



universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Topologische Aspekte selbstähnlicher Mengen und
selbstaffiner Tiles in der Ebene

Verfasserin

Paola Lopez

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat)

Wien, im März 2013

Studienkennzahl lt. Studienblatt: A 405

Studienrichtung lt. Studienblatt: Mathematik

Betreuer: Mathias Beiglböck

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	3
Abstract	5
1 Selbstähnliche Mengen	7
1.1 Kontraktionen auf X und $\mathcal{C}(X)$	7
1.2 Existenz einer selbstähnlichen Menge	11
1.3 Erste topologische Resultate über K	14
1.4 Lokaler Zusammenhang	20
1.5 Open Set Condition	30
1.6 Beispiele	32
1.7 Homöomorphie zur Kreisscheibe	34
1.8 Unzusammenhängendes Inneres	40
2 Selbstaffine Mengen	43
2.1 Die Tiling-Eigenschaft	49
2.2 Approximation und erste Kriterien	51
2.3 Lattice Tilings	62
2.4 Die Kontaktmatrix	73
2.5 Homöomorphie zur Kreisscheibe Teil 2	77
Literaturverzeichnis	91
Curriculum Vitae	94

Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit selbstähnlichen Mengen und einigen ihrer topologischen Eigenschaften, mit den spezielleren selbstaffinen Mengen und einigen ihrer topologischer Eigenschaften und mit der Frage, wann die Translate einer selbstaffinen Menge ein Tiling des Raumes bilden.

Das erste Kapitel befasst sich mit selbstähnlichen Mengen. Das sind kompakte Teilmengen K eines vollständigen metrischen Raumes X , die bezüglich einer endlichen Menge von Kontraktionen $S_1, \dots, S_N : X \rightarrow X$ erfüllen, dass

$$K = \bigcup_{i=1}^N S_i(K).$$

Ihre Existenz folgt aus der Vollständigkeit des Raumes $\mathcal{C}(X)$ aller kompakten Teilmengen von X bezüglich der Hausdorffmetrik. Indem man die Punkte in K mit Adressen aus $\{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$ versieht, erhält man eine stetige surjektive Abbildung vom Folgenraum auf N Symbolen auf K . Damit erbt K einige topologische Eigenschaften von $\{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$. Im Abschnitt über den lokalen Zusammenhang von K werden im Hauptresultat Kriterien dafür gegeben, dass K ein lokal zusammenhängendes Kontinuum ist. Es folgt mit ein bisschen Vorarbeit, dass lokal zusammenhängende Kontinua auch teilweise zusammenhängend sind. In nächsten Abschnitt wird die Open Set Condition behandelt, die eine trennende Wirkung auf die Anteile von K hat und damit fast-eindeutige Adressierung der Punkte ermöglicht. Im letzten wichtigen Abschnitt des ersten Kapitels werden Kriterien erarbeitet, die sicherstellen, dass K homöomorph zur Kreisscheibe ist. Sind die Kontraktionen injektiv, sind K und K° zusammenhängend, wobei $K^\circ \neq \emptyset$ ist, dann folgt Homöomorphie zur Kreisscheibe. Die Ausführungen beruhen auf dem Jordan'schen Kurvensatz und sind damit nur in der Ebene gültig.

Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit selbstaffinen Mengen. Hier sind die S_i affine Abbildungen der Form $S_i(x) = A^{-1}x + d_i$, wobei A eine expandierende lineare Abbildung ist und $d_i \in \mathcal{D}$ bestimmte Punkte eines Gitters

Γ . Zunächst werden einige Resultate über die Approximation der selbstaffinen Menge durch Quader bearbeitet. Zentral ist die Frage, wann die Γ -Translate der selbstaffinen Menge ein Tiling des Raumes bilden. Hierzu werden mehrere Kriterien angeführt. Die selbstaffine Menge bildet unter gewissen Voraussetzungen stets ein Tiling bezüglich einer Teilmenge $\Gamma' \subseteq \Gamma$. Die Kontaktmatrix und ihr Spektralradius werden ein Kriterium liefern für ein echtes Γ -Tiling. Im letzten Abschnitt wird mit anderen Mitteln als im ersten Kapitel die Frage bearbeitet, wann selbstaffine Mengen in der Ebene homöomorph zur Kreisscheibe sind. Hier spielt die Tiling-Struktur und die Tiling-Nachbarn der selbstaffinen Menge eine wesentliche Rolle.

Abstract

This thesis deals with topological properties of self-similar and self-affine sets and with some criteria that ensure that the translates of a given self-affine set form a tiling of the space.

The first chapter deals with self-similar sets. A self-similar set is defined as a compact subset K of a complete metric space X such that

$$K = \bigcup_{i=1}^N S_i(K)$$

for some contractive maps $S_1, \dots, S_N : X \rightarrow X$. The existence of self-similar sets follows from the completeness of the space $\mathcal{C}(X)$ of all compact subsets of X which is a metric space with respect to the Hausdorff metric. By providing the points in K with addresses in $\{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$ we obtain a continuous and surjective map from $\{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$ onto K which we use to determine some topological properties of K . In the section about the local connectedness of K we give criteria for K being a locally connected continuum. It follows with some additional requirements that locally connected continua are always also pathwise connected. The next section deals with the Open Set Condition which allows us to provide most of the points of K with a unique address. The last section of the first chapter deals with the question when a self-similar set is homeomorphic to the topological disk. If the contractions are injective and if $K^\circ \neq \emptyset$ and K are connected then K is homeomorphic to the topological disk. This result is based on the Jordan curve theorem and therefore holds only in the plane.

The second chapter deals with self-affine sets. The S_i are of the form $S_i(x) = A^{-1}x + d_i$ where A is an expanding linear map and the $d_i \in \mathcal{D}$ are particular points of a lattice Γ . We give necessary and sufficient conditions for the Γ -translates of the self-affine set to form a tiling of the space. We show that under some conditions there is always a subset $\Gamma' \subseteq \Gamma$ such that the Γ' -translates of the self-affine set tile the space. The contact matrix and its

spectral radius yield a criterion for the translates to form a lattice tiling. The last section again deals with the question of disk-likeness. Using completely different methods than in the first chapter we again give criteria for a self-affine tile to be homeomorphic to a plane disk. The neighbours of a tile in a lattice tiling play a crucial role.

Kapitel 1

Selbstähnliche Mengen

1.1 Kontraktionen auf X und $\mathcal{C}(X)$

Die Definitionen und Resultate in diesem Abschnitt beruhen im Wesentlichen auf [7], [27] und [15].

Im Folgenden sei (X, d) stets ein vollständiger metrischer Raum, der separabel ist.

Definition 1.1.1 Eine Kontraktion auf X ist eine Abbildung $S : X \rightarrow X$ sodass gilt: es gibt eine Zahl $\lambda \in (0, 1)$ mit

$$d(S(x), S(y)) \leq \lambda \cdot d(x, y)$$

für alle $x, y \in X$. Dabei sei

$$\text{Lip}(S) := \sup_{x \neq y} \frac{d(S(x), S(y))}{d(x, y)}$$

die Lipschitz-Konstante von S .

Theorem 1.1.2 Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $S : X \rightarrow X$ eine Kontraktion. Dann existiert ein eindeutiges $x^* \in X$ mit

$$S(x^*) = x^*.$$

Außerdem konvergiert die Folge $(S^n(x))_{n \geq 0}$ für jedes $x \in X$ gegen x^* .

Nun wollen wir aus einem gegebenen vollständigen Raum einen weiteren gewinnen - den Raum der kompakten Mengen mit der Hausdorffmetrik.

Definition 1.1.3 Sei (X, d) vollständig. Dann bezeichne $\mathcal{C}(X)$ die Familie der nicht leeren kompakten Teilmengen von X . Die Hausdorffmetrik δ auf $\mathcal{C}(X)$ ist definiert als:

$$\delta(A, B) := \sup \{d(a, B), d(b, A) : a \in A, b \in B\}$$

für $A, B \in \mathcal{C}(X)$. Dabei sei

$$d(x, A) = \inf \{d(x, a) : a \in A\}.$$

Bemerkung 1.1.4 Man kann die Hausdorffmetrik auch für Mengen definieren, die lediglich abgeschlossen und beschränkt sind. Nicht jedoch für allgemeine Mengen. Es wäre dann nämlich $\delta(A^\circ, \overline{A}) = 0$, was für nichttriviale Mengen den Eigenschaften einer Metrik widersprechen würde.

Bemerkung 1.1.5 Die Hausdorffmetrik misst, wie sehr zwei Mengen einander überdecken. Man kann leicht zeigen, dass für gegebenes $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\delta(A, B) \leq \varepsilon \Leftrightarrow A \subseteq B_\varepsilon(B) \text{ und } B \subseteq B_\varepsilon(A),$$

wobei $B_\varepsilon(A) = \{x \in X : d(x, a) \leq \varepsilon \text{ für ein } a \in A\}$.

Wir wollen den Banach'schen Fixpunktsatz auf spezielle Kontraktionen auf $\mathcal{C}(X)$ anwenden und brauchen daher:

Theorem 1.1.6 Der Raum $(\mathcal{C}(X), \delta)$ ist vollständig. Genauer: Ist $(A_n)_{n \geq 1}$ in $\mathcal{C}(X)$ eine Cauchyfolge, dann ist ihr Grenzwert $A \in \mathcal{C}(X)$ charakterisiert als

$$A = \{x \in X : \exists \text{ Cauchyfolge } (x_n)_{n \geq 1} \text{ mit } x_n \in A \forall n \geq 1 \text{ und } \lim x_n = x\}$$

Beweis:

Wir zeigen zunächst, dass die so definierte Menge A nicht leer ist. Wir wählen eine aufsteigende Folge $n_1 < n_2 < \dots$ von Indizes, sodass

$$\delta(A_m, A_n) < \frac{1}{2^i} \text{ für } m, n \geq n_i.$$

Weiters wählen wir entsprechend Punkte $(x_{n_i})_{i \geq 1} \subseteq X$ mit $x_{n_i} \in A_{n_i}$, sodass

$$d(x_{n_i}, x_{n_{i+1}}) < \frac{1}{2^i}$$

gilt. Dies ist eine Cauchyfolge. Da die $(A_n)_{n \geq 1}$ eine Cauchyfolge bilden, kann man die Folge $(x_{n_i})_{i \geq 1}$ zu einer Cauchyfolge $(x_n)_{n \geq 1}$ ergänzen mit $x_n \in A_n$. Es konvergiert (x_n) in X und damit ist A nicht leer.

Wir zeigen nun, dass A abgeschlossen und damit vollständig ist. Sei dafür $(a_n)_{n \geq 1} \subseteq A$ eine konvergente Folge. Nach Definition von A gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Cauchyfolge

$$(x_i^n)_{i \geq 1} \text{ mit } x_i^n \in A_i \text{ und } \lim_{i \rightarrow \infty} x_i^n = a_n.$$

Eine Teilfolge der Folge $(x_i^i)_{i \geq 1}$ ist eine Cauchyfolge, die wie vorher zu einer Cauchyfolge $(x_n)_{n \geq 1}$ ergänzt werden kann mit $x_n \in A_n$. Damit ist $\lim x_n = a$ und A abgeschlossen und damit vollständig.

Als nächstes zeigen wir, dass A totalbeschränkt ist. Angenommen es gibt ein $\varepsilon > 0$, sodass kein endliches ε -Netz existiert, das A überdeckt. Es gibt also eine unendliche Folge $(x_n)_{n \geq 1} \subseteq A$ mit

$$d(x_i, x_j) \geq \varepsilon \text{ für } i \neq j.$$

Man kann leicht zeigen, dass $A \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{3}}(A_n)$ für ein hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ gilt, indem man die Definition von A verwendet und, dass (A_n) eine Cauchyfolge ist. Es gibt also für jedes x_i ein $y_i \in A_n$ mit

$$d(x_i, y_i) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Die Folge $(y_i)_{i \geq 1}$ besitzt wegen der Kompaktheit von A_n eine konvergente Teilfolge $(y_{n_i})_{i \geq 1} \subseteq A_n$. Insbesondere existieren Punkte y_{n_i} und y_{n_j} mit

$$d(y_{n_i}, y_{n_j}) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Zusammenfassend erhalten wir:

$$d(x_{n_i}, x_{n_j}) \leq d(x_{n_i}, y_{n_i}) + d(y_{n_i}, y_{n_j}) + d(y_{n_j}, x_{n_j}) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3},$$

ein Widerspruch zur Konstruktion der x_i . Damit ist A totalbeschränkt und vollständig, also insgesamt $A \in \mathcal{C}(X)$.

Schließlich zeigen wir, dass $\lim A_n = A$ bezüglich δ . Sei $\varepsilon > 0$. Wir wissen bereits, dass $A \subseteq B_\varepsilon(A_n)$ gilt für hinreichend großes n . Zu zeigen ist, dass ein Index $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für $n \geq N$ auch $A_n \subseteq B_\varepsilon(A)$ gilt. Dann ist insgesamt nach obiger Bemerkung nämlich $\delta(A_n, A) < \varepsilon$ für $n \geq N$. Sei $N \in \mathbb{N}$ so, dass für $m, n \geq N$ gilt $\delta(A_n, A_m) < \frac{\varepsilon}{2}$, insbesondere gilt also $A_m \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(A_n)$. Sei nun $y \in A_n$. Wir wollen ein $x \in A$ finden, sodass $d(y, x) < \varepsilon$. Seien $n < n_1 < n_2 < \dots$ aufsteigende Indizes und $(x_{n_i})_{i \geq 1}$ eine Folge mit $x_{n_i} \in A_{n_i}$ und $d(x_{n_i}, x_{n_{i+1}}) < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$. Wir erhalten

$$d(y, x_{n_i}) \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } i$$

durch mehrmaliges Anwenden der Dreiecksungleichung. Da ja $n < n_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt, folgt

$$A_{n_i} \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(A_n) \text{ für alle } i.$$

Die Cauchyfolge $(x_{n_i})_{i \geq 1}$ konvergiert gegen ein $x \in A$. Da $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(A_n)$ abgeschlossen ist, liegt damit auch $x \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(A_n)$. Es folgt mit $d(y, x_{n_i}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, dass

$$d(x, y) < \varepsilon.$$

Es ist also $A_n \subseteq B_\varepsilon(A)$ für $n \geq N$. Damit ist $\delta(A, A_n) < \varepsilon$ für $n \geq N$ und es folgt $\lim A_n = A$ bezüglich der Hausdorffmetrik δ , also die Vollständigkeit von $\mathcal{C}(X)$.

□

Ist $S : X \rightarrow X$ eine Kontraktion, so erhält man eine Kontraktion $S : \mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{C}(X)$ mittels

$$S(A) = \{S(x) : x \in A\}$$

für $A \in \mathcal{C}(X)$. Es ist nämlich $S(A) \in \mathcal{C}(X)$, da Kontraktionen stetig sind und daher kompakte Mengen in kompakte Mengen überführen. Die Lipschitzkonstante von S als Kontraktion auf X überträgt sich auf die Mengenabbildung:

Lemma 1.1.7 *Sei $S : X \rightarrow X$ eine Kontraktion, dann gilt*

$$\delta(S(A), S(B)) \leq \text{Lip}(S) \cdot \delta(A, B)$$

für alle $A, B \in \mathcal{C}(X)$.

Wendet man den Banach'schen Fixpunktsatz nun auf $S : \mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{C}(X)$ an, so erhält man nichts Neues. Der Fixpunkt von S in $\mathcal{C}(X)$ ist gerade die einpunktige Menge $\{x^*\}$, wobei x^* der Fixpunkt von S in X ist.

Betrachtet man eine Familie von Kontraktionen

$$\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_N\}$$

mit $S_i : X \rightarrow X$ für $1 \leq i \leq N$, so erhält man eine Kontraktion $\mathcal{S} : \mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{C}(X)$ mittels

$$\mathcal{S}(A) = \bigcup_{i=1}^N S_i(A).$$

Es ist $\mathcal{S}(A) \in \mathcal{C}(X)$, da endliche Vereinigungen kompakter Mengen wieder kompakt sind. Wieder übertragen sich die Lipschitzkonstanten der S_i :

Lemma 1.1.8 Seien $S_i : X \rightarrow X$ für $1 \leq i \leq N$ Kontraktionen. Dann gilt:

$$\delta\left(\bigcup_{i=1}^N S_i(A), \bigcup_{i=1}^N S_i(B)\right) \leq \sup_{1 \leq i \leq N} \delta(S_i(A), S_i(B))$$

und damit:

$$\delta(\mathcal{S}(A), \mathcal{S}(B)) \leq \sup_{1 \leq i \leq N} \text{Lip}(S_i) \cdot \delta(A, B)$$

für alle $A, B \in \mathcal{C}(X)$.

1.2 Existenz einer selbstähnlichen Menge

In diesem Abschnitt werden die Resultate aus [15] erläutert.

Wendet man nun den Banach'schen Fixpunktsatz auf $\mathcal{S} : \mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{C}(X)$ an, so folgt unmittelbar:

Theorem 1.2.1 Seien $S_i : X \rightarrow X$ für $1 \leq i \leq N$ Kontraktionen. Dann gibt es eine eindeutige kompakte Menge $K \subseteq X$ mit

$$K = \bigcup_{i=1}^N S_i(K). \quad (1.1)$$

Außerdem konvergiert die Folge $(\mathcal{S}^n(A))_{n \geq 1}$ für jedes $A \in \mathcal{C}(X)$ gegen K .

Definition 1.2.2 Die eindeutige kompakte Menge $K \subseteq X$, die (1.1) erfüllt, heißt selbstähnliche Menge bezüglich der Kontraktionen $S_1, \dots, S_N$ bzw. Attraktor des Iterated Function Systems (IFS) $\{S_1, \dots, S_N\}$.

Bemerkung 1.2.3 Das Besondere an diesem Resultat ist nicht, dass es Mengen gibt, die (1.1) erfüllen. Ist zumindest eine der Kontraktionen surjektiv, so erfüllt ganz X stets diese Gleichung. Hier geht es darum, dass es eine kompakte Menge gibt, die invariant ist unter den Kontraktionen $S_1, \dots, S_N$.

Setzt man die Existenz einer selbstähnlichen Menge K voraus, so kann man einiges über die Struktur von K ableiten. Mehrmaliges Anwenden von (1.1) liefert:

$$\begin{aligned}
K &= \bigcup_{i=1}^N S_i(K) \\
&= \bigcup_{i=1}^N S_i \left(\bigcup_{j=1}^N S_j(K) \right) \\
&= \bigcup_{i,j=1}^N S_i \circ S_j(K) \\
&\vdots \\
&= \bigcup_{i_1, \dots, i_p=1}^N S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_p}(K)
\end{aligned}$$

für alle $p \in \mathbb{N}$ und $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, N\}$. Damit folgt

$$K \supseteq S_{i_1}(K) \supseteq S_{i_1} \circ S_{i_2}(K) \supseteq \dots \supseteq S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_p}(K)$$

für alle $p \in \mathbb{N}$ und $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, N\}$.

Sind $S_{i_1}, \dots, S_{i_p} : X \rightarrow X$ Kontraktionen, so auch $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_p}$, denn:

$$d(S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_p}(x), S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_p}(y)) \leq Lip(S_{i_1}) \cdot \dots \cdot Lip(S_{i_p}) \cdot d(x, y). \quad (1.2)$$

Daher gilt sogar:

$$K \supsetneq S_{i_1}(K) \supsetneq S_{i_1} \circ S_{i_2}(K) \supsetneq \dots \supsetneq S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_p}(K),$$

da Kontraktionen den Durchmesser beschränkter Mengen echt verkleinern:

$$\begin{aligned}
diam(S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_p}(A)) &\leq Lip(S_{i_1}) \cdot \dots \cdot Lip(S_{i_p}) \cdot diam(A) \\
&\leq \left(\max_{1 \leq j \leq N} Lip(S_j) \right)^p \cdot diam(A)
\end{aligned}$$

für $A \subseteq X$ beschränkt. Es ist also

$$diam(S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_p}(K)) \rightarrow 0 \quad (1.3)$$

für $p \rightarrow \infty$. Nun ist X vollständig. Also gilt:

$$\bigcap_{p=1}^{\infty} S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_p}(K) \neq \emptyset.$$

Man sieht mit

$$diam\left(\bigcap_{p=1}^{\infty} S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_p}(K)\right) = 0,$$

dass dieser Durchschnitt also aus genau einem Punkt besteht:

$$\bigcap_{p=1}^{\infty} S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_p}(K) = \{k_{\omega}\} \quad (1.4)$$

Dabei sei ω eine Folge $\omega = (\omega_j)_{j \geq 1}$ in $\{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$ mit $\omega_j = i_j$ aus (1.4).
 K ist also die Vereinigung dieser einpunktigen Durchschnitte:

$$K = \left\{ k_{\omega} : \omega \in \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}} \right\}. \quad (1.5)$$

Definition 1.2.4 Sei K die selbstähnliche Menge bezüglich der Kontraktionen $S_1, \dots, S_N : X \rightarrow X$ und $k_{\omega} \in K$. Dann heißt $\omega \in \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$ eine Adresse von k_{ω} .

Zu jeder Folge ω aus $\{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$ gibt es nach (1.4) einen eindeutigen Punkt in K , sodass ω eine Adresse dieses Punktes ist.

Wie die Kontraktionen S_i auf die Punkte von K wirken, zeigt folgendes

Lemma 1.2.5 Sei K die selbstähnliche Menge bezüglich der Kontraktionen $S_1, \dots, S_N : X \rightarrow X$ und $k_{\omega} \in K$ und seien $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, N\}$. Dann gilt:

$$S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_p}(k_{\omega}) = k_{i_1 \dots i_p \omega}, \quad (1.6)$$

wobei $i_1 \dots i_p \omega$ die Verknüpfung der endlichen Folge $(i_1, \dots, i_p) \in \{1, \dots, N\}^p$ mit der unendlichen Folge $\omega = (\omega_j)_{j \geq 1} \in \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$ ist, also die unendliche Folge $(\nu_l)_{l \geq 1}$ mit $\nu_l = i_l$ für $1 \leq l \leq p$ und $\nu_{p+l} = \omega_l$ für $l \geq 1$.

In (1.5) wurde bereits eine explizite Darstellung von K hergeleitet. Um K noch besser zu verstehen, betrachten wir wieder Verknüpfungen der Kontraktionen $S_1, \dots, S_N$:

In (1.2) wurde gezeigt, dass für $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, N\}$ die Abbildung $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_p}$ wieder eine Kontraktion ist. Demnach hat diese Abbildung einen eindeutigen Fixpunkt, den wir mit $s_{i_1 \dots i_p}$ bezeichnen.

Ist $\hat{i}_1 \dots \hat{i}_p \in \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$ die periodische Folge mit den Einträgen $(i_1, \dots, i_p, i_1, \dots, i_p, \dots)$, so folgt nach dem Lemma:

$$\begin{aligned} S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_p} \left(k_{\hat{i}_1 \dots \hat{i}_p} \right) &= k_{i_1 \dots i_p \hat{i}_1 \dots \hat{i}_p} \\ &= k_{\hat{i}_1 \dots \hat{i}_p}. \end{aligned}$$

Es ist also $k_{\hat{i}_1 \dots \hat{i}_p} = s_{i_1 \dots i_p}$ der Fixpunkt von $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_p}$. Insbesondere liegen alle Fixpunkte von endlichen Verknüpfungen der Kontraktionen $S_1, \dots, S_N$ in K :

$$\left\{ s_{i_1 \dots i_p} : p \in \mathbb{N} \text{ und } i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, N\} \right\} \subset K.$$

Sei nun $p \in \mathbb{N}$ und $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, N\}$, dann gilt nach (1.4):

$$k_\omega \in S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_p}(K)$$

für alle $\omega = (\omega_j)_{j \geq 1}$ mit $\omega_j = i_j$ für $1 \leq j \leq p$ und

$$k_{\hat{i}_1 \dots \hat{i}_p} \in S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_p}(K).$$

Wegen (1.3) gibt es also für fixes $k_\omega \in K$ zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Fixpunkt $k_{\hat{i}_1 \dots \hat{i}_p}$ (für gewisse $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, N\}$ und ein $p \in \mathbb{N}$) mit

$$d(k_\omega, k_{\hat{i}_1 \dots \hat{i}_p}) < \varepsilon.$$

Zusammenfassend wurde gerade gezeigt:

Theorem 1.2.6 *Sei K die selbstähnliche Menge bezüglich der Kontraktionen $S_1, \dots, S_N : X \rightarrow X$ und für $p \in \mathbb{N}$ und $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, N\}$ sei $s_{i_1 \dots i_p}$ der Fixpunkt von $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_p}$. Dann gilt:*

$$K = \overline{\{s_{i_1 \dots i_p} : p \in \mathbb{N} \text{ und } i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, N\}\}}. \quad (1.7)$$

Wie bereits angedeutet, kann man Elemente einer selbstähnlichen Menge K in gewisser Weise mit ihrer Adresse identifizieren. Daher ist es sinnvoll, die Menge der Adressen mit einer Struktur zu versehen, um den Zusammenhang mit der Menge K besser zu verstehen.

1.3 Erste topologische Resultate über K

Dieser Abschnitt befasst sich mit Resultaten aus [7], [15], [27] und [9], sowie [14].

Definition 1.3.1 *Sei $N \in \mathbb{N}$. Der Folgenraum (oder Adressenraum) auf N Symbolen, kurz $\{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$ ist die Menge aller Folgen*

$$(a_i)_{i \geq 1} \text{ mit } a_i \in \{1, \dots, N\} \text{ für alle } i \in \mathbb{N},$$

versehen mit der Produkttopologie, also

$$\{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}} = \prod_{p=1}^{\infty} \{1, \dots, N\},$$

wobei der Raum $\{1, \dots, N\}$ die diskrete Topologie besitzt.

Dieser Raum ist nach dem *Satz von Tychonoff* kompakt, siehe dazu [27].

Die Produkttopologie ist induziert durch folgende Metrik:

$$d\left((a_i)_{i \geq 1}, (b_j)_{j \geq 1}\right) = 2^{-\min\{k: a_k \neq b_k\}}. \quad (1.8)$$

Das heißt, zwei Folgen haben genau dann kurzen Abstand zueinander, wenn sie auf einem hinreichend großen Anfangsstück übereinstimmen.

Eine Basis aus offenen Mengen für die Topologie ist also gegeben durch die Familie der Zylindermengen

$$B_{i_1 \dots i_k} = \left\{ (a_j)_{j \geq 1} : a_j = i_j \text{ für } 1 \leq j \leq k \right\}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, N\}$.

Lemma 1.3.2 *Die Zylindermengen $B_{i_1 \dots i_k}$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $i_j \in \{1, \dots, N\}$ für $1 \leq j \leq k$ sind abgeschlossen in $\{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$.*

Beweis:

Seien $k \in \mathbb{N}$ und $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, N\}$. Dann gilt für das Komplement von $B_{i_1 \dots i_k}$:

$$(B_{i_1 \dots i_k})^c = \bigcup_{(i_1, \dots, i_k) \neq (j_1, \dots, j_k)} B_{j_1 \dots j_k},$$

also eine Vereinigung von $N^k - 1$ offenen Mengen. Damit ist $B_{i_1 \dots i_k}$ abgeschlossen.

□

Daraus folgt direkt das folgende

Lemma 1.3.3 *Der Folgenraum $\{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$ ist total unzusammenhängend und perfekt.*

Um topologische Eigenschaften des Adressenraums auf die selbstähnliche Menge K übertragen zu können, brauchen wir folgende

Proposition 1.3.4 *Sei K die selbstähnliche Menge bezüglich der Kontraktionen $S_1, \dots, S_N : X \rightarrow X$ und $\{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$ der Folgenraum auf N Symbolen. Dann gilt: Die Abbildung*

$$\pi : \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}} \rightarrow K$$

$$\omega \mapsto k_\omega$$

ist stetig und surjektiv.

Außerdem kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{\tau_i} & \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}} \\ \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\ K & \xrightarrow{S_i} & K \end{array}$$

wobei $\tau_i : \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$ für $1 \leq i \leq N$ definiert ist als $\tau_i(\omega) = i\omega$.

Beweis:

Die Surjektivität von π folgt sofort aus (1.5).

Sei nun $\omega = (\omega_j)_{j \geq 1}$ aus $\{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$ und $\varepsilon > 0$. Es ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam}(S_{\omega_1} \circ \dots \circ S_{\omega_k}(K)) = 0.$$

Demnach gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\text{diam}(S_{\omega_1} \circ \dots \circ S_{\omega_{k_0}}(K)) < \varepsilon.$$

Für die Zylindermenge $B_{\omega_1 \dots \omega_{k_0}}$ gilt

$$\pi(B_{\omega_1 \dots \omega_{k_0}}) = S_{\omega_1} \circ \dots \circ S_{\omega_{k_0}}(K).$$

Außerdem ist $d(\nu, \omega) \leq \frac{1}{2^{k_0}}$ genau dann, wenn $\nu \in B_{\omega_1 \dots \omega_{k_0}}$. Daher ist $d(\pi(\nu), \pi(\omega)) < \varepsilon$ für alle ν mit $d(\nu, \omega) < \delta := \frac{1}{2^{k_0}}$. Damit ist π stetig.

Die Kommutativität des Diagramms folgt direkt aus Lemma 1.2.5

□

Mit (1.7) wurde gezeigt, dass K der Abschluss der Punkte mit periodischen Adressen ist. Dieses Resultat erhalten wir auch mittels näherer Betrachtung des Adressenraums:

Lemma 1.3.5 Sei $\{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$ der Folgenraum auf N Symbolen. Dann gilt:

$$\{\omega \in \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}} : \omega \text{ ist periodisch} \}$$

liegt dicht in $\{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$.

Beweis:

Sei $\omega = (\omega_j)_{j \geq 1} \in \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $2^{-k_0} < \varepsilon$. Betrachte die periodische Folge $\hat{\omega}_1 \dots \hat{\omega}_{k_0} \in \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$. Dann ist $d(\omega, \hat{\omega}_1 \dots \hat{\omega}_{k_0}) < 2^{-k_0}$. Damit kommt man jeder Folge mit einer periodischen Folge beliebig nahe.

□

Die dichte Menge der periodischen Folgen in $\{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$ wird mittels π in die Menge der Punkte $k_\omega \in K$ mit periodischer Adresse übergeführt, die aufgrund der Stetigkeit von π wieder dicht im Bild von $\{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$, also in K , liegt.

Mit Hilfe der Abbildung $\pi : \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}} \rightarrow K$ kann man einige topologische Eigenschaften von K ableiten. Am wichtigsten für die folgenden Resultate ist die Stetigkeit von π .

Zunächst fordern wir eine zusätzliche Bedingung an die Lipschitzkonstanten der Kontraktionen und erhalten nach [15]:

Theorem 1.3.6 *Seien $S_1, \dots, S_N : X \rightarrow X$ Kontraktionen und sei r_i die Lipschitzkonstante von S_i für $1 \leq i \leq N$. Außerdem gelte*

$$\sum_{i=1}^N r_i < 1.$$

Dann ist die bezüglich $S_1, \dots, S_N$ selbstähnliche Menge K total unzusammenhängend.

