



universität
wien

Diplomarbeit

Titel der Diplomarbeit

Grundkompetenzen zu Funktionen

Eine Analyse und eine empirische Untersuchung

Verfasser

Dominik Schachner

angestrebter akademischer Grad

Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2012

Studienkennzahl lt. Studienblatt: A 190 313 406

Studienrichtung lt. Studienblatt: Lehramtsstudium UF Geschichte/ UF Mathematik

Betreuer: Univ.-Prof. i.R. Dr. Günther Malle

Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle bei all jenen Menschen bedanken, die es mir ermöglicht haben mein Studium rasch zu absolvieren.

Insbesondere gilt ein besonderes Dankeschön meinem Diplomarbeitsbetreuer Univ. Prof. Dr. Günther Malle, durch den ich an einem äußerst interessanten Thema arbeiten konnte. Durch seine Unterstützung kam es zu einer wirklich gelungenen wissenschaftlichen Auseinandersetzung.

Weiters möchte ich mich bei meinen Studienkollegen/innen explizit nochmals bedanken, da sie mir auf meinem Weg oftmals geholfen haben, wenn ich irgendwo ein Problem hatte.

Ein wichtiger Faktor meiner Arbeit ist auch die empirische Untersuchung mit Schüler/innen und Studenten/innen, daher gilt auch ihnen ein besonderer Dank.

Nicht zu vergessen sind natürlich auch meine Eltern, deren vollste Unterstützung ich stets genoss und die mir durch finanzielle Mittel überhaupt erst das Studium ermöglichten.

Vorwort

Meine Diplomarbeit teilt sich in zwei große Bereiche:

Der erste Teil behandelt die offiziellen Grundkompetenzen der Funktionenlehre und den dazugehörigen Theorieteil. Ich fokussiere mich in meiner Arbeit auf Funktionen im Schulunterricht und möchte dabei näher auf die einzelnen Grundkompetenzen eingehen, da sie im Hinblick auf die zentrale Reifeprüfung von jedem/jeder Schüler/in erworben werden sollten.

Der zweite Teil meiner Diplomarbeit, welcher in den Kapiteln 3 und 4 zum Ausdruck gebracht wird, befasst sich mit Notationsproblemen und einer von mir selbst durchgeführten empirischen Untersuchung zu verschiedenen Aufgaben über Funktionen. Diese Befragung führte ich sowohl schriftlich als auch mündlich durch. Die Probanden/innen, die bei dieser Untersuchung teilgenommen haben, waren Schüler/innen eines Oberstufenrealgymnasiums aus der elften Schulstufe (siebente Klasse). Darüber hinaus habe ich auch Studenten/innen in mündlichen Interviews auf den Zahn gefühlt.

Hierbei sollte auch nicht unerwähnt bleiben, dass ich die Aufgaben und den Theorieaufbau dem Schulbuch meines Diplomarbeitbetreuers entnommen habe.

Zum Aufbau sei noch Folgendes gesagt:

Die Funktionenlehre im Schulunterricht beginnt schon vor der fünften Klasse, da die Schüler/innen bereits in der Unterstufe mit dem Funktionsbegriff zu tun haben, auch wenn dieser nicht explizit erwähnt wird. Zum Beispiel lernen Schüler/innen bereits früh, wie sich Preis- und Warenmenge eines bestimmten Produkts zueinander verhalten. Zum Beispiel: Ein Apfel kostet 30 Cent. Wie viel kosten zehn Äpfel? Bei dieser Aufgabenstellung könnte man bereits direkte Proportionalität erkennen, welche später in der Funktionenlehre noch genauer behandelt wird. Der Funktionsbegriff ist also weitaus tiefgreifender und schlummert bereits in den Köpfen der Schüler/innen.

Ich möchte jedoch in meiner Diplomarbeit erst ab der fünften Klasse mit der Darstellung der Theorie beginnen. In der fünften Klasse wird erstmals der Begriff einer reellen Funktion konkretisiert und definiert. Weitere Themen zur Funktionenlehre in der fünften Klasse bilden die linearen und einige nichtlineare Funktionen.

In der sechsten Klasse wird der Theorieaufbau weitergeführt. Nun ist erstmals von der Monotonie und Extremstellen von reellen Funktionen die Rede. Außerdem werden in der sechsten Klasse die Exponential- und Logarithmusfunktionen sowie die Winkelfunktionen behandelt. Darüber hinaus gibt es noch einige theoretische Ergänzungen (Verallgemeinerungen des Funktionsbegriffs, Verkettung, Umkehrfunktion).

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	3
1. Grundkompetenzen zu funktionalen Abhängigkeiten	8
<u>1.1 Einleitung</u>	8
<u>1.2 Liste der Grundkompetenzen</u>	10
1.21 Funktionsbegriff, reelle Funktionen, Darstellungsformen und Eigenschaften	10
1.22 Lineare Funktionen	18
1.23 Potenzfunktionen	22
1.24 Polynomfunktionen	24
1.25 Exponentialfunktionen	27
1.26 Sinus- und Cosinusfunktion	30
2. Exemplarischer Theorieaufbau der Funktionenlehre in der 5. und 6. Klasse anhand des Lehrbuchs „Mathematik Verstehen“	33
<u>2.1 Reelle Funktionen in der 5.Klasse</u>	34
2.11 Wichtige Begriffe	34
2.12 Zeichnen und Interpretieren von Funktionsgraphen	36
2.13 Termdarstellung und Gleichung einer reellen Funktion	37
<u>2.2 Lineare Funktionen</u>	39
2.21 Lineare Funktionen und ihre Graphen	39
2.22 Eigenschaften linearer Funktionen	42
2.23 Anwendungen linearer Funktionen; Interpretation von k und d	43
2.24 Direkte Proportionalitätsfunktionen	43
2.25 Vergleich von linearer Funktionen	45
<u>2.3 Einige nichtlineare Funktionen</u>	45
2.31 Indirekte Proportionalitäten	45
2.32 Quadratische Funktionen	47

2.33 Proportionalitäten höherer Ordnung	49
2.34 Formeln und Funktionen	50
2.35 Funktionen als mathematische Modelle	50
<u>2.4 Reelle Funktionen in der 6.Klasse</u>	51
2.41 Monotonie und Extremstellen von Funktionen	52
2.42 Potenzfunktionen und Polynomfunktionen	53
2.43 Änderungsmaße von Funktionen	55
2.44 Veränderung von Funktionsgraphen	56
<u>2.5 Exponential- und Logarithmusfunktionen</u>	57
2.51 Exponentialfunktionen und ihre Graphen	57
2.52 Eigenschaften von Exponentialfunktionen	58
2.53 Anwendung von Exponentialfunktionen	59
<u>2.6 Winkelfunktionen</u>	64
2.61 Das Bogenmaß	64
2.62 Verallgemeinerung von $\sin x$, $\cos x$ und $\tan x$	66
2.63 Die Sinus-, Cosinus- und Tangensfunktion	67
2.64 Eigenschaften der Sinus- und Cosinusfunktion	68
2.65 Harmonische Schwingung	69
<u>2.7 Ergänzung zu Funktionen</u>	70
3. Notationsprobleme der Funktionenlehre in der Schule	72
3.1 Koordinaten- und Achsenbezeichnungen	72
3.2 Unterschied zwischen f und $f(x)$	73
3.3 Vermischung von Termdarstellung und Funktionsgleichung	74
3.4 Zuordnungspfeile	75
3.5 Lineare Funktionen	75
3.6 Extremstellen	76

4. Empirische Untersuchung	78
<u>4.1 Schriftliche Befragung</u>	78
4.11 Grundkompetenzen in den Aufgaben	80
4.12 Auswertung der Fragebögen	83
4.13 Analyse	91
<u>4.2 Mündliche Befragungen der Schüler/innen</u>	93
<u>4.3 Mündliche Befragungen der Studenten/innen</u>	116
<u>4.4 Gesamtresümée</u>	126
5. Literatur	128
6. Anhang	130
Lebenslauf	130
Sacherschließungsformular der Bibliothek für Mathematik	131

1. Grundkompetenzen zu funktionalen Abhängigkeiten

1.1 Einleitung

Die Idee der Entwicklung von Grundkompetenzen resultierte aus der Einführung der neuen Reifeprüfung. Das BIFIE (Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation und Entwicklung des österreichischen Schulwesens) setzte sich als Ziel eine Liste von Fähigkeiten zu erstellen, welche Schüler/innen bis zur Matura erwerben sollten, sodass sie die Reifeprüfung problemlos bewältigen können. Nicht nur in Mathematik, sondern auch in zahlreichen anderen Gegenständen will man durch diese Kompetenzen einen besseren Unterricht, der gezielt auf die Zentralmatura vorbereiten soll, erreichen.

