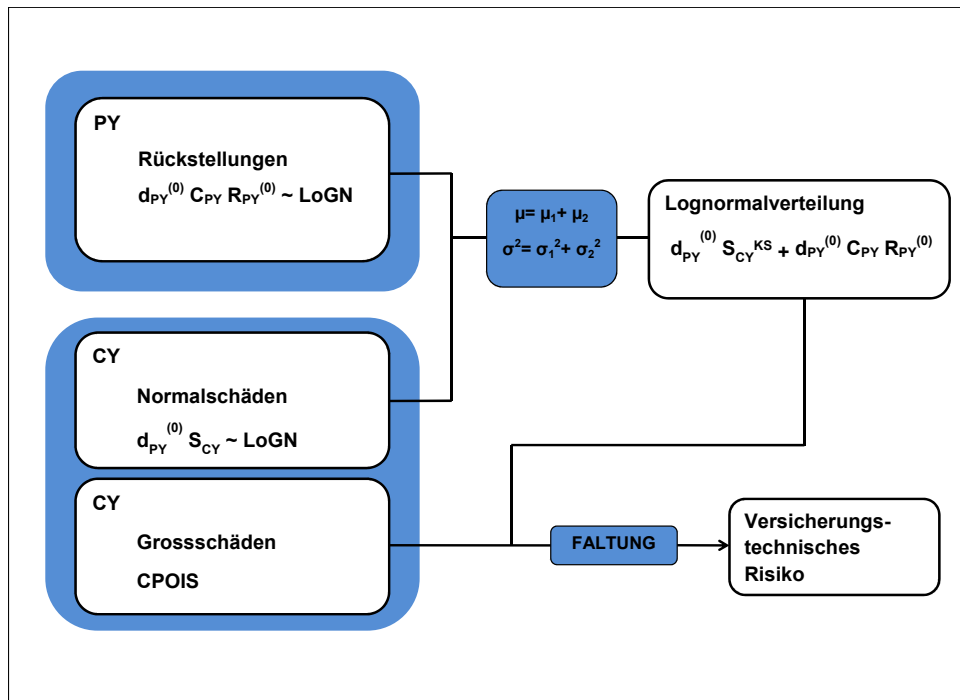


Abbildung 4.2: Aggregation der vt. Risiken nach Methode 2

Anhang

Anhang 1

Korrelationsmatrix für Normalschäden

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
a	1	0.5		0.25	0.25	0.25							
b	0.5	1	0.25										
c		0.25	1	0.25									
d	0.25		0.25	1									
e	0.25				1	0.5	0.5						
f	0.25				0.5	1	0.5						
g					0.5	0.5	1	0.25					
h							0.25	1					
i									1				
j										1			
k											1		
l												1	
m													1

LoB-Schlüssel

a	Motorfahrzeughaftpflicht (MFH)
b	Motorfahrzeugkasko (MFK)
c	Sach
d	Haftpflicht
e	UVG
f	Unfall ohne UVG
g	Kollektiv Kranken
h	Einzel Kranken
i	Transport
j	Luftfahrt
k	Finanz und Kautions
l	Rechtsschutz
m	Andere

Anhang 2

Variationskoeffizienten für das Parameterrisiko für CY Normalschäden

LoB	Vko CY Parameterrisiko
MFH	3.50%
MFK	3.50%
Sach	5.00%
Haftpflicht	3.50%
UVG	3.50%
Unfall ohne UVG	4.75%
Kollektiv Kranken	5.75%
Einzelkranken	5.75%
Transport	5.00%
Luftfahrt	5.00%
Finanz und Kaution	5.00%
Rechtsschutz	5.00% (vorläufig)
Andere	4.50%

Variationskoeffizienten für die Einzelschadenhöhen

LoB	Variationskoeffizient	
	Grossschadengrenze 1 Mio.	Grossschadengrenze 5 Mio.
MFH	7	10
MFK	2.5	2.5
Sach	5	8
Haftpflicht	8	11
UVG	7.5	9.5
Unfall ohne UVG	4.5	5.5
Kollektiv Kranken	2.5	2.5
Einzelkranken	2.25	2.25
Transport	6.5	7
Luftfahrt	2.5	3
Finanz u. Kaution	5	5
Andere	5	5