Beweis:

Sei $M \subseteq K$ eine beliebige Teilmenge mit mindestens zwei Elementen. Wir zeigen, dass M nicht zusammenhängend ist. Seien $a, b \in M$. Nach Lemma 1.4.3 reicht es zu zeigen, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass a und b nicht durch eine ε -Kette verbunden werden können. Es gilt:

$$\begin{aligned} C &:= \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^N \text{diam}(S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_p}(K)) &= \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^N r_{i_1} \cdot \dots \cdot r_{i_p} \cdot \text{diam}(K) \\ &= \text{diam}(K) \cdot \left(\sum_{i=1}^N r_i \right)^p. \end{aligned}$$

Da aber $\sum_{i=1}^N r_i < 1$ ist, gibt es ein $p \in \mathbb{N}$, sodass

$$\left(\sum_{i=1}^N r_i \right)^p < \frac{d(a, b)}{\text{diam}(K)}.$$

Wählt man also p -fache Verfeinerung von K und liegt $a \in S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_p}(K)$, so liegt $b \in S_{j_1} \circ \dots \circ S_{j_p}(K)$ mit $i_1 \dots i_p \neq j_1 \dots j_p$. Die Punkte von K , die mit a für jedes $\varepsilon > 0$ mit einer ε -Kette verbunden werden können, liegen alle in einer Kugel mit Radius C um a . Nach obiger Rechnung ist aber $C < d(a, b)$. Daher gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass es zwischen a und b keine ε -Kette gibt. Damit ist M nicht well-chained, also nicht zusammenhängend und da M eine beliebige mindestens zweipunktige Menge war, ist K damit total unzusammenhängend.

□

Nun fordern wir, dass die Kontraktionen injektiv sind und, dass K nicht zu klein ist und erhalten nach [14] und [15]:

Theorem 1.3.7 *Sei $\{S_1, \dots, S_N\}$ eine Familie injektiver Kontraktionen auf X mit der Eigenschaft, dass es $i, j \in \{1, \dots, N\}$ gibt mit $i \neq j$, sodass die Fixpunkte von S_i und S_j verschieden sind. Dann ist die bezüglich $S_1, \dots, S_N$ selbstähnliche Menge K perfekt.*

Beweis:

Angenommen, es gibt einen isolierten Punkt $k_\omega \in K$, wobei $\omega = (\omega_j)_{j \geq 1} \in \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$. Dann ist

$$\varepsilon := \inf_{k_\omega \neq k_\nu \in K} d(k_\nu, k_\omega) > 0.$$

Wegen der Stetigkeit der Abbildung $\pi : \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}} \rightarrow K$ gibt es demnach ein $k > 0$ mit

$$d(\pi(\nu), \pi(\omega)) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } \nu \text{ mit } d(\nu, \omega) < \frac{1}{2k}.$$

Damit ist $\pi(\nu) = k_\omega$ für alle ν mit $d(\nu, \omega) < \frac{1}{2k}$, also für alle $\nu \in B_{\omega_1 \dots \omega_k}$.

Betrachte nun die Folgen $(\omega_1, \dots, \omega_k, i, i, i, i, \dots) = \omega_1 \dots \omega_k \hat{i}$ und $(\omega_1, \dots, \omega_k, j, j, j, j, \dots) = \omega_1 \dots \omega_k \hat{j} \in B_{\omega_1 \dots \omega_k} \subseteq \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$. Dann gilt:

$$k_{\omega_1 \dots \omega_k \hat{i}} = \pi(\omega_1 \dots \omega_k \hat{i}) = k_\omega = \pi(\omega_1 \dots \omega_k \hat{j}) = k_{\omega_1 \dots \omega_k \hat{j}}.$$

Es ist $S_{\omega_1} \circ \dots \circ S_{\omega_k} : X \rightarrow X$ injektiv, da die $S_i, 1 \leq i \leq N$, nach Voraussetzung injektiv sind und nach (1.6) gilt:

$$S_{\omega_1} \circ \dots \circ S_{\omega_k}(k_{\hat{i}}) = S_{\omega_1} \circ \dots \circ S_{\omega_k}(k_{\hat{j}}),$$

also $k_{\hat{i}} = k_{\hat{j}}$. Es ist aber $k_{\hat{i}}$ der Fixpunkt von S_i und $k_{\hat{j}}$ der Fixpunkt von S_j , ein Widerspruch.

□

Bemerkung 1.3.8 Daraus folgt insbesondere, dass die selbstähnliche Menge K entweder einpunktig oder überabzählbar ist, falls die Kontraktionen injektiv sind. Einpunktig ist K , wenn alle Kontraktionen den selben Fixpunkt besitzen.

Fordert man Zusätzliches, so ist die Abbildung $\pi : \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}} \rightarrow K$ aus Prop. 1.3.4 ein Homöomorphismus. Damit erbt K sämtliche topologische Eigenschaften von $\{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$:

Theorem 1.3.9 Seien $S_i, \dots, S_N : X \rightarrow X$ injektive Kontraktionen, K die selbstähnliche Menge und $S_i(K) \cap S_j(K) = \emptyset$ für $i \neq j$. Dann ist K total unzusammenhängend und perfekt.

Beweis:

Zunächst ist zu zeigen, dass die Abbildung $\pi : \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}} \rightarrow K$ injektiv ist. Angenommen, es existieren $(\omega_j)_{j \geq 1}, (\nu_i)_{i \geq 1} \in \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$ mit $\omega \neq \nu$ und $k_\omega = \pi(\omega) = \pi(\nu) = k_\nu$. Dann gibt es ein minimales $n \in \mathbb{N}$ mit $a := \omega_n \neq \nu_n =: b$. Die endlichen Folgen $\omega_1 \dots \omega_{n-1}$ und $\nu_1 \dots \nu_{n-1}$ stimmen aber überein. Es ist $S_{\omega_1} \circ \dots \circ S_{\omega_{n-1}}$ als Verknüpfung injektiver Funktionen injektiv. Nun gilt, da $k_\omega = k_\nu$, dass

$$S_{\omega_1} \circ \dots \circ S_{\omega_{n-1}}(k_{a\omega'}) = S_{\omega_1} \circ \dots \circ S_{\omega_{n-1}}(k_{b\nu'})$$

für gewisse $\omega', \nu' \in \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$. Daher ist $k_{a\omega'} = k_{b\nu'}$, also

$$S_a(k_{\omega'}) = S_b(k_{\nu'})$$

mit $a \neq b$, ein Widerspruch zur Annahme. Damit ist π injektiv, also insgesamt bijektiv. Es bleibt zu zeigen, dass die Umkehrabbildung $\pi^{-1} : K \rightarrow \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$ stetig ist. Sei also $k \in K$ und $\varepsilon := \frac{1}{2^{n-1}} > 0$. Dann gibt es ein eindeutiges $\omega \in \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$ mit $k = k_\omega$. Es ist $d(\omega, \nu) < \varepsilon$ genau dann, wenn $\nu \in B_{\omega_1 \dots \omega_n}$. Gesucht ist nun ein $\delta > 0$, sodass $\pi^{-1}(K \cap B_\delta(k_\omega)) \subseteq B_{\omega_1 \dots \omega_n}$, wobei $B_\delta(k_\omega) = \{k_\alpha \in K : d(k_\omega, k_\alpha) < \delta\}$. Nach Voraussetzung gilt:

$$S_{\omega_1} \circ \dots \circ S_{\omega_n}(K) \cap S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_n}(K) = \emptyset$$

für $i_1 \dots i_n \neq \omega_1 \dots \omega_n$. Es ist

$$2\delta := \inf_{i_1 \dots i_n \in \{1, \dots, N\}^n} \inf_{k_\alpha \in S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_n}(K)} d(k_\omega, k_\alpha) > 0,$$

da $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_n}(K)$ und $S_{\omega_1} \circ \dots \circ S_{\omega_n}(K)$ disjunkte, kompakte Mengen sind. Also ist

$$(K \cap B_\delta(k_\omega)) \subseteq S_{\omega_1} \circ \dots \circ S_{\omega_n}(K)$$

und damit gilt $\pi^{-1}(B_\delta(k_\omega)) \subseteq B_{\omega_1 \dots \omega_n}$. Also ist $\pi^{-1} : K \rightarrow \{1, \dots, N\}^\mathbb{N}$ stetig und π ein Homöomorphismus und K nach Lemma 1.3.3 total unzusammenhängend und perfekt.

□

Bemerkung 1.3.10 *Ist die selbstähnliche Menge K total unzusammenhängend, überabzählbar und perfekt, so folgt nicht notwendigerweise, dass die Abbildung $\pi : \{1, \dots, N\}^\mathbb{N} \rightarrow K$ ein Homöomorphismus ist. Folgendes Beispiel aus [15] illustriert dies:*

Wir betrachten die Kontraktionen $S_i : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ für $1 \leq i \leq 3$:

$$S_1(x) = \frac{x}{4}, \quad S_2(x) = \frac{x}{4} + \frac{3}{5}, \quad S_3(x) = \frac{x}{4} + \frac{3}{4}.$$

Die Lipschitzkonstanten sind $r_1 = r_2 = r_3 = \frac{1}{4}$, es gilt also $\sum_{i=1}^3 r_i = \frac{3}{4} < 1$. Daher ist die selbstähnliche Menge K nach Theorem 1.3.6 total unzusammenhängend.

Außerdem sind die S_i injektiv und erfüllen die Voraussetzungen von Theorem 1.3.7, da $\text{Fix}(S_1) = 0 \neq \frac{4}{5} = \text{Fix}(S_2)$ ist. Damit ist K perfekt und überabzählbar.

Es ist aber $\pi : \{1, 2, 3\} \rightarrow K$ nicht injektiv, also kein Homöomorphismus, denn:

$$\pi(\hat{2}) = \text{Fix}(S_2) = \frac{4}{5} \quad \text{und} \quad \pi(\hat{3}\hat{1}) = \text{Fix}(S_3 \circ S_1) = \frac{4}{5}.$$

1.4 Lokaler Zusammenhang

Hier werden zunächst Definitionen und Resultate aus [32] und [31], sowie aus [27], und dann aus [14] erläutert.

Ziel dieses Abschnitts ist es, eine Bedingung an die Kontraktionen $S_1, \dots, S_N$ zu beweisen, die äquivalent dazu ist, dass die selbstähnliche Menge K zusammenhängend ist. Aus dem Zusammenhang von K wird der lokale Zusammenhang von K folgen. Zunächst einige Definitionen.

Definition 1.4.1 *Eine Menge $Q \subseteq X$ ist lokal zusammenhängend in $p \in Q$, falls für jede Umgebung U von p eine Umgebung V von p existiert, sodass der Schnitt $Q \cap V$ in einer Komponente von $Q \cap U$ liegt, die p enthält. Anders formuliert bedeutet das: Q ist lokal zusammenhängend in $p \in Q$, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass jeder Punkt $x \in Q$ mit $d(x, p) < \delta$ zusammen mit p in einer Zusammenhangskomponente von Q*

liegt, die Durchmesser $< \varepsilon$ hat.

Ist Q lokal zusammenhängend in jedem $p \in Q$, so heißt Q lokal zusammenhängend.

Dass der lokale Zusammenhang weder hinreichend noch notwendig ist für den Zusammenhang einer Menge, zeigen die folgenden zwei Beispiele:

1. Wir betrachten zunächst einen mindestens zweipunktigen metrischen Raum (X, d) und die Menge $Q = \{a, b\} \subseteq X$ mit $a \neq b$. Dann ist Q offensichtlich nicht zusammenhängend. Sei $\varepsilon > 0$ und $U = B_\varepsilon(a)$ die ε -Umgebung von a in X .
 1. Fall: Es ist $\varepsilon \geq d(a, b)$.
Dann ist $\{a, b\} \cap B_\varepsilon(a) = \{a, b\}$. Wähle für $V = B_{\varepsilon'}(a)$ mit $\varepsilon' < d(a, b)$.
Dann ist $V \cap Q = \{a\} \cap \{a, b\} = \{a\}$ und $\{a\}$ liegt in einer Komponente von $U \cap Q = \{a, b\}$, die a enthält.
 2. Fall: Es ist $\varepsilon < d(a, b)$.
Wähle $\varepsilon' \leq \varepsilon$.
Damit ist Q lokal zusammenhängend.
2. Betrachte $X = \mathbb{R}^2$ und $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin(\frac{1}{x}), x \neq 0\} \cup \{0\}$. Die Menge Q ist zusammenhängend, aber im Punkt 0 nicht lokal zusammenhängend. Es besteht nämlich $B_\varepsilon(0) \cap Q$ aus unendlich vielen Zusammenhangskomponenten für alle $0 < \varepsilon < 1$.

In Theorem 1.3.9 haben wir aus der paarweisen Disjunktheit der Bilder $S_i(K)$ geschlossen, dass K total unzusammenhängend ist. Auf ähnliche Weise werden wir vorgehen, um den Zusammenhang von K zu charakterisieren. Die Bilder $S_i(K)$ werden *in gewisser Weise* nicht disjunkt sein. Die Selbstähnlichkeit von K werden wir ausnützen, um abzuleiten, dass auch die Bilder der Kompositionen $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(K)$ *in gewisser Weise* nicht disjunkt sind. Daraus werden wir folgern, dass K zusammenhängend ist. Wir präzisieren die Begriffe mit einigen Definitionen:

Definition 1.4.2

1. Eine endliche Folge $p_1, \dots, p_n$ von Punkten in X heißt ε -Kette zwischen p_1 und p_n , wenn $d(p_i, p_{i+1}) < \varepsilon$ ist für $1 \leq i \leq n-1$.
2. Eine Menge $Q \subseteq X$ ist well-chained, wenn es zwischen je zwei Punkten $p, q \in Q$ und für alle $\varepsilon > 0$ ε -Ketten gibt, die ganz in Q liegen.
3. Eine endliche Familie von Teilmengen $\{Q_1, \dots, Q_n : Q_i \subseteq X \text{ für } 1 \leq i \leq n\}$ ist eine endliche Kette zwischen Q_1 und Q_n , wenn $Q_i \cap Q_{i+1} \neq \emptyset$ für $1 \leq i \leq n-1$ erfüllt ist.

4. Eine Menge besitzt die Eigenschaft S, wenn sie für jedes $\varepsilon > 0$ eine Vereinigung aus endlich vielen zusammenhängenden Mengen ist, deren Durchmesser kleiner sind als ε .
5. Eine kompakte, zusammenhängende Menge heißt Kontinuum.
6. Ein einfacher Bogen ist ein homöomorphes Bild eines abgeschlossenen Intervalls. Eine Menge $Q \subseteq X$ heißt wegzusammenhängend, wenn je zwei Punkte $p, q \in Q$ durch einen einfachen Bogen in Q verbunden werden können.

Bevor wir das Hauptresultat beweisen können brauchen wir noch etwas Vorarbeit:

Lemma 1.4.3 Jede zusammenhängende Menge $M \subseteq X$ ist well-chained.

Beweis:

Seien $A \subseteq M \subseteq X$ Teilmengen und sei $\varepsilon > 0$. Dann ist die Menge $M_A = \{x \in M : \exists a \in A \text{ und } \exists \varepsilon\text{-Kette von } x \text{ nach } a\}$ offen und abgeschlossen in M . Angenommen, es gibt ein Element $x \in M \setminus M_A$, das ein Häufungspunkt von M_A ist. Dann gibt es für jedes $\varepsilon' > 0$ ein $y \in M_A$ mit $d(x, y) < \varepsilon'$, insbesondere für $\varepsilon' = \varepsilon$. Ist $a \in A$, sodass $a, x_1, x_2, \dots, y$ eine ε -Kette bildet, so ist $a, x_1, x_2, \dots, y, x$ ebenfalls eine ε -Kette, ein Widerspruch zu $x \in M \setminus M_A$. Analog zeigt man, dass M_A offen ist in M .

Sei nun M zusammenhängend. Angenommen, es gibt $a, b \in M$ und ein $\varepsilon > 0$, sodass es keine ε -Kette zwischen a und b gibt. Betrachte die Menge $M_a := M_{\{a\}}$ wie oben. Diese Menge ist nach obigem Argument offen und abgeschlossen in M . Außerdem ist $M_a \neq M$, da $b \notin M_a$. Damit besitzt M eine echte Teilmenge, die zugleich offen und abgeschlossen ist. Das ist ein Widerspruch zum Zusammenhang von M . Also ist M well-chained.

□

Die umgekehrte Richtung gilt jedoch nicht. Ein Gegenbeispiel hierfür liefert $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Wir werden ein Resultat über den Zusammenhang der selbstähnlichen Menge K beweisen, indem wir zeigen, dass K well-chained ist. Die Kompaktheit von K erlaubt es uns, diesen Schluss zu ziehen:

Proposition 1.4.4 Jede kompakte Menge, die well-chained ist, ist zusammenhängend.

Um das zu beweisen, brauchen wir zunächst ein paar Resultate über Folgen von Mengen $A_i \subseteq X$ für $i \in \mathbb{N}$. Es bezeichne $\limsup A_i$ die Menge aller Punkte $x \in X$, sodass jede Umgebung von x nicht leeren Durchschnitt mit unendlich vielen A_i besitzt und $\liminf A_i$ die Menge all jener Punkte $x \in X$,

sodass jede Umgebung von x nicht leeren Durchschnitt mit allen bis auf endlich vielen A_i besitzt. Klarerweise gilt $\liminf A_i \subseteq \limsup A_i$. Außerdem sind $\liminf A_i$ und $\limsup A_i$ abgeschlossen.

Lemma 1.4.5 *Sei $(A_i)_{i \geq 1}$ eine Folge von Mengen in X . Es sei die Vereinigung $\bigcup_{i \geq 1} A_i$ relativ kompakt. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ einen Index N , sodass $A_n \subseteq B_\varepsilon(\limsup A_i)$ gilt für jedes $n > N$. Dabei bezeichnet $B_\varepsilon(\limsup A_i)$ die ε -Umgebung der Menge $\limsup A_i$.*

Beweis:

Angenommen es gibt ein $\varepsilon > 0$ und eine unendliche Folge von Punkten $(x_i)_{i \geq 1} \subseteq X$, sodass für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $x_i \in A_{n_i}$ für ein $n_i \in \mathbb{N}$, aber $x_i \notin B_\varepsilon(\limsup A_i)$ und $n_i \neq n_j$ für $i \neq j$. Die Vereinigung $\bigcup_{i \geq 1} A_i$ ist relativ kompakt, daher gibt es einen Häufungspunkt der Menge $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$, wenn diese unendlich ist, oder ein x , sodass $x = x_i$ gilt für unendlich viele i . In beiden Fällen ist $x \in \limsup A_i$. Oben angenommen wurde aber, dass $x_i \notin B_\varepsilon(\limsup A_i)$ für alle i gilt, ein Widerspruch.

□

Lemma 1.4.6 *Sei $(A_i)_{i \geq 1}$ eine unendliche Folge von Mengen in X , die folgende Punkte erfüllt:*

1. *Die Vereinigung $\bigcup_{i \geq 1} A_i$ relativ kompakt.*
2. *Für jedes i können je zwei Elemente aus A_i durch eine ε_i -Kette in A_i verbunden werden mit $\varepsilon_i \rightarrow 0$ für $i \rightarrow \infty$.*
3. *Es ist $\liminf A_i \neq \emptyset$.*

Dann ist $\limsup A_i$ zusammenhängend.

Beweis:

Als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge $\overline{\bigcup_{i \geq 1} A_i}$, ist $\limsup A_i$ kompakt. Nehmen wir nun an, dass $\limsup A_i$ nicht zusammenhängend ist, so muss es eine Zerlegung $\limsup A_i = A \cup B$ mit kompakten disjunkten Mengen $A, B \subseteq X$ geben. Da $\liminf A_i$ als Teilmenge von $\limsup A_i$ mit mindestens einer dieser Mengen nicht leeren Durchschnitt haben muss, nehmen wir an, dass $\liminf A_i \cap A \neq \emptyset$. Es ist $\inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\} = 4\delta > 0$, also

$$\inf\{d(x, y) : x \in B_\delta(A), y \in B_\delta(B)\} > \delta.$$

Nach dem vorigen Lemma gibt es einen Index N , sodass $A_n \subseteq B_\delta(\limsup A_i)$ für $n > N$. Da $\liminf A_i \cap A \neq \emptyset$ können wir annehmen, dass auch

$A_n \cap B_\delta(A) \neq \emptyset$ und wählen N größer, wenn nötig. Ist nämlich $x \in \liminf A_i \cap A$, dann gibt es einen Index N' , sodass $B_{\delta/2}(x) \cap A_n \neq \emptyset$ für $n > N'$. Es ist dann $B_{\delta/2}(x) \subseteq B_\delta(A)$. Daher gibt es einen Index $k > N'$, sodass $\varepsilon_k < \delta$ gilt und

$$A_k \cap B_\delta(A) \neq \emptyset \neq A_k \cap B_\delta(B).$$

Das widerspricht der zweiten Bedingung in den Voraussetzungen. Nämlich ist $A_k \subseteq B_\delta(\limsup A_i)$, sodass man Punkte aus $B_\delta(A)$ nicht mit Punkten aus $B_\delta(B)$ durch ε_k -Ketten verbinden kann.

□

Lemma 1.4.7 *Seien K kompakt und $a, b \in K$. Wenn a und b durch ε -Ketten in K verbunden werden können für jedes $\varepsilon > 0$, dann liegen a und b in der selben Zusammenhangskomponente von K .*

Beweis:

Wir definieren eine Mengenfolge und werden dann das obige Lemma an. Für $i \in \mathbb{N}$ sei A_i die Menge aller Punkte in K , die durch $\frac{1}{i}$ -Ketten in K mit a verbunden werden können. Da $\bigcup_{i \geq 1} A_i \subseteq K$, ist $\overline{\bigcup_{i \geq 1} A_i}$ relativ kompakt. Es sind weiters $a, b \in \liminf A_i$. Damit sind alle Voraussetzungen des obigen Lemmas erfüllt. Es ist also $\limsup A_i$ zusammenhängend. Wegen $a, b \in \limsup A_i \subseteq K$ folgt die Behauptung.

Bemerkung: Dies ist auch tatsächlich eine Zusammenhangskomponente von K .

□

Damit ist die Proposition bewiesen.

Lemma 1.4.8 *Erfüllt eine Menge M die Eigenschaft S , so ist sie lokal zusammenhängend.*

Beweis:

Sei $x \in M$ und $\varepsilon > 0$. Sei $M = \bigcup_{i=1}^n M_i$, wo M_i zusammenhängend ist und $\text{diam}(M_i) < \frac{\varepsilon}{2} =: \delta$ für alle i . Sei nun Q die Vereinigung aller M_i , sodass $x \in \overline{M_i}$ enthalten ist. Dann ist Q zusammenhängend und $\text{diam}(Q) < \varepsilon$. Damit ist M lokal zusammenhängend bei x .

□

Nun folgt das zentrale Resultat aus [14].

Theorem 1.4.9 Sei K die selbstähnliche Menge bezüglich der Kontraktionen $S_1, \dots, S_N : X \rightarrow X$. K ist genau dann ein lokal zusammenhängendes Kontinuum, wenn es für alle $1 \leq i < j \leq N$ eine Menge $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \{1, \dots, N\}$ gibt, sodass $\{S_i(K), S_{a_1}(K), \dots, S_{a_n}(K), S_j(K)\}$ eine endliche Kette bildet.

Beweis:

Diese Bedingung ist klarerweise notwendig. Wir zeigen also, dass sie auch hinreichend ist. Im Folgenden schreiben wir $K(\omega) := S_{\omega_1} \circ \dots \circ S_{\omega_k}(K)$ für $\omega = \omega_1 \dots \omega_n \in \{1, \dots, N\}^k$. Wir zeigen zunächst mit Induktion nach k :

Für je zwei $\omega \neq \nu \in \{1, \dots, N\}^k$ existiert eine endliche Menge $\{\omega^1, \dots, \omega^n\} \subseteq \{1, \dots, N\}^k$, sodass

$\{K(\omega), K(\omega^1), \dots, K(\omega^n), K(\nu)\}$ eine endliche Kette bildet.

Der Induktionsanfang für $k = 1$ ist nach Voraussetzung gegeben. Angenommen, es gibt endliche Folgen $\omega, \nu \in \{1, \dots, N\}^{k+1}$, sodass es keine endliche Kette gibt, die $K(\omega)$ mit $K(\nu)$ verbindet. Dann kann man $\{1, \dots, N\}^{k+1}$ wie folgt disjunkt trennen:

Setze

$$A = \left\{ \eta \in \{1, \dots, N\}^{k+1} : \exists \text{ endliche Kette, die } K(\omega) \text{ und } K(\eta) \text{ verbindet} \right\}$$

und $B = A^c$. Es ist $\omega \in A$ und $\nu \in B$. Also gilt:

$$K = \bigcup_{\eta \in A} K(\eta) \dot{\cup} \bigcup_{\eta \in B} K(\eta) = K' \dot{\cup} K''.$$

Aus der Induktionsvoraussetzung folgt, dass ein $\omega^* = \omega_1^* \dots \omega_k^* \in \{1, \dots, N\}^k$ existiert mit $K(\omega^*) \cap K' \neq \emptyset \neq K(\omega^*) \cap K''$. Nun folgt mit der Selbstähnlichkeit von K :

$$\begin{aligned} K(\omega^*) &= S_{\omega_1^*} \circ \dots \circ S_{\omega_k^*}(K) \\ &= S_{\omega_1^*} \circ \dots \circ S_{\omega_k^*} \left(\bigcup_{i=1}^N S_i(K) \right) \\ &= \bigcup_{i=1}^N S_{\omega_1^*} \circ \dots \circ S_{\omega_k^*} \circ S_i(K) \\ &= \bigcup_{i=1}^N K(\omega^* i), \end{aligned}$$

also gibt es $i \neq j \in \{1, \dots, N\}$ mit $K(\omega^* i) \subseteq K'$ und $K(\omega^* j) \subseteq K''$. Nach Voraussetzung existiert eine endliche Kette $\{K(i), K(a_1), \dots, K(a_n), K(j)\}$. Demnach ist auch $\{K(\omega^* i), K(\omega^* a_1), \dots, K(\omega^* a_n), K(\omega^* j)\}$ eine endliche

Kette. Damit sind aber $\omega^*i, \omega^*j \in A \cap A^c$, ein Widerspruch. Wir zeigen nun, dass K well-chained ist.

Seien $p, q \in K$, $k \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es wegen der Selbstähnlichkeit $\omega^p, \omega^q \in \{1, \dots, N\}^k$, sodass $p \in K(\omega^p)$ und $q \in K(\omega^q)$. Laut Induktionsbeweis gibt es also eine endliche Kette $\{K(\omega^p), K(\omega^1), \dots, K(\omega^n), K(\omega^q)\}$. Wähle nun eine endliche Menge von Punkten $\{s_1, \dots, s_{n+1}\}$, sodass

$$s_1 \in K(\omega^p) \cap K(\omega^1), \dots, s_{n+1} \in K(\omega^n) \cap K(\omega^q).$$

Es gilt

$$\text{diam}(K(\omega)) \leq \left(\max_{1 \leq j \leq N} \text{Lip}(S_j) \right)^n \cdot \text{diam}(K) \quad (1.9)$$

für alle $\omega \in \{1, \dots, N\}^n$. Für genügend großes $n \in \mathbb{N}$ erhält man also auf diese Art eine ε -Kette für beliebig kleines ε . Damit ist K well-chained, also nach dem obigen Lemma zusammenhängend. Es ist auch $K(\omega)$ als stetiges Bild einer zusammenhängenden Menge zusammenhängend für jede endliche Folge ω . Für beliebiges $\varepsilon > 0$ ist K nach (1.9) die Vereinigung von endlich vielen zusammenhängenden Mengen mit Durchmesser kleiner ε . Damit ist K auch lokal zusammenhängend.

□

Wir wollen nun zeigen, dass jedes lokal zusammenhängendes Kontinuum auch wegweise zusammenhängend ist. Damit besitzen lokal zusammenhängende Kontinua besonders schöne Zusammenhangseigenschaften, nämlich Zusammenhang, lokalen Zusammenhang und wegweisen Zusammenhang.

Um das zu tun, betrachten wir zunächst eine interessante Eigenschaft von lokal zusammenhängenden Kontinua, erläutert in [32] und [31].

Lemma 1.4.10 *Sei M ein lokal zusammenhängendes Kontinuum. Dann gibt es eine surjektive stetige Abbildung $f : I \rightarrow M$.*

Beweis: Da die Menge M kompakt und zusammenhängend ist, besitzt sie die Eigenschaft S und kann als endliche Vereinigung

$$M = \bigcup_{i=1}^m M_i$$

von zusammenhängenden Mengen M_i geschrieben werden mit $\text{diam}(M_i) < 1$ erfüllt ist für alle i . Außerdem sind die M_i selber lokal zusammenhängend und können als abgeschlossen gewählt werden. (Siehe dazu [31].) Damit ist M die Vereinigung einer Familie $(M_i)_{i=1}^m$ von lokal zusammenhängenden

Kontinua mit Durchmesser kleiner als 1. Seien $a, b \in M$ zwei verschiedene Punkte. Dann kann die Familie $(M_i)_{i=1}^m$ als Kette

$$C : M_1^1, \dots, M_m^1$$

angeordnet werden, sodass

$$a \in M_1, b \in M_n \text{ und } M_i \cap M_{i+1} \neq \emptyset$$

für $1 \leq i \leq m-1$. Es können nämlich a und b durch eine Kette C' mit Mengen aus $(M_i)_{i=1}^m$ geschrieben werden, da M zusammenhängend ist. Treten in C' nicht alle Elemente aus $(M_i)_{i=1}^m$ auf, so folgt wieder aus dem Zusammenhang von M , dass sukzessive fehlende Mengen durch Mehrfachnennung eingefügt werden können, sodass nach endlich vielen Schritten alle M_i in der Kette auftreten. Durch wiederholtes Einfügen von bereits vorkommenden Mengen können beliebig lange derartige Ketten konstruiert werden, also insbesondere eine Kette der Länge $n = 2^{l_1}$ für ein hinreichend großes $l_1 \in \mathbb{N}$. Wir wählen Punkte

$$a = x_0^1, x_1^1, \dots, x_{2^{l_1}}^1 = b,$$

wobei

$$x_i^1 \in M_i^1 \cap M_{i+1}^1$$

für $1 \leq i \leq 2^{l_1} - 1$. Da die M_i selber lokal zusammenhängende Kontinua sind, kann man für jedes i auch M_i als endliche Vereinigung von lokal zusammenhängenden Kontinua schreiben, die Durchmesser kleiner als $1/2$ besitzen. Analog konstruieren wir wieder Ketten aus diesen Mengen zwischen x_{i-1}^1 und x_i^1 , wo aufeinanderfolgende Mengen nicht leeren Durchschnitt besitzen. Wir nehmen an, dass eine solche Kette die Länge 2^{l_2} besitzt für ein $l_2 \in \mathbb{N}$. Damit haben die Ketten die Form

$$M_{i2^{l_2}}^2, M_{i2^{l_2}+1}^2, \dots, M_{(i+1)2^{l_2}}^2.$$

Wieder können wir Punkte aus den aufeinanderfolgenden Durchschnitten

$$M_{i2^{l_2}+j}^2 \cap M_{i2^{l_2}+j+1}^2$$

wählen und erhalten Punkte

$$x_{i-1}^1 = x_{(i-1)2^{l_2}}^2, x_{(i-1)2^{l_2}+1}^2, \dots, x_{i2^{l_2}}^2 = x_i^1.$$

Wir wiederholen die Konstruktion für die Mengen M_i^2 für $1 \leq i \leq 2^{l_1+l_2}$, schreiben also die Menge M_i^2 als endliche Vereinigung von lokal zusammenhängenden Kontinua mit Durchmesser kleiner als $1/4$, bilde Ketten mit Länge 2^{l_3} für ein $l_3 \in \mathbb{N}$ zwischen x_{i-1}^2 und x_i^2 und wähle Punkte x_j^3 für

$(i-1)2^{l_3} \leq j \leq i2^{l_3}$ wie oben. Auf diese Weise erhalten wir für jedes k eine Kette von Punkten

$$a = x_0^k, x_1^k, \dots, x_{2^{l_1} + \dots + l_k}^k = b.$$

Sei nun $t \in (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ eine dyadische rationale Zahl, also eine Zahl der Form $t = \frac{k}{2^l}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $l \in \mathbb{N}$ in Einheitsintervall I . Wir definieren die Abbildung $f(t) = x_i^k$, wo $t = \frac{i}{2^{l_1 + \dots + l_k}}$ gilt. Wegen $x_{i2^{l_k}}^k = x_i^{k-1}$ ist f wohldefiniert auf der Menge D der dyadischen rationalen Zahlen in I . Wir zeigen nun, dass f gleichmäßig stetig ist auf D . Sei $\varepsilon > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{1}{2^k} < \varepsilon/2$. Wir setzen $\delta = \frac{1}{2^{l_1 + \dots + l_k}} = \frac{1}{2^l}$. Sind $t_1, t_2 \in D$ mit $d(t_1, t_2) < \delta$, so gibt es ein $j \in \mathbb{N}$ mit

$$t_1, t_2 \in \left[\frac{j-1}{2^l}, \frac{j+1}{2^l} \right].$$

Angenommen $t_1 \in \left[\frac{j-1}{2^l}, \frac{j}{2^l} \right]$. Es sind $x_{j-1}^k, x_j^k \in M_j^k$ und nach Definition von f und nach Konstruktion der x_i^k folgt, dass $f(t_1) \in M_j^k$. Ist $t_2 \in \left[\frac{j}{2^l}, \frac{j+1}{2^l} \right]$, so ist $f(t_2) \in M_{j+1}^k$. Auch in den anderen möglichen Fällen sind

$$f(t_1), f(t_2) \in M_j^k \cup M_{j+1}^k.$$

Es waren M_j^k und M_{j+1}^k so gewählt, dass $\text{diam}(M_j^k), \text{diam}(M_{j+1}^k) < \frac{\varepsilon}{2}$ und da nach Konstruktion der Ketten $M_j^k \cap M_{j+1}^k \neq \emptyset$ gilt, ist

$$\text{diam}(M_j^k \cup M_{j+1}^k) < \varepsilon.$$

Also ist f gleichmäßig stetig. Es liegt D dicht in I . Da M kompakt, also insbesondere vollständig ist, lässt sich f auf ganz I stetig fortsetzen. Da $f(D)$ dicht liegt in M , ist die resultierende stetige Abbildung auch surjektiv. $\square$

Bevor wir beweisen können, dass lokal zusammenhängene Kontinua wegzusammenhängend sind, betrachten wir eine gewisse Vererbbarkeit von Eigenschaften von Mengen und als letzte Zutat das Reduction Theorem von Brouwer, in der Formulierung aus [32] und [31].