Prinzipiell ist dieses Hintrainieren zu dem großen Tag eines/einer Schüler/in nicht schlecht, da nun wirklich durch die Grundkompetenzen das Verstehen im Unterricht in den Vordergrund gerückt wird. Vor einigen Jahren war es noch möglich, dass der/die Lehrer/in vor der Matura ähnliche Aufgaben den Schülern/innen geben konnte, um diese einzutrainieren. Dies funktioniert nicht mehr. Ohne ein ausgeprägtes Verständnis wird es kaum möglich sein, die Reifeprüfung zu bestehen.

Manche Lehrer/innen machen jedoch den Fehler, dass sie nur Musteraufgaben zur Matura mit den Schülern/innen einüben und nicht auf das Verstehen der Schüler/innen Wert legen. Es ist also ein bloßes „Teaching to the test“, das in den meisten Fällen keine kritische Auseinandersetzung mit dem Gelernten beinhaltet. Wichtiger wäre es jedoch von Grund auf auch einfachere Aufgaben zu erlernen und ein breiteres Spektrum von Aufgabenstellungen den Schülern/innen zur Verfügung zu stellen. Lehrer/innen können zwar 500 Musteraufgaben zu der neuen Reifeprüfung mit ihren Schülern/innen einüben, was tut man jedoch wenn die 501. Aufgabe zur Matura gestellt wird?

Daher ist meine Meinung, dass das Verstehen im Unterricht im Grunde die einzige Strategie ist, um bei der Matura zu bestehen. In der Schulbuchreihe „Mathematik

Verstehen“ von Malle u. a. wird zwischen Lernaufgaben und Prüfungsaufgaben unterschieden. Lernaufgaben dienen dem Erlernen des Stoffes, Prüfungsaufgaben der Kompetenzkontrolle. Wenn man etwas prüfen will, muss man es vorher erlernen.

Natürlich schadet es nicht Musteraufgaben zu trainieren, der Fokus sollte jedoch auf den Lernaufgaben liegen, sodass von Grund auf ein ausgeprägtes Verständnis bei Schülern/innen aufgebaut wird.

Die Grundkompetenzen spielen für den Verstehensprozess eine wesentliche Rolle. In der folgenden Arbeit findet man die Liste der Grundkompetenzen zu funktionalen Abhängigkeiten des BIFIE von 2012. Es kann sich laufend etwas ändern, da das „Projekt Zentralmatura“ ja bekanntlich noch nicht vollständig abgeschlossen ist. Über Termine und Umsetzung gibt es noch Gesprächsbedarf.

Die Liste der Grundkompetenzen werde ich anhand von Musteraufgaben, die ich einerseits selbst entwickelt und andererseits aus „Mathematik Verstehen“ herausgenommen habe, im Abschnitt 1.2 vervollständigen.

1.2 Liste der Grundkompetenzen

1.21 Funktionsbegriff, reelle Funktionen, Darstellungsformen und Eigenschaften

FA 1.1 Für gegebene Zusammenhänge entscheiden können, ob man sie als Funktionen betrachten kann

Aufgabe 1: Testergebnis von 5 Schülern/innen:

Name	Punkte
Sebastian	7
Tim	5
Isabella	7
Thomas	5
Nina	10

Ist es hier sinnvoll eine Funktion aufzustellen, wenn jedem/jeder Schüler/in genau eine Punkteanzahl zugeordnet werden soll? Begründe!

FA 1.2 Formeln als Darstellung von Funktionen interpretieren und dem Funktionstyp zuordnen können

Aufgabe 2: Gegeben sei die Funktion, die jeder Kantenlänge eines Würfels dessen Volumen zuordnet.

- 1) Gib einen Funktionsterm der Funktion an und zeichne den Graphen mit entsprechender Benennung der Achsen. Welcher Funktionstyp liegt vor?
- 2) Wie ändert sich das Volumen, wenn die Seitenlänge verdreifacht wird?
(Rechnung!)

Aufgabe 3: Der Flächeninhalt eines Kreises ist gegeben durch: $A = \pi \cdot r^2$

- 1) Welcher Funktionstyp liegt vor, wenn die Funktion A jedem Radius r den Flächeninhalt A(r) zuordnet? Zeichne den Graphen der Funktion!
- 2) Finde selbst eine bekannte Formel, die eine quadratische Funktion beschreiben kann? (Hinweis: Wähle notfalls eine Variable als Konstante!)

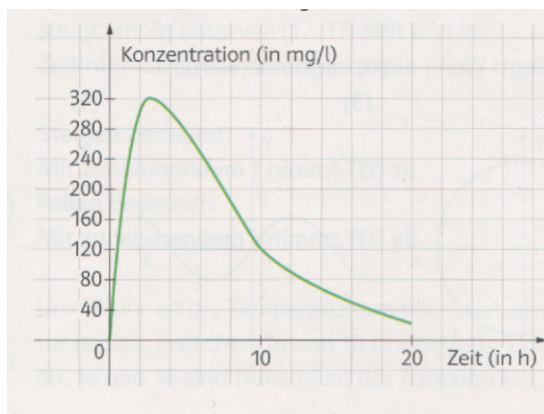
FA 1.3 Zwischen tabellarischen und grafischen Darstellungen funktionaler Zusammenhänge wechseln können

Aufgabe 4:

Uhrzeit	Temperatur
8.00	15°
13.00	23°
17.00	21°
24.00	3°

Ein Mann liest an seiner Hausecke zu verschiedenen Uhrzeiten verschiedene Temperaturen ab. Er möchte nun diesen Sachverhalt grafisch in einem Koordinatensystem darstellen. Kannst du ihm helfen?

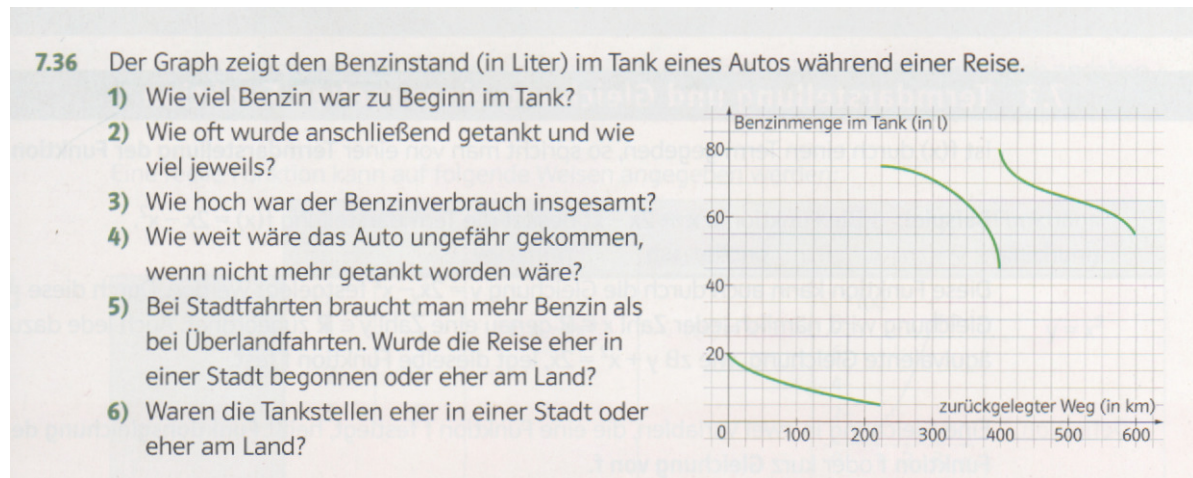
Aufgabe 5:



- 1) Was könnte diese Abbildung aussagen?
- 2) Fertige eine Tabelle für die Konzentration zu den Zeitpunkten 2,4,6,8,...,20 an.