Anhang 3

Definition der modellierten LoBs

Nr.	LoB	inkludierte Sparten
1	MFH	Motorfahrzeughaftpflichtversicherung
2	MFK	Motorfahrzeugkaskoversicherung ohne Schäden aufgrund von grossen Elementarereignissen
3	Sachversicherung	Feuerversicherung, Bauwesenversicherung Elementarschadenversicherung Unternehmenssachversicherung Engineering, Maschinenversicherung Diebstahlversicherung, Hausratversicherung Übrige Versicherung gegen Sachschäden
4	Haftpflicht	Gebäudehaftpflichtversicherung Privathaftpflichtversicherung Unternehmenshaftpflichtversicherung Bauherrenhaftpflichtversicherung Allgemeine Haftpflichtversicherungen
5	UVG	Oblig. Berufsunfallversicherung Oblig. Nichtberufsunfallversicherung Freiwillige UVG Zusatzversicherung
6	Unfall ohne UVG	Einzelunfallversicherung, UVG Zusatzversicherung Motorfahrzeuginsassen-Unfallversicherung Übrige Kollektivunfallversicherungen
7	Kollektiv-Kranken	Kollektivkrankenversicherung
8	Einzel-Kranken	Einzelkrankenversicherung
9	Transport	Transportgüterversicherung Schienenfahrzeugkaskoversicherung Wasserfahrzeugkaskoversicherung Wasserfahrzeughaftpflichtversicherung
10	Luftfahrt	Luftfahrzeugkaskoversicherung Luftfahrzeughaftpflichtversicherung
11	Finanz und Kautio	Kreditversicherung, Kautionsversicherung Baugarantieversicherung Versicherungen gegen finanzielle Verluste
12	Rechtsschutz	Rechtsschutzversicherung
13	Andere	Reise-, Touristen-, Verkehrsserviceversicherung Epidemieversicherung

Anhang 4

Variationskoeffizienten für das Parameterrisiko für CY Normalschäden

LoB	Vko PY Parameterrisiko
MFH	3.50%
MFK	3.50%
Sach	3.00%
Haftpflicht	4.50%
UVG	3.50%
Unfall ohne UVG	3.00%
Kollektiv Kranken	3.00%
Einzelkranken	5.00%
Transport	5.00%
Luftfahrt	5.00%
Finanz und Kaution	5.00%
Andere	5.00%

Literaturverzeichnis

- [1] D. Artzner P.; Delbaen F.; Eber, J.-M.; Heath, Coherent measures of risk, Tech. report, Math. Fin. 9, 3, 203-228, 1999.
- [2] BPV Bundesamt für Privatversicherungen, Weibuch des schweizer solvenzttests, November 2004.
- [3] FINMA Eidgenössische Finanzmarktaufsicht, Verordnung vom 9. november 2005 über die beaufsichtigung von privaten versicherungsunternehmen (aufsichtsverordnung, avo), 2005.
- [4] ———, Technisches dokument zum schweizer solvenzttest, Bern, Oktober 2006.
- [5] ———, Rundschreiben 08/44 sst, schweizer solvenzttest (sst), Bern, 2008.
- [6] Ernst&Young, Swiss solvency test, November 2006.
- [7] Harry H. Panjer, Recursive evaluation of a family of compound distributions, University of Waterloo, Ontario, Canada, 1981.
- [8] Swiss Re, Einführung in die rückversicherung, Tech. report, 2002.
- [9] Prof. Dr. Hans-Jürgen Schuh, Verzweigungsprozesse - unendlich teilbare verteilungen, Johannes-Gutenberg Universität, Mainz, Institut für Mathematik.
- [10] FMA österreichische Finanzmarktaufsicht, Grundlagen solvency ii historische entwicklung, Januar 2011.

Lebenslauf

Persönliche Daten:

Name: Mationi Alina
Geboren: 13. Januar 1984
in: Rumänien / Caransebes
Nationalität: Österreich
Familienstand: ledig
Adresse: Weinberggasse 41/16
A-1190 Wien
Telefon: +43699/10439335
E-Mail: alinamationi@yahoo.com

Berufserfahrung:

07/2011 - dato	UNIQA Versicherungen AG, Konzern Risikomanagement, Solvency II & Internes Gruppenmodell
09/2009 – 06/2011	Österreichische Finanzmarktaufsicht (II/1), Praktikum, Unterstützung des Solvency II-Teams
10/2008 – 05/2009	EF Education Sprachreisen, Cultural Care Au Pair, A-1010 Wien, Geringfügige Beschäftigung
08/2008 – 09/2008	EF Education Sprachreisen, Cultural Care Au Pair, A-1010 Wien, Praktikum
04/2007 – 08/2007	Ludwig Görtz GmbH, A-1070 Wien Verkauf im Einzelhandel; Geringfügige Beschäftigung
Sommer 2003, 2004 & 2005	OMV Tankstelle, A-5280 Braunau Kassiererin

Schulbildung und Studium:

10/2008 - dato	Studium an der Universität Wien Studienrichtung: Mathematik, Schwerpunkt: Stochastik und Anwendungen
10/1999 – 06/2003	Bundesoberstufenrealgymnasium Ried i. Innkreis Reifeprüfung mit ausgezeichnetem Erfolg bestanden
09/1995 – 06/1999	Hauptschule II Braunau
09/1991 – 06/1995	Volksschule Laab / Braunau

Fremdsprachen:

Englisch (gut in Wort und Schrift)
Rumänisch (Muttersprache, gut in Wort)
Französisch (mäßig in Wort und Schrift)

Computerkenntnisse:

MS Office Paket (MS Word, MS Excel, MS Powerpoint),
Programmiersprachen MATLAB, Mathematica