Eine Menge M heißt *irreduzibel bezüglich einer Eigenschaft E* , wenn M , aber keine echte abgeschlossene Teilmenge von M die Eigenschaft E besitzt. Eine Eigenschaft E heißt *induzibel*, wenn der Durchschnitt $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$ einer absteigenden Folge kompakter Mengen $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots$, die alle die Eigenschaft E besitzen, ebenfalls die Eigenschaft E besitzt. Zum Beispiel ist die Eigenschaft, eine nicht leere Menge zu sein, induzibel.

Lemma 1.4.11 (Brouwer Reduction Theorem) *Besitzt die nicht leere kompakte Menge K die induzible Eigenschaft E , dann enthält K eine nicht leere abgeschlossene Teilmenge, die irreduzibel ist bezüglich E .*

Beweis:

Wir setzen zunächst voraus, dass K selber nicht irreduzibel ist bezüglich E . Sei (B_i) eine abzählbare Basis der Topologie. (Bemerkung: Am Beginn dieser Arbeit wurde Separabilität der betrachteten metrischen Räume vorausgesetzt.) Sei n_1 der kleinste Index, sodass K eine nicht leere abgeschlossene Teilmenge K_1 enthält, die die Eigenschaft E besitzt und $B_{n_1} \cap K_1 = \emptyset$ erfüllt. Sei nun analog n_2 der kleinste Index, sodass K_1 eine abgeschlossene Teilmenge K_2 enthält, die die Eigenschaft E besitzt und $B_{n_2} \cap K_2 = \emptyset$ erfüllt usw. Wir erhalten eine unendliche absteigende Folge $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots$ von kompakten Mengen, die alle die Eigenschaft E besitzen. Sollte die Kette nach endlich vielen Schritten abbrechen, dann wird damit bereits eine irreduzible Menge gefunden. Es ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ eine nicht leere kompakte Menge, die die Eigenschaft E besitzt. Wir zeigen nun, dass $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ irreduzibel ist bezüglich E . Würde eine echte abgeschlossene Teilmenge $A \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ die Eigenschaft E besitzen, so gäbe es einen Index $k \in \mathbb{N}$, sodass

$$B_k \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset \text{ und } B_k \cap A = \emptyset.$$

Es ist aber nach Konstruktion

$$B_{n_i} \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset \text{ für alle } i \in \mathbb{N},$$

also folgt $k \neq n_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$, wohingegen aus $B_k \cap A = \emptyset$ folgt, dass $k = n_i$ für ein $i \in \mathbb{N}$, da die n_i gerade so gewählt waren.

□

Nun können wir beweisen:

Proposition 1.4.12 *Ist M ein lokal zusammenhängendes Kontinuum, so ist M wegzusammenhängend.*

Beweis:

Seien $a, b \in M$ und $f : I \rightarrow M$ eine stetige surjektive Abbildung. Wir definieren folgende Eigenschaft: Eine abgeschlossene Menge $F \subseteq I$ besitzt die Eigenschaft E , wenn einerseits a, b im Bild $f(F)$ von F liegen und wenn für ein maximales Intervall (x, y) im Komplement $I \setminus F$ stets folgt, dass $f(x) = f(y)$. Die Eigenschaft E ist induzibel: Sind nämlich $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots$ abgeschlossene

Mengen, die die Eigenschaft E besitzen, sei $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ und (x, y) ein maximales offenes Intervall in $I \setminus F$. Dann existiert eine Folge $((x_n, y_n))_{i \geq 1}$ von maximalen Intervallen, wobei $(x_n, y_n) \subseteq (I \setminus F_i)$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$(x, y) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (x_n, y_n) \text{ mit } \lim x_n = x \text{ und } \lim y_n = y.$$

Da $f(x_n) = f(y_n)$ gilt und f stetig ist, folgt $f(x) = f(y)$ und damit die Behauptung. Nach dem *Reduction Theorem* gibt es also eine abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq I$, die bezüglich der Eigenschaft E irreduzibel ist. Wir zeigen, dass f die Menge A auf einen einfachen Bogen abbildet, der a mit b verbindet. Zunächst stellen wir fest: Sind $x, y \in A$ verschiedene Punkte mit $f(x) = f(y)$, dann ist $[x, y] \cap A = \{x, y\}$. Wir definieren $h(t) := f(t)$ für $t \in A$ und $h(t) := f(x) = f(y)$, falls t in einem Teilintervall $[x, y] \subseteq I \setminus A$ liegt. Für $p \in h(I)$ ist $h^{-1}(p)$ entweder eine einpunktige Menge in A oder ein abgeschlossenes Intervall $[x, y]$ mit $[x, y] \cap A = \{x, y\}$, also in beiden Fällen ein Kontinuum. Man kann, wie in [32], elementar zeigen, dass daraus folgt, dass $h(A)$ ein einfacher Bogen zwischen a und b ist.

□

1.5 Open Set Condition

In vielen Fällen, siehe [7], werden die Adressen der Elemente von K als Ziffernentwicklung betrachtet. (Im nächsten Kapitel wird das weiter ausgeführt werden.) Als einfachstes Beispiel betrachten wir die Kontraktionen $S_1, S_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit:

$$S_1(x) = \frac{x}{2}, \quad S_2(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}.$$

Der Attraktor dieser beiden Kontraktionen ist das abgeschlossene Einheitsintervall $[0, 1]$. Mit den Adressen der Punkte $x \in [0, 1]$ erhält man die Ziffernentwicklung zur Basis 2. Dabei ist die Adressierung nicht eindeutig - es haben alle Zahlen der Form $x = 2^{-n}$ für $n \in \mathbb{N}$ zwei Urbilder unter der Abbildung π , also zwei Adressen. Trotzdem ist die Menge der Punkte mit nicht eindeutiger Adresse klein, sie hat Maß Null.

Betrachtet man die Kontraktionen $S_1, S_2, S_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$S_1(x) = \frac{x}{2}, \quad S_2(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \quad S_3(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4},$$

so ist der Attraktor ebenfalls $[0, 1]$. Die große Überlappung macht eine Adressierung der Punkte unbrauchbar.

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit Trennungsbedingungen, wie in [15], [4], [7]. Wir entwickeln ein Kriterium, das die Adressierung von Punkten fast eindeutig bzw. eindeutig macht.

Zunächst ist festzustellen, dass wir im vorhergehenden Abschnitt bereits gezeigt haben, dass die selbstähnliche Menge K homöomorph ist zum Folgenraum $\{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$ (und damit eindeutige Adressen besitzt), wenn die Kontraktionen injektiv sind und, wenn $S_i(K) \cap S_j(K) = \emptyset$ für $i \neq j$ erfüllt ist. Wir definieren:

Definition 1.5.1 *Das IFS $\{S_i : X \rightarrow X : i \leq i \leq N\}$, bzw der Attraktor K erfüllt die Open Set Condition oder OSC-Bedingung, falls es eine nicht leere beschränkte offene Menge $U \subseteq X$ gibt mit*

$$\bigcup_{i=1}^N S_i(U) \subset U \quad \text{und} \quad S_i(U) \cap S_j(U) = \emptyset \text{ für } i \neq j. \quad (1.10)$$

Es ist die strikte OSC erfüllt, falls zusätzlich gilt:

$$S_i(\overline{U}) \cap S_j(\overline{U}) = \emptyset. \quad (1.11)$$

Dabei heißt U eine OSC-Menge.

Existiert eine OSC-Menge, so folgt aus der Stetigkeit der S_i , dass auch

$$\bigcup_{i=1}^N S_i(\overline{U}) \subset \overline{U}$$

erfüllt ist. Dabei ist $\overline{U}$ beschränkt und abgeschlossen. Es gilt also, dass

$$\overline{U} \supset \bigcup_{i=1}^N S_i(\overline{U}) \supset \bigcup_{i_1, i_2=1}^N S_{i_1} \circ S_{i_2}(\overline{U}) \supset \dots \supset \bigcup_{i_1, \dots, i_p=1}^N S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_p}(\overline{U})$$

und, analog zu (1.3), dass sich für $p \rightarrow \infty$ das Bild $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_p}(\overline{U})$ zu einem Punkt zusammenzieht. Sei nun K die selbstähnliche Menge bezüglich der S_i . Es gilt:

$$\begin{aligned} d(S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_p}(\overline{U}), k_{i_1 \dots i_p \omega'}) &= d(S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_p}(\overline{U}), S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_p}(k_{\omega'})) \\ &\leq Lip(S_{i_1}) \cdot \dots \cdot Lip(S_{i_p}) \cdot d(\overline{U}, k_{\omega'}) \\ &\leq \left(\max_{1 \leq i \leq N} Lip(S_i) \right)^p \cdot \sup_{k \in K} d(\overline{U}, k) \\ &= \left(\max_{1 \leq i \leq N} Lip(S_i) \right)^p C. \end{aligned}$$

Daher gibt es für jedes $k \in K$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $p \in \mathbb{N}$ und eine endliche Folge $i_1 \dots i_p$, sodass

$$d(S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_p}(\bar{U}), k) < \varepsilon.$$

Die $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_p}(\bar{U})$ liegen nach Voraussetzung in $\bar{U}$. Gerade wurde folgendes Lemma bewiesen:

Lemma 1.5.2 *Sei $\{S_1, \dots, S_N\}$ ein IFS und K der zugehörige Attraktor. Wenn $\{S_1, \dots, S_N\}$ die OSC-Bedingung mit einer Menge U erfüllt, so gilt:*

$$K \subseteq \bar{U}.$$

Daraus folgt sofort:

Proposition 1.5.3 *Seien $S_1, \dots, S_N : X \rightarrow X$ injektive Kontraktionen und K die selbstähnliche Menge. Die strikte OSC sei erfüllt. Dann gilt $S_i(K) \cap S_j(K) = \emptyset$. Damit sind die Voraussetzungen von Theorem 1.3.9 erfüllt.*

Siehe dazu auch [4].

1.6 Beispiele

Das Einheitsquadrat

Das ist eines der einfacheren Beispiele für eine selbstähnliche Menge. Wir betrachten die Abbildungen $S_1, S_2, S_3, S_4 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$S_i(x) = A^{-1}x + d_i$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und

$$d_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, d_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, d_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, d_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist das Einheitsquadrat die selbstähnliche Menge zu diesem IFS. Analog ist der n -dimensionale Einheitswürfel die selbstähnliche Menge zu dem entsprechenden IFS, bestehend aus 2^n Kontraktionen.

Die klassische Cantor-Menge

Wir betrachten folgende Kontraktionen $S_1, S_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit

$$S_1(x) = \frac{x}{3} \quad \text{und} \quad S_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}.$$

Die eindeutige selbstähnliche Menge ist hier die klassische Cantor-Menge, also alle Zahlen

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \in [0, 1] \text{ mit } a_i \in \{0, 2\}.$$

Die Cantor-Menge erfüllt die strikte OSC mit der OSC-Menge $(0, 1)$. Damit ist die Cantor-Menge homöomorph zum Folgenraum auf 2 Symbolen.

Die übliche Konstruktion der Cantor-Menge entspricht dem wiederholten Anwenden der Mengenabbildung $\mathcal{S}$ auf die kompakte Menge $[0, 1]$:

$$\mathcal{S}([0, 1]) = \bigcup_{i=1}^2 S_i([0, 1]) = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right],$$

$$\mathcal{S}^2([0, 1]) = \bigcup_{i,j=1}^2 S_i \circ S_j([0, 1]) = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, \frac{9}{9}\right], \dots$$

Der Lévy Drache

Wir betrachten die Abbildungen $S_1, S_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$S_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} F_1(x) \quad \text{und} \quad S_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} F_2(x) + (1/2, 1/2),$$

wobei F_1 und F_2 Rotationen um $\frac{\pi}{4}$ beziehungsweise $-\frac{\pi}{4}$ sind. Der Attraktor dieses IFS ist der Lévy Drache. Sei L das Geradensegment, welches die Punkte $(0, 1)$ und $(1, 1)$ verbindet. Wir definieren

$$G_0 := \bigcup_{k \geq 0} S_1^k(L) \cup S_2^k(L)$$

als das Gerüst des Lévy Drachen. Definieren wir weiter

$$G_k := S_1(G_{k-1}) \cup S_2(G_{k-1}) \quad \text{und} \quad G := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} G_k,$$

so folgt, dass der Lévy Drache gleich dem Abschluss $\overline{G}$ ist. Außerdem kann man zeigen (siehe [23]), dass

1. G zusammenhängend ist.
2. die Cut Points des Lévy Drachen die Punkte $S_i^k(L) \cap S_i^{k-1}(L)$ für $k \in \mathbb{N}$ und $i = 1, 2$ sind.

Siehe dazu auch [2].

Der Twindragon

Ein klassisches, da schönes Beispiel ist der Attraktor bezüglich der Abbildungen $S_1, S_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit:

$$S_1(x) = A^{-1}x \quad \text{und} \quad S_2(x) = A^{-1}x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Auf die besonderen Eigenschaften dieser *selbstaffinen* Menge werden wir im zweiten Kapitel näher eingehen.

1.7 Homöomorphie zur Kreisscheibe

In diesem Abschnitt werden Resultate aus [21], [32] und [31] über selbstähnliche Mengen bezüglich injektiver Kontraktionen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ erarbeitet. Die Sonderstellung des zweidimensionalen reellen Raums besteht darin, dass man hier die Theorie zu einfach geschlossenen Kurven anwenden kann. Zunächst ein einfaches, aber sehr praktisches

Lemma 1.7.1 *Sei A ein kompakter topologischer Raum und $f : A \rightarrow B := f(A)$ eine stetige, injektive Abbildung. Dann ist die Umkehrabbildung $g : B \rightarrow A$ stetig, f also ein Homöomorphismus.*

Beweis:

Sei $K \subseteq A$ eine abgeschlossene Teilmenge. K ist kompakt, da A kompakt ist. Daher ist auch $f(K) = g^{-1}(K)$ kompakt, also abgeschlossen. Damit ist g stetig.

□

Mit Hilfe dieses Lemmas ist es möglich, zu zeigen, dass der Attraktor von injektiven Kontraktionen eine besonders schöne topologische Eigenschaft besitzt:

Proposition 1.7.2 *Seien $S_1, \dots, S_N : X \rightarrow X$ injektive Kontraktionen und sei K die selbstähnliche Menge. Es sei $K^\circ \neq \emptyset$. Dann gilt:*

$$K = \overline{K^\circ}.$$

Insbesondere folgt, dass $\text{diam}(K^\circ) = \text{diam}(K)$.

Beweis:

Es ist zu zeigen, dass $K \subseteq \overline{K^\circ}$. Wir nehmen an, dass $K \not\subseteq \overline{K^\circ}$. Dann gibt es ein $x \in K \setminus \overline{K^\circ}$. Es ist $d(x, \overline{K^\circ}) > 0$, da $\overline{K^\circ}$ abgeschlossen ist. Wähle nun ein $p \in \mathbb{N}$, sodass

$$\text{diam}(S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_p}(K)) < \frac{1}{2} \cdot d(x, \overline{K^\circ}) \quad \text{für alle } i_1 \dots i_p \in \{1, \dots, N\}^p.$$

Dann existiert eine endliche Folge $j_1 \dots j_p \in \{1, \dots, N\}^p$ mit

$$x \in S_{j_1} \circ \dots \circ S_{j_p}(K) \subseteq K \setminus \overline{K^\circ}.$$

Es ist aber $S_{j_1} \circ \dots \circ S_{j_p} : K \rightarrow S_{j_1} \circ \dots \circ S_{j_p}(K)$ ein Homöomorphismus nach Lemma 1.7.1 und da nach Voraussetzung $K^\circ \neq \emptyset$ gilt, ist $S_{j_1} \circ \dots \circ S_{j_p}(K^\circ)$ offen, nicht leer und enthalten in $(S_{j_1} \circ \dots \circ S_{j_p}(K))^\circ$. Nun ist $K = \bigcup_{i_1, \dots, i_p=1}^N S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_p}(K)$, also ist

$$(S_{j_1} \circ \dots \circ S_{j_p}(K))^\circ \cap K^\circ \neq \emptyset,$$

was ein Widerspruch ist zu $\overline{K^\circ} \cap S_{j_1} \circ \dots \circ S_{j_p}(K) = \emptyset$. Damit gilt $K \subseteq \overline{K^\circ}$, also insgesamt $K = \overline{K^\circ}$.

□

Proposition 1.7.3 *Seien $S_1, \dots, S_N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ injektive Kontraktionen und sei K die selbstähnliche Menge. Es gelte $K^\circ \neq \emptyset$. Erfüllt K die Open Set Condition, so gilt*

$$S_i(K^\circ) \cap S_j(K^\circ) = \emptyset \text{ für } i \neq j.$$

Beweis:

Es gibt eine nicht leere offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\bigcup_{i=1}^N S_i(U) \subset U$ und $S_i(U) \cap S_j(U) = \emptyset$ für $i \neq j$. Wir definieren nun die offene Menge $V := U \cap K^\circ$. Es gilt wegen Lemma 1.7.1, dass

$$\bigcup_{i=1}^N S_i(V) = \bigcup_{i=1}^N S_i(U \cap K^\circ) = \bigcup_{i=1}^N S_i(U) \cap S_i(K^\circ) \subseteq V.$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} S_i(V) \cap S_j(V) &= S_i(U \cap K^\circ) \cap S_j(U \cap K^\circ) \\ &= S_i(U) \cap S_j(U) \cap S_i(K^\circ) \cap S_j(K^\circ) = \emptyset \end{aligned}$$

für $i \neq j$. Damit ist V ebenfalls eine OSC-Menge und daher gilt nach Lemma 1.5.2, dass $K \subseteq \overline{V}$. Außerdem ist $\overline{V} = \overline{U \cap K^\circ} \subseteq \overline{U} \cap \overline{K^\circ}$ und da nach Proposition 1.7.2 $K = \overline{K^\circ}$ gilt, folgt insgesamt $K = \overline{V}$. Es ist $S_i(V)$ offen und dicht in $S_i(K)$ für alle $1 \leq i \leq N$. Angenommen, es gibt $i \neq j$ mit $S_i(K^\circ) \cap S_j(K^\circ) \neq \emptyset$. Dann existiert ein $x \in S_i(K^\circ) \cap S_j(K^\circ)$ und da dieser Durchschnitt offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass die Kugel $B = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) \leq \varepsilon\}$ ebenfalls enthalten ist im Durchschnitt. Es gilt wegen der Stetigkeit der S_i :

$$\begin{aligned} B &\subseteq S_i(K^\circ) \cap S_j(K^\circ) \\ &\subseteq S_i(K) \cap S_j(K) \\ &= \overline{S_i(V)} \cap \overline{S_j(V)}. \end{aligned}$$

Die Mengen $S_i(V) \cap B^\circ$ und $S_j(V) \cap B^\circ$ sind offen und dicht in B . Das sieht man folgendermaßen:

Es ist $\overline{S_i(V)} \cap B^\circ \subseteq \overline{S_i(V)} \cap \overline{B^\circ} = B$. Für die andere Inklusion betrachte ein beliebiges $x \in B^\circ$. Wegen $B \subseteq \overline{S_i(V)}$ gibt es eine Folge $(x_k)_{k \geq 1}$ in $S_i(V)$ mit $x_k \rightarrow x$ für $k \rightarrow \infty$. Es ist B° eine Umgebung von x , also gibt es einen Index $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass $x_k \in B^\circ$, also $x_k \in B^\circ \cap S_i(V)$ für alle $k \geq k_0$. Damit liegt $x \in \overline{B^\circ \cap S_i(V)}$, also ganz $B^\circ \subseteq \overline{B^\circ \cap S_i(V)}$.

Daher ist nach dem Satz von Baire der Durchschnitt $S_i(V) \cap S_j(V) \cap B^\circ$ offen und dicht in B . Insbesondere ist also $S_i(V) \cap S_j(V) \neq \emptyset$, ein Widerspruch.

□

Nun ein wichtiges Teilresultat, um die Homöomorphie der selbstähnlichen Menge zu einer Kreisscheibe bei geeigneten Bedingungen zu zeigen:

Definition 1.7.4 Eine einfach geschlossene Kurve ist eine Teilmenge $J \subseteq \mathbb{R}^2$, die homöomorph ist zur Kreislinie $\{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, 0) = 1\}$. Sei $M \subseteq X$ eine zusammenhängende Menge. Ein Cut Point ist ein Punkt $p \in M$, sodass $M \setminus \{p\}$ nicht mehr zusammenhängend ist.

Theorem 1.7.5 Seien $S_1, \dots, S_N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ injektive Kontraktionen und sei K die selbstähnliche Menge. Die Open Set Condition sei erfüllt. Weiters sei K zusammenhängend und $K^\circ \neq \emptyset$.

Dann liegt das Innere von jeder einfach geschlossenen in K° enthaltenen Kurve ganz in K° . Das heißt, K° hat keine Löcher.

Beweis:

Sei $J \subseteq K^\circ$ eine einfach geschlossene Kurve und P das Innere von J . Wäre $P \not\subseteq K^\circ$, so gäbe es nicht nur ein $x \in P \setminus K^\circ$, sondern auch ein $x \in P \setminus K$, da K abgeschlossen ist. Sei nun $z \in K^\circ$ beliebig. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $B = \{y \in \mathbb{R}^2 : d(y, z) \leq \varepsilon\} \subseteq K^\circ$ enthalten ist in K° .

Wähle nun $p \in \mathbb{N}$, sodass $\text{diam}(S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_p}(K^\circ)) < \varepsilon$ für alle $i_1 \dots i_p \in \{1, \dots, N\}^p$. Wegen der Selbstähnlichkeit von K gibt es ein $\omega_1 \in \{1, \dots, N\}^p$ mit

$$z \in S_{\omega_{1_1}} \circ \dots \circ S_{\omega_{1_p}}(K) =: S_{\omega_1}(K).$$

Es ist $J \subseteq K^\circ$, also gilt $S_{\omega_1}(J) \subseteq S_{\omega_1}(K^\circ)$. Da S_{ω_1} injektiv ist, gilt $S_{\omega_1}(x) \notin S_{\omega_1}(K)$, insgesamt also:

$$S_{\omega_1}(x) \in S_{\omega_1}(P) \setminus S_{\omega_1}(K).$$

Wegen der Stetigkeit von S_{ω_1} liegt $S_{\omega_1}(P)$ ganz in $B \subseteq K^\circ$. Wegen der Selbstähnlichkeit gibt es ein $\omega_2 \in \{1, \dots, N\}^p$ mit $\omega_2 \neq \omega_1$ und $S_{\omega_1}(x) \in S_{\omega_2}(K)$. Es ist $S_i(K^\circ) \cap S_j(K^\circ) = \emptyset$, also auch $S_{\omega_1}(K^\circ) \cap S_{\omega_2}(K^\circ) = \emptyset$. Da $J \subseteq K^\circ$ abgeschlossen ist, hat jeder Punkt von J positiven Abstand zum Rand von K . Damit ist $S_{\omega_1}(J) \cap S_{\omega_2}(K) = \emptyset$. Es ist aber ein Punkt von $S_{\omega_2}(K)$ enthalten in $S_{\omega_1}(P)$, nämlich $S_{\omega_1}(x)$. Da K zusammenhängend ist, also auch $S_{\omega_2}(K)$, folgt daraus, dass $S_{\omega_2}(K) \subseteq S_{\omega_1}(P)$.

Nach dem gleichen Argument wie oben ist $S_{\omega_2}(J) \cap S_{\omega_1}(K) = \emptyset$, also auch $S_{\omega_2}(P) \cap S_{\omega_1}(K) = \emptyset$. Damit ist $S_{\omega_2}(x) \notin S_{\omega_1}(K)$, also ist insgesamt

$$S_{\omega_2}(x) \in S_{\omega_2}(P) \setminus (S_{\omega_1}(K) \cup S_{\omega_2}(K)) \subseteq B.$$

Analog kann man ein $\omega_3 \in \{1, \dots, N\}^p$ wählen mit $\omega_3 \neq \omega_1$, $\omega_3 \neq \omega_2$ und

$$S_{\omega_3}(x) \in S_{\omega_3}(P) \setminus (S_{\omega_1}(K) \cup S_{\omega_2}(K) \cup S_{\omega_3}(K)) \subseteq B.$$

Führt man auf diese Weise fort, so folgt

$$S_{\omega_{N^p}}(x) \in S_{\omega_{N^p}}(P) \setminus \bigcup_{i=1}^{N^p} S_{\omega_i}(K) \subseteq B,$$

wobei - und das ist das Wichtige - die $\omega_1, \dots, \omega_{N^p}$ paarweise verschieden sind. Es ist also

$$\bigcup_{i=1}^{N^p} S_{\omega_i}(K) = K,$$

was zu einem Widerspruch führt.

□

Nun werden wir zeigen, dass unter obigen Voraussetzungen der Rand von K zusammenhängend ist. Dazu brauchen wir zunächst ein wichtiges Hilfsresultat:

Proposition 1.7.6 (Plane Separation Theorem) Sei $B_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt und $B_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ abgeschlossen mit total unzusammenhängendem Durchschnitt $B_1 \cap B_2$. Seien $b_1 \in B_1 \setminus (B_1 \cap B_2)$ und $b_2 \in B_2 \setminus (B_1 \cap B_2)$. Dann gibt es für gegebenes $\varepsilon > 0$ eine einfach geschlossene Kurve, die b_1 und b_2 trennt, sodass $J \cap (B_1 \cup B_2)$ enthalten ist in $B_1 \cap B_2$. Außerdem besitzt jeder Punkt von J einen Abstand, der kleiner ist als ε zu einem Punkt von B_1 .

Für einen Beweis siehe [31] oder [32].

Der Zusammenhang des Randes von K wird gezeigt, indem wir aus der Annahme, dass der Rand nicht zusammenhängend ist, folgern, dass entweder das Innere K° mindestens ein Loch besitzt oder K nicht zusammenhängend ist.

Theorem 1.7.7 Seien $S_1, \dots, S_N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ injektive Kontraktionen und sei K die selbstähnliche Menge. Die Open Set Condition sei erfüllt. Weiters sei K zusammenhängend. Dann ist ∂K zusammenhängend.

Beweis:

Angenommen es gibt B_1, B_2 , beide nicht leer, mit $\partial K = B_1 \cup B_2$ und $\overline{B_1} \cap B_2 = B_2 \cap \overline{B_2} = \emptyset$. Da ∂K abgeschlossen ist, sind B_1 und B_2 auch abgeschlossen, also kompakt, da Teilmengen einer kompakten Menge. Der Durchschnitt ist leer, also insbesondere total unzusammenhängend. Damit ist das Plane Separation Theorem anwendbar. Wähle also $b_1 \in B_1$ und $b_2 \in B_2$. Wegen der Abgeschlossenheit der B_i ist $a := \inf\{d(x_1, x_2) : x_1 \in B_1, x_2 \in B_2\} > 0$. Wähle $0 < \varepsilon < a$ und eine einfach geschlossene Kurve J , die b_1 und b_2 trennt, sodass $J \cap \partial K = \emptyset$. Es sei b_1 o.B.d.A. im Inneren von J .

Behauptung: Es ist $J \cap K^\circ = \emptyset$.

Angenommen, es existiert ein $x \in J \cap K^\circ$. Es folgt, dass $J \subseteq K^\circ$, da nämlich $J \cap \partial K = \emptyset$ und J zusammenhängend ist. Es ist nach Theorem 1.7.5 das Innere von J ganz enthalten in K° . Es ist aber b_1 im Inneren von J . Damit gibt es eine Umgebung von b_1 , die auch ganz im Inneren von J liegt. Es ist aber auch b_1 ein Element des Randes von K . Damit gibt es in jeder Umgebung von b_1 Punkte, die nicht in K , also insbesondere nicht in K° liegen. Das ist ein Widerspruch zu Theorem 1.7.5.

Damit folgt $J \cap K^\circ = \emptyset$, also insgesamt $J \cap K = \emptyset$. Sei nun K_1 die Menge aller Punkte von K , die im Inneren von J liegen und K_2 das Komplement in K . Es ist $K = K_1 \cup K_2$ und $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Wegen der trennenden Eigenschaft von J ist

$$b := \inf\{d(x_1, x_2) : x_1 \in K_1, x_2 \in K_2\} > 0.$$

Damit gibt es für $\varepsilon < b$ keine ε -Kette zwischen K_1 und K_2 . Damit ist K nach Lemma 1.4.3 nicht zusammenhängend, ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Es ist also ∂K zusammenhängend.

□

Sämtliche Methoden aus den vorhergehenden Beweisen funktionieren nur in der Ebene. Hier gilt nämlich der **Jordan'sche Kurvensatz**. Er besagt, dass jede einfach geschlossene Kurve J die Ebene in zwei Komponenten teilt. Eine dieser Komponenten, das Innere der Kurve, ist beschränkt, die andere unbeschränkt. Die Kurve bildet den Rand beider Komponenten. Siehe dazu [32] oder [31].

Eine viel stärkere Aussage ist die des **Satzes von Schönflies**, siehe [13]. Wieder ausgehend von einer einfach geschlossenen Kurve in der Ebene erhält man hier, dass die beschränkte Komponente von $\mathbb{R}^2 \setminus J$ zusammen mit ihrem Rand J sogar homöomorph ist zur abgeschlossenen Kreisscheibe.