(Abbildung aus „Mathematik Verstehen 5“)

FA 1.4 Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Funktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können



(aus „Mathematik Verstehen 5“)

Aufgabe 6:

Der Anhalteweg in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v ist gegeben durch:

$$s(v) = \frac{1}{200} v^2 + \frac{2}{100} v \quad (s(v) \text{ in m, } v \text{ in m/s})$$

Ermittle drei Wertepaare und erkläre was diese aussagen? Gib die dazugehörigen Anhaltewege auch in km/h an!

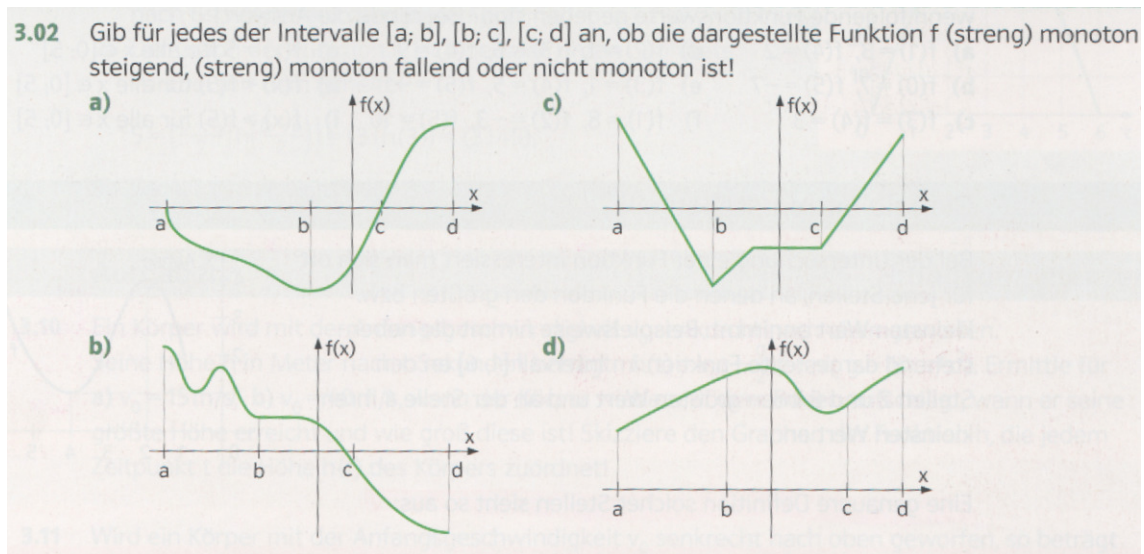
7.10 In der folgenden Tabelle ist die Überlebenschance in Abhängigkeit vom Alter für Nichtraucher und Raucher angegeben.

- 1) Stelle diesen Zusammenhang für Nichtraucher und Raucher in ein und demselben Koordinatensystem durch nicht unterbrochene Funktionsgraphen dar!
- 2) Beschreibe die Verläufe in Worten!
- 3) Für welches ungefähre Lebensalter unterscheiden sich die Überlebenschancen am stärksten?

Alter (in Jahren)	40	50	60	70	80	90	100
Überlebende Nichtraucher (in %)	100	98	93	84	62	35	1
Überlebende Raucher (in %)	100	95	83	60	27	5	0

(aus „Mathematik Verstehen 5“)

FA 1.5 Eigenschaften von Funktionen erkennen, benennen, im Kontext deuten und zum Erstellen von Funktionsgraphen einsetzen können: Monotonie, Monotoniewechsel (lokale Extrema), Wendepunkte, Periodizität, Achsensymmetrie, asymptotisches Verhalten, Schnittpunkte mit den Achsen



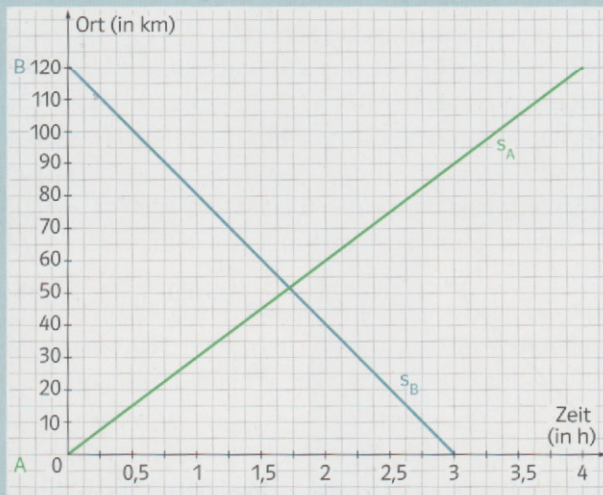
(aus „Mathematik Verstehen 6“)

Aufgabe 7: Richtig oder Falsch, kreise ein.

- | | | |
|---|---|---|
| i) Eine globale Extremstelle ist immer auch eine lokale Extremstelle. | R | F |
| ii) Eine lokale Extremstelle ist immer auch eine globale Extremstelle. | R | F |
| iii) Eine Funktion f kann nicht gleichzeitig monoton steigend und monoton fallend sein. | R | F |
| iv) Eine Funktion f die monoton steigend ist, ist auch immer streng monoton steigend. | R | F |

FA 1.6 Schnittpunkte zweier Funktionsgraphen grafisch und rechnerisch ermitteln und im Kontext interpretieren können

- 8.108** Ein Schiff fährt vom Hafen A zum Hafen B. Gleichzeitig mit ihm startet ein etwas schnelleres Schiff in B und fährt nach A. Beantworte anhand des Zeit-Ort-Diagramms:
- 1) Wie lange brauchen die beiden Schiffe jeweils für ihre Fahrt?
 - 2) Welche Geschwindigkeiten (in km/h) haben die beiden Schiffe?
 - 3) Wann und wo ungefähr fahren die beiden Schiffe aneinander vorbei?
 - 4) Wie weit ist das erste Schiff noch von B entfernt, wenn das zweite Schiff gerade in A ankommt?
 - 5) Die Kapitäne der beiden Schiffe besitzen Ferngläser, mit denen sie ungefähr 20 km weit sehen können. In welchem Zeitintervall können die beiden Kapitäne das jeweils andere Schiff sehen? Wo befinden sich die beiden Schiffe während dieses Zeitraums?



(aus „Mathematik Verstehen 5“)

Aufgabe 8:

Eine Pensionistenbusreise nach Italien kostet bei Anbieter A 1000 Euro, pro Reisender/e wird ein Nachlass von 20 Euro gewährt.

Bei Anbieter B kostet hingegen die Reise nur 500 Euro, dafür wird die Reise teurer je mehr Leute mitfahren möchten. Pro Fahrgast steigt der Preis um 30 Euro. (In beide Busse passen maximal 40 Leute). Ab welcher Personenzahl ist das Angebot A für den Kunden günstiger?

FA 1.7 Funktionen als mathematische Modelle verstehen und damit verständlich arbeiten können

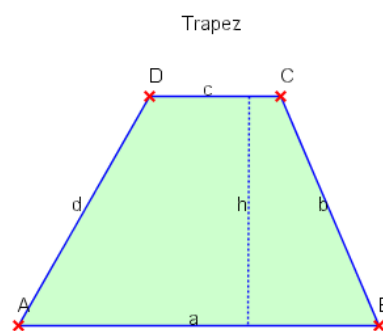
Aufgabe 9:

Sandra fährt mit dem Auto von Wien um 15 Uhr nach Salzburg weg und kommt um 18.00 dort an, von Wien nach Salzburg sind es in etwa 300 Kilometer, wie schnell fuhr Sandra im Durchschnitt mit dem Auto? Ist das realistisch, wenn ja warum?

- 1) Ermittle zudem eine sinnvolle Termdarstellung der Funktion s , die jedem Zeitpunkt t einen Ort $s(t)$ zuordnet! (Hinweis: Wähle 15 Uhr als $t = 0$)
- 2) Gib dazu ein passendes Intervall für t an!
- 3) Zeichne den Graphen und beschrifte die Achsen angemessen!

FA 1.8 Durch Gleichungen (Formeln) gegebene Funktionen mit mehreren Veränderlichen im Kontext deuten können, Funktionswerte ermitteln können

Aufgabe 10: Der Flächeninhalt eines Trapezes ist gegeben durch: $A = \frac{(a+c) \cdot h}{2}$



(Abb. aus Wikipedia)

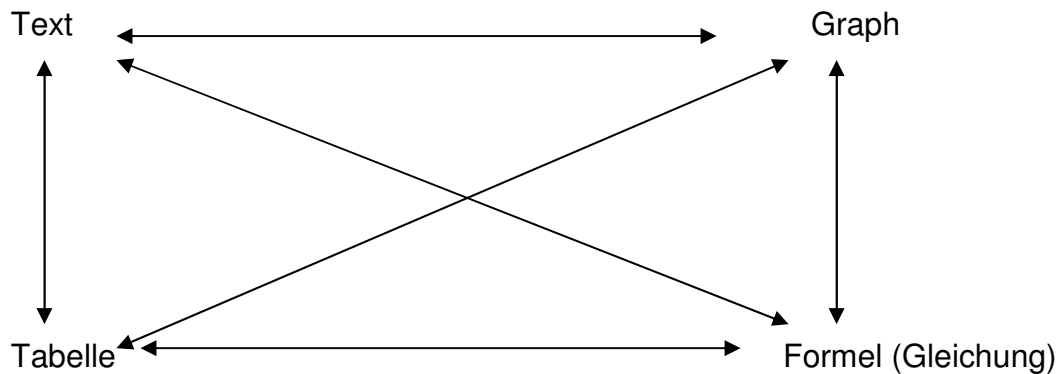
- i) Wie ändert sich A , wenn a wächst, aber c und h konstant bleiben!
- ii) Wie ändert sich A , wenn c wächst, aber a und h konstant bleiben!
- iii) Wie ändert sich A , wenn h wächst, aber a und c konstant bleiben!

FA 1.9 Einen Überblick über die wichtigsten Typen mathematischer Funktionen geben, ihre Eigenschaften vergleichen können

Aufgabe 11: Kreuze an, auf welche Funktionstypen die folgenden Aussagen zutreffen!

Aussage	Lineare Funktion $f(x) = k \cdot x + d$ $(k, d \in \mathbb{R})$	Potenzfunktion $f(x) = c \cdot x^n$ $(c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$	Exponentialfunktion $f(x) = c \cdot a^x$ $(c \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1)$
Bei gleicher Zunahme der Argumente ändern sich die Funktionswerte stets um den gleichen Prozentsatz vom Ausgangswert.	☐	☐	☐
Bei gleicher Zunahme der Argumente ändern sich die Funktionswerte stets um den gleichen Betrag	☐	☐	☐
Der Differenzenquotient ist in jedem Intervall gleich groß	☐	☐	☐

versuchen eine Formel aufzustellen oder auch eine Tabelle aufzulisten. Selbiges gilt auch bei einem der vier anderen Aspekte als Ausgangspunkt.



1.22 Lineare Funktion [$f(x) = k \cdot x + d$]

FA 2.1 Verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene lineare Zusammenhänge als lineare Funktionen erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können

Aufgabe 13:

Ein Fußballspieler eines Landesliga-Klubs erhält in der Saison ein Fixum von 900 Euro und eine Auflaufprämie von 80 Euro pro Spiel. Ermittle einen Funktionsterm, der angibt wie viel Geld der Spieler in einer Saison verdient. Wie viel verdient er, wenn er in einer Saison 28 Spiele absolviert?

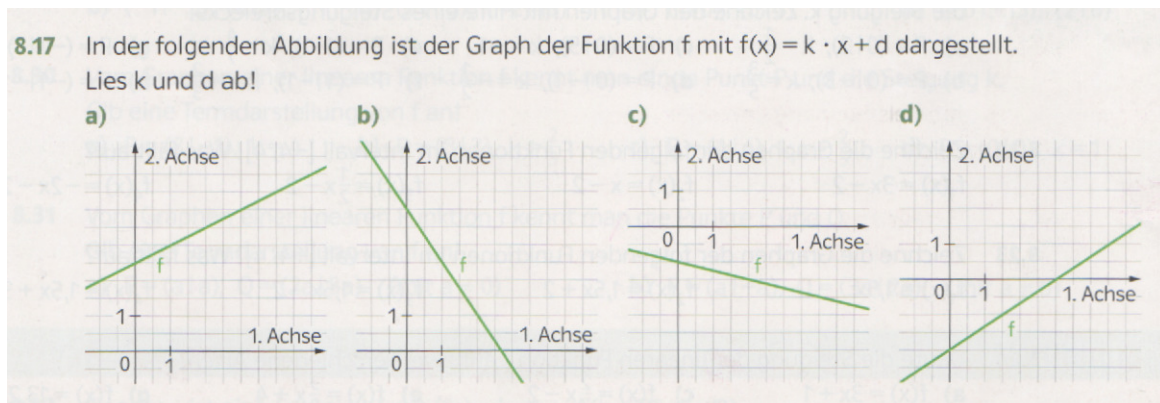
Aufgabe 14:

Die Tribünen eines Fußballstadions werden erneuert. Bis auf die Sitze der Haupttribüne werden alle anderen Sitzmöglichkeiten abgerissen. Die Haupttribüne umfasst 4000 Sitze, die Bauarbeiten verlaufen in etwa linear und pro Monat werden 1000 Sitze dazugebaut. Das Stadion soll 12 000 Plätze fassen. Ermittle eine Tabelle, die seit dem Beginn des Baues eine aktuelle Sitzplatzkapazität pro Monat angibt und finde dazu ein sinnvolles Intervall! Finde dazu auch eine passende Termdarstellung und zeichne den Graphen der Funktion!

FA 2.2 Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen linearer Funktionen Werte (paare) sowie die Parameter k und d ermitteln und im Kontext deuten können

Aufgabe 15:

Zwei Punkte einer linearen Funktion f sind gegeben: $P = (0,1)$ und $Q = (2,3)$.
Ermittle die Parameter k und d und gib einen Funktionsterm der Funktion f an!



(aus „Mathematik Verstehen 5“)

FA 2.3 Die Wirkung der Parameter k und d kennen und die Parameter in unterschiedlichen Kontexten deuten können

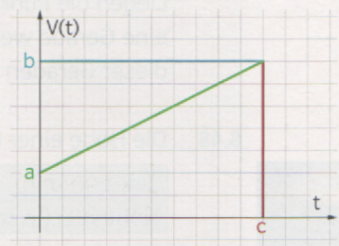
Aufgabe 16:

Die Funktion P der Form $P(m) = km + d$ soll eine monatliche Handyrechnung beschreiben.