In höheren Dimensionen gilt natürlich keiner der Sätze.

Wir werden uns hier den Satz von Schönflies zunutze machen und zeigen, dass der Rand einer selbstähnlichen Menge unter gewissen Voraussetzungen eine einfach geschlossene Kurve ist. Dafür brauchen wir zunächst eine intuitiv sehr einleuchtende Proposition. Der lokale Zusammenhang von K wird wieder eine Rolle spielen.

Proposition 1.7.8 *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^2$ ein lokal zusammenhängendes Kontinuum ohne Cut Points. Dann ist der Rand von jeder Komponente des Komplements $\mathbb{R}^2 \setminus M$ eine einfach geschlossene Kurve.*

Für einen Beweis siehe [32] und [31].

Theorem 1.7.9 *Seien $S_1, \dots, S_N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ injektive Kontraktionen und sei K die selbstähnliche Menge. Die Open Set Condition sei erfüllt. Weiters seien K und K° zusammenhängend und $K^\circ \neq \emptyset$. Dann ist ∂K eine einfach geschlossene Kurve.*

Beweis:

Da K° zusammenhängend ist, besitzt K keinen Cut Point. In Theorem 1.4.9 wurde aus dem Zusammenhang von K der lokale Zusammenhang von K gefolgert. Nach Proposition 1.7.8 reicht es zu zeigen, dass das Komplement $\mathbb{R}^2 \setminus K$ zusammenhängend ist, da ja $\partial K = \partial(\mathbb{R}^2 \setminus K)$ ist.

Angenommen $\mathbb{R}^2 \setminus K$ hat mindestens zwei Zusammenhangskomponenten. Dann muss es eine beschränkte Zusammenhangskomponente P geben, da K beschränkt ist. Nach Proposition 1.7.8 ist ∂P eine einfach geschlossene

Kurve und nach dem Satz von Schönflies ist $\overline{P}$ daher homöomorph zur Kreisscheibe.

Sei $x \in K^\circ$ beliebig. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $B = \{y \in \mathbb{R}^2 : d(x, y) \leq \varepsilon\} \subseteq K^\circ$. Wähle nun $p \in \mathbb{N}$, sodass $\text{diam}(S_\omega(K)) < \varepsilon$ für alle $\omega \in \{1, \dots, N\}^p$. Wegen der Selbstähnlichkeit von K gibt es ein $\omega_1 \in \{1, \dots, N\}^p$ mit

$$x \in S_{\omega_1}(K) \subseteq B^\circ.$$

Es ist $S_{\omega_1}(P)$ eine Komponente von $B^\circ \setminus S_{\omega_1}(K)$. Analog zur Argumentation in Theorem 1.7.7, indem man verwendet, dass auch K° zusammenhängend ist, findet man ein $\omega_2 \in \{1, \dots, N\}^p$, $\omega_2 \neq \omega_1$ mit

$$S_{\omega_2}(K^\circ) \subseteq S_{\omega_1}(P).$$

Wegen der Stetigkeit von S_{ω_2} gilt

$$S_{\omega_2} = S_{\omega_2}(\overline{K^\circ}) \subseteq \overline{S_{\omega_2}(K^\circ)}$$

und, da $\overline{P}$ homöomorph ist zur Kreisscheibe,

$$S_{\omega_2}(K) \subseteq S_{\omega_1}(\overline{P}).$$

Analog wählt man für $k \geq 3$ paarweise verschiedene

$$\omega_k \in \{1, \dots, N\}^p \setminus \{\omega_1, \dots, \omega_{k-1}\}$$

sodass

$$S_{\omega_k}(K) \subseteq S_{\omega_{k-1}}(\overline{P}),$$

ein Widerspruch.

□

1.8 Unzusammenhängendes Inneres

Wir betrachten nun wieder den Fall einer zusammenhängenden selbstähnlichen Menge K im $\mathbb{R}^2$ bezüglich injektiver Kontraktionen. Außerdem sei die Open Set Condition erfüllt und es soll $K^\circ \neq \emptyset$ gelten. Nun gehen wir davon aus, dass K° *nicht* zusammenhängend ist.

Wenn K° endlich viele Zusammenhangskomponenten hat, kann man folgende schwächere Resultate zeigen, siehe dazu [23]:

Theorem 1.8.1 *Sei K wie gerade beschrieben und seien $U_1, \dots, U_n$ die Zusammenhangskomponenten von K° .*

1. Es gibt eine Komponente, deren Abschluss homöomorph zur Kreisscheibe ist.
2. Der Abschluss jeder Komponente hat nur endlich viele Löcher.
3. Der Rand von K ist wegweise zusammenhängend.

Hat K° unendlich viele Zusammenhangskomponenten, so kann man zeigen [23]:

Theorem 1.8.2 *Sei K wie oben beschrieben und K° habe unendlich viele Komponenten. Dann ist der Abschluss von jeder Komponente ein lokal zusammenhängendes Kontinuum.*

Für einen Beweis siehe [23]. Ein kürzerer Beweis steht auch in [22].

Bemerkung 1.8.3 *Der Lévy Drache ist zusammenhängend und sein Inneres hat unendlich viele Zusammenhangskomponenten.*

Unter bestimmten Voraussetzungen ist nicht nur der Abschluss von einer Komponente von K° homöomorph zur Kreisscheibe, sondern der Abschluss jeder Komponente von K° . Dazu zunächst eine Definition:

Definition 1.8.4 1. Eine nicht leere Menge von Punkten $S = \{p_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq K$ heißt eine Menge von Spitzen von K , wenn

- (a) für jeden Cut Point $c \in K$ jede Komponente von $K \setminus \{c\}$ nicht leeren Schnitt mit S hat und
- (b) die Kardinalität von S minimal ist, sodass (a) erfüllt ist.

Ein Element einer Menge von Spitzen heißt Spitze.

2. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene beschränkte Menge. Es seien $H_j, j \in I$ die Löcher von U , also die beschränkten Komponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus U$. Dann ist $H(U) := \overline{U} \cup \bigcup_{j \in I} H_j$ die Vereinigung von $\overline{U}$ mit den zugehörigen Löchern.

Bemerkung 1.8.5 *Eine Menge von Spitzen ist natürlich nicht eindeutig. Außerdem gilt: Hat K keine Cut Points, so ist jede einpunktige Menge eine Menge von Spitzen.*

Die Voraussetzungen, unter denen der Abschluss jeder Komponente homöomorph zur Kreisscheibe ist, sind folgende:

Definition 1.8.6 1. K erfüllt die finite tail property, wenn K eine endliche Menge von Spitzen besitzt

2. K erfüllt die infinite replication property, wenn gilt: Daraus, dass $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{U_i}$ für ein i eine beschränkte Komponente (also ein Loch) hat, folgt, dass das für unendlich viele i erfüllt ist, wobei die $H(U_i)$ paarweise disjunktes Inneres haben.

Wir fassen zusammen [23]:

Theorem 1.8.7 *Sei K der Attraktor eines IFS mit injektiven Kontraktionen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, sei K zusammenhängend und es sei die Open Set Condition erfüllt. Außerdem sei $K^\circ \neq \emptyset$. K erfülle die finite tail property und die infinite replication property. Dann ist der Abschluss jeder Komponente von K° homöomorph zur Kreisscheibe.*

In [23] wird gezeigt, dass der Lévy Drache diese beiden Eigenschaften erfüllt. Damit ist der Abschluss jeder Zusammenhangskomponente seines Inneren homöomorph zur Kreisscheibe. Siehe dazu auch [2] und [10].

Kapitel 2

Selbstaffine Mengen

Sämtliche Definitionen und Resultate beruhen im Wesentlichen auf [11], [12], [17] und [16]. Siehe auch [18] und [19].

Wir betrachten nun eine Art Spezialfall von selbstähnlichen Mengen. Sei Γ ein Gitter im $\mathbb{R}^d$, also eine diskrete Untergruppe von $(\mathbb{R}^d, +)$. Der Rang von Γ soll stets voll sein, das heißt, Γ soll über eine Basis verfügen, die auch eine Basis des $\mathbb{R}^d$ bildet. Sei A eine lineare Transformation des $\mathbb{R}^d$, die bezüglich einer Basis von Γ als ganzzahlige Matrix A realisiert ist, sodass die Eigenwerte λ_i von A erfüllen, dass $|\lambda_i| > 1$. Sei $q = |\det(A)|$. Da A ganzzahlig ist, gilt $A\Gamma \subseteq \Gamma$ und $A\Gamma$ bildet ein Untergitter, also insbesondere eine Untergruppe von Γ . Die Quotientengruppe $\Gamma/A\Gamma$ hat genau q Elemente, was wir noch zeigen werden. Sei $\mathcal{D} = \{d_i : i = 1, \dots, q\} \subseteq \Gamma$ ein vollständiges Repräsentantensystem (eine vollständige Digit- oder Ziffernmenge) von $\Gamma/A\Gamma$. Wir wollen den Satz von Hutchinson [15] aus dem ersten Kapitel anwenden, um die Existenz einer kompakten Menge Q zu gewährleisten, die

$$Q = A^{-1} \left(\bigcup_{i=1}^q Q + d_i \right) \quad \text{bzw.} \quad Q = \bigcup_{i=1}^q A^{-1}(Q) + A^{-1}(d_i) \quad (2.1)$$

erfüllt. Ist A diagonalisierbar, so folgt, dass A^{-1} eine Kontraktion ist und damit auch die affinen Abbildungen

$$S_i(x) = A^{-1}x + d_i.$$

In diesem Fall kann man den Satz von Hutchinson direkt anwenden und erhält die Existenz einer selbstähnlichen Menge Q . Ist A jedoch nicht diagonalisierbar, so ist der Satz zunächst einmal nicht anwendbar. Daher brauchen wir folgendes Lemma aus [11]:

Lemma 2.0.8 Sei $A \in M_d(\mathbb{Z})$ mit Eigenwerten λ_i , sodass $|\lambda_i| > 1$. Dann gibt es ein $l \in \mathbb{N}$, sodass A^{-l} eine Kontraktion ist, genauer: es existieren positive Konstanten C, s, λ mit $\lambda < 1$, sodass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $j \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\|A^{-j}x\| \leq C\lambda^j j^s \|x\|. \quad (2.2)$$

Damit sind die A^{-k} für $k \geq l$ für ein geeignetes $l \in \mathbb{N}$ stets Kontraktionen, da $\lambda < 1$ ist und damit λ^j schneller gegen 0 strebt, als j^s gegen unendlich und es damit ein $l \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $C\lambda^k k^s < 1$ ist für alle $k \geq l$.

Sei weiters

$$\mathcal{D}(l) = \left\{ \kappa = \kappa_{i_1, \dots, i_l} = \sum_{r=1}^l A^{-r} d_{i_r}, d_{i_j} \in \mathcal{D} \right\}.$$

Betrachte nun die Kontraktionen

$$S_{i_1, \dots, i_l}(x) = A^{-l}x + \kappa_{i_1, \dots, i_l}.$$

Wendet man nun den Satz von Hutchinson auf die Kontraktionen $S_{i_1, \dots, i_l}$ an, so folgt, dass es ein eindeutiges $Q \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ gibt mit

$$Q = \bigcup_{\kappa \in \mathcal{D}(l)} (A^{-l}Q + \kappa) \quad \text{bzw. mit} \quad A^l Q = \bigcup_{\kappa \in \mathcal{D}(l)} (Q + A^l \kappa). \quad (2.3)$$

Eine explizite und damit sehr brauchbare Darstellung von Q liefert das folgende

Lemma 2.0.9 Sei Q die selbstähnliche Menge bezüglich der Kontraktionen $S_{i_1, \dots, i_l}$ mit $i_j \in \{1, \dots, q\}$. Dann gilt:

$$Q = \bigcup_{(d_{i_r})_{r \geq 1} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}} \left(\sum_{r=1}^{\infty} A^{-r} d_{i_r} \right). \quad (2.4)$$

Beweis:

Die Menge

$$M = \bigcup_{(d_{i_r}) \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}} \left(\sum_{r=1}^{\infty} A^{-r} d_{i_r} \right)$$

erfüllt

$$\begin{aligned}
A^l \left(\bigcup_{(d_{i_r}) \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}} \left(\sum_{r=1}^{\infty} A^{-r} d_{i_r} \right) \right) &= \bigcup_{(d_{i_r}) \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}} A^l \left(\sum_{r=1}^{\infty} A^{-r} d_{i_r} \right) \\
&= \bigcup_{(d_{i_r}) \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}} \left(\sum_{r=1}^{\infty} A^{-r} d_{i_{r+l}} + \sum_{j=0}^{l-1} A^j d_{i_{l-j}} \right) \\
&= \bigcup_{\kappa \in \mathcal{D}(l)} \left(\bigcup_{(d_{i_r}) \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}} \left(\sum_{r=1}^{\infty} A^{-r} d_{i_r} \right) + A^l \kappa \right).
\end{aligned}$$

Damit erfüllt M gerade die Identität in (2.3). Wegen der Eindeutigkeit der Menge Q gilt $M = Q$.

□

Wir haben aus den gegebenen Abbildungen $S_i(x) = A^{-1}x + A^{-1}d_i$, die nicht notwendigerweise Kontraktionen sind, Kontraktionen $S_{i_1, \dots, i_l}(x) = A^{-l}x + \kappa_{i_1, \dots, i_l}$ gewonnen und eine explizite Darstellung für die selbstähnliche Menge bezüglich der $S_{i_1, \dots, i_l}$ bewiesen.

Unser eigentliches Ziel war aber, eine Menge zu finden, die (2.1) erfüllt. Das ist aber gerade die Menge Q aus (2.3) und (2.4):

Proposition 2.0.10 *Sei $A \in M_d(\mathbb{Z})$, mit Eigenwerten λ_i mit $|\lambda_i| > 1$ und Determinante $|\det(A)| = q$ und sei $\mathcal{D} = \{d_i : i = 1, \dots, q\} \subseteq \Gamma$ ein vollständiges Repräsentantensystem von $\Gamma/A\Gamma$. Sei außerdem*

$$Q = Q(A, \mathcal{D}) = \bigcup_{(d_{i_r})_{r \geq 1} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}} \left(\sum_{r=1}^{\infty} A^{-r} d_{i_r} \right).$$

Dann gilt:

Q ist die eindeutige Menge, welche

$$Q = A^{-1} \left(\bigcup_{i=1}^q Q + d_i \right) \quad (2.5)$$

erfüllt.

Beweis:

Wie im Beweis zu Lemma 2.0.9 sieht man, dass Q die Bedingung (2.5) erfüllt. Zur Eindeutigkeit: Angenommen es gäbe ein $Q' \neq Q$, welches ebenfalls die Gleichung (2.5) erfüllt, so liefert l -faches Einsetzen der Gleichung (2.5) für Q' die Gleichung (2.3) für Q' :

$$\begin{aligned}
Q' &= \bigcup_{d_{i_1} \in \mathcal{D}} A^{-1}Q' + A^{-1}d_{i_1} \\
&= \bigcup_{d_{i_1} \in \mathcal{D}} A^{-1} \left(\bigcup_{d_{i_2} \in \mathcal{D}} A^{-1}Q' + A^{-1}d_{i_2} \right) + A^{-1}d_{i_1} \\
&= \bigcup_{d_{i_1}, d_{i_2} \in \mathcal{D}} A^{-2}Q' + A^{-1}d_{i_1} + A^{-2}d_{i_2} \\
&\vdots \\
&= \bigcup_{d_{i_1}, d_{i_2}, \dots, d_{i_l} \in \mathcal{D}} A^{-l}Q' + \sum_{r=1}^l A^{-r}d_{i_r} \\
&= \bigcup_{\kappa \in \mathcal{D}(l)} (A^{-l}Q' + \kappa).
\end{aligned}$$

Nachdem aber mit dem Satz von Hutchinson folgt, dass Q die eindeutige Lösung von Gleichung (2.3) ist, folgt $Q' = Q$.

□.

Wir haben gerade konstruktiv gezeigt, dass man die Funktionen $S_i(x) = A^{-1}x + A^{-1}d_i$, auch wenn sie bezüglich der euklidischen Norm nicht kontrahierend sind, im Wesentlichen und für unsere Zwecke als Kontraktionen betrachten kann. Es gibt auch die Möglichkeit, abhängig von der expandierenden Matrix A eine Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ zu definieren, sodass die Abbildungen bezüglich dieser Norm Kontraktionen sind. Ist A expandierend, so gibt es eine Konstante ρ mit $1 < \rho < \min |\lambda_i|$. Wir definieren nun nach [17] folgende Norm:

$$||x||^* = \sum_{k=0}^{\infty} ||(\rho A^{-1})^k x|| = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k ||A^{-k}x||.$$

Die Eigenwerte von ρA^{-1} sind strikt kleiner als 1. Daher konvergiert diese Reihe stets und definiert eine Norm $||\cdot||^*$ auf $\mathbb{R}^n$. Nun gilt:

$$\begin{aligned}
||A^{-1}x||^* &= \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k ||A^{-(k+1)}x|| \\
&= \rho^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k ||A^{-k}x|| \\
&\leq \rho^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k ||A^{-k}x|| = \rho^{-1} ||x||^*.
\end{aligned}$$

Damit ist A^{-1} und damit auch die Funktionen S_i Kontraktionen bezüglich $||\cdot||^*$ und wir erhalten die Menge Q als selbstähnliche Menge bezüglich der (echten) Kontraktionen S_i .

Definition 2.0.11 *Seien A und $\mathcal{D}$ Daten wie oben. Die Menge $Q(A, \mathcal{D})$ heißt selbstaffine Menge bezüglich der Daten A und $\mathcal{D}$.*

Nun ist es für unsere Zwecke praktisch, wenn wir annehmen können, dass die Digit-Menge $\mathcal{D}$ die 0 stets enthält. Wenn man allerdings bloß das Element in $\mathcal{D}$, welches in der gleichen Restklasse ist wie die 0, gegen die 0 austauscht, dann können völlig verschiedene Attraktoren daraus resultieren. Es ist daher nötig, die gesamte Ziffernmengemenge $\mathcal{D}$ zu transferieren, damit die beiden Attraktoren fast gleich sind, in dem Sinn, dass sie sich bloß um eine bestimmte Translation unterscheiden. Wir führen das genauer aus und halten uns an [16]:

Lemma 2.0.12 *Sei A eine expandierende Matrix und $\mathcal{D}_1$ und $\mathcal{D}_2$ zwei Digit-Mengen mit $\mathcal{D}_2 = x + \mathcal{D}_1$. Dann verhalten sich die beiden selbstähnlichen Mengen $Q_1(A, \mathcal{D}_1)$ und $Q_2(A, \mathcal{D}_2)$ folgendermaßen zueinander:*

$$Q_2(A, \mathcal{D}_2) = Q_1(A, \mathcal{D}_1) + (A - I_n)^{-1}x.$$

Beweis:

Es gilt wegen $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 - x$, dass

$$\begin{aligned} AQ_1 &= \bigcup_{d \in \mathcal{D}_1} Q_1 + d \\ &= \bigcup_{d \in \mathcal{D}_2} Q_1 + d - x \\ &= \bigcup_{d \in \mathcal{D}_2} Q_1 + d + (I_n - A)(A - I_n)^{-1}x \\ &= \bigcup_{d \in \mathcal{D}_2} \left(Q_1 + d + (A - I_n)^{-1}x \right) - A(A - I_n)^{-1}x. \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also

$$AQ_1 + A(A - I_n)^{-1}x = \bigcup_{d \in \mathcal{D}_2} Q_1 + (A - I_n)^{-1}x + d,$$

anders ausgedrückt:

$$A \left(Q_1 + (A - I_n)^{-1}x \right) = \bigcup_{d \in \mathcal{D}_2} \left(Q_1 + (A - I_n)^{-1}x \right) + d.$$

Nun haben wir oben gezeigt, dass die Menge M , welche $AM = \bigcup_{d \in \mathcal{D}_2} M + d$ erfüllt, eindeutig ist. Nach Voraussetzung gilt $AQ_2 = \bigcup_{d \in \mathcal{D}_2} Q_2 + d$. Damit folgt insgesamt $Q_2 = Q_1 + (A - I_n)^{-1}x$.

□

Wir können von nun an also stets ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass $0 \in \mathcal{D}$.

Um topologische Resultate aus dem ersten Kapitel verwenden zu können, brauchen wir die Open Set Condition auch für selbstaffine Mengen. Ein Werkzeug dafür ist folgendes sehr naheliegendes Resultat aus [12]:

Proposition 2.0.13 *Seien $A, \mathcal{D}$ und $Q = Q(A, \mathcal{D})$ wie oben. Dann gilt:*

$$(Q + d) \cap (Q + d') \simeq \emptyset \quad \text{für } d \neq d' \in \mathcal{D}.$$

Beweis:

Nach Proposition (2.0.10) gilt

$$AQ = \bigcup_{d \in \mathcal{D}} Q + d.$$

Bezeichnet λ das Lebesguemaß im $\mathbb{R}^m$, so gilt:

$$\lambda(AQ) = \lambda\left(\bigcup_{d \in \mathcal{D}} Q + d\right) \leq \sum_{d \in \mathcal{D}} \lambda(Q).$$

Es gilt auch, dass $\lambda(AQ) = |\det(A)| \cdot \lambda(Q)$. Da aber $\mathcal{D}$ als vollständiges Repräsentantensystem von $\Gamma/A\Gamma$ genau $|\det(A)|$ Elemente besitzt, folgt daraus:

$$\lambda\left(\bigcup_{d \in \mathcal{D}} Q + d\right) = |\mathcal{D}| \cdot \lambda(Q).$$

Damit ist die Fast-Disjunktheit gezeigt.

□

Wir werden im nächsten Abschnitt zeigen, dass solche selbstaffinen Mengen stets nichtleeres Inneres besitzen. Aus der obigen Proposition folgt damit, dass

$$\underbrace{Q^\circ + d_i}_{=S_i(Q^\circ)} \cap \underbrace{Q^\circ + d_j}_{=S_j(Q^\circ)} = \emptyset$$

ist. Damit ist Q° eine OSC-Menge.

2.1 Die Tiling-Eigenschaft

Wir wollen nun selbstaffine Mengen dazu verwenden, den $\mathbb{R}^m$ entlang eines Gitters zu kacheln (oder *tilen*).

Definition 2.1.1 Sei $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^m$ ein Gitter und $\Gamma' \subseteq \Gamma$ eine Teilmenge. Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^m$ eine kompakte Teilmenge. Dann ist Q ein Γ' -Tile des $\mathbb{R}^m$, wenn gilt:

$$\bigcup_{k \in \Gamma'} Q + k = \mathbb{R}^m \quad \text{und} \quad (k + Q) \cap (l + Q) \simeq \emptyset \text{ für } k \neq l \in \Gamma'.$$

Man sagt auch, die Γ' -Translate tilen $\mathbb{R}^m$. Ist Γ' ein Gitter, so nennt man das Tiling ein Lattice-Tiling.

Bemerkung 2.1.2 Es gilt $(k + Q) \cap (l + Q) \simeq \emptyset$ für alle $k \neq l \in \Gamma$ genau dann, wenn $(k + Q) \cap Q \simeq \emptyset$ für alle $k \in \Gamma$.

Damit ein (Lattice-)Tiling durch Translate einer selbstaffinen Menge $Q(A, \mathcal{D})$ vorliegt, also ein *selbstaffines Tiling*, muss der ganze $\mathbb{R}^m$ mit Translaten überdeckt werden, sodass die Schnittmengen der einzelnen Translate Maß Null besitzen. (Natürlich ist es nicht möglich, den Raum mit Gittertranslaten einer kompakten Menge zu tilen, sodass die Translate paarweise ganz leeren Durchschnitt haben.)

Folgendes Lemma zeigt, dass wir in diesem Fall für ein Tiling lediglich die Fast-Disjunktheit gewährleisten müssen:

Lemma 2.1.3 Sei A eine expandierende ganzzahlige Matrix bezüglich eines Gitters Γ , $\mathcal{D}$ eine vollständige Digit-Menge und $Q = Q(A, \mathcal{D})$ die resultierende selbstaffine Menge. Dann gilt:

$$\bigcup_{k \in \Gamma} Q(A, \mathcal{D}) + k = \mathbb{R}^m.$$

Der Beweis dazu folgt in Proposition 2.2.4.

Daraus folgt sofort ein wichtiges Resultat:

Korollar 2.1.4 Seien $A, \mathcal{D}$ und Q wie oben. Dann ist $Q^\circ \neq \emptyset$.

Beweis:

Translate von Q überdecken also den ganzen Raum. Damit folgt nach dem Satz von Baire, dass $Q^\circ \neq \emptyset$. Es ist nämlich der vollständige metrische Raum $\mathbb{R}^m$ nach obigem die abzählbare Vereinigung von Translaten von Q . Damit

ist Q keine magere Menge, also insbesondere nicht nirgendsdicht. Da Q abgeschlossen ist, ist das gleichbedeutend damit, dass das Innere von Q nicht leer ist.

□

Bemerkungen zur Digit-Menge

1. Die Menge $Q(A, \mathcal{D})$ hat nach den gegebenen Voraussetzungen also stets positives Maß. Das ist bei allgemeinen selbstähnlichen und auch selbstaffinen Mengen nicht der Fall. Ein Beispiel dafür ist die Cantor-Menge. Ist die Digit-Menge ein vollständiges Repräsentantensystem von $\Gamma/A\Gamma$, so besitzt die selbstaffine Menge $Q(A, \mathcal{D})$ stets positives Maß, siehe auch [17], [18].
2. Diese Bedingung ist allerdings nicht notwendig, folgendes Beispiel findet sich in [16]:
Betrachtet man die Matrix $A = 4$ und die nicht vollständige Digit-Menge $\mathcal{D} = \{0, 1, 8, 9\}$, so liefert die Iteration die Menge $M = [0, 1] \cup [2, 3]$, eine Menge mit positivem Maß. Translate der Form $M + k$ für $k = 4n$ oder $k = 4n + 1$ bilden ein Tiling von $\mathbb{R}$, jedoch kein Lattice-Tiling.
3. Es gilt aber eine teilweise Umkehrung. Sei $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gitter, A eine expandierende Matrix mit $A\Gamma \subseteq \Gamma$, $\mathcal{D} = \{d_1, \dots, d_k\} \subseteq \Gamma$ eine Menge von Gitterpunkten und Q eine kompakte Menge mit $AQ = \bigcup_{d \in \mathcal{D}} Q + d$. Außerdem sei Q ein Γ -Tile. Dann ist $\mathcal{D}$ ein vollständiges Repräsentantensystem von $\Gamma/A\Gamma$.

Beweis:

Es ist

$$\bigcup_{k \in \Gamma} Q + k = \mathbb{R}^n \text{ mit } \mu\left((Q + k) \cap (Q + k')\right) = 0.$$

Es folgt, dass

$$A\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n = \bigcup_{k \in \Gamma} AQ + Ak = \bigcup_{\substack{k \in \Gamma, \\ d \in \mathcal{D}}} Q + d + Ak.$$

Außerdem gilt

$$\mu\left((AQ + Ak) \cap (AQ + Ak')\right) = |\det A| \cdot \mu\left((Q + k) \cap (Q + k')\right) = 0.$$

Damit bilden die Mengen $Q + d + Ak$ für $d \in \mathcal{D}$ und $Ak \in A\Gamma$ ebenfalls ein Tiling des $\mathbb{R}^n$. Da $Q + k$ für $k \in \Gamma$ und $Q + d + Ak$ für $d \in \mathcal{D}$, $Ak \in A\Gamma$

Überdeckungen des $\mathbb{R}^n$ bilden, folgt, dass jedes $k \in \Gamma$ eine Darstellung besitzt als $k = d + Ak'$ für $Ak' \in A\Gamma$ und $d \in \mathcal{D}$. Außerdem ist diese Darstellung eindeutig. Gäbe es für $k \in \Gamma$ nämlich zwei Darstellungen $k = d_1 + Ak_1 = d_2 + Ak_2$, so würde folgen, dass

$$\mu\left((Q + d_1 + Ak_1) \cap (Q + d_2 + Ak_2)\right) = \mu(Q) > 0.$$

Das ist ein Widerspruch zur Tiling-Eigenschaft von $Q + \mathcal{D} + A\Gamma$. Insgesamt besitzt also jeder Gitterpunkt eine eindeutige Darstellung als Summe $d + Ak$ für $d \in \mathcal{D}$ und $Ak \in A\Gamma$ und $\mathcal{D}$ ist damit ein vollständiges Repräsentantensystem von $\Gamma/A\Gamma$.

□

Aus Lemma 2.1.3 folgt:

Bei gegebener Matrix A und gegebener Digit-Menge $\mathcal{D}$ bildet die selbstaffine Menge $Q(A, \mathcal{D})$ genau dann ein $\mathbb{Z}^m$ -Tiling, wenn

$$(k + Q) \cap (l + Q) \simeq \emptyset \text{ für } k \neq l \in \mathbb{Z}^m$$

erfüllt ist.

Bevor dieser Bedingung nachgegangen wird, erarbeiten wir zunächst einige hilfreiche Eigenschaften von $Q(A, \mathcal{D})$, die insbesondere die Approximation dieser Mengen durch Quader betreffen.

2.2 Approximation und erste Kriterien

Wir halten uns hier ganz an [11] und [12].

Gegeben sei wieder eine expandierende ganzzahlige Matrix A und eine vollständige Digit-Menge $\mathcal{D}$. Ist A^{-1} eine Kontraktion, so folgt nach dem Satz von Hutchinson aus [15], dass die resultierende selbstähnliche Menge, die nach 2.0.10 gleich der Menge $Q(A, \mathcal{D})$ ist, der Grenzwert bezüglich der Hausdorffmetrik der rekursiven Mengenfolge

$$Q_{N+1} = \bigcup_{d \in \mathcal{D}} A^{-1}(d + Q_N)$$

für jede kompakte Startmenge Q_0 ist. Wir wollen im Folgenden erarbeiten, dass diese Approximation auch für allgemeine expandierende A funktioniert (und nicht nur für Matrizen A , sodass A^{-1} eine Kontraktion ist, was ja schon aus dem Fixpunktsatz von Banach folgt).

Sei $e_1, \dots, e_m$ eine Basis für das Gitter Γ . Wir wählen als Startmenge Q_0

das Parallelepiped, das von $e_1, \dots, e_m$ aufgespannt wird. (Man könnte jede kompakte Menge als Startmenge wählen, jedoch haben Approximationen mit Startmengen dieser Form besonders schöne Eigenschaften, die wir uns später zunutze machen werden.) Wir setzen ein:

$$\begin{aligned}
Q_N &= \bigcup_{d \in \mathcal{D}} A^{-1}d + A^{-1}Q_{N-1} \\
&= \bigcup_{d_1 \in \mathcal{D}} \bigcup_{d_2 \in \mathcal{D}} A^{-1}d_1 + A^{-2}d_2 + A^{-2}Q_{N-2} \\
&\vdots \\
&= \bigcup_{(d_1, \dots, d_N) \in \mathcal{D}^N} \left(\sum_{i=1}^N A^{-i}d_i + A^{-N}Q_0 \right).
\end{aligned}$$

Sei nun $x \in Q_N$. Dann gibt es ein $x_0 \in Q_0$ mit $x = \sum_{i=1}^N A^{-i}d_i + A^{-N}x_0$. Ist nun $y \in Q$ mit den gleichen ersten N Ziffern wie x , so kann man y schreiben als $y = \sum_{i=1}^N A^{-i}d_i + A^{-N}y_0$ für ein $y_0 \in Q$. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}
y &= \sum_{i=1}^N A^{-i}d_i + \sum_{i=N+1}^{\infty} A^{-i}d_i \\
&= \sum_{i=1}^N A^{-i}d_i + A^{-N} \sum_{i=1}^{\infty} A^{-i}d'_i.
\end{aligned}$$

Setze $y_0 = \sum_{i=1}^{\infty} A^{-i}d'_i \in Q(A, \mathcal{D})$.