- i) Wie ändert sich der Graph von P , wenn k wächst (und d unverändert bleibt)?
- ii) Wie ändert sich der Graph von P , wenn d wächst (und k unverändert bleibt)?

8.45 Eine Badewanne wird gleichmäßig mit Wasser voll gefüllt. Die Abhängigkeit des in der Wanne befindlichen Wasservolumens $V(t)$ (in Liter) von der Zeit t (in Minuten) ist rechts dargestellt.

- 1) Was bedeuten die Zahlen a , b , c ?
- 2) Wie viel Liter Wasser fließen pro Minute zu?
- 3) Fließt in der doppelten Zeit die doppelte Wassermenge zu?
- 4) Verdoppelt sich in der doppelten Zeit das Volumen des Wassers in der Wanne?
- 5) Übertrage die Abbildung in das Heft und zeichne zusätzlich den Graphen der Funktion $t \rightarrow \bar{V}(t)$ ein, wenn pro Minute doppelt so viel Wasser zufließt! Zeichne auch den Zeitpunkt d ein, zu dem in diesem Fall die Wanne voll wäre! Ist die Wanne in der halben Zeit wie vorhin voll?



(aus „Mathematik Verstehen 5“)

FA 2.4 Charakteristische Eigenschaften kennen und im Kontext deuten können.

$$f(x+1) = f(x) + k; \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = k = [f'(x)]$$

8.15 Beantworte für die folgende Funktion f , ohne zu rechnen:
Um wie viel wächst bzw. fällt $f(x)$, wenn x um 1 erhöht wird?

- | | | | |
|---------------------------|-----------------------------|--------------------------------|-----------------------|
| a) $f(x) = 2x + 1$ | c) $f(x) = -5x + 6$ | e) $f(x) = 1,8x + 0,5$ | g) $f(x) = x$ |
| b) $f(x) = 3x - 4$ | d) $f(x) = -4x - 10$ | f) $f(x) = -0,5x + 1,8$ | h) $f(x) = -x$ |

(aus „Mathematik Verstehen 5“)

FA 2.5 Die Angemessenheit einer Beschreibung mittels linearer Funktionen bewerten können

Aufgabe 17:

Wachstum einer Sonnenblume. Ist es deiner Meinung nach sinnvoll das Wachsen einer Sonnenblume mittels eines linearen Modells anzunähern? Wenn ja, warum?

Woche	Höhe der Sonnenblume
1	7 cm
2	16 cm
3	20 cm
4	26 cm
5	33 cm

FA 2.6 Direkte Proportionalität als lineare Funktion vom Typ $f(x) = k \cdot x$ beschreiben können

Aufgabe 18:

Entwickle eine Aufgabe zur Funktion K der Form $K(x) = 10x$ und interpretiere den Proportionalitätsfaktor deiner Aufgabenstellung!

- 8.57** Zwischen dem Argument x und dem Funktionswert $f(x)$ bestehe der folgende Zusammenhang. Ist $f(x)$ zu x direkt proportional? Wenn ja, gib den Proportionalitätsfaktor an!
- a)** $f(x) = 6,5 \cdot x$ **b)** $f(x) = 0,8 \cdot x$ **c)** $f(x) = x : 0,7$ **d)** $x = \frac{f(x)}{100}$

(aus „Mathematik Verstehen 5“)

Anmerkungen:

Ich möchte noch kurz zur Grundkompetenz FA 2.5 Anregungen geben. Um entscheiden zu können ob ein lineares Modell angemessen für eine Beschreibung ist, sind gewisse Kenntnisse nötig. Dazu könnte man auch die Schüler/innen selbstständig an einer Art Miniprojekt arbeiten lassen. Dieses Miniprojekt könnte so aussehen, dass Schüler/innen selbst feststellen sollen, ob eine Pflanze aus ihrem Garten linear wächst oder nicht. Um zu überprüfen, ob man das Wachsen einer Pflanze näherungsweise als lineares Modell betrachten kann, können Schüler/innen versuchen zunächst Wertepaare zu finden, indem sie pro Tag oder Woche die Höhe der Pflanze messen. Sie können nach dem Ermitteln der Wertepaare in weiterer Folge versuchen eine Funktionsgleichung einer linearen Funktion aufzustellen oder eine Gerade zu zeichnen. Gelingt dies, kann man von einem linearen Zusammenhang sprechen. Anhand dieses Projekts könnten sich die Schüler/innen geeignete „Werkzeuge“ auch für ähnliche Aufgaben aneignen.

1.23 Potenzfunktion mit $f(x) = a \cdot x^z + b$, $z \in \mathbb{Z}$, oder mit $f(x) = a \cdot x^{\frac{1}{2}} + b$

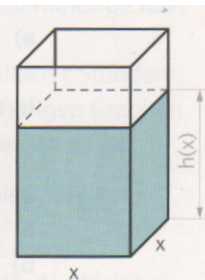
FA 3.1 Verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene Zusammenhänge dieser Art als entsprechende Potenzfunktionen erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können

9.42 Beim freien Fall eines Körpers ist der in der Zeit t zurückgelegte Weg ungefähr gegeben durch $s(t) = 5 \cdot t^2$ (t in Sekunden, $s(t)$ in Meter).

- 1) Zeichne den Graphen der Funktion $t \mapsto s(t)$ für $0 \leq t \leq 5$!
- 2) Auf das Wievielfache wächst der zurückgelegte Weg, wenn die Zeit verfünffacht wird? Begründe!

9.44 Eine Flüssigkeit mit dem Volumen 10 l wird in verschiedene Gefäße geleert, die jeweils die Gestalt eines quadratischen Prismas haben. Es sei $h(x)$ die Höhe der Flüssigkeit, wenn das Gefäß die Grundkantenlänge x hat.

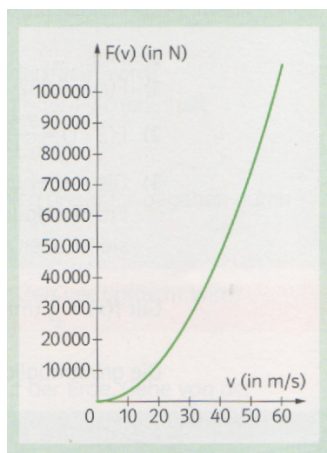
- 1) Stelle eine Formel für $h(x)$ auf!
- 2) Wie ändert sich $h(x)$, wenn x verdoppelt wird? Veranschauliche diesen Zusammenhang durch eine Zeichnung!
- 3) Zeichne den Graphen der Funktion h , die jeder Grundkantenlänge x die Flüssigkeitshöhe $h(x)$ zuordnet!



(aus „Mathematik Verstehen 5“)

FA 3.2 Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Potenzfunktionen Werte(paare) sowie die Parameter a und b ermitteln und im Kontext deuten können

Aufgabe 19:



Die Fliehkraft wird in Abhängigkeit der Geschwindigkeit in einem Graphen dargestellt, finde mindestens zwei Wertepaare und ermittle die Parameter a und b der Potenzfunktion.

(Abbildung aus „Mathematik Verstehen 5“)

FA 3.3 Die Wirkung der Parameter a und b kennen und die Parameter im Kontext deuten können

Aufgabe 20:

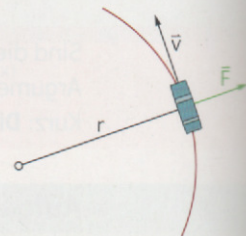
Der Preis eines wertvollen Fundes aus der Antike entwickelt sich seit Beginn seiner Ausgrabung durch die Funktion P mit $P(t) = a \cdot t^2 + b$, wobei t in Jahren angegeben wird. Was bedeutet der Parameter b in diesem Kontext? Wie wirkt sich eine Erhöhung von a auf den Preis des Fundes aus?

FA 3.4 Indirekte Proportionalität als Potenzfunktion vom Typ $f(x) = \frac{a}{x}$ (bzw. $f(x) = a \cdot x^{-1}$) beschreiben können

- 9.08** Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{x}$. Zeichne den Graphen von f und beantworte anhand der Zeichnung und durch Rechnung:
- Wenn x von 1 auf 8 wächst, welchen Bereich durchläuft dann $f(x)$?
 - Wenn x von -10 auf -2 wächst, welchen Bereich durchläuft dann $f(x)$?
 - Wenn x um höchstens 0,5 von 1 abweicht, um wie viel unterscheidet sich dann $f(x)$ höchstens von $f(1)$?

- 9.09** Wenn ein Auto der Masse m mit der Geschwindigkeit v eine Kurve vom Radius r durchfährt, so gilt für die Fliehkraft: $F = \frac{mv^2}{r}$ (F in Newton, m in kg, v in m/s, r in m). Wir nehmen an, dass ein 1500 kg schweres Auto mit 72 km/h (= 20 m/s) in eine Kurve fährt.

- Die Funktion $F: r \mapsto F(r)$ ordne jedem Kurvenradius r die Fliehkraft $F(r)$ zu. Gib eine Termdarstellung dieser Funktion an und zeichne deren Graphen für $50 \leq r \leq 200$!
- Zeige: Dem doppelten, dreifachen, halben, a -fachen Radius entspricht die Hälfte, ein Drittel, das Doppelte, der a -te Teil der Fliehkraft.

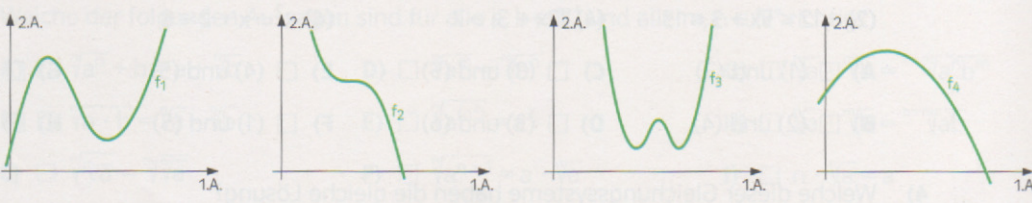


(aus „Mathematik Verstehen 5“)

1.24 Polynomfunktionen [$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i$ mit $n \in \mathbb{N}$]

FA 4.1 Typische Verläufe von Graphen in Abhängigkeit vom Grad der Polynomfunktion (er)kennen

6) Welchen Grad könnte die abgebildete Polynomfunktion haben?



A) ☐ Grad (f_1) = 2 **D)** ☐ Grad (f_2) = 2 **G)** ☐ Grad (f_3) = 2 **J)** ☐ Grad (f_4) = 2
B) ☐ Grad (f_1) = 3 **E)** ☐ Grad (f_2) = 3 **H)** ☐ Grad (f_3) = 3 **K)** ☐ Grad (f_4) = 3
C) ☐ Grad (f_1) = 4 **F)** ☐ Grad (f_2) = 4 **I)** ☐ Grad (f_3) = 4 **L)** ☐ Grad (f_4) = 4

(aus „Mathematik Verstehen 6“)

FA 4.2 Zwischen tabellarischen und grafischen Darstellungen von Zusammenhängen dieser Art wechseln können

Aufgabe 21:

x	f(x)
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

Von einer Polynomfunktion f kennt man nebenstehende Wertepaare. Zeichne einen möglichen Verlauf des Graphen der Funktion f anhand der Tabelle und beschreibe ihn! Beschreibe den Verlauf des Graphen in Worten!

- 3.18** Ein „mathematisches Pendel“ besteht aus einer sehr kleinen Kugel, die an einem masselosen Faden der Länge l hängt. Seine Schwingungsdauer ist durch $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$ gegeben (T in Sekunden, l in Meter, $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$ ist die Erdbeschleunigung). Zeichne den Graphen der Funktion $T: l \rightarrow T(l)$! Entspricht der doppelten Pendellänge die doppelte Schwingungsdauer?

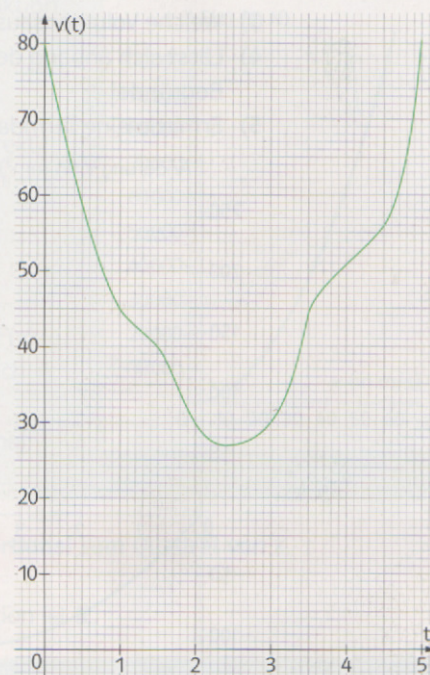
(aus „Mathematik Verstehen 6“)

FA 4.3 Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Polynomfunktionen

Funktionswerte, aus Tabellen und Graphen sowie aus einer quadratischen Funktionsgleichung Argumentwerte ermitteln können

- 9.29** Viele Lastkraftwagen besitzen einen Fahrtenschreiber, der die gefahrenen Geschwindigkeiten automatisch aufzeichnet (siehe die Abbildung unten). Ein Lastkraftwagen überquert eine Kuppe. Der nebenstehende Graph gibt die Geschwindigkeit v in Abhängigkeit von der Zeit t an (t in Minuten, v in km/h).

- 1) Lege eine Tabelle an, die $v(t)$ näherungsweise für $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ min angibt!
- 2) Entscheide, ob ein quadratisches Modell angemessen ist! Wenn ja, gib eine näherungsweise Term-darstellung der Funktion $t \mapsto v(t)$ an! Berechne $v(t)$ für $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ min und vergleiche mit den Werten aus 1)!



(aus „Mathematik Verstehen 6“)

- 9.15** Ermittle die Nullstellen von f und den Scheitel des Graphen von f ! Zeichne dann den Graphen!
- a) $f(x) = x^2 - 4$ b) $f(x) = -x^2 - x + 6$ c) $f(x) = -x^2 + 6x$ d) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

(aus „Mathematik Verstehen 5“)

FA 4.4 Den Zusammenhang zwischen dem Grad der Polynomfunktion und der Anzahl der Null-, Extrem- und Wendestellen wissen

Aufgabe 22:

Richtig oder Falsch:

Eine Polynomfunktion n-ten Grades hat mindestens eine Nullstelle.	R	F
Eine Polynomfunktion n-ten Grades hat mindestens eine Extremstelle.	R	F
Eine Polynomfunktion dritten Grades kann maximal zwei Wendestellen haben.	R	F

Beispiel für eine Aufgabe, in der mehrere Grundkompetenzen erforderlich sind:

Aufgabe 23:

Gegeben sei eine quadratische Funktion der Form $f(x) = x^2 + px + q$, wann hat die Funktion genau zwei Nullstellen? Wo liegt der Scheitel, wenn $p = 0$ ist?

1.25 Exponentialfunktion

$$[f(x) = a \cdot b^x \quad \text{bzw.} \quad f(x) = a \cdot e^{\lambda \cdot x} \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}^+ \quad \text{und} \quad \lambda \in \mathbb{R}]$$

FA 5.1 Verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene exponentielle Zusammenhänge als Exponentialfunktion erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können

Aufgabe 24:

Eine Bakterienkultur vergrößert sich pro Stunde um 3%, zu Beginn sind 1000 Bakterien vorhanden. Stelle ein Wachstumsgesetz und eine Tabelle für $t = 0, 1, 2, 3, 4$ auf!