Wir betrachten den Abstand des fixen Punktes $x \in Q_N$ zur Menge Q :

$$\begin{aligned}
d(x, Q) &= \inf_{y \in Q} \|x - y\| \\
&= \inf_{y \in Q} \left\| \sum_{i=1}^N A^{-i}d_i + A^{-N}x_0 - \left(\sum_{i=1}^N A^{-i}c_i + \sum_{i=N+1}^{\infty} A^{-i}c_i \right) \right\| \\
&\leq \inf_{y \in Q} \left(\left\| \sum_{i=1}^N A^{-i}d_i - \sum_{i=1}^N A^{-i}c_i \right\| + \left\| A^{-N}x_0 - \sum_{i=N+1}^{\infty} A^{-i}c_i \right\| \right) \\
&= \inf_{y_0 \in Q} \|A^{-N}(x_0 - y_0)\|
\end{aligned}$$

da $\inf_{y \in Q} \left\| \sum_{i=1}^N A^{-i}d_i - \sum_{i=1}^N A^{-i}c_i \right\| = 0$.

Weiters gilt nach den Abschätzungen aus (2.2), dass

$$\begin{aligned}
\inf_{y_0 \in Q} \|A^{-N}(x_0 - y_0)\| &\leq C\lambda^N N^s \inf_{y_0 \in Q} \|x_0 - y_0\| \\
&\leq C\lambda^N N^s \sup_{x_0 \in Q_0} \inf_{y_0 \in Q} \|x_0 - y_0\|.
\end{aligned}$$

Diese Abschätzung ist unabhängig von $x \in Q_N$. Damit ist auch

$$\sup_{x \in Q_N} d(x, Q) \leq C \lambda^N N^s \sup_{x_0 \in Q_0} \inf_{y_0 \in Q} \|x_0 - y_0\|.$$

Es gilt also $\sup_{x \in Q_N} d(x, Q) \rightarrow 0$ für $N \rightarrow \infty$. Ähnlich argumentiert man, dass $\sup_{y \in Q} d(y, Q_N) \rightarrow 0$ für $N \rightarrow \infty$. Damit folgt, dass

$$\sup\{d(x, Q), d(y, Q_N) : x \in Q_N, y \in Q\} \rightarrow 0.$$

Wir haben gerade folgendes gezeigt:

Proposition 2.2.1 *Die Folge $(Q_N)_{N \geq 1}$ konvergiert bezüglich der Hausdorffmetrik gegen die Menge $Q(A, \mathcal{D})$.*

Sei $\mathcal{D}_n = \left\{ k \in \mathbb{Z}^m : k = \sum_{i=0}^{n-1} A^i d_i, d_i \in \mathcal{D} \right\}$ für $n \geq 1$. (Diese Menge ist nicht zu verwechseln mit der Menge $\mathcal{D}(n)$ aus dem vorigen Abschnitt) Diese verallgemeinerten Digit-Mengen spielen bei der Approximation von $Q(A, \mathcal{D})$ eine Rolle. Zunächst stellen wir fest, dass $|\mathcal{D}_n| = q^n$. Sei nämlich

$$d_0 + A d_1 + A^2 d_2 + \dots + A^{n-1} d_{n-1} = d'_0 + A d'_1 + A^2 d'_2 + \dots + A^{n-1} d'_{n-1}.$$

Dann folgt

$$d_0 + A(d_1 + A d_2 + \dots + A^{n-2} d_{n-1}) = d'_0 + A(d'_1 + A d'_2 + \dots + A^{n-2} d'_{n-1})$$

Da aber $\mathcal{D}$ als vollständiges Repräsentantensystem genau ein Element aus jeder Nebenklasse enthält, gilt $d_0 = d'_0$. Also folgt

$$A(d_1 + A d_2 + \dots + A^{n-2} d_{n-1}) = A(d'_1 + A d'_2 + \dots + A^{n-2} d'_{n-1})$$

und da A injektiv ist, folgt

$$d_1 + A d_2 + \dots + A^{n-2} d_{n-1} = d'_1 + A d'_2 + \dots + A^{n-2} d'_{n-1}.$$

Nach dem gleichen Argument wie vorhin folgern wir $d_1 = d'_1$. Induktiv erhält man, dass $d_i = d'_i$ für alle $0 \leq i \leq n-1$. Damit hat $\mathcal{D}_n$ genau q^n Elemente. Außerdem erfüllen die Approximationen eine gewisse verallgemeinerte Selbstähnlichkeit: Es gilt nämlich

$$A^n Q_n = \bigcup_{k \in \mathcal{D}_n} (k + Q_0) \text{ und } A^n Q(A, \mathcal{D}) = \bigcup_{k \in \mathcal{D}_n} (k + Q(A, \mathcal{D})).$$

Es ist $x \in A^n Q_n$, genau dann wenn

$$x = A^n \left(\sum_{i=1}^n A^{-i} d_i + A^{-n} x_0 \right) \text{ für } d_i \in \mathcal{D} \text{ und ein } x_0 \in Q_0.$$

Also

$$x = \sum_{i=0}^{n-1} A^i d_{n-i} + x_0.$$

Die zweite Identität folgt direkt aus den Umformungen zu Beginn dieses Kapitels.

Wir zeigen nun für $n \in \mathbb{N}$ zwei Eigenschaften, die strukturell an die Eigenschaften von Nebenklassen in Gruppen bezüglich Untergruppen, in diesem Fall $A\Gamma \subseteq \Gamma$, erinnern: Für $l \in \Gamma, l \neq 0$ gilt

$$(A^n l + \mathcal{D}_n) \cap \mathcal{D}_n = \emptyset \text{ und es gilt } \bigcup_{k \in \Gamma} A^n k + \mathcal{D}_n = \Gamma.$$

Sei nämlich $l \in \Gamma \setminus \{0\}$. Angenommen es existiert ein $x \in (A^n l + \mathcal{D}_n) \cap \mathcal{D}_n$. Dann besitzt x Darstellungen in beiden Mengen:

$$x = A^n l + \sum_{j=0}^{n-1} A^j f_j = \sum_{j=0}^{n-1} A^j d_j \text{ für } f_j, d_j \in \mathcal{D}.$$

Daraus folgt

$$A^n l = (d_0 - f_0) + \sum_{j=1}^{n-1} A^j (d_j - f_j).$$

Also insgesamt

$$A \left(A^{n-1} l - \sum_{j=1}^{n-2} A^{j-1} (d_j - f_j) \right) = d_0 - f_0.$$

Das bedeutet, dass $d_0 - f_0 \in A\Gamma$, also liegen d_0 und f_0 in der selben Nebenklasse bezüglich $A\Gamma$. Da $\mathcal{D}$ ein vollständiges Repräsentantensystem bildet, folgt, dass $d_0 = f_0$. Wegen der Bijektivität von A , können wir A^{-1} auf beiden Seiten anwenden und wiederholen das Argument. Wegen $A^n l \neq 0$, da $l \neq 0$, stoßen wir auf einen Widerspruch.

Wir zeigen nun, dass sich für $n \geq 0$ jedes $l \in \Gamma$ schreiben lässt als $l = A^n k + \sum_{j=0}^{n-1} A^j d_j$ mit $k \in \Gamma$ und $d_j \in \mathcal{D}$.

Das tun wir mittels Induktion. Für $n = 1$ ist $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}$ und die Behauptung folgt sofort, da $\Gamma = \bigcup_{d \in \mathcal{D}} A\Gamma + d$ genau die Aussage ist, dass $\mathcal{D}$ ein vollständiges Repräsentantensystem für $\Gamma/A\Gamma$ ist. Das werden wir auch im Induktionsschritt verwenden. Es gelte also $\bigcup_{k \in \Gamma} A^n k + \mathcal{D}_n = \Gamma$, dh jedes $l \in \Gamma$ lässt sich schreiben als $l = A^n k + \sum_{j=0}^{n-1} A^j d_j$. Wir schreiben nun $k = Ak' + d'$ mit $k' \in \Gamma$ und $d' \in \mathcal{D}$. Wir setzen ein:

$$l = A^n (Ak' + d') + \sum_{j=0}^{n-1} A^j d_j = A^{n+1} k' + \sum_{j=0}^{n-1} A^j d_j + A^n d'$$

und haben damit eine gewünschte Darstellung gefunden.
Zusammenfassend haben wir gerade folgende Eigenschaften bewiesen:

Lemma 2.2.2 *Seien $A, \Gamma, \mathcal{D}, n \geq 1$ und $\mathcal{D}_n$ wie oben. Dann gilt:*

1. *Es ist $|\mathcal{D}_n| = q^n$.*
2. *Für $l \in \Gamma, l \neq 0$ ist $(A^n l + \mathcal{D}_n) \cap \mathcal{D}_n = \emptyset$.*
3. *Für $n \geq 1$ ist $\bigcup_{k \in \Gamma} A^n k + \mathcal{D}_n = \Gamma$.*
4. *Es ist $A^n Q_n = \bigcup_{k \in \mathcal{D}_n} k + Q_0$ und $A^n Q(A, \mathcal{D}) = \bigcup_{k \in \mathcal{D}_n} (k + Q(A, D))$.*

Bemerkung 2.2.3 *Nun wird auch ersichtlich, warum wir Q_0 als das Parallelepiped gewählt haben und nicht als beliebige kompakte Startmenge.*

Es folgen zwei hilfreiche Resultate, wir beweisen nun Lemma 2.1.3:

Proposition 2.2.4 *Seien $A, \Gamma, \mathcal{D}, Q$ wie oben.*

1. *Für alle $n \geq 0$ gilt: Die Γ -Translate von Q_n bilden ein Tiling des $\mathbb{R}^m$.*
2. *Die Γ -Translate von $Q = Q(A, \mathcal{D})$ überdecken den $\mathbb{R}^m$.*

Beweis:

1. a. Wir zeigen zunächst, dass $\bigcup_{k \in \Gamma} Q_n + k = \mathbb{R}^m$ ist. Dabei gehen wir induktiv vor. Das Parallelepiped Q_0 überdeckt den $\mathbb{R}^m$ entlang des Gitters Γ . Wir setzen nun voraus, dass die Γ -Translate von Q_{n-1} eine Überdeckung bilden. Sei $x \in \mathbb{R}^m$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$x \in k + Q_{n-1} \text{ und } Ax \in l + Q_{n-1}$$

für gewisse $k, l \in \Gamma$. Es ist $\mathcal{D}$ ein vollständiges Repräsentantensystem von $\Gamma/A\Gamma$, also ist

$$\Gamma = \bigcup_{k \in \Gamma} Ak + \mathcal{D}.$$

Damit folgt, dass

$$Ax \in Al' + d' + Q_{n-1} \subseteq Al' + \bigcup_{d \in \mathcal{D}} d + Q_{n-1}$$

für ein $l' \in \Gamma$ und ein $d' \in \mathcal{D}$. Wendet man auf beiden Seiten die Abbildung A^{-1} an, so ergibt das

$$x \in l' + A^{-1} \left(\bigcup_{d \in \mathcal{D}} d + Q_{n-1} \right).$$

Gerade so war Q_n definiert.

1. b. Nun zeigen wir, dass die Γ -Translate paarweise fast-leeren Durchschnitt haben.

Nach Proposition 2.3.1 reicht es zu zeigen, dass $\mu(Q_n) = \mu(Q_0)$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$, da Q_0 das Parallelepiped ist, welches von der Basis des Gitters aufgespannt wird. Nun ist nach dem obigen Lemma $A^n Q_n = \bigcup_{d \in \mathcal{D}_n} Q_0 + d$, also folgt

$$\mu(A^n Q_n) = \mu\left(\bigcup_{d \in \mathcal{D}_n} Q_0 + d\right) = \sum_{d \in \mathcal{D}_n} \mu(Q_0 + d),$$

da

$$\mu((Q_0 + k) \cap (Q_0 + l)) = 0$$

ist für $k \neq l \in \Gamma$, also erst recht für $k \neq l \in \mathcal{D}_n$. Nun ist, wie wir bereits gezeigt haben, $|\mathcal{D}_n| = q^n$, also folgt

$$\mu(A^n Q_n) = q^n \mu(Q_0).$$

Andererseits gilt auch

$$\mu(A^n Q_n) = |\det A|^n \mu(Q_n) = q^n \mu(Q_n).$$

Insgesamt folgt also $\mu(Q_n) = \mu(Q_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit

$$\mu((Q_n + k) \cap (Q_n + l)) = 0$$

für $k \neq l \in \Gamma$.

2. Angenommen es gibt ein $x \in \mathbb{R}^m \setminus (Q + \Gamma)$. Dann folgt auch, dass

$$(x + \Gamma) \cap (Q + \Gamma) = \emptyset$$

ist, da aus $x + k = q + k'$ für gewisse $k, k' \in \Gamma, q \in Q$ folgen würde, dass $x = q + k' - k \in Q + \Gamma$, was ein Widerspruch ist. Die Menge Q ist kompakt, also insbesondere beschränkt. Damit gibt es ein $r > 0$ mit $Q \subseteq B_r(0)$. Da Γ eine diskrete Menge ist, gilt

$$|(x + \Gamma) \cap \overline{B_{2r}(0)}| = N \in \mathbb{N}.$$

Damit ist auch

$$M = \min \{d(x + k, Q) : k \in \Gamma, x + k \in B_{2r}(0)\} > 0$$

Es sei $k_0 \in \Gamma$ so, dass $d(x + k_0, Q) = M$. Außerdem ist M auch folgendes Minimum:

$$M = \min \{d(x + k, Q + l) : k, l \in \Gamma, x + k \in B_{2r}(0)\}.$$

Gäbe es nämlich $k, l \in \Gamma$ mit $d(x + k, Q + l) < M$, so würde folgen, dass $d(x + k - l, Q) < M$, ein Widerspruch zur Definition von M . Damit ist der Punkt $x + k_0$ von jedem Γ -Translat von Q mindestens M weit entfernt, also

$$d\left(x + k_0, \bigcup_{k \in \Gamma} Q + k\right) = M > 0.$$

Das ist ein Widerspruch zu den Tatsachen, dass die Folge $(Q_n)_{n \geq 0}$ bezüglich der Hausdorffmetrik gegen Q konvergiert, wie wir in Proposition 2.2.1 gezeigt haben, und die Γ -Translate der Q_n für alle $n \geq 0$ sehr wohl eine Überdeckung von $\mathbb{R}^m$ bilden.

□

Wir zeigen nun unser erstes Resultat über ein hinreichendes und notwendiges Kriterium für das Vorliegen eines Lattice Tilings, zu finden in [11]. Hierbei verwenden wir die Mengen $\mathcal{D}_n$. Wir definieren zunächst für eine beliebige Menge M :

$$\Delta M := \{m_1 - m_2 : m_1, m_2 \in M\}$$

Theorem 2.2.5 *Seien $\Gamma, A, \mathcal{D}$ wie oben und sei Q die resultierende selbst-affine Menge. Die Γ -Translate von Q bilden genau dann ein Tiling des $\mathbb{R}^m$, wenn*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta \mathcal{D}_n = \Gamma.$$

Beweis:

Es ist zu zeigen, dass die Γ -Translate von Q genau dann fast-disjunkt sind, wenn $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta \mathcal{D}_n = \Gamma$. Sei also die Vereinigung der Differenzenmengen gleich dem Gitter Γ . Dann lässt sich jedes $k \in \Gamma$ schreiben als $k = d - d'$ für $d, d' \in \mathcal{D}_n$ für ein $n \geq 0$. Nach Bemerkung 2.1.2 reicht es zu zeigen, dass $(Q + k) \cap Q \simeq \emptyset$, also $(Q + d - d') \cap Q \simeq \emptyset$ und damit $(Q + d) \cap (Q + d') \simeq \emptyset$ ist für alle $d, d' \in \mathcal{D}_n$ und alle $n \geq 0$. Wir haben bereits gezeigt, dass $A^n Q = \bigcup_{d \in \mathcal{D}_n} Q + d$ ist. Nun gilt $\mu(A^n Q) = |\det A|^n \mu(Q) = q^n \mu(Q)$ und nach obigem Lemma gilt damit

$$q^n \mu(Q) = \mu\left(\bigcup_{d \in \mathcal{D}_n} Q + d\right).$$

Nun ist

$$\mu\left(\bigcup_{d \in \mathcal{D}_n} Q + d\right) \leq \sum_{d \in \mathcal{D}_n} \mu(Q + d).$$

Wir haben gezeigt, dass $|\mathcal{D}_n| = q^n$ ist und damit gilt $\sum_{d \in \mathcal{D}_n} \mu(Q + d) = q^n \mu(Q)$. Also folgt insgesamt

$$q^n \mu(Q) = \mu \left(\bigcup_{d \in \mathcal{D}_n} Q + d \right) \leq \sum_{d \in \mathcal{D}_n} \mu(Q + d) = q^n \mu(Q)$$

und damit insbesondere

$$\mu \left(\bigcup_{d \in \mathcal{D}_n} Q + d \right) = \sum_{d \in \mathcal{D}_n} \mu(Q + d).$$

Das ist nur dann möglich, wenn

$$\mu((Q + d) \cap (Q + d')) = 0$$

für $d, d' \in \mathcal{D}_n$.

Sei nun Q ein Γ -Tile. Wir zeigen zunächst für alle $R > 0$ die Existenz von natürlichen Zahlen $n, N > 0$ und einem Gitterpunkt $k \in \Gamma$ mit

$$(B(A^N k, R) \cap \Gamma) \subseteq \mathcal{D}_{N+n}.$$

Dabei können n und k unabhängig von R gewählt werden.

Sei $\delta = \text{diam}(Q)$. Da Q ein Γ -Tile ist, gilt nach dem Satz von Baire, dass $Q^\circ \neq \emptyset$. Daher gibt es ein $n \geq 0$ und ein $k \in \Gamma$, sodass $k \in A^n Q^\circ$. Sei nun $\varepsilon > 0$ mit $B(k, \varepsilon) \subseteq A^n Q^\circ$. Wir haben gezeigt, dass hinreichend große Potenzen von A^{-1} Kontraktionen bezüglich der euklidischen Norm sind. Wir zeigen nun, dass es für gegebenes $R > 0$ ein $N > 0$ gibt mit

$$B(A^N k, R + \delta) \subseteq A^N B(k, \varepsilon).$$

Sei $a \in \mathbb{N}$, sodass A^{-a} eine Kontraktion bezüglich der euklidischen Norm ist. Es gilt also $\|A^{-a}(x - y)\| \leq \lambda \|x - y\|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^m$ und ein $\lambda < 1$. Ist nun $x \in B(A^a k, R + \delta)$, also $\|A^a k - x\| < R + \delta$, dann folgt

$$\|A^{-a}(A^a k - x)\| \leq \lambda(R + \delta).$$

Sei nun $b \in \mathbb{N}$ groß genug, sodass $\lambda^b(R + \delta) < \varepsilon$ ist. Dann folgt

$$\|A^{-ab}(A^{ab} k - x)\| < \lambda^b(R + \delta) < \varepsilon.$$

Wir setzen $N := ab$ und es folgt

$$B(A^N k, R + \delta) \subseteq A^N B(k, \varepsilon) \subseteq A^{N+n} Q.$$

Da wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit stets annehmen, dass $0 \in \mathcal{D}$ und damit $0 \in Q$ ist, gilt $Q + l \subseteq B(A^N k, R + \delta)$ für $l \in B(A^N k, R)$. Es ist also

$$\bigcup_{l \in B(A^N k, R) \cap \Gamma} Q + l \subseteq A^N B(k, \varepsilon) \subseteq A^{N+n} Q = \bigcup_{l \in \mathcal{D}_{N+n}} Q + l$$

also insbesondere

$$\bigcup_{l \in B(A^N k, R) \cap \Gamma} Q + l \subseteq \bigcup_{l \in \mathcal{D}_{N+n}} Q + l.$$

Nun gilt nach Voraussetzung, dass die Γ -Translate von Q ein Tiling bilden, also insbesondere $(Q + l) \cap (Q + l') \simeq \emptyset$ gilt. Damit kann man aus der obigen Inklusion schließen, dass auch die Indexmengen die Inklusion erfüllen, also dass $l \in B(A^N k, R) \cap \Gamma$ gilt, genau dann, wenn $l \in \mathcal{D}_{N+n}$ ist, also insgesamt

$$(B(A^N k, R) \cap \Gamma) \subseteq \mathcal{D}_{N+n}.$$

Wir wollen nun zeigen, dass

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta \mathcal{D}_n = \Gamma.$$

Sei nun $R > 0$. Wegen $(B(A^{N(R)} k, R) \cap \Gamma) \subseteq \mathcal{D}_{N(R)+n}$ ist

$$\left((B(A^{N(R)} k, R) - A^{N(R)} k) \cap \Gamma \right) \subseteq \mathcal{D}_{N(R)+n} - \mathcal{D}_{N(R)+n} = \Delta \mathcal{D}_{N(R)+n}.$$

Es enthält $B(A^{N(R)} k, R) - A^{N(R)} k$ alle Gitterpunkte mit Norm $\leq R$. Ist also $x \in \Gamma$ beliebig, dann ist

$$x \in \left(B(A^{N(\|x\|+1)} k, \|x\| + 1) - A^{N(\|x\|+1)} k \right) \cap \Gamma \subseteq \Delta \mathcal{D}_{N(\|x\|+1)+n}.$$

Damit haben wir gezeigt, dass $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta \mathcal{D}_n = \Gamma$.

□

Beispiel

Wir betrachten nun ein Beispiel im eindimensionalen Raum. Sei $Ax = 3x$ und $\mathcal{D} = \{0, 2, 4\}$. Es ist $\mathcal{D}$ ein vollständiges Repräsentantensystem von $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und

$$\mathcal{D}_n = \left\{ k \in \mathbb{Z} : k = \sum_{i=0}^{n-1} 3^i d_i : d_i \in \{0, 2, 4\} \right\}$$

eine Menge, die ausschließlich aus geraden Zahlen besteht. Damit besteht auch die Differenzenmenge $\Delta\mathcal{D}_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und schließlich die Vereinigung $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta\mathcal{D}_n$ aus geraden Zahlen. Es ist also

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta\mathcal{D}_n \neq \mathbb{Z}.$$

Die Translate der selbstaffinen Menge $Q(A, \mathcal{D})$ bilden also kein $\mathbb{Z}$ -Tiling. Wir prüfen das nach. Es gilt für die Menge $[0, 2]$:

$$\begin{aligned} A[0, 2] &= [0, 6] \\ &= [0, 2] + 0 \cup [0, 2] + 2 \cup [0, 2] + 4. \end{aligned}$$

Wegen der Eindeutigkeit der entsprechenden selbstaffinen Menge gilt $[0, 2] = Q(A, \mathcal{D})$. Die $\mathbb{Z}$ -Translate von $[0, 2]$ bilden tatsächlich kein Tiling von $\mathbb{R}$.

Der Nachteil dieses Kriteriums ist, dass es sich in einem konkreten Fall oft nicht einfach prüfen lässt. In nächsten Kapitel werden wir mit etwas Vorarbeit ein Kriterium erarbeiten, welches sich besser anwenden lässt.

Wir werden nun zeigen, dass für gegebene Daten A, Γ und $\mathcal{D}$ die selbstaffine Menge $Q(A, \mathcal{D})$ immer bezüglich einer Teilmenge Γ' des Gitters Γ ein Tiling bildet. Die Teilmenge Γ' ist nicht notwendigerweise ein Gitter. Damit ist das Tiling nicht notwendigerweise regelmäßig. Das Resultat findet sich in [11].

Theorem 2.2.6 *Seien A, Γ und $\mathcal{D}$ Daten wie oben und sei $Q = Q(A, \mathcal{D})$ die resultierende selbstaffine Menge. Dann existiert eine Teilmenge $\Gamma' \subseteq \Gamma$, sodass gilt:*

$$\bigcup_{k \in \Gamma'} Q + k = \mathbb{R}^m \text{ und } \mu((Q + k) \cap (Q + k')) = 0$$

für verschiedene $k, k' \in \Gamma'$.

Beweis:

Wie im vorhergehenden Beweis gezeigt wurde, gibt es einen Gitterpunkt $k \in \Gamma$ und eine Potenz $n \in \mathbb{N}$, sodass $k \in A^n Q^\circ$. Wir setzen $R = A^n Q - k$. Da $A^n Q$ eine offene Umgebung von k enthält, liegt eine offene Umgebung von 0 in R . Für $j \in \mathbb{N}$ liegt 0 auch im Inneren von $A^j R$. Sei also U_j die Zusammenhangskomponente von $A^j R$, in welcher 0 liegt. Wir bezeichnen mit $\tilde{\mathcal{D}}_j$ die verschobenen Digits, also

$$\tilde{\mathcal{D}}_j = \{l - A^j k : l \in \mathcal{D}_{j+n}\}.$$

Damit ergibt sich

$$A^j R = \bigcup_{l \in \tilde{\mathcal{D}}_j} Q + l \text{ wobei } \mu((Q + l) \cap (Q + l')) = 0$$

für verschiedene $l, l' \in \tilde{\mathcal{D}}_j$, da ja $\mu((Q + k) \cap (Q + k')) = 0$ ist für verschiedene $k, k' \in \mathcal{D}_{j+n}$. Wir definieren folgende Mengen:

$$X_{m,j} = \left\{ l \in \tilde{\mathcal{D}}_m : (Q + l) \cap U_j^\circ \neq \emptyset \right\}.$$

Nun nehmen wir an, es gibt eine Folge $(N_j)_{j \geq 0}$, wobei N_j für alle $j \in \mathbb{N}$ eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist, sodass $N_{j+1} \subseteq N_j$ gilt für alle $j \in \mathbb{N}$. Es soll gelten, dass für $m, m' \in N_j$

$$X_{m,j} = X_{m',j}$$

ist. Wir können also setzen $X_j = X_{m,j}$ für einen Repräsentanten $m \in N_j$. Nun ist $U_j \subseteq U_{j+1}$ für $j \in \mathbb{N}$, da Potenzen von A expandierend wirken. Damit folgt auch $X_j \subseteq X_{j+1}$ für $j \in \mathbb{N}$. Wir setzen nun

$$\Gamma' = \bigcup_{j=0}^{\infty} X_j.$$

Es ist $\Gamma' \subseteq \Gamma$. Die Menge Γ' erfüllt außerdem:

1. $\bigcup_{l \in \Gamma'} Q + l = \mathbb{R}^m$, da ja $\bigcup_{j=0}^{\infty} U_j = \mathbb{R}^m$ gilt.
2. $\mu((Q + l) \cap (Q + l')) = 0$ für verschiedene $l, l' \in \Gamma'$, da $X_{m,j} \subseteq \tilde{\mathcal{D}}_m$ ist.

Damit erfüllt Γ' alle gewünschten Eigenschaften. Es bleibt nur mehr der Beweis der Existenz der Mengen $N_j \subseteq \mathbb{N}$. Wir gehen induktiv vor:

Die Menge U_0 ist die Zusammenhangskomponente von $A^0 R = R = A^n Q - k$, welche 0 enthält. Die Menge R ist beschränkt, also auch die Menge U_0 . Damit gibt es nur endlich viele Möglichkeiten, U_0 mit derartigen Translaten von Q zu überdecken. Damit folgt die Existenz einer unendlichen Menge $N_0 \subseteq \mathbb{N}$, sodass für $m, m' \in N_0$ die Mengen $X_{m,0}$ und $X_{m',0}$ übereinstimmen.

Wir nehmen nun an, dass eine absteigende Folge von Mengen $N_0, \dots, N_j$ bereits konstruiert wurde. Auf der Menge N_j definieren wir nun auf kanonische Weise folgende Relation: Es soll $m \sim m'$ sein, wenn $X_{m,j+1} = X_{m',j+1}$ ist. Das ist eine Äquivalenzrelation und aus dem gleichen Beschränktheitsargument wie vorhin folgt, dass es nur endlich viele Äquivalenzklassen in N_j gibt. Damit ist mindestens eine dieser Klassen eine unendliche Teilmenge von N_j , die wir mit N_{j+1} bezeichnen. Die Folge von Mengen $(N_j)_{j \geq 0}$ erfüllt alle gewünschten Eigenschaften und damit folgt die Existenz der Menge Γ' .

□

2.3 Lattice Tilings

Wir wollen untersuchen, wann ein regelmäßiges Tiling, also ein Tiling entlang eines Gitters vorliegt. Wie im letzten Abschnitt gezeigt, bilden Mengen der Form $Q(A, \mathcal{D})$ stets eine Überdeckung des Raums. Für ein Tiling muss also lediglich überprüft werden, wie sehr die einzelnen Translate einander überdecken. Diese Bedingung kann man durch eine maßtheoretische Bedingung ersetzen, die sehr einfach klingt und sich als sehr praktisch erweisen wird. Wir beweisen für allgemeines messbares Q ein Resultat aus [12]:

Proposition 2.3.1 *Sei $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^m$ ein Gitter und $Q \subseteq \mathbb{R}^m$ eine messbare Menge, sodass*

$$\bigcup_{k \in \Gamma} k + Q = \mathbb{R}^m.$$

Sei außerdem $e_1, \dots, e_m$ eine Basis für Γ und Q_0 das Parallelepiped, das von der Basis aufgespannt wird.

Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. *Es ist $(Q + k) \cap (Q + l) \simeq \emptyset$ für alle $k \neq l \in \Gamma$.*
2. *Es ist $\mu(Q) = \mu(Q_0)$.*

Beweis:

Zunächst zeigen wir 1. $\Rightarrow$ 2.

Wir definieren die Funktion

$$f(x) = \sum_{k \in \Gamma} \chi_Q(x - k).$$

Wegen $\bigcup_{k \in \Gamma} k + Q = \mathbb{R}^m$ gilt $f(x) \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^m$. Wegen $(Q + k) \cap (Q + l) \simeq \emptyset$ für alle $k \neq l \in \Gamma$ ist auch $f(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^m$ bis auf eine Nullmenge, also gilt insgesamt $f(x) = 1$ fast überall. Nach Konstruktion erfüllt Q_0 selber

$$\bigcup_{k \in \Gamma} k + Q_0 = \mathbb{R}^m \text{ und } (k + Q_0) \cap (l + Q_0) \simeq \emptyset \text{ für alle } k, l \in \Gamma.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \mu(Q) &= \int_{\mathbb{R}^m} \chi_Q(x) dx = \int_{\bigcup_{k \in \Gamma} k + Q_0} \chi_Q(x) dx \\ &= \sum_{k \in \Gamma} \int_{k + Q_0} \chi_Q(x) dx = \int_{Q_0} f(x) dx \\ &= \mu(Q_0). \end{aligned}$$

Nun zeigen wir die Rückrichtung $2. \Rightarrow 1.$

Wir definieren f wie oben und erhalten ebenfalls $f(x) \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^m$. Aus der obigen Rechnung folgt, dass $f(x) = 1$ sein muss für alle $x \in \mathbb{R}^m$ bis auf eine Nullmenge. Das kann nur dann der Fall sein, wenn $(Q+k) \cap (Q+l) \simeq \emptyset$ für alle $k \neq l \in \Gamma$.