Aufgabe 25:

Die Bevölkerung Asiens wird für das Jahr 2050 mit 12,5 Milliarden geschätzt, 2000 waren es noch 6,8 Milliarden. In den Berechnungen dient das Jahr 1950 als Ausgangswert. Ermittle das Wachstumsgesetz für die Bevölkerung Asiens!

FA 5.2 Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Exponentialfunktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können

4.05 Eine Flüssigkeit in einem Glas hat eine Temperatur von 80°C. Das Glas wird in Eiswasser getaucht. Dabei kühlt die Flüssigkeit in dem Glas pro Minute um ca. 12% ab. Es sei $T(n)$ die Temperatur der Flüssigkeit nach n Minuten.

- 1) Berechne $T(n)$ für $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$! Stelle eine Formel für $T(n)$ auf und zeichne den Graphen der Funktion $n \mapsto T(n)$!
- 2) Verallgemeinere die Formel für beliebige Zeitpunkte t und zeichne den Graphen der Funktion $t \mapsto T(t)$ für $0 \leq t \leq 5$!

(aus „Mathematik Verstehen 6“)

FA 5.3 Die Wirkung der Parameter a und b (bzw. $e^{\wedge}$) kennen und die Parameter in unterschiedlichen Kontexten deuten können

Aufgabe 26: Kreuze Richtiges an:

1) Welche der folgenden Graphen der Funktionen nähern sich unbegrenzt der negativen 1. Achse?

☐ $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

☐ $g(x) = 3^x$

☐ $h(x) = 1^x$

2) Welche Graphen liegen zum Graphen der Funktion f mit $f(x) = 4^x$ symmetrisch bezüglich der 2. Achse?

☐ $g(x) = 4x$

☐ $h(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

☐ $i(x) = x^4$

3) Für welche Funktionen nehmen die Funktionswerte unbeschränkt große Werte an?

☐ $f(x) = -10 \cdot 1000^x$

☐ $g(x) = -2 \cdot 15^x$

☐ $h(x) = 2^x$

FA 5.4 Charakteristische Eigenschaften ($f(x+1) = b \cdot f(x)$; $[e^x]' = e^x$) kennen und im Kontext deuten können

4.10 Beantworte für die folgende Funktion, ohne zu rechnen:
Auf das Wievielfache wächst bzw. fällt $f(x)$, wenn x um 1 erhöht wird?
a) $f(x) = 2^x$ **b)** $f(x) = 10 \cdot 1,5^x$ **c)** $f(x) = 0,5^x$ **d)** $f(x) = 100 \cdot 0,85^x$

(aus „Mathematik Verstehen 6“)

FA 5.5 Die Begriffe Halbwertszeit und Verdoppelungszeit kennen, die entsprechenden Werte berechnen und im Kontext deuten können

Aufgabe 27:

Ein Biologe stellt fest, dass in einem gewissen Waldstück die Population von Hasen pro Jahr um rund 13 Prozent steigen würde, wenn man nicht gezielt eingreifen würde. Nach wie vielen Jahren würde sich die Population der Hasen circa verdoppeln?

Warum glaubst du greift der Mensch hier ein?

4.58 Die Auflösung von wenig Zucker in einer großen Wassermenge geht näherungsweise nach der Formel $M(t) = M_0 \cdot a^t$ (mit $0 < a < 1$) vor sich. Dabei ist M_0 die in das Wasser geschüttete Zuckermenge und $M(t)$ die Menge des noch ungelösten Zuckers nach t Sekunden.

- Wie lange würde es dauern, bis der gesamte Zucker aufgelöst ist, wenn man annimmt, dass diese Formel den Auflösungsprozess exakt beschreibt?
- Nach welcher Zeit ist die Hälfte des Zuckers aufgelöst?
- Nach welcher Zeit sind 90% des Zuckers aufgelöst?

(aus „Mathematik Verstehen 6“)

FA 5.6 Die Angemessenheit einer Beschreibung mittels Exponentialfunktion bewerten können

4.75 Die Höhe des Bierschaums in einem Glas wurde alle 20s gemessen.

- Zeichne die zur Tabelle gehörigen Punkte in ein Diagramm ein!

Zeit t (in s)	0	20	40	60	80	100	120
Höhe (in mm)	30	26	23	19	17	15	13

- Begründe, warum man von einer näherungsweisen exponentiellen Abnahme der Schaumhöhe sprechen kann und gib eine passende Termdarstellung der Funktion $h: t \mapsto h(t)$ an!
- Was bedeuten die Zahlen in dieser Termdarstellung?
- Man spricht von „sehr guter Bierschaumhaltbarkeit“, wenn die Halbwertszeit des Schaumzerfalls mehr als 2min beträgt. Liegt im vorliegenden Fall sehr gute Bierschaumhaltbarkeit vor?

(aus „Mathematik Verstehen 6“)

1.26 Sinusfunktion, Cosinusfunktion:

FA 6.1 Grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene Zusammenhänge der Art $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ als allgemeine Sinusfunktion erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können

5.31 Eine harmonische Schwingung wird durch die periodische Funktion s mit $s(t) = r \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ beschrieben. s wird durch folgenden Graphen festgelegt. Kreuze die passenden Parameterwerte von s an!

a)

$r =$ ☐ -3 ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ 3
 $\omega =$ ☐ $0,5$ ☐ 2 ☐ $\frac{\pi}{2}$
 $\varphi =$ ☐ $\frac{\pi}{2}$ ☐ $-\frac{\pi}{2}$ ☐ $\frac{\pi}{4}$

b)

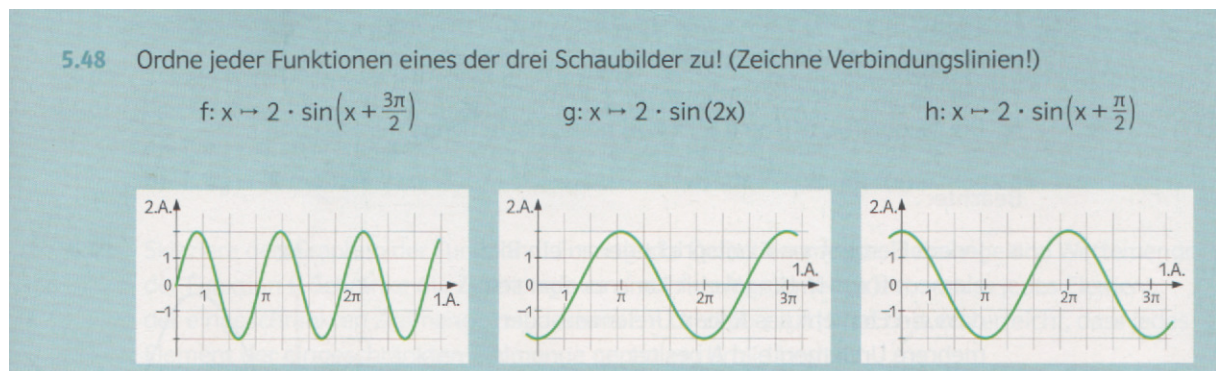
$r =$ ☐ $-\frac{2}{3}$ ☐ $\frac{3}{2}$ ☐ 1
 $\omega =$ ☐ 2 ☐ $-\frac{\pi}{8}$ ☐ $0,5$
 $\varphi =$ ☐ $\frac{\pi}{4}$ ☐ $-\frac{\pi}{8}$ ☐ $\frac{\pi}{8}$

(aus „Mathematik Verstehen 6“)

FA 6.2 Aus Graphen und Gleichungen von allgemeinen Sinusfunktionen

Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können

5.25 Nebenstehend ist eine harmonische Schwingung dargestellt. Entnimm daraus die Amplitude, die Schwingungsdauer, die Frequenz und die Elongation zum Zeitpunkt $t = 1$!