□

Zusammenfassend folgern wir für unser weiteres Vorgehen:

Korollar 2.3.2 *Seien $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^m$ ein Gitter, $e_1, \dots, e_m$ eine Basis von Γ , Q_0 das von dieser Basis aufgespannte Parallelepiped, $A \in M_m(\mathbb{Z})$, $\mathcal{D}$ eine Digit-Menge und $Q(A, \mathcal{D})$ die resultierende selbstähnliche Menge.*

1. *Es ist stets $\mu(Q(A, \mathcal{D})) \geq \mu(Q_0)$.*
2. *Die Γ -Translate von $Q(A, \mathcal{D})$ bilden genau dann ein Tiling des $\mathbb{R}^m$, wenn $\mu(Q(A, \mathcal{D})) = \mu(Q_0)$.*

Unser Ziel ist es, eine Bedingung zu beweisen, anhand welcher man mit den Daten $A, \Gamma, \mathcal{D}$ algorithmisch determinieren kann, ob ein Lattice-Tiling vorliegt oder nicht. Dazu definieren wir eine Matrix, die sogenannte *Kontaktmatrix*, deren Spektralradius uns ein solches Kriterium liefern wird. Wir können von nun an eine praktische Vereinfachung vornehmen. Wir zeigen, dass man sich auf den Fall $\Gamma = \mathbb{Z}^m$ beschränken kann.

Lemma 2.3.3 *Sei $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine invertierbare lineare Abbildung, A', A Matrizen mit $A' = VAV^{-1}$, sei $\Gamma' = V\Gamma$ und $\mathcal{D}' = V\mathcal{D}$. Dann ist*

$$Q(A', \mathcal{D}') = VQ(A, \mathcal{D}).$$

Es ist $Q(A', \mathcal{D}')$ genau dann ein Γ' -Tile, wenn $Q(A, \mathcal{D})$ ein Γ -Tile ist.

Beweis:

Es ist $A\Gamma \subseteq \Gamma$ genau dann, wenn $A'\Gamma' = VAV^{-1}V\Gamma = VA\Gamma \subseteq V\Gamma = \Gamma'$ ist. Wir zeigen, dass $\mathcal{D}' = V\mathcal{D}$ ein vollständiges Repräsentantensystem für

$$\Gamma'/A'\Gamma' = V\Gamma/(VAV^{-1})V\Gamma = V\Gamma/VA\Gamma$$

ist, wenn $\mathcal{D}$ ein vollständiges Repräsentantensystem für $\Gamma/A\Gamma$ ist. Sei also $k' \in \Gamma'$, dann gibt es ein $k \in \Gamma$ mit $k' = Vk$. Es besitzt k eine eindeutige Darstellung $k = d + Ax$ für ein $d \in \mathcal{D}$ und ein $x \in \Gamma$. Da V eine lineare Transformation ist, liefert V eine eindeutige Darstellung $k' = Vk = Vd +$

VAx . Nun betrachten wir die selbstaffinen Mengen Q und Q' . Es ist

$$\begin{aligned} Q' = Q'(A', \mathcal{D}') &= \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} (VA V^{-1})^{-j} V d_j : d_j \in \mathcal{D} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} V A^{-j} d_j : d_j \in \mathcal{D} \right\} \\ &= V \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} A^{-j} d_j : d_j \in \mathcal{D} \right\} = VQ(A, \mathcal{D}). \end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, dass Q ein Γ -Tile ist genau dann, wenn Q' ein Γ' -Tile ist. Wir haben bereits gezeigt, dass selbstaffine Mengen den Raum bezüglich des gegebenen Gitters stets überdecken. Wir betrachten also die Fast-Disjunktheit:

Es bildet $Q'(A', \mathcal{D}')$ genau dann ein Γ' -Tiling, wenn

$$\begin{aligned} 0 &= \mu((Q' + k') \cap (Q' + l')) \\ &= \mu((VQ + Vk) \cap (VQ + Vl)) \\ &= \mu(V((Q + k) \cap (Q + l))) = |\det V| \cdot \mu((Q + k) \cap (Q + l)) \end{aligned}$$

ist. Das ist natürlich genau dann der Fall, wenn $\mu((Q + k) \cap (Q + l)) = 0$ ist für alle $k \neq l \in \Gamma$, was genau bedeutet, dass Q ein Γ -Tile ist.

□

Ist also Γ ein Gitter von vollem Rang, so kann man Γ schreiben als Bild des Gitters $\mathbb{Z}^m$ unter einer linearen Transformation V . Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit im Folgenden nur mehr das Gitter $\Gamma = \mathbb{Z}^m$ betrachten. Das Parallelepiped Q_0 wird also (bis auf Einheiten) von den kanonischen Basisvektoren des $\mathbb{R}^m$ aufgespannt und besitzt das Volumen $\mu(Q_0) = 1$.

Hier folgt die Aussage über die Kardinalität der Digit-Menge aus [12]. Wir verwenden das vorige Lemma, jedoch führt uns diese Vorgehensweise nicht auf einen Zirkelschluss, weil wir im Lemma nur die definierende Eigenschaft der Digit-Menge und nicht ihre Kardinalität verwendet haben.

Proposition 2.3.4 *Sei A wie oben. Es hat $|\mathbb{Z}^m / A\mathbb{Z}^m|$ genau $q = |\det A|$ Elemente.*

Beweis:

Sei $\{k_1, \dots, k_r\}$ ein vollständiges Repräsentantensystem von $\mathbb{Z}^m / A\mathbb{Z}^m$. Es ist

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^m &= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^m} k + [0, 1]^m \\ &= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^m} \left(\bigcup_{i=1}^r k_i + Ak + [0, 1]^m \right) \\ &= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^m} \left(Ak + \bigcup_{i=1}^r ([0, 1]^m + k_i) \right).\end{aligned}$$

Wendet man nun A^{-1} auf beiden Seiten an, so erhält man

$$A^{-1}\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^m} \left(k + \bigcup_{i=1}^r A^{-1}([0, 1]^m + k_i) \right).$$

Wir haben also

$$\mathbb{R}^m = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^m} k + [0, 1]^m \text{ wobei } ((k + [0, 1]^m) \cap (l + [0, 1]^m)) \simeq \emptyset$$

für $k \neq l$ und $\mathbb{R}^m = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^m} (k + \bigcup_{i=1}^r A^{-1}([0, 1]^m + k_i))$, wobei

$$\begin{aligned}&\mu \left(\left(k + \bigcup_{i=1}^r A^{-1}([0, 1]^m + k_i) \right) \cap \left(l + \bigcup_{i=1}^r A^{-1}([0, 1]^m + k_i) \right) \right) \\ &= |\det A^{-1}| \mu \left(\left(Ak + \bigcup_{i=1}^r [0, 1]^m + k_i \right) \cap \left(Al + \bigcup_{i=1}^r [0, 1]^m + k_i \right) \right) = 0.\end{aligned}$$

Damit folgt nach Proposition 2.3.1, dass

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^r A^{-1}([0, 1]^m + k_i) \right) = 1$$

ist und wegen

$$(A^{-1}([0, 1]^m + k_i)) \cap (A^{-1}([0, 1]^m + k_j)) \simeq \emptyset$$

für $i \neq j$ folgt

$$\mu(A^{-1}([0, 1]^m + k_i)) = |\det A^{-1}| \cdot \mu([0, 1]^m + k_i) = \frac{1}{q}$$

und damit $r = q$.

□

Wir zeigen nun zwei hilfreiche Eigenschaften:

Lemma 2.3.5 Seien $A, \mathcal{D}, Q$ wie oben.

1. Sind C, s, λ die Konstanten aus Lemma 2.0.8 und sei $M \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Teilmenge. Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$:

$$A^{-n}B(A^n M, \varepsilon) \subseteq B(M, C\lambda^{-n}n^s\varepsilon)$$

2. Sei Q_n die n -te Approximation aus 2.2.2 und es bezeichne $\hat{Q}_n := A^n Q_n$. Dann gibt es eine positive Konstante $a > 0$, sodass für alle $n \geq 0$ gilt

$$\delta(A^n Q, \hat{Q}_n) < a.$$

Beweis:

1. Sei $y \in \mathbb{R}^m$ mit $\|A^n x - y\| < \varepsilon$ für ein $x \in M$, dann folgt $\|A^{-n}A^n x - A^{-n}y\| < C\lambda^{-n}n^s\varepsilon$.
2. Wir zeigen die Behauptung mit Induktion. Wähle ein $a > 0$, sodass $Q \subseteq B(Q_0, a)$ gilt und $Q_0 \subseteq B(Q, a)$, also $\delta(Q, Q_0) < a$. So ein $a > 0$ lässt sich immer finden. Für den Induktionsschritt betrachten wir

$$\begin{aligned} A^{n+1}Q &= A^n \left(\bigcup_{k \in \mathcal{D}} k + Q \right) \\ &= \bigcup_{k \in \mathcal{D}} A^n k + A^n Q \\ &\subseteq \bigcup_{k \in \mathcal{D}} A^n k + B(A^n Q_n, a) \\ &= \bigcup_{k \in \mathcal{D}} B(A^n k + A^n Q_n, a). \end{aligned}$$

Dabei wurde Lemma 2.2.2 verwendet. Wegen

$$Q_n = A^{-1} \left(\bigcup_{k \in \mathcal{D}} k + Q_{n-1} \right),$$

also insbesondere

$$A^n Q_n = A^{n-1} \left(\bigcup_{k \in \mathcal{D}} k + Q_{n-1} \right)$$

folgt

$$\bigcup_{k \in \mathcal{D}} B(A^n k + A^n Q_n, a) = B(A^{n+1} Q_{n+1}, a)$$

und damit nach Bemerkung 1.1.5 die erste Inklusion. Für die andere Inklusion betrachten wir

$$\begin{aligned} A^{n+1}Q_{n+1} &= \bigcup_{k \in \mathcal{D}_{n+1}} k + Q_0 \\ &\subseteq \bigcup_{k \in \mathcal{D}_{n+1}} k + B(Q, a) \\ &= B(A^{n+1}Q, a), \end{aligned}$$

wobei wir wieder Lemma 2.2.2 und Bemerkung 1.1.5 verwendet haben.

□

Wir werden nun das Maß von Q (also nach Korollar 2.3.2 die Tatsache, ob die Γ -Translate von Q ein Tiling bilden) mit der Geschwindigkeit des Wachstums der Anzahl der Seitenflächen von $\hat{Q}_n$ in Verbindung setzen, wie in [11]. Nach Lemma 2.2.2 ist $\hat{Q}_n = A^n Q_n = \bigcup_{k \in \mathcal{D}_n} k + Q_0$ eine Vereinigung von m -dimensionalen Quadern. Da die Menge $\mathcal{D}_n$ eine Teilmenge des Gitters $\Gamma = \mathbb{Z}^m$ ist, liegen die Eckpunkte der Translate von Q_0 immer auf Gitterpunkten. Zwei Quader $k_1 + Q_0$ und $k_2 + Q_0$ teilen sich eine $(m-1)$ -dimensionale Seitenfläche genau dann, wenn

$$k_1 - k_2 \in \{\pm e_1, \dots, \pm e_m\},$$

wobei $e_1, \dots, e_m$ die Basis des Gitters Γ ist, die Q_0 aufspannt. Der Rand $\partial \hat{Q}_n$ von $\hat{Q}_n$ ist also die Vereinigung all jener $(m-1)$ -dimensionalen Seitenflächen der $\mathcal{D}_n$ -Translate von Q_0 , die nicht von zwei Translaten geteilt werden. Die Anzahl dieser Seitenflächen bezeichnen wir mit $\sigma(\partial \hat{Q}_n)$. Da wir uns auf den Fall $\Gamma = \mathbb{Z}^m$ beschränken können und die Seitenflächen damit $(m-1)$ -dimensionales Maß 1 besitzen, ist $\sigma(\partial \hat{Q}_n)$ auch gleich dem $(m-1)$ -dimensionalen Maß von $\partial \hat{Q}_n$.

Theorem 2.3.6 *Seien $A, \mathcal{D}, Q$ mit $\det A = q$ wie oben. Dann gilt:*

$$\mu(Q) = 1 \text{ genau dann, wenn } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma(\partial \hat{Q}_n)}{q^n} = 0.$$

Beweis:

Wir nehmen zuerst an, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma(\partial \hat{Q}_n)}{q^n} = 0$. Wir bezeichnen mit $C(M, \varepsilon)$ den ε -Rand einer Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^m$, also die Menge $B(M, \varepsilon) \setminus M$. Sei I_{m-1} eine Seitenfläche des Quaders Q_0 . Da $\partial(\hat{Q}_n)$ die Vereinigung von $\sigma(\partial \hat{Q}_n)$ vielen Translaten von I_{m-1} ist, gilt

$$\mu(C(\hat{Q}_n, a)) \leq \mu(B(I_{m-1}, a)) \cdot \sigma(\partial \hat{Q}_n)$$

für alle $a > 0$. Damit folgt

$$\begin{aligned}\mu\left(A^{-n}C\left(\hat{Q}_n, a\right)\right) &\leq \mu\left(A^{-n}B(I_{m-1}, a)\right) \cdot \sigma\left(\partial\hat{Q}_n\right) \\ &= \mu\left(B(I_{m-1}, a)\right) \cdot q^{-n}\sigma\left(\partial\hat{Q}_n\right)\end{aligned}$$

für alle $a > 0$. Da nach Voraussetzung $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{-n}\sigma\left(\partial\hat{Q}_n\right) = 0$ ist, folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(A^{-n}C\left(\hat{Q}_n, a\right)\right) = 0.$$

Wir wählen eine Konstante a aus Lemma 2.3.5 und können o.B.d.A. $a > 1$ annehmen. Es ist also $\delta\left(A^n Q, \hat{Q}_n\right) < a$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir können also schreiben

$$A^n Q = \left(A^n Q \cap C\left(\hat{Q}_n, a\right)\right) \cup \left(A^n Q \cap \hat{Q}_n\right),$$

was gleichbedeutend ist wie

$$Q = \left(Q \cap A^{-n}C\left(\hat{Q}_n, a\right)\right) \cup \left(Q \cap Q_n\right).$$

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(A^{-n}C\left(\hat{Q}_n, a\right)\right) = 0$ ist

$$\mu(Q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(Q \cap Q_n).$$

Wegen Korollar 2.3.2 ist $\mu(Q) \geq 1$ und nach Konstruktion der Q_n mit

$$Q_n = A^{-1} \left(\bigcup_{k \in \mathcal{D}} k + Q_{n-1} \right) = \dots = \bigcup_{d \in \mathcal{D}(n)} d + A^{-n} Q_0$$

ist $\mu(Q_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also folgt

$$1 \leq \mu(Q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(Q \cap Q_n) \leq 1$$

und damit $\mu(Q) = 1$.

Nun nehmen wir an, dass $\mu(Q) = 1$. Für jede Seitenfläche I_{m-1} von $\partial\left(\hat{Q}_n\right)$ sei $I_{m-1} \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$ der Quader mit Höhe $\frac{1}{2}$, sodass für $p \in I_{m-1}$ der Bogen $p \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \in I_{m-1}^\perp$ und $\left(p \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \cap \hat{Q}_n\right) \subseteq I_{m-1}$. Ein solcher Quader bei I_{m-1} ist natürlich enthalten in $B\left(I_{m-1}, a\right)$ für $a > 1$. Die Vereinigung all dieser Quader ist enthalten in $C\left(\hat{Q}_n, a\right)$ und da die Quader einander höchstens mit Maß $\frac{1}{4}$ überlappen und $a > 1$ ist, gilt

$$\begin{aligned}\sum_{I_{m-1}} \mu\left(I_{m-1} \times \left[0, \frac{1}{2}\right]\right) &= \frac{1}{2} \sigma\left(\partial\hat{Q}_n\right) \\ &\leq \mu\left(C\left(\hat{Q}_n, a\right)\right).\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} q^{-n} \frac{1}{2} \sigma \left(\partial \hat{Q}_n \right) &\leq q^{-n} \mu \left(C \left(\hat{Q}_n, a \right) \right) \\ &= \mu \left(A^{-n} C \left(\hat{Q}_n, a \right) \right). \end{aligned}$$

Nach Lemma 2.3.5 gilt $\hat{Q}_n \subseteq B(A^n Q, a)$, also folgt

$$\begin{aligned} C \left(\hat{Q}_n, a \right) = B \left(\hat{Q}_n, a \right) \setminus \hat{Q}_n &\subseteq B \left(B(A^n Q, a), a \right) \setminus \hat{Q}_n \\ &\subseteq B(A^n Q, 2a) \setminus \hat{Q}_n. \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$A^{-n} C \left(\hat{Q}_n, a \right) \subseteq A^{-n} \left(B(A^n Q, 2a) \setminus \hat{Q}_n \right)$$

und damit

$$\mu \left(A^{-n} C \left(\hat{Q}_n, a \right) \right) \leq \mu \left(A^{-n} B(A^n Q, 2a) \right) - \mu(Q_n)$$

da ja $A^{-n} \hat{Q}_n = Q_n$. Aus Lemma 2.3.5 folgt, dass es Konstanten $\lambda, s, a' > 0$ gibt, sodass für alle $n \geq 0$

$$A^{-n} B(A^n Q, 2a) \subseteq B(Q, \lambda^{-n} n^s a').$$

Zusammenfassend erhalten wir

$$\begin{aligned} q^{-n} \frac{1}{2} \sigma \left(\partial \hat{Q}_n \right) &\leq \mu \left(A^{-n} B(A^n Q, 2a) \right) - \mu(Q_n) \\ &\leq \mu \left(B(Q, \lambda^{-n} n^s a') \right) - \mu(Q_n). \end{aligned}$$

Aufgrund der Regularität von μ folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left(B(Q, \lambda^{-n} n^s a') \right) = \mu(Q)$$

und wegen $\mu(Q_n) = 1$ für alle $n \geq 0$ folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{-n} \sigma \left(\partial \hat{Q}_n \right) = 0$.

□

Genau dann also, wenn die Anzahl der Seitenflächen und damit das $(m-1)$ -dimensionale Maß der Ränder von $\hat{Q}_n$ hinreichend langsam wächst, erfüllt der Attraktor Q die Tiling-Eigenschaft. Wir wollen diese Information in einer Matrix kodieren, der Kontaktmatrix aus [11]. Zunächst definieren wir rekursiv Mengen $\mathcal{T}_n$. Sei $\{\pm e_1, \dots, \pm e_m\}$ wie oben eine Basis für das Gitter $\Gamma = \mathbb{Z}^m$ und

$$\mathcal{T}_0 := \{\pm e_1, \dots, \pm e_m\},$$

$$\mathcal{T}_n := \{l \in \Gamma : (Ak + \mathcal{D}) \cap (l + \mathcal{D}) \neq \emptyset \text{ für ein } l \in \mathcal{T}_{n-1}\},$$

$$\mathcal{T} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}_n.$$

Wir definieren außerdem

$$\mathcal{T}_n^* := \{k \in \Gamma \setminus \{0\} : (A^n l + \mathcal{D}_n) \cap (f + \mathcal{D}_n) \neq \emptyset \text{ für ein } f \in \mathcal{T}_0\}.$$

Ist $l \in \mathcal{T}_n^*$, dann gibt es ein $x \in (A^n l + \mathcal{D}_n) \cap (f + \mathcal{D}_n)$ für ein $f \in \mathcal{T}_0$. Da die Elemente von $\mathcal{D}_n$ die Form $\sum_{i=0}^{n-1} A^i d_i$ mit $d_i \in \mathcal{D}$ besitzen, gilt $x = A^n l + \sum_{i=0}^{n-1} A^i d'_i = f + \sum_{i=0}^{n-1} A^i d_i$ für gewissen $d_i, d'_i \in \mathcal{D}, f \in \mathcal{T}_0$. Damit gibt es eine Darstellung

$$A^n l = f + \sum_{i=0}^{n-1} A^i (d_i - d'_i).$$

Ist umgekehrt $A^n l$ so darstellbar, so ist l auch in $\mathcal{T}_n^*$. Also sind die Elemente von $\mathcal{T}_n^*$ so charakterisiert, dass sie sich auf diese Weise darstellen lassen.

Wir zeigen nun einige Eigenschaften dieser Mengen in einem technischen Lemma:

Lemma 2.3.7 1. Für alle n ist $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}_n^*$.

2. $\mathcal{T}$ ist die kleinste Menge, sodass $\mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}$ und $\mathcal{D} \cup (\mathcal{T} + \mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D} \cup (A\mathcal{T} + \mathcal{D})$.

3. Für $n \geq 1$ ist $\mathcal{D}_n \cup (\mathcal{T} + \mathcal{D}_n) \subseteq \mathcal{D}_n \cup (A^n \mathcal{T} + \mathcal{D}_n)$.

4. Die Vereinigung $\mathcal{T}$ ist endlich.

Beweis:

1. Wir zeigen die Aussage mit Induktion. Es ist $l \in \mathcal{T}_{n+1}$ genau dann, wenn $(Al + \mathcal{D}) \cap (k + \mathcal{D}) \neq \emptyset$ für ein $k \in \mathcal{T}_n$. Das ist äquivalent zu

$$(A^{n+1}l + A^n \mathcal{D}) \cap (A^n k + A^n \mathcal{D}) \neq \emptyset,$$

was nach Induktionsvoraussetzung äquivalent ist zu

$$A^{n+1}l + A^{n+1}d' = f + \sum_{i=0}^{n-1} A^i (d_i - d'_i) + A^n d$$

für gewisse $d, d', d_i, d'_i \in \mathcal{D}, f \in \mathcal{T}_0$. Damit folgt $l \in \mathcal{T}_{n+1}^*$.

2. Sei $e \in \mathcal{T}$, also $e \in \mathcal{T}_n = \mathcal{T}_n^*$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Nach Definition von $\mathcal{T}_{n+1}$ und wegen $e + \mathcal{D} \subseteq \Gamma = \bigcup_{k \in \Gamma} Ak + \mathcal{D}$ ist

$$\begin{aligned} e + \mathcal{D} &\subseteq \bigcup_{(e+\mathcal{D}) \cap (Ak+\mathcal{D}) \neq \emptyset} Ak + \mathcal{D} \\ &\subseteq \bigcup_{k \in \mathcal{T}_{n+1} \cup \{0\}} Ak + \mathcal{D} \\ &= \mathcal{D} \cup (A\mathcal{T}_{n+1} + \mathcal{D}) \end{aligned}$$

und wegen $\mathcal{T}_n \subseteq \mathcal{T}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist auch $e + \mathcal{D} \subseteq \mathcal{D} \cup (A\mathcal{T} + \mathcal{D})$. Damit erfüllt $\mathcal{T}$ jedenfalls die gewünschte Eigenschaft. Um die Minimalität zu zeigen, nehmen wir an, die Menge $\mathcal{T}'$ erfüllt das selbe, also $\mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}'$ und $(\mathcal{T}' + \mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D} \cup (A\mathcal{T}' + \mathcal{D})$. Wir zeigen, dass $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ und gehen dabei induktiv vor:

Es ist $\mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}'$ nach Voraussetzung. Wir nehmen also an, dass $\mathcal{T}_k \subseteq \mathcal{T}'$ sind für $k \leq n$. Angenommen es gibt ein $e \in \mathcal{T}_{n+1} \setminus \mathcal{T}'$. Dann gilt für ein $l \in \mathcal{T}_n$, dass

$$(l + \mathcal{D}) \cap (Ae + \mathcal{D}) \neq \emptyset$$

ist nach Definition von $\mathcal{T}_{n+1}$. Also ist $l + d \in Ae + \mathcal{D}$ für ein $d \in \mathcal{D}$. Nun gilt $l + d \notin \mathcal{D}$ weil $(Ae + \mathcal{D}) \cap \mathcal{D} = \emptyset$ ist. Es ist auch $l + d \in A(\mathcal{T}_{n+1} \setminus \mathcal{T}') + \mathcal{D}$ und damit $l + d \notin A\mathcal{T}' + \mathcal{D}$ da für Gitterpunkte $e \neq f$ stets $(Ae + \mathcal{D}) \cap (Af + \mathcal{D}) = \emptyset$ ist. Also ist insgesamt

$$(l + \mathcal{D}) \not\subseteq \mathcal{D} \cup (A\mathcal{T}' + \mathcal{D}),$$

was ein Widerspruch ist. Damit ist also auch $\mathcal{T}_{n+1} \subseteq \mathcal{T}'$ und insgesamt $\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{T}_n = \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ und die Minimalität ist gezeigt.

3. Wir zeigen die Behauptung mit Induktion. Für $n = 1$ haben wir

$$\mathcal{D} \cup (\mathcal{T} + \mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D} + (A\mathcal{T} + \mathcal{D})$$

gerade gezeigt. Wir folgern

$$\mathcal{T} + \mathcal{D}_{n+1} = \mathcal{T} + \mathcal{D}_n + A^n \mathcal{D} \subseteq (A^n \mathcal{T} + \mathcal{D}_n + A^n \mathcal{D}) \cup (\mathcal{D}_n + A^n \mathcal{D})$$

nach Definition der $\mathcal{D}_n$. Es folgt

$$\begin{aligned} (A^n \mathcal{T} + \mathcal{D}_n + A^n \mathcal{D}) \cup (\mathcal{D}_n + A^n \mathcal{D}) &\subseteq (A^n (\mathcal{T} + \mathcal{D}) + \mathcal{D}_n) \cup \mathcal{D}_{n+1} \\ &\subseteq (A^n (A\mathcal{T} + \mathcal{D}) + \mathcal{D}_n) \cup \mathcal{D}_{n+1} \\ &\subseteq (A^{n+1} \mathcal{T} + \mathcal{D}_{n+1}) \cup \mathcal{D}_{n+1} \end{aligned}$$

und insgesamt

$$\mathcal{T} + \mathcal{D}_{n+1} \subseteq \mathcal{D}_{n+1} \cup (A^{n+1} \mathcal{T} + \mathcal{D}_{n+1}).$$

4. Sei $k_0 \in \mathcal{D}$ fix. Nach Punkt 1 kann man $e \in \mathcal{T}_n \subseteq \mathcal{T}$ darstellen als

$$\begin{aligned} e &= A^{-n}f + \sum_{i=0}^{n-1} A^{i-n}d_i - \sum_{i=0}^{n-1} A^{i-n}d'_i \\ &= A^{-n}f + \left(\sum_{i=0}^{n-1} A^{i-n}d_i + \sum_{i=n}^{\infty} A^{-i}k_0 \right) - \left(\sum_{i=0}^{n-1} A^{i-n}d'_i + \sum_{i=n}^{\infty} A^{-i}k_0 \right) \end{aligned}$$

für ein $f \in \mathcal{T}_0$, $d_i, d'_i \in \mathcal{D}$. Da $\mathcal{T}_0 = \{\pm e_i\}$ ist, folgt $A^{-n}f \in A^{-n}[-1, 1]^m$. Die Summen

$$\sum_{i=0}^{n-1} A^{i-n}d_i + \sum_{i=n}^{\infty} A^{-i}k_0 \text{ und } \sum_{i=0}^{n-1} A^{i-n}d'_i + \sum_{i=n}^{\infty} A^{-i}k_0$$

liegen nach den Ausführungen zu Beginn des Kapitels in der selbstaffinen Menge $Q(A, \mathcal{D})$, die kompakt ist. Damit folgt, dass

$$e \in \bigcup_{i=0}^{\infty} A^{-i}[-1, 1]^m + Q - Q,$$

also in einer kompakten Menge liegt. Es sind also die Mengen $\mathcal{T}_n$ für $n \in \mathbb{N}$ enthalten in einer kompakten Menge. Damit ist $\mathcal{T}$ als diskrete Menge in einem Kompaktum endlich.

□

Das folgende Lemma bringt uns etwas näher an unser Ziel, das Wachstum der Ränder $\partial \hat{Q}_n$ in eine Matrix zu kodieren.

Lemma 2.3.8 *Mit der Notation wie bisher gilt für die Anzahl der Seitenflächen*

$$\sigma(\partial \hat{Q}_n) = \sum_{\substack{f \in \mathcal{T}_0, \\ l \in \mathcal{T}}} |(A^n l + \mathcal{D}_n) \cap (f + \mathcal{D}_n)|.$$

Beweis:

Wir haben bereits gezeigt, dass die $\mathbb{Z}^m$ -Translate der Q_n ein Tiling des $\mathbb{R}^m$ bilden. Also bilden auch die $A^n \mathbb{Z}^m$ -Translate von $\hat{Q}_n$ ein Tiling. Daher ist $(A^n l + \hat{Q}_n) \cap \hat{Q}_n$ für $l \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$ entweder leer oder eine Teilfläche von $\partial \hat{Q}_n$. Jede Seitenfläche I_{m-1} liegt in genau einem solchen Durchschnitt. Dabei ist I_{m-1} ein Translat einer Seitenfläche von Q_0 . (Dabei können zwei solche Translate in $\hat{Q}_n$ aneinander anschließen. Trotzdem ist mit I_{m-1} stets eine Seitenfläche mit $(m-1)$ -dimensionalem Maß 1 gemeint.) Daher können wir

schreiben:

$$\begin{aligned}
\sigma(\partial\hat{Q}_n) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}} \sigma\left(\partial\left((A^n l + \hat{Q}_n) \cap \hat{Q}_n\right)\right) \\
&= \sum_{\substack{k, k' \in \mathcal{D}_n, \\ l \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}}} \sigma\left(\partial\left((A^n l + k' + Q_0) \cap (k + Q_0)\right)\right)
\end{aligned}$$

da ja $\hat{Q}_n = \bigcup_{d \in \mathcal{D}_n} d + Q_0$ ist. Es ist $\sigma(\partial((k + Q_0) \cap (k' + Q_0))) = 1$ genau dann, wenn $k - k' \in \mathcal{T}_0$ liegt und sonst gleich Null. Es folgt, dass $\sigma(\partial((A^n l + k + Q_0) \cap (k' + Q_0))) = 1$, genau dann wenn $A^n l + k - k' \in \mathcal{T}_0$, was äquivalent ist zu

$$|(A^n l + k') \cap (f + k)| = 1$$

für ein $f \in \mathcal{T}_0$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\sigma(\partial\hat{Q}_n) &= \sum_{\substack{k, k' \in \mathcal{D}_n, \\ l \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}, \\ f \in \mathcal{T}_0}} |(A^n l + k') \cap (f + k)| \\
&= \sum_{\substack{f \in \mathcal{T}_0, \\ l \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}}} |(A^n l + \mathcal{D}_n) \cap (f + \mathcal{D}_n)|.
\end{aligned}$$

Nun gilt nach dem vorigen Lemma, dass

$$|(A^n l + \mathcal{D}_n) \cap (f + \mathcal{D}_n)| > 0$$

genau dann, wenn $l \in \mathcal{T}$ und damit folgt die gewünschte Identität.

□

Jedes Q_n schneidet endlich viele seiner $\mathbb{Z}^m$ -Translate. Diese haben die Form $k + Q_n$ für $k \in \mathcal{T}_n$. Damit enthält $\mathcal{T}$ also alle Gitterpunkte k , sodass $k + Q_n$ ein Nachbar von Q_n ist für ein $n \geq 0$. Das sind, wie bereits gezeigt, nur endlich viele.

2.4 Die Kontaktmatrix

Sei E_n die $|\mathcal{T}| \times |\mathcal{T}|$ -Matrix mit den Einträgen

$$e_{lf}^{(n)} = |(A^n l + \mathcal{D}_n) \cap (f + \mathcal{D}_n)|$$

für $l, f \in \mathcal{T}$. In dieser Notation wird die Aussage des vorigen Lemmas zu

$$\sigma(\partial\hat{Q}_n) = \sum_{\substack{f \in \mathcal{T}_0, \\ l \in \mathcal{T}}} e_{lf}^{(n)}.$$

Wir wollen aber eine Matrix definieren, die für *alle* $n \geq 0$ diese Information kodiert.

Definition 2.4.1 Die Kontaktmatrix des betrachteten IFS sei die $|\mathcal{T}| \times |\mathcal{T}|$ -Matrix C mit den Einträgen

$$c_{kl} = |(Ak + \mathcal{D}) \cap (l + \mathcal{D})|$$

für $k, l \in \mathcal{T}$.

Dass die Kontaktmatrix alle Informationen enthält, zeigt folgendes

Lemma 2.4.2 Seien $l, f \in \mathcal{T}$ und $n > 0$. Dann gilt

$$|(A^n l + \mathcal{D}_n) \cap (f + \mathcal{D}_n)| = (C^n)_{lf}.$$

Beweis:

Es ist $\mathcal{D}_n = \bigcup_{i=0}^{q-1} A^{n-1}k_i + \mathcal{D}_{n-1}$ und nach einem Lemma von vorhin ist $|\mathcal{D}_n| = q^n$, also sind die Mengen $A^{n-1}k_i + \mathcal{D}_{n-1}$ für verschiedene k_i stets disjunkt. Wir benutzen das und schreiben

$$\begin{aligned} |(A^n l + \mathcal{D}_n) \cap (f + \mathcal{D}_n)| &= \\ &= \left| \bigcup_{i=0}^{q-1} \bigcup_{j=0}^{q-1} (A^n l + A^{n-1}k_j + \mathcal{D}_{n-1}) \cap (f + A^{n-1}k_i + \mathcal{D}_{n-1}) \right| = \\ &= \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{j=0}^{q-1} |(A^n l + A^{n-1}k_j + \mathcal{D}_{n-1}) \cap (f + A^{n-1}k_i + \mathcal{D}_{n-1})| = \\ &= \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{j=0}^{q-1} |(A^{n-1}(Al + k_j - k_i) + \mathcal{D}_{n-1}) \cap (f + \mathcal{D}_{n-1})|. \end{aligned}$$

Es ist nach dem obigen Lemma $(A^{n-1}(Al + k_j - k_i) + \mathcal{D}_{n-1}) \cap (f + \mathcal{D}_{n-1}) \neq \emptyset$ genau dann, wenn $Al + k_j - k_i \in \mathcal{T}_{n-1}$. Ist $t \in \mathcal{T}$, dann ist die Anzahl der Paare (i, j) sodass $Al + k_j - k_i = t$ genau $|(Al + \mathcal{D}) \cap (t + \mathcal{D})|$. Wir vereinfachen also weiter:

$$\begin{aligned} e_{lf}^{(n)} &= |(A^n l + \mathcal{D}_n) \cap (f + \mathcal{D}_n)| \\ &= \sum_{t \in \mathcal{T}} |(Al + \mathcal{D}) \cap (t + \mathcal{D})| \cdot |(A^{n-1}t + \mathcal{D}_{n-1}) \cap (f + \mathcal{D}_{n-1})| \\ &= \sum_{t \in \mathcal{T}} c_{lt} e_{tf}^{(n-1)}. \end{aligned}$$

□

Es folgt

$$E_n = CE_{n-1}, \text{ also } E_n = C^n.$$

Korollar 2.4.3 *Es gilt*

$$\sigma(\partial\hat{Q}_n) = \sum_{\substack{f \in \mathcal{T}_0, \\ l \in \mathcal{T}}} (C^n)_{lf}.$$

Die Kontaktmatrix enthält also alle Informationen über das Wachstum der Ränder von $\hat{Q}_n$. Wir kommen zum Hauptresultat von [11], einem Kriterium für das Vorliegen eines Lattice-Tilings. Die verwendeten Resultate über substochastische Matrizen und ihre Spektralradien sind in [20] zu finden.

Theorem 2.4.4 *Die Γ -Translate von Q bilden genau dann ein Tiling des $\mathbb{R}^n$, wenn der Spektralradius der Kontaktmatrix C kleiner ist als $q = |\det A|$. Außerdem gilt, dass der Spektralradius gleich q ist, falls $\mu(Q) \neq 1$.*

Beweis:

Wir beweisen das Resultat in drei Schritten. Zunächst zeigen wir, dass die Γ -Translate von Q ein Tiling bilden, wenn der Spektralradius von C , bezeichnet mit $r(C)$, kleiner ist als q . Danach zeigen wir, dass der Spektralradius, wenn kein Tiling vorliegt, erfüllt, dass $r(C) \leq q$. Damit folgt insgesamt, dass $r(C) = q$ ist, wenn die Translate von Q kein Lattice-Tiling bilden. Zuletzt zeigen wir, dass der Spektralradius kleiner ist als q , wenn ein Lattice-Tiling vorliegt.

Sei also $r(C) < q$. Es ist bekannt (siehe dazu [30]), dass einerseits für jede Norm gilt $\|C\| \geq r(C)$ und dass es andererseits zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Norm $\|\cdot\|$ gibt, sodass $r(C) \leq \|C\| < r(C) + \varepsilon$, also insbesondere eine Norm $\|\cdot\|$ mit

$$r(C) \leq \|C\| < q.$$

Bezüglich dieser Norm ist die Abbildung $q^{-1}C$ eine Kontraktion, sodass folgt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((q^{-1}C)^n)_{k,l} = 0 \text{ ist für alle } k, l \in \mathcal{T}.$$

Es ist nämlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|q^{-n}C^n\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} q^{-n}\|C\|^n = 0.$$

Wir haben oben gezeigt, dass $\sigma(\partial\hat{Q}_n) = \sum_{\substack{f \in \mathcal{T}_0, \\ l \in \mathcal{T}}} (C^n)_{lf}$ gilt und damit folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^{-n} \sigma(\partial\hat{Q}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} q^{-n} \sum_{\substack{f \in \mathcal{T}_0, \\ l \in \mathcal{T}}} (C^n)_{lf} = \sum_{\substack{f \in \mathcal{T}_0, \\ l \in \mathcal{T}}} \lim_{n \rightarrow \infty} q^{-n} (C^n)_{lf} = 0.$$

Das ist, wie wir gezeigt haben, äquivalent dazu, dass $\mu(Q) = 1$ ist und damit Q ein Γ -Tiling bildet.

Nun nehmen wir an, dass kein Lattice Tiling vorliegt. Damit folgt nach obigem, dass $r(C) \geq q$ ist. Es gilt also für jede Norm, dass $\|C\| \geq q$ ist. Wir zeigen nun, dass $q^{-1}C$ eine substochastische Matrix ist, dass also für jede Spalte die Summe über die Einträge höchstens 1 ist. Wir erinnern uns, dass

$$(Al + \mathcal{D}) \cap (Al' + \mathcal{D}) = \emptyset \text{ für } l \neq l',$$

da $\mathcal{D}$ ein Repräsentantensystem bildet. Es folgt

$$\begin{aligned} q^{-1} \sum_{l \in \mathcal{T}} c_{lk} &= q^{-1} \sum_{l \in \mathcal{T}} |(Al + \mathcal{D}) \cap (k + \mathcal{D})| \\ &= q^{-1} \left| \left(\bigcup_{l \in \mathcal{T}} (Al + \mathcal{D}) \right) \cap (k + \mathcal{D}) \right| \\ &\leq q^{-1} |k + \mathcal{D}| = 1. \end{aligned}$$

Damit ist $r(q^{-1}C) \leq 1$ und es folgt $r(C) \leq q$ und insgesamt $r(C) = q$.

Für den letzten Teil des Beweises sei nun Q ein Γ -Tile. Nach obigem Resultat über die Anzahl der Seitenflächen $\sigma(\partial \hat{Q}_n)$ folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^{-n} \sum_{\substack{f \in \mathcal{T}_0, \\ l \in \mathcal{T}}} (C^n)_{lf} = \lim_{n \rightarrow \infty} q^{-n} \sigma(\partial \hat{Q}_n) = 0.$$

Damit ist auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^{-n} (C^n)_{lf} = 0 \text{ für } l \in \mathcal{T}, f \in \mathcal{T}_0,$$

da die Kontaktmatrix Kardinalitäten von Durchschnitten zählt und damit nichtnegative Einträge hat. Wir wollen zeigen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{-n} (C^n)_{lk} = 0$ für $l, k \in \mathcal{T}$.

Wir haben in Lemma 2.2.2 gezeigt, dass $(A^n + \mathcal{D}_n) \cap \mathcal{D}_n = \emptyset$ ist und, dass $A^n Q_n = \bigcup_{k \in \mathcal{D}_n} k + Q_0$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Die $\mathcal{D}_n$ kennzeichnen also die Translate der Q_0 , da wir oben gezeigt haben, dass wir stets $0 \in \mathcal{D}$ annehmen können. Damit folgt die grobe Abschätzung:

$$(C^n)_{lk} = |(A^n l + \mathcal{D}_n) \cap (k + \mathcal{D}_n)| \leq \|k\| \cdot \sigma(\partial \hat{Q}_n)$$

für alle $k, l \in \mathcal{T}$. Nun folgt

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} q^{-n} (C^n)_{kl} \leq \|k\| \lim_{n \rightarrow \infty} q^{-n} \sigma(\partial \hat{Q}_n) = 0$$

für alle $k, l \in \mathcal{T}$. Damit ist insbesondere $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{-n} C^n = 0$ die Nullmatrix. Damit ist q als Eigenwert ausgeschlossen. Es folgt $r(C) < q$.

□

Für die Frage, ob ein Lattice Tiling vorliegt, ergeben sich folgende Äquivalenzen:

Theorem 2.4.5 *Seien $A, \mathcal{D}, Q = Q(A, \mathcal{D})$ und für $n \in \mathbb{N}$ die Mengen $Q_n, \mathcal{D}_n$ wie oben. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Die $\mathbb{Z}^m$ -Translate von $Q(A, \mathcal{D})$ bilden ein Tiling des $\mathbb{R}^m$.*
2. *Es ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta \mathcal{D}_n = \mathbb{Z}^m$.*
3. *Es ist $\mu(Q) = 1$.*
4. *Der Spektralradius der Kontaktmatrix ist echt kleiner als $q = |\det A|$.*
5. *Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \partial Q_n = \partial Q$ bezüglich der Hausdorffmetrik.*
6. *Es ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \partial Q_n$ keine space filling curve.*

Die Äquivalenz von 1., 2., 3. und 4. haben wir in den vorigen Abschnitten bewiesen. Alles Weitere steht in [28] und [29].

2.5 Homöomorphie zur Kreisscheibe Teil 2

Im ersten Kapitel haben wir bereits Kriterien ausgearbeitet, die die Homöomorphie einer selbstähnlichen Menge in der Ebene zur Kreisscheibe sicherstellen. In diesem Kapitel folgen weitere Kriterien, die auch die Selbst-Affinität und die Tiling Eigenschaft, die in diesem Kapitel bearbeitet wurden, verwenden. Wir halten uns in diesem Abschnitt ganz an [6].

Hier kommt es auf die Nachbarn eines Tiles in einem Lattice Tiling an. Wir haben bereits gesehen, dass wir uns ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf $\mathbb{Z}^2$ -Tilings beschränken können. Ist die Menge M ein $\mathbb{Z}^2$ -Tile, dann besteht die Menge der Nachbarn von M aus all jenen Translaten $M + k, k \in \mathbb{Z}^2$ von M , sodass

$$M \cap (M + k) \neq \emptyset$$

ist. Dabei lassen wir nur $k \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ zu. Wir bezeichnen die Menge der Gitterpunkte $k \in \mathbb{Z}^2$, sodass $M + k$ ein Nachbar von M ist mit $\mathcal{F}$. Die Nachbarn von M sind also $\bigcup_{k \in \mathcal{F}} M + k$, oder kurz $M + \mathcal{F}$. Wir bezeichnen im Folgenden auch die Menge $\mathcal{F}$ als Nachbarn von M , auch wenn eigentlich die $\mathcal{F}$ -Translate von M gemeint sind.

Man kann mehrere Arten von Nachbarn unterscheiden. Ist die Menge $M \cap (M + k)$ für $k \in \mathcal{F}$ einpunktig, so nennen wir $M + k$ einen *Knoten-Nachbarn* von M . Ist die Menge $M \cap (M + k)$ überabzählbar, so ist $M + k$ ein *Kanten-Nachbar* von M . (Natürlich gibt es auch andere Fälle - diese werden wir hier jedoch nicht benennen.) Die Bezeichnung *Kanten-Nachbar* lässt vermuten, dass eine solche überabzählbare Schnittmenge in gewisser Weise schöne Eigenschaften besitzt - etwa ein einfacher Bogen ist. Das ist jedoch im Allgemeinen nicht der Fall. Die Schnittmenge kann viel komplizierter sein - etwa eine Cantor-Menge.

Die hier behandelten Kriterien sind, wie das auch im ersten Kapitel der Fall war, stark davon abhängig, dass wir selbstaffine Mengen in der Ebene betrachten und nicht in höherdimensionalen Räumen.

Bemerkung 2.5.1 *Wir nehmen hier ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass selbstaffine Mengen $Q(A, \mathcal{D})$ den Nullpunkt enthalten. Eine Translation einer Menge ändert nämlich natürlich nichts an den topologischen Eigenschaften, die hier untersucht werden. Außerdem haben wir bereits gezeigt, dass wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $0 \in \mathcal{D}$ annehmen können, so dass aus der Darstellung von Q sofort folgt, dass $0 \in Q$.*

Definition 2.5.2 *Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{Z}^n$ eine endliche Menge und $A \subseteq \mathbb{Z}^n$ eine beliebige Teilmenge. Die Menge A ist $\mathcal{F}$ -zusammenhängend, wenn es für je zwei Punkte $a, b \in A$ eine endliche Folge von Punkten $a = a_0, \dots, a_n = b \subseteq A$ gibt, sodass $a_{i+1} - a_i \in \mathcal{F}$ liegt für $0 \leq i \leq n - 1$.*

Das heißt, eine Menge A ist $\mathcal{F}$ -zusammenhängend, wenn man sich zwischen je zwei Punkten in A in endlich vielen $\mathcal{F}$ -Schritten bewegen kann.

Wir wollen nun das Theorem 1.4.9 aus dem ersten Kapitel über den Zusammenhang von selbstähnlichen Mengen für selbstaffine $\mathbb{Z}^2$ -Tiles neu formulieren:

Proposition 2.5.3 *Sei $Q(A, \mathcal{D})$ die selbstaffine Menge im $\mathbb{R}^n$ mit den Daten $A, \mathcal{D}$ und sei $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{Z}^2$ die Menge der Nachbarn von Q . Die Menge Q ist genau dann zusammenhängend (und damit auch lokal zusammenhängend und wegweise zusammenhängend), wenn gilt: $\mathcal{D}$ ist $\mathcal{F}$ -zusammenhängend.*

Wir wollen zeigen, dass es für die Homöomorphie zur Kreisscheibe von $\mathbb{Z}^2$ -Tiles im Wesentlichen auf die Anzahl der Nachbarn des $\mathbb{Z}^2$ -Tiles ankommt. Dazu beginnen wir mit einem Lemma, das für allgemeine Lattice Tilings gilt:

Lemma 2.5.4 *Sei M ein $\mathbb{Z}^2$ -Tile mit Nachbarn $M + \mathcal{F}$ für $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{Z}^2$. Dann erzeugt $\mathcal{F}$ das ganze Gitter $\mathbb{Z}^2$.*

Beweis:

Wir nennen zwei Gitterpunkte $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^2$ Nachbarn (bezüglich des gegebenen Tilings), wenn $k_1 - k_2 \in \mathcal{F}$. Das heißt, k_1 und k_2 sind genau dann Nachbarn (als Gitterpunkte), wenn $M + k_1$ und $M + k_2$ benachbarte Tiles sind. Wir definieren rekursiv Mengen $\mathcal{F}_n$ für $n \geq 0$:

$$\mathcal{F}_0 = \{0\}, \quad \mathcal{F}_{n+1} = \{k \in \mathbb{Z}^2 : \exists k_n \in \mathcal{F}_n \text{ mit } k_n - k \in \mathcal{F}\}.$$

Es ist also $\mathcal{F}_{n+1}$ die Menge der Nachbarn von $\mathcal{F}_n$. Wir betrachten nun die Vereinigung $\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n$. Es ist $\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n$ enthalten in dem von $\mathcal{F}$ erzeugten Untergitter. Es ist nämlich

$$\mathcal{F}_1 = \{k \in \mathbb{Z}^2 : k \in \mathcal{F}\} = \mathcal{F}.$$

Aus der Definition von $\mathcal{F}_{n+1}$ ergibt sich, dass $k \in \mathcal{F}_{n+1}$ genau dann, wenn $k_n - k = k_0$ für ein $k_n \in \mathcal{F}_n$ und ein $k_0 \in \mathcal{F}$. Damit ist $k = k_n - k_0$ und wenn wir voraussetzen, dass k_n in dem von $\mathcal{F}$ erzeugten Untergitter liegt, folgt das auch für $k \in \mathcal{F}_{n+1}$.

Wir zeigen nun, dass $\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n = \mathbb{Z}^2$ ist. Angenommen $\mathbb{Z}^2 \setminus \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n \neq \emptyset$. Wir setzen

$$X_1 = M + \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n \text{ und } X_2 = M + \left(\mathbb{Z}^2 \setminus \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n \right).$$

Es ist $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ und $X_1, X_2 \neq \emptyset$. Die Mengen X_1 und X_2 sind abgeschlossen und es gilt $X_1 \cup X_2 = \mathbb{R}^2$, da M ein $\mathbb{Z}^2$ -Tile ist. Damit haben wir $\mathbb{R}^2$ als disjunkte Vereinigung von zwei nicht-leeren abgeschlossenen Mengen geschrieben. Das ist ein Widerspruch zum Zusammenhang von $\mathbb{R}^2$. Damit muss $\mathbb{Z}^2 \setminus \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n = \emptyset$ und es folgt, dass das von $\mathcal{F}$ erzeugte Gitter ganz $\mathbb{Z}^2$ ist.

□

Wir setzen von nun an voraus, dass die betrachteten $\mathbb{Z}^2$ -Tiles stets zusammenhängend sind. Wie im ersten Kapitel ausführlich gezeigt und in der vorigen Proposition erwähnt, folgt *im selbstähnlichen Fall* auch der gegenseitige Zusammenhang. Unser Ziel ist es zu zeigen, dass damit auch das Innere des Tiles zusammenhängend ist. Das musste im ersten Kapitel für die Homöomorphie zur Kreisscheibe zusätzlich gefordert werden. Durch die stärkeren Voraussetzungen in diesem Kapitel erhalten wir den Zusammenhang des Inneren als Resultat.

Zunächst zeigen wir ein Resultat, bei dem die Selbstähnlichkeit nicht vorausgesetzt wird - es gilt für allgemeine $\mathbb{Z}^2$ -Tilings mit zusammenhängenden Tiles:

Theorem 2.5.5 Sei M ein zusammenhängendes $\mathbb{Z}^2$ -Tile mit höchstens 6 Nachbarn. Dann existieren $k, l \in \mathbb{Z}^2$, sodass $\mathcal{F} = \{\pm k, \pm l, \pm(k+l)\}$.

Beweis:

Sei $X := M + \mathcal{F}$ und $\tilde{X} = \mathbb{R}^2 \setminus (M \cup X)$. Es ist also $\tilde{X}$ das Komplement zu M zusammen mit seinen Nachbarn. Da M kompakt ist und daher auch alle Nachbarn $M + k$, folgt

$$\inf \left\{ d(m, \tilde{x}) : m \in M, \tilde{x} \in \tilde{X} \right\} = \delta > 0.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Ist $B_\varepsilon(x)^\circ$ die offene Kugel um $x \in M$ mit Radius ε , so bildet $\bigcup_{x \in M} B_\varepsilon(x)^\circ$ eine offene Überdeckung von M . Wegen der Kompaktheit von M existieren also $x_1, \dots, x_k \in M$, sodass

$$M_\varepsilon := \bigcup_{j=1}^k B_\varepsilon(x_j)^\circ \supseteq M.$$

Diese Vereinigung ist zusammenhängend, da M zusammenhängend ist. Der Rand ∂M_ε besteht aus endlich vielen stückweise glatten einfach geschlossenen Kurven. Nach dem Jordan'schen Kurvensatz teile jede dieser einfach geschlossenen Kurven die Ebene in eine beschränkte und eine unbeschränkte Komponente. Die beschränkte Komponente einer dieser Kurven enthält alle anderen einfach geschlossenen Kurven, die den Rand ausmachen. Das ist die äußere Kurve, wir bezeichnen sie mit C . Wir wollen zu jedem Nachbarn, aber zunächst einmal zu jedem Gitterpunkt $y \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ einen Punkt $z_y \in C$ finden, sodass $y + z_y$ in der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{R}^2 \setminus C$, also außerhalb von C und damit insbesondere außerhalb von M_ε liegt. Wir betrachten für ein fixes $y \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ die Projektionen der $c \in C$ auf y . Die Länge der Projektion ist genau dann möglichst groß, wenn einerseits $\|c\|$ möglichst groß ist und andererseits der Winkel, den y und c einschließen möglichst klein ist, y und c also ähnliche Richtungen besitzen. Das können wir ausdrücken, indem wir für $y \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ als z_y einen Punkt der Kurve C definieren, sodass

$$\langle z_y, y \rangle = \max \{ \langle c, y \rangle : c \in C \}.$$

Dieser Punkt ist im Allgemeinen nicht eindeutig. Es ist nach Konstruktion der Punkt $z_y + y$ in der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{R}^2 \setminus C$ und es ist $d(z_y + y, C) \geq 1$, da jeder Gitterpunkt $y \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ erfüllt, dass $\|y\| \geq 1$. Es zeigt also $z_y + y$ möglichst weit weg von der Kurve C .

Betrachtet man nun das Translat $M + y$ und das damit transferierte endliche ε -Netz, so folgt die Existenz eines Punktes $x' = m + y \in M + y$ mit

$$d(x', z_y + y) = d(m + y, z_y + y) = d(m, z_y) \leq \varepsilon.$$

Wegen $d(z_y + y, C) \geq 1$ folgt, dass x' in der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{R}^2 \setminus C$ liegt, sobald $\varepsilon < \frac{1}{2}$ ist.

Sei nun $\varepsilon < \min \left\{ \frac{\delta}{2}, \frac{1}{2} \right\}$. Wir bereits gezeigt hat das Translat $M+y$ für $y \in \mathcal{F}$ Punkte, die in der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{R}^2 \setminus C$, also außerhalb von C liegen. Da aber $y \in \mathcal{F}$ ist, gilt ja $M \cap (M+y) \neq \emptyset$ und damit liegen auch Punkte von $M+y$ in der beschränkten Komponente von $\mathbb{R}^2 \setminus C$. Es ist

$$\inf \left\{ d(a, \tilde{x}) : a \in M_\varepsilon, \tilde{x} \in \tilde{X} \right\} > \frac{\delta}{2},$$

da ε gerade dafür klein genug gewählt war. Damit liegt also $C \subseteq X^\circ$. Es ist außerdem $C \cap (M+y) \neq \emptyset$ für alle $y \in \mathcal{F}$, da M nach Voraussetzung zusammenhängend ist.

Wir wählen eine Parametrisierung $c(t)$ für $0 \leq t \leq 1$ von C mit $c(0) = c(1)$ und eine Partition $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$, sodass jedes Kurvenstück $c([t_{i-1}, t_i])$ einen Durchmesser besitzt, der kleiner ist als $\frac{\delta}{2}$. Wir erhalten dadurch eine Folge

$$y_{11}, \dots, y_{1j_1}, y_{21}, \dots, y_{2j_2}, \dots, y_{k1}, \dots, y_{kj_k} \subseteq \mathcal{F},$$

sodass für $1 \leq i \leq k$ die y_{ij} mit $1 \leq j \leq j_i$ erfüllen, dass

$$(M + y_{ij}) \cap c([t_{i-1}, t_i]) \neq \emptyset.$$

Streich man aus dieser Folge so lange Elemente, sodass keine Elemente mehrmals hintereinander vorkommen, so erhält man eine Folge $y_1, \dots, y_m, y_{m+1} = y_1$. Wie oben bereits gezeigt, schneidet C jeden Nachbar $M+y$ für $y \in \mathcal{F}$. Damit kommt auch jedes $y \in \mathcal{F}$ in der Folge $y_1, \dots, y_m$ vor. Da $\text{diam}(c([t_{i-1}, t_i])) < \frac{\delta}{2}$ ist, gilt $\text{diam}(c([t_{i-1}, t_{i+1}])) < \delta$. Zwei Punkte aus benachbarten Kurvensegmenten haben also stets Abstand kleiner als δ . Damit ist

$$\inf \left\{ d(m + y_i, m' + y_{i+1}) : m, m' \in M \right\} < \delta \text{ für } 1 \leq i \leq m.$$

Es sind also $M + y_i$ und $M + y_{i+1}$ benachbarte Tiles, anders ausgedrückt $y_{i+1} - y_i \in \mathcal{F}$.

Ist $y \in \mathcal{F}$, dann ist $M \cap (M+y) \neq \emptyset$. Daraus folgt, dass auch $(M-y) \cap M \neq \emptyset$ ist. Also ist mit y auch $-y \in \mathcal{F}$. Nach Voraussetzung ist $|\mathcal{F}| \leq 6$, also ist $|\mathcal{F}| \in \{2, 4, 6\}$. Nach obigem Lemma wird $\mathbb{Z}^2$ von $\mathcal{F}$ erzeugt. Es sind also zwei linear unabhängige Gitterpunkte in $\mathcal{F}$ enthalten. Damit kann $\mathcal{F}$ nicht aus nur zwei Elementen bestehen. Wäre $\mathcal{F}$ eine Menge mit 4 Elementen, so würde folgen, dass $\mathcal{F} = \{\pm k, \pm l\}$ mit linear unabhängigen k und l . Dann folgen in der oben konstruierten Folge $y_1, \dots, y_m$ zumindest einmal k und l , $-k$ und l , k und $-l$ oder $-k$ und $-l$ aufeinander. Wir haben gezeigt, dass dann

außerdem $k-l$, $-k-l$, $k+l$ oder $-k+l$ ein Element von $\mathcal{F}$ sein müsste. Das ist ein Widerspruch. Es ist also $\mathcal{F}$ eine 6-elementige Menge. Nach dem selben Argument wie vorhin sind $\pm k, \pm l \in \mathcal{F}$ für linear unabhängige $k, l \in \mathbb{Z}^2$ und es folgt, dass $k+l, k-l, -k+l$ oder $-k-l$ auch in $\mathcal{F}$ liegen muss, sagen wir $k+l$. Dann liegt auch $-(k+l) \in \mathcal{F}$. Insgesamt ist also $\mathcal{F} = \{\pm k, \pm l, \pm(k+l)\}$. $\square$

Korollar 2.5.6 *Ist M ein zusammenhängendes $\mathbb{Z}^2$ -Tile mit höchstens 6 Nachbarn, dann hat M genau 6 Nachbarn.*

Hier folgt wieder ein Resultat, das die Selbstähnlichkeit und -affinität nicht verwendet.

Lemma 2.5.7 *Sei M ein zusammenhängendes $\mathbb{Z}^2$ -Tile mit Nachbarmenge $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{Z}^2$.*

1. *Ist $\mathcal{F} = \{\pm k, \pm l, \pm(k+l), \pm(k-l)\}$, dann sind $M + \{\pm k, \pm l\}$ Kanten-Nachbarn von M .*
2. *Ist $\mathcal{F} = \{\pm k, \pm l, \pm(k+l)\}$, dann sind alle Nachbarn von M Kanten-Nachbarn.*

Beweis:

Wir haben bereits gesehen, dass k und l das Gitter $\mathbb{Z}^2$ erzeugen. Daher nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $k = (1, 0)^t$ und $l = (0, 1)^t$. Sei δ der minimale Abstand zwischen zwei Elementen aus disjunkten Tiles. Es ist $\delta > 0$. Wäre nämlich $\min\{d(m_1, m_2) : m_1 \in M + x, m_2 \in M + x' \text{ sodass } (M + x) \cap (M + x') = \emptyset\} = 0$, so wäre $(\overline{M} + x) \cap (\overline{M} + x') \neq \emptyset$. Die Kompaktheit von M schließt das aber aus. Wir betrachten die Menge

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} M + (n, 0)^t \right)^\circ.$$

Ist $a \in \mathbb{Z}$ negativ und $a' \in \mathbb{Z}$ positiv, so sind die Tiles $M + a(0, 1)^t + b(1, 0)^t$ und $M + a'(0, 1)^t + b'(1, 0)^t$ disjunkt für alle $b, b' \in \mathbb{Z}$. Sonst wäre nämlich

$$(a - a')(0, 1)^t + (b - b')(1, 0)^t \in \mathcal{F}.$$

Es ist aber $a - a' \leq -2$ und $\mathcal{F}$ enthält kein Element dieser Form. Vereinigt man also alle Tiles mit negativem a und alle mit positivem a' :

$$B_- := \bigcup_{\substack{a \in \mathbb{Z}, a < 0 \\ b \in \mathbb{Z}}} M + a(0, 1)^t + b(1, 0)^t; B_+ := \bigcup_{\substack{a' \in \mathbb{Z}, a' > 0 \\ b' \in \mathbb{Z}}} M + a'(0, 1)^t + b'(1, 0)^t,$$

so bildet die Menge $(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} M + (n, 0)^t)^\circ$ eine Trennung zwischen B_- und B_+ , sodass für $x \in B_-$ und $x' \in B_+$ stets gilt $d(x, x') \geq \delta$.

Wir wollen nun einen Polygonzug durch das Innere dieser Trennungsmenge ziehen, der ganz enthalten ist. Sei dazu $m \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{1}{m} < \frac{\delta}{2}$ und sei $x = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2$. Wir definieren

$$f(x_1) = \sup \left\{ x_2 : d(x, B_-) < \frac{\delta}{2} \right\} \text{ für alle } x \text{ mit } x_1 = \frac{n}{k}, n \in \mathbb{Z}.$$

Die Punkte $z = (x_1, f(x_1))^t$ erfüllen also genau

$$d(z, B_-) = \frac{\delta}{2} \leq d(z, B_+).$$

Damit liegen sie jedenfalls schon in der Trennungsmenge. Wir setzen f durch einen Polygonzug zwischen den Punkten $\frac{n}{k}$ fort. Sei C der Graph dieser forgesetzten Funktion f . Aufgrund der $\mathbb{Z}^2$ -Tiling Eigenschaft und der daraus resultierenden Periodizität der Menge $(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} M + (n, 0)^t)^\circ$ gilt $f(s+1) = f(s)$ für alle $s \in \mathbb{R}$, der Polygonzug C ist periodisch entlang der x_1 -Richtung: $C = C + (1, 0)^t$. Wir zeigen, dass

$$C \subseteq \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} M + (n, 0)^t \right)^\circ.$$

Sei $z(s)$ ein Punkt in einem Geradensegment von C und sei $z(x_1)$ jener Knotenpunkt dieses Segments, sodass $f(x_1) \leq f(s)$ gilt. Wir ziehen eine Parallele zur x_1 -Achse und betrachten den Punkt $x' = (x_1, f(s))^t$. Es gilt $\frac{\delta}{2} \leq d(x', B_-)$, da $f(x_1) \leq f(s)$ und $d((x_1, f(x_1))^t, B_-) = \frac{\delta}{2}$ ist nach Definition von f . Außerdem ist nach der Dreiecksungleichung

$$d(x', B_-) \leq |x_1 - s| + d(z(s), B_-) < \frac{\delta}{2} + d(z(s), B_-).$$

Damit folgt $d(z(s), B_-) > 0$. Analog zeigt man, dass $d(z(s), B_+) > 0$ ist. Es ist M zusammenhängend und damit auch B_+ und B_- . Es folgt, dass alle Punkte in B_+ oberhalb von C liegen (also einen strikt größeren x_2 -Wert besitzen) und alle Punkte in B_- unterhalb von C . Damit ist

$$C \subseteq \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} M + (n, 0)^t \right)^\circ.$$

Nun muss ein zusammenhängender Teil von C in $(M \cup (M + (1, 0)^t))^\circ$ liegen, da C ja zusammenhängend ist. Das kann nur dann der Fall sein, wenn $M \cap (M + (1, 0)^t)$ innere Punkte von $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} M + (n, 0)^t$, also insbesondere

überabzählbar viele Elemente besitzt. Damit ist $M + (1, 0)^t$ ein Kanten-Nachbar von M .

Für die anderen Fälle passt man die Konstruktion des Polygonzugs C an. Um zu zeigen, dass $(0, 1)^t$ ein Kanten-Nachbar von M ist, betrachtet man also zunächst die Menge $(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} M + (0, n)^t)^\circ$, für $(1, 1)^t$ die Menge $(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} M + (n, n)^t)^\circ$ und konstruiert weiter Mengen B_- und B_+ und ein passendes C .

Aus Gründen der Symmetrie innerhalb des Tilings tritt dieser letzte Fall nur bei $|\mathcal{F}| = 6$ auf.

□

Wir zeigen nun ein Lemma, das die Selbstaffinität verwendet. Hier ist also mit allen Bezeichnungen wie oben die Menge

$$Q = \bigcup_{d \in \mathcal{D}} Q + d \text{ und damit } A^k Q = \bigcup_{d \in \mathcal{D}_k} Q + d$$

mit $\mathcal{D}_k = \left\{ \sum_{j=0}^{k-1} A^j d_j : d_j \in \mathcal{D} \right\}$ wie oben.

Lemma 2.5.8 *Sei $Q(A, \mathcal{D})$ ein selbstaffines $\mathbb{Z}^2$ -Tile mit Daten $A, \mathcal{D}$ und seien $Q + \mathcal{F}$ die Nachbarn von Q .*

1. *Ist $\mathcal{F} = \{\pm k, \pm l, \pm(k+l)\}$ und erfüllt die Menge $\mathcal{D}$ die Eigenschaft, dass sie $\mathcal{F}$ -zusammenhängend ist, so auch die Mengen $\mathcal{D}_n$ für $n \geq 0$.*
2. *Ist $\mathcal{F} = \{\pm k, \pm l, \pm(k+l), \pm(k-l)\}$ und erfüllt die Menge $\mathcal{D}$ die Eigenschaft, dass sie $\mathcal{F}' := \{\pm k, \pm l\}$ -zusammenhängend ist, so auch $\mathcal{D}_n$.*

Beweis:

Sei $\mathcal{F} = \{\pm k, \pm l, \pm(k+l)\}$. Es ist $A^k Q = \bigcup_{d \in \mathcal{D}_k} Q + d$ und daher ist Q auch als selbstaffine Menge bezüglich der Daten A^k und $\mathcal{D}_k$ zu betrachten. Nach dem obigen Proposition ist Q aufgrund des $\mathcal{F}$ -Zusammenhangs von $\mathcal{D}$ zusammenhängend. Verwendet man die Rückrichtung der Proposition, so folgt, dass auch die Menge $\mathcal{D}_k$ den $\mathcal{F}$ -Zusammenhang erfüllt.

Sei nun $\mathcal{F} = \{\pm k, \pm l, \pm(k+l), \pm(k-l)\}$. Wir führen einen Induktionsbeweis. Die Menge $\mathcal{D}_0 = \{0\}$ ist $\mathcal{F}'$ -zusammenhängend. Wir wollen zeigen, dass mit $\mathcal{D}_{k-1}$ auch die Menge $\mathcal{D}_k$ $\mathcal{F}'$ -zusammenhängend ist. Es ist

$$\mathcal{D}_k = \left\{ \sum_{j=0}^{k-1} A^j d_j : d_j \in \mathcal{D} \right\} = \left\{ \sum_{j=0}^{k-2} A^j d_j : d_j \in \mathcal{D} \right\} + A^k \mathcal{D} = A \mathcal{D}_{k-1} + \mathcal{D}.$$

Wir wollen also zeigen, dass es für je zwei Elemente $f_k = A f_{k-1} + f$ und $f'_k = A f'_{k-1} + f'$ mit $f_{k-1}, f'_{k-1} \in \mathcal{D}_{k-1}$ und $f, f' \in \mathcal{D}$ eine endliche Folge

$f_k = d_0, d_1, \dots, d_r = f'_k \subseteq \mathcal{D}_k$ gibt, $d_i = Af_{k-1}^{(i)} + f^{(i)}$ mit $f_{k-1}^{(i)} \in \mathcal{D}_{k-1}$, $f^{(i)} \in \mathcal{D}$, sodass

$$d_{i+1} - d_i = A \left(f_{k-1}^{(i+1)} - f_{k-1}^{(i)} \right) + f^{(i+1)} - f^{(i)} \in \mathcal{F}'.$$

Es genügt also zu zeigen, dass für $f, f' \in \mathcal{D}_{k-1}$ mit $f - f' \in \mathcal{F}'$ Digits $d, d' \in \mathcal{D}$ existieren mit

$$(Af + d) - (Af' + d') \in \mathcal{F}'.$$

Dass $f - f' \in \mathcal{F}'$ liegt, heißt aber nach dem letzten Lemma, dass $Q + f$ und $Q + f'$ Kanten-Nachbarn sind. Damit sind auch $AQ + Af$ und $AQ + Af'$ Kanten-Nachbarn. Ist die Menge $(Q + f) \cap (Q + f')$ nämlich überabzählbar, dann auch die Menge $(AQ + Af) \cap (AQ + Af')$. Wir benutzen die Selbstaffinität von Q und stellen fest, dass die Tatsache, dass $(\bigcup_{d \in \mathcal{D}} Q + d + Af) \cap (\bigcup_{d \in \mathcal{D}} Q + d + Af')$ überabzählbar ist, impliziert, dass es $d, d' \in \mathcal{D}$ gibt, sodass

$$(Q + d + Af) \cap (Q + d' + Af')$$

bereits überabzählbar ist. Das heißt aber genau, dass $Q + d + Af$ und $Q + d' + Af'$ Kanten-Nachbarn sind, also $Af + d - Af' - d' \in \mathcal{F}'$ liegt.

□

Unser Ziel in diesem Abschnitt ist es zu zeigen, dass ein zusammenhängendes selbstaffines $\mathbb{Z}^2$ -Tile homöomorph zur Kreisscheibe ist, wenn es

1. höchstens 6, also genau 6 Nachbarn besitzt oder
2. Nachbarn $Q + \{\pm k, \pm l, \pm(k+l), \pm(k-l)\}$ besitzt und die Digit-Menge $\mathcal{D}$ die Eigenschaft des $\{\pm k, \pm l\}$ -Zusammenhangs erfüllt.

Wir zeigen nun, dass ein Tile mit diesen Eigenschaften ein zusammenhängendes Inneres besitzt.

Theorem 2.5.9 *Sei $Q(A, \mathcal{D})$ ein zusammenhängendes selbstaffines $\mathbb{Z}^2$ -Tile mit den eben beschriebenen Eigenschaften. Dann ist Q° zusammenhängend.*

Beweis:

Wir führen den zweiten Fall aus.

Sei also die Menge der Nachbarn $\mathcal{F} = \{\pm k, \pm l, \pm(k+l), \pm(k-l)\}$ und sei $\mathcal{F}' = \{\pm k, \pm l\}$. Nach Voraussetzung ist die Digit-Menge $\mathcal{F}'$ -zusammenhängend. Seien $x_1, x_2 \in Q^\circ$. Wir wollen einen Bogen in Q° konstruieren, der x_1 und x_2 verbindet und so zeigen, dass Q° wegweise zusammenhängend, also insbesondere zusammenhängend ist. Sei $K \in \mathbb{N}$ mit

$$K > \max \{|x| : x \in Q\}.$$

Es ist Q kompakt, also insbesondere beschränkt. Sei nun $R \in \mathbb{R}$ mit $R > 5K$ und sei $k \in \mathbb{N}$ groß genug, sodass $B_R(A^k x_1) \subseteq A^k Q^\circ$ und $B_R(A^k x_2) \subseteq A^k Q^\circ$. Da A eine expandierende lineare Abbildung ist, gibt es ein solches $k \in \mathbb{N}$. Wie wir bereits gesehen haben ist $A^k Q = \bigcup_{d \in \mathcal{D}_k} Q + d$ und damit natürlich $A^k Q^\circ \subseteq \bigcup_{d \in \mathcal{D}_k} Q + d$. Damit gibt es ein $y_0 \in \mathcal{D}_k$ mit $A^k x_1 \in Q + y_0$ und ein $y \in \mathcal{D}_k$ mit $A^k x_2 \in Q + y$. Nach dem vorigen Lemma ist $\mathcal{D}_k$ $\mathcal{F}'$ -zusammenhängend, also gibt es eine Folge $y_1, \dots, y_{N-1} \in \mathcal{D}_k$, sodass die Folge $y_0, y_1, \dots, y_{N-1}, y_N = y$ aufeinanderfolgende Differenzen $y_{i+1} - y_i \in \mathcal{F}'$ besitzt. Da ohne Beschränkung der Allgemeinheit $0 \in Q$ und damit $A^k x_1$ und y_0 im selben Tile liegen, gilt

$$d(A^k x_1, y_0) < K \text{ und } d(A^k x_2, y_N) < K.$$

Wir zeigen, dass es einen Bogen in $A^k Q^\circ$ gibt, der $A^k x_1$ mit $A^k x_2$ verbindet. Sei wie in einem vorangehenden Beweis $\delta > 0$ der minimale Abstand zwischen zwei Punkten in disjunkten Translaten von Q und sei Q_ε wie im obigen Beweis eine endliche Vereinigung von ε -Kugeln mit Mittelpunkten in Q , die Q umfasst und sei $\varepsilon < \min\{1, \frac{\delta}{4}\}$. Wir setzen

$$X = \left(\bigcup_{y \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{y_0, \dots, y_N\}} Q_\varepsilon + y \right) \setminus \left(\overline{B_R(A^k x_1) \cup B_R(A^k x_2)} \right).$$

Der Rand ∂X besteht aus endlich vielen kreisförmigen Bögen. Es ist $(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{X}) \subseteq A^k Q^\circ$.

Wir wollen nun zeigen, dass $B_R(A^k x_1)$ und $B_R(A^k x_2)$ in der selben Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{X}$ liegen. Es ist $\mathbb{R}^2$ lokal zusammenhängend. Daher sind Zusammenhangskomponenten offener Mengen offen. $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{X}$ ist eine offene Menge und daher ist jede Zusammenhangskomponente offen und damit wegweise zusammenhängend. Liegen also $B_R(A^k x_1)$ und $B_R(A^k x_2)$ in der selben Zusammenhangskomponente, so kann man einen Bogen finden, der in $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{X} \subseteq A^k Q^\circ$ liegt und $A^k x_1$ und $A^k x_2$ verbindet. Das Urbild dieses Bogens unter dem Homöomorphismus A^k ist also ein Bogen in Q° , der x_1 und x_2 verbindet.

Wir nehmen also an, $B_R(A^k x_1)$ und $B_R(A^k x_2)$ liegen in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{X}$, und zwar sei $B_R(A^k x_1) \subseteq X_1$ und $B_R(A^k x_2) \subseteq X_2$. Sei nun $C \subseteq \partial X_1$ eine einfach geschlossene Kurve, die $B_R(A^k x_1)$ und $B_R(A^k x_2)$ trennt und sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $B_R(A^k x_1)$ in der beschränkten Komponente von $\mathbb{R}^2 \setminus C$. Sei $z(t)$ mit $0 \leq t \leq 1$ und $z(0) = z(1)$ eine Parametrisierung von C . Wir wählen eine Partition

$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$, sodass gilt $d(z(t_i), z(t_{i+1})) < \frac{\delta}{4}$ für $0 \leq i \leq m-1$. Jedes solche $z(t_i)$ ist als Element von $\partial X_1 \subseteq \partial(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{X}) = \partial X$ enthalten im

Abschluss von $Q_\varepsilon + w_i$ für ein $w_i \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{y_0, \dots, y_N\}$. Wir halten fest, dass also

$$\{w_1, \dots, w_m\} \cap \{y_0, \dots, y_N\} = \emptyset.$$

Seien $q, q' \in Q$ mit $d(q + w_i, z(t_i)) \leq \varepsilon$ und $d(q' + w_{i+1}, z(t_{i+1})) \leq \varepsilon$. Dann gilt

$$\begin{aligned} d(q + w_i, q' + w_{i+1}) &\leq d(q + w_i, z(t_i)) + d(z(t_i), z(t_{i+1})) \\ &\quad + d(z(t_{i+1}), q' + w_{i+1}) \\ &\leq \frac{3}{4}\delta < \delta. \end{aligned}$$

Damit ist der minimale Abstand zwischen Elementen in $Q + w_i$ und $Q + w_{i+1}$ kleiner als der minimale Abstand zwischen zwei Elementen aus disjunkten Tiles. Also sind $Q + w_i$ und $Q + w_{i+1}$ Nachbarn. (Falls $w_i = w_{i+1}$ für ein i ist, so streiche w_i aus der Folge $w_0, \dots, w_{m-1}$.) Anders ausgedrückt gilt $w_{i+1} - w_i \in \mathcal{F}$. Sei nun C_1 der geschlossene Polygonzug mit Knoten $w_0, \dots, w_{m-1}, w_m, w_0$. Da für alle i gilt $d(z(t_i), w_i) \leq K + \varepsilon < 2K$, folgt $d(w_i, A^k x_1) \geq 3K$, da $R > 5K$. Damit sind

$$d(A^k x_1, c), d(A^k x_2, c) \geq 2K \text{ für alle } c \in C_1.$$

Also liegt $B_K(A^k x_1)$ in der beschränkten und $B_K(A^k x_2)$ in der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{R}^2 \setminus C_1$. Ist also C_2 der stückweise lineare Bogen, der sich aus den Verbindungsstrecken zwischen den Knoten $y_0, \dots, y_N$ zusammensetzt, so ist $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$, da ja die y_i gerade als Verbindungsfolge zwischen $Q + y_0$ und $Q + y_N$ gewählt waren, wobei ja $A^k x_1 \in Q + y_0$ und $A^k x_2 \in Q + y_N$ liegen. Bezeichnet (ab) die Verbindungsstrecke zwischen a und b , so gilt also

$$(w_i w_{i+1}) \cap (y_j y_{j+1}) \neq \emptyset$$

für ein $i \in \{0, \dots, m-1\}$ und ein $j \in \{0, \dots, N\}$. Es ist aber $y_{j+1} - y_j \in \mathcal{F}$ und $w_{i+1} - w_i \in \mathcal{F}$, wie wir bereits gezeigt haben. Diese Segmente können einander nur dann schneiden, wenn die Segmente einen gemeinsamen Knoten besitzen, also wenn $\{y_0, \dots, y_N\} \cap \{w_0, \dots, w_{m-1}\} \neq \emptyset$ ist. Das ist ein Widerspruch. Damit sind also $B_R(A^k x_1)$ und $B_R(A^k x_2)$ in der selben Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{X}$. Diese Zusammenhangskomponente ist auch wegweise zusammenhängend. Damit gibt es einen Homöomorphismus $b(t)$ mit $0 \leq t \leq 1$ mit $b(0) = A^k x_1$ und $b(1) = A^k x_2$. Der Bogen $A^{-k} \circ b$ liefert den gewünschten Bogen, der x_1 mit x_2 verbindet. Damit ist Q° wegweise zusammenhängend, also insbesondere zusammenhängend. Der Fall mit 6 Nachbarn geht analog.

□

Korollar 2.5.10 *Unter den Voraussetzungen von Theorem 2.5.9 ist Q° einfach zusammenhängend.*

Beweis:

Angenommen es gibt eine einfach geschlossene Kurve $C \subseteq Q^\circ$, sodass die beschränkte Komponente X von $\mathbb{R}^2 \setminus C$ nicht ganz in Q° liegt. Sei $H = X \setminus Q^\circ$. Wegen der Tiling-Eigenschaft enthält H innere Punkte eines anderen Tiles Q' . Es ist Q° und damit auch Q'° zusammenhängend. Damit ist ganz $Q'^\circ \subseteq H$. Da aber $Q' = Q + z$ für ein $z \in \mathbb{Z}^2$ gilt, ist das ein Widerspruch. $\square$

Wir wollen nun den Riemann'schen Abbildungssatz verwenden, um zu zeigen, dass das Innere Q° eines selbstaffinen $\mathbb{Z}^2$ -Tiles unter den Voraussetzungen von 2.5.9 homöomorph ist zur offenen Kreisscheibe D° . Wir umreißen nun grob einige Begriffe, siehe dazu [24], sowie [8]:

Zwei offene zusammenhängende Mengen $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ heißen konform äquivalent, wenn es eine holomorphe Abbildung $\varphi \in H(\Omega_1)$ gibt, die injektiv ist und $\varphi(\Omega_1) = \Omega_2$ erfüllt. Nun gilt, dass jede holomorphe Abbildung f , die injektiv ist auf einer offenen zusammenhängenden Menge Ω erfüllt, dass $f'(z) \neq 0$ für $z \in \Omega$ und, dass f^{-1} holomorph ist. Sind also zwei Mengen Ω_1 und Ω_2 konform äquivalent mittels φ , so ist φ^{-1} auch holomorph auf Ω_2 . Damit sind konform äquivalente Mengen insbesondere homöomorph.

Der **Riemann'sche Abbildungssatz** besagt nun, dass jede offene zusammenhängende einfach zusammenhängende Menge, die nicht ganz $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ ist, konform äquivalent ist zur offenen Kreisscheibe D° .

Korollar 2.5.11 *Unter den Voraussetzungen von 2.5.9 ist Q° homöomorph zu D° .*

Nun wollen wir die konforme Abbildung $\varphi : Q^\circ \rightarrow D^\circ$ auf einen Homöomorphismus $Q \rightarrow D$ fortsetzen. In Proposition 1.7.2 haben wir gezeigt, dass die selbstähnliche Menge K bezüglich injektiver Kontraktionen erfüllt, dass $K = \overline{K^\circ}$, wenn $K^\circ \neq \emptyset$ ist. Damit gilt natürlich auch für die selbstaffinen $\mathbb{Z}^2$ -Tiles, dass $\overline{Q^\circ} = Q$ ist. Wir suchen also eine homöomorphe Fortsetzung von $\varphi : Q^\circ \rightarrow D^\circ$ auf $Q = \overline{Q^\circ} \rightarrow D$.

Eine solche gibt es nach [24] dann, wenn jeder Punkt $x \in \partial Q^\circ = \partial Q$ ein einfacher Randpunkt ist, also folgendes erfüllt:

Für jede Folge $(a_n)_{n \geq 1} \subseteq Q^\circ$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$ gibt es einen Strahl $c(t)$, das ist ein homöomorphes Bild des einseitig unendlichen Intervalls $[0, \infty)$, mit $0 \leq t < \infty$ und eine Folgenpartition $(t_n)_{n \geq 1}$ mit $0 < t_1 < \dots < t_n < \dots$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$, sodass $c(t_n) = a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $c(t) \in Q^\circ$ für alle $0 \leq t < \infty$.

Lemma 2.5.12 *Unter den Voraussetzungen von 2.5.9 ist jeder Randpunkt von Q° ein einfacher Randpunkt.*

Beweis:

Sei $x \in \partial Q^\circ = \partial Q$. Um zu zeigen, dass Q° zusammenhängend ist, haben wir Bögen in Q° zwischen je zwei Punkten $x, y \in Q^\circ$ konstruiert. Es ist ja $Q = \bigcup_{d \in \mathcal{D}} A^{-1}Q + A^{-1}d$. Sind also x und y in $A^{-1}Q + A^{-1}d$ für ein $d \in \mathcal{D}$, also im gleichen Teilstück, oder in benachbarten Teilstücken $A^{-1}Q + a^{-1}d \cup A^{-1}Q + A^{-1}d'$, so kann man einen verbindenden Bogen innerhalb von $A^{-1}Q + A^{-1}d$ beziehungsweise $A^{-1}Q + A^{-1}d \cup A^{-1}Q + A^{-1}d'$ wählen. Das ergibt sich aus der Selbstaffinität, wenn man als Prinzip berücksichtigt, dass das Tiling auf jeder Vergrößerungs- und Verkleinerungsstufe, also mit Anwendung von A^k und A^{-k} gleich aussieht, also insbesondere die gleiche Nachbarstruktur besitzt.

Sei nun $(a_n)_{n \geq 1} \subseteq Q^\circ$ eine Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$ und seien $[a_i, a_{i+1}]$ für $i \in \mathbb{N}$ verbindende Bögen wie gerade beschrieben. Dann ist die Komposition

$$[a_1, a_2] \cup [a_2, a_3] \cup \dots \cup [a_i, a_{i+1}] \cup \dots$$

ein Strahl. Wir zeigen, dass ein solcher Strahl gegen x konvergiert. Wir betrachten nun die k -te Verkleinerungsstufe von Q , also

$$Q = \bigcup_{d \in \mathcal{D}(k)} A^{-k}Q + d \text{ mit } \mathcal{D}(k) = \left\{ \sum_{j=1}^k A^{-j}d_j; d_j \in \mathcal{D} \right\}$$

wie zu Beginn dieses Kapitels. (Diese Mengen sind nicht zu verwechseln mit den Mengen $\mathcal{D}_k$.) Der Randpunkt x kann im 6-Nachbar-Fall zu höchstens zwei Teilstücken, im 8-Nachbar-Fall zu höchstens 3 Teilstücken gehören. Dabei sind diese Teilstücke entweder Translate von $A^{-k}Q$ entlang $\mathcal{D}(k)$ oder entlang der Menge $\mathcal{F}(k) = \{\sum_{j=1}^k A^{-j}k_j : k_j \in \mathcal{F}\}$. Die Vereinigung dieser zwei oder drei Teilstücke

$$V_k = \bigcup_{i=2 \text{ oder } 3} A^{-k}Q + \lambda_i \text{ mit } \lambda_i \in \mathcal{D}(k) \cup \mathcal{F}(k)$$

bildet eine Umgebung von x . Da $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$, sind alle a_n für $n \geq n_k$ enthalten in V_k . Die Teilstücke $A^{-k}Q + \lambda_i$ sind benachbart, daher kann man die Bögen $[a_i, a_{i+1}]$ mit $i \geq n_k$ in V_k wählen. Für $k \rightarrow \infty$ werden die Teilstücke $A^{-k}Q + \lambda_i$ immer kleiner, es gilt $\text{diam}(V_k) \rightarrow 0$. Daher konvergiert der Strahl gegen x .

□

Daher ist unter den Voraussetzungen von 2.5.9 jeder Randpunkt von Q°

ein einfacher Randpunkt. Damit kann man die konforme Abbildung zwischen Q° und D° , die existiert, da Q° einfach zusammenhängend und zusammenhängend ist, homöomorph auf $Q \rightarrow D$ fortsetzen.

Wir haben gerade folgendes Theorem bewiesen:

Theorem 2.5.13 *Sei $Q(A, \mathcal{D})$ ein selbstaffines $\mathbb{Z}^2$ -Tile mit Daten A und $\mathcal{D}$. Dann gilt:*

1. *Wenn Q höchstens sechs Nachbarn $Q + \mathcal{F}$ besitzt mit $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{Z}^2$ und wenn die Digit-Menge $\mathcal{D}$ $\mathcal{F}$ -zusammenhängend ist, dann ist Q homöomorph zur Kreisscheibe.*
2. *Wenn Q acht Nachbarn $Q + \{\pm k, \pm l, \pm(k + l), \pm(k - l)\}$ besitzt und wenn die Digit-Menge $\mathcal{D}\{\pm k, \pm l\}$ -zusammenhängend ist, dann ist Q homöomorph zur Kreisscheibe.*

Kennt man also alle Nachbarn von $Q(A, \mathcal{D})$, so kann man die Homöomorphie zur Kreisscheibe zeigen. Es gilt sogar die Umkehrung von Theorem 2.5.13:

Theorem 2.5.14 *Sei X eine Menge, die homöomorph ist zur Kreisscheibe, sodass $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}^2} X + k$ ein Tiling der Ebene ist. Dann gilt eine der folgenden Aussagen:*

1. *Die Menge X hat keine Knoten-Nachbarn und 6 Kanten-Nachbarn $\mathcal{F} = \{\pm k, \pm l, \pm(k + l)\}$. Dabei erzeugen k, l das Gitter $\mathbb{Z}^2$.*
2. *Die Menge X hat 4 Kanten-Nachbarn $\{\pm k, \pm l\}$ und 4 Knoten-Nachbarn $\{\pm(k + l), \pm(k - l)\}$. Dabei erzeugen k, l das Gitter $\mathbb{Z}^2$.*

Der Beweis findet sich in [3] und beruht im Wesentlichen auf kombinatorischen und geometrischen Überlegungen bezüglich der Tiling-Eigenschaft (insbesondere bezüglich des Nachbarschaftsgraphen, der als Knoten die Gitterpunkte und als Kanten die benachbarten Gitterpunkte besitzt) und führt zu dem Schluss, dass ein Tiling mit einer Menge, die homöomorph ist zur Kreisscheibe, entweder eine topologische Deformation des Tilings mit dem Einheitsquadrat oder mit dem Hexagon ist. Im ersten Fall erhalten wir 4 Knoten-Nachbarn und 4 Kanten-Nachbarn und im zweiten Fall 6 Kanten-Nachbarn. Die Art (und Anzahl) der Nachbarn bleibt bei einer topologischen Deformation erhalten, da die Schnittmenge von Kanten-Nachbarn stets einen Bogen bildet. Eine einpunktige Schnittmenge bleibt natürlich ebenfalls erhalten.

Algorithmen, welche die Nachbarnmenge $\mathcal{F}$ anhand der Daten A und $\mathcal{D}$ determinieren, sind zum Beispiel in [26] oder [25] angegeben.

Literaturverzeichnis

- [1] Akiyama, S.; Thuswaldner, J. M.: A survey on topological properties of tiles related to number systems. *Geom. Dedicata* 109, 89-105 (2004).
- [2] Bailey, S.; Kim, T.; Strichartz, R. S.: Inside the Lévy dragon. *Am. Math. Mon.* 109, No. 8, 689-703 (2002).
- [3] Bandt, C.; Gelbrich, G.: Classification of self-affine lattice tilings. *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.* 50, No.3, 581-593 (1994).
- [4] Bandt, C.; Hung, N.; Rao, H.: On the open set condition for self-similar fractals. *Proc. Am. Math. Soc.* 134, No. 5, 1369-1374 (2006).
- [5] Bandt, C.; Keller, K.: Self-similar sets. 2. A simple approach to the topological structure of fractals. *Math. Nachr.* 154, 27-39 (1991).
- [6] Bandt, C.; Wang, Y.: Disk-like self-affine tiles in $\mathbb{R}^2$. *Discrete Comput. Geom.* 26, No.4, 591-601 (2001).
- [7] Barnsley, M.: *Fractals everywhere*. Boston, MA etc.: Academic Press, Inc. xii, 394 p. (1988).
- [8] Conway, J. B.: *Functions of one complex variable*. Graduate Texts in Mathematics. 11. New York-Heidelberg-Berlin; Springer-Verlag. XI, 313 p. (1973).
- [9] Denker, M.: *Einführung in die Analysis dynamischer Systeme*. Springer-Lehrbuch. Berlin: Springer. x, 285 p. (2005).
- [10] Duvall, P.; Keesling, J.: The Hausdorff dimension of the boundary of the Lévy dragon. *American Mathematical Society. Contemp. Math.* 246, 87-97 (1999).
- [11] Gröchenig, K.; Haas, A.: Self-similar lattice tilings. *J. Fourier Anal. Appl.* 1, No.2, 131-170 (1994).

- [12] Gröchenig, K.; Madych, W.R.: Multiresolution analysis, Haar bases, and self-similar tilings of $\mathbb{R}^n$. IEEE Trans. Inf. Theory 38, No. 2, Part II, 556-568 (1992).
- [13] Harzheim, Egbert: Einführung in die kombinatorische Topologie. Die Mathematik. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft. XVII, 328 S. (1978).
- [14] Hata, M.: On the structure of self-similar sets. Japan J. Appl. Math. 2, 381-414 (1985).
- [15] Hutchinson, J. E.: Fractals and self similarity. Indiana Univ. Math. J. 30, 713-747 (1981).
- [16] Kirat, I.; Lau, K.-S.: On the connectedness of self-affine tiles. J. Lond. Math. Soc., II. Ser. 62, No.1, 291-304 (2000).
- [17] Lagarias, J. C.; Wang, Y.: Self-affine tiles in $\mathbb{R}^n$. Adv. Math. 121, No.1, 21-49 (1996).
- [18] Lagarias, J. C.; Wang, Y.: Integral self-affine tiles in $\mathbb{R}^n$. I: Standard and nonstandard digit sets. J. Lond. Math. Soc., II. Ser. 54, No.1, 161-179 (1996).
- [19] Lagarias, J. C.; Wang, Y.: Integral self-affine tiles in $\mathbb{R}^n$. II: Lattice tilings. J. Fourier Anal. Appl. 3, No.1, 83-102 (1997).
- [20] Lancaster, P.; Tismenetsky, M.: The theory of matrices. 2nd ed., with applications. Computer Science and Applied Mathematics. Orlando etc.: Academic Press (Harcourt Brace Jovanovich, Publishers). XV, 570 p. (1985).
- [21] Luo, J.; Rao, H.; Tan, B.: Topological structure of self-similar sets. Fractals 10, No. 2, 223-227 (2002).
- [22] Luo, J.; Thuswaldner, J. M.: On the fundamental group of self-affine plane tiles. Ann. Inst. Fourier 56, No. 7, 2493-2524 (2006).
- [23] Ngai, S.-M.; Tang, T.-M.: Topology of connected self-similar tiles in the plane with disconnected interiors. Topology Appl. 150, No. 1-3, 139-155 (2005).
- [24] Rudin, W.: Real and complex analysis. 2nd ed. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics. New York etc.: McGraw-Hill Book Comp. XII, 452 p. (1974).

- [25] Scheicher, K.; Thuswaldner, J. M.: Neighbours of self-affine tiles in lattice tilings. *Trends in Mathematics*, 241-262 (2003).
- [26] Strichartz, R. S.; Wang, Y.: Geometry of self-affine tiles. I. *Indiana Univ. Math. J.* 48, No.1, 1-23 (1999).
- [27] von Querenburg, B.: Set theoretic topology. (Mengentheoretische Topologie.) 3. Aufl. Berlin: Springer. xvi, 353 S. (2001).
- [28] Vince, A.: Digit tiling of Euclidean space. *Directions in mathematical quasicrystals*. Providence, RI: AMS, American Mathematical Society. CRM Monogr. Ser. 13, 329-370 (2000).
- [29] Vince, A.: Self-replicating tiles and their boundary. *Discrete Comput. Geom.* 21, No.3, 463-476 (1999).
- [30] Werner, D.: *Funktionalanalysis*. Springer-Lehrbuch. Berlin: Springer (ISBN 978-3-642-21016-7/pbk; 978-3-642-21017-4/ebook). xiii, 552 p. (2011).
- [31] Whyburn, G. T.: *Analytic topology*. American Mathematical Society (AMS). *Colloquium Publications*. Vol. 28. Providence, R.I.: American Mathematical Society (AMS). X, 280 . (1963).
- [32] Whyburn, G. T.: *Topological analysis*. (Princeton Mathematical Series. 23.) Revised. ed. Princeton, N. J.: Princeton University Press, XII, 125 p. (1964).

Curriculum Vitae

Persönliche Daten

Name:	Paola Lopez
Geburtsort:	Wien
E-mail:	paola.lopez@gmx.at

Studium

seit 10/2012	Diplomstudium der Rechtswissenschaften Universität Wien
seit 10/2006	Diplomstudium der Mathematik Universität Wien

Schule

06/2006	Matura, GRG3 Hagenmüllergasse
---------	-------------------------------