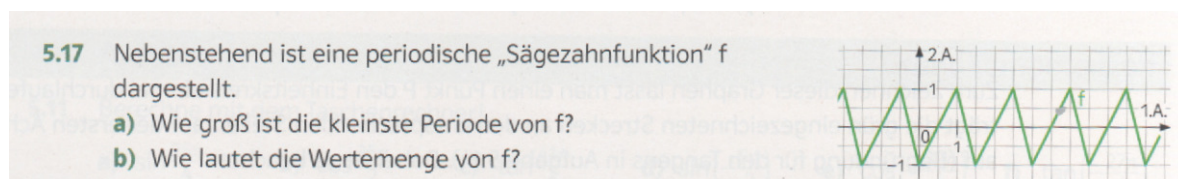
(aus „Mathematik Verstehen 6“)

FA 6.3 Die Wirkung der Parameter a und b kennen und die Parameter im Kontext deuten können

Aufgabe 28:

Der Graph der Sinusfunktion wird durch eine Stauchung mit dem Faktor 2 normal zur 2.Achse und einer anschließenden Streckung mit dem Faktor 3 normal zur 1.Achse verändert. Gib eine Termdarstellung der neu gewonnenen Funktion an. Wie ändert sich die Schwingungsdauer, Frequenz und die Amplitude?

FA 6.4 Periodizität als charakteristische Eigenschaft kennen und im Kontext deuten können



(aus „Mathematik Verstehen 6“)

FA 6.5 Wissen, dass $\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$

Aufgabe 29:

Die Sinusfunktion ist in dem Intervall _____ streng monoton steigend, während die Cosinusfunktion in dem Intervall _____ streng monoton steigend ist. Die Funktionswerte beider Funktionen werden nie größer als _____ und nie kleiner als _____. Der Graph der Cosinusfunktion geht aus dem Graphen der Sinusfunktion durch eine Verschiebung um _____ parallel zur _____ nach links hervor.

FA 6.6 Wissen, dass gilt: $[\sin(x)]' = \cos(x)$, $[\cos(x)]' = -\sin(x)$

Aufgabe 30: Leite $\sin(2x)$ und $-\cos(x)$ ab!

2. Exemplarischer Theorieaufbau der Funktionenlehre in der 5. und 6. Klasse anhand des Lehrbuchs „Mathematik Verstehen“

Das folgende Theoriewissen der Schüler/innen wird bei den Aufgaben, die sowohl in meiner Untersuchung als auch bei der zentralen Reifeprüfung relevant sind, vorausgesetzt, weil es für die Lösung notwendig ist. Im Unterricht sollte der/die Lehrer/in daher den Schülern/innen, wie ich bereits mehrmals erwähnt habe, ein gewisses Basiswissen übermitteln. Wichtige Begriffe kennen und anwenden können sollte das Um und Auf im Unterricht sein. Oftmals hilft es die Definitionen gut zu verstehen, um eine Aufgabe zu lösen.

In „Mathematik Verstehen“ wird die Theorie systematisch für Schüler/innen aufgebaut, es werden zu Beginn eines Kapitels eigens entwickelte Grundkompetenzen angeführt, die im Prinzip das Gleiche aussagen wie jene des BIFIE, nur manchmal ein bisschen genauer als diese sind. Dabei wurde versucht alles Wissenswerte zu Funktionen in den angeführten Kompetenzen abzudecken. Die Grundkompetenzen aus „Mathematik Verstehen“ dienen nicht nur der Hilfestellung für die Lernenden als Vorbereitung auf die zentrale Reifeprüfung, sondern auch als Hilfestellung für Lehrer/innen im Unterricht. Ich halte diese daher für essentiell und möchte sie auch stets zu Beginn jedes Abschnitts anführen. Unterschieden wird dabei zwischen Kompetenzen, die für die zentrale Reifeprüfung relevant sind und jene, die den restlichen Teil des Lehrplans betreffen. Kompetenzen für die Reifeprüfung werden mit ■ versehen, während der Erweiterungstoff mit □ gekennzeichnet wird.

Den Theorieteil sollte man in weiterer Folge aber nur als Kompendium sehen, da hier nicht alles bis ins letzte Detail erläutert werden kann.

2.1 Reelle Funktionen in der 5.Klasse

Grundkompetenzen

- Den Begriff der **reellen Funktion** kennen.
- Wichtige **Begriffe für reelle Funktionen** kennen: Stelle (Argument), Funktionswert, Definitionsmenge, Wertemenge, Termdarstellung, Funktionsgleichung, Wertetabelle, Graph.
- Wichtige **Sprech- und Schreibweisen** für Funktionen kennen.
- **Funktionsgraphen zeichnen und interpretieren** können.
- **Zeit – Ort – Funktionen** kennen.

Im Vordergrund stehen am Anfang Definitionen, Begriffe, Schreib- und Sprechweisen. Dabei müssen die Schüler/innen eine neue Sprache erlernen. Zuerst sagten sie zum Beispiel: „Der Preis einer Ware kostet pro Kilogramm 10 Euro.“ Nun jedoch schreibt man salopp: „ $P(x) = 10x$ “. Diese Umstellung und die Neuheit des Funktionsbegriffes sollte nicht unterschätzt werden und daher ist es wichtig grundlegende Begrifflichkeiten, Sprech- und Schreibweisen besonders zu forcieren.

Zunächst sollte der/die Lehrer/in in diesem Abschnitt, nach einem motivierenden Einstiegsbeispiel, den Begriff einer reellen Funktion definieren.

2.11 Wichtige Begriffe

Definition: Sei A eine Menge von reellen Zahlen. Wird jeder Zahl $x \in A$ genau eine Zahl $y \in \mathbb{R}$ zugeordnet, so heißt diese Zuordnung **(reelle) Funktion**.

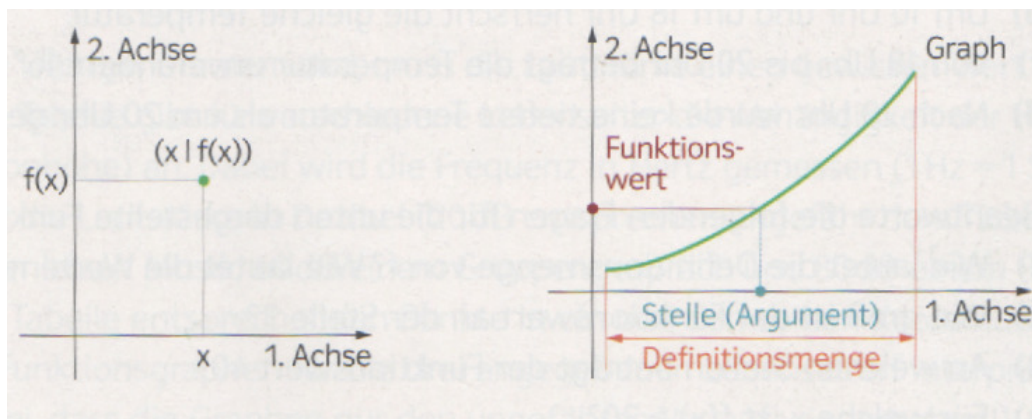
Ordnet eine Funktion f der Zahl x die Zahl y zu, so schreibt man: **$y = f(x)$**
 [Lies: y ist f von x]

x.....**Stelle** oder **Argument**

y = f(x).....**Funktionswert (Wert) der Funktion f an der Stelle x**

A = D_f.....**Definitionsmenge** der Funktion f

W_f = Menge aller Funktionswerte f(x) für x ∈ A.....**Wertemenge** von f



(Abbildung aus „Mathematik Verstehen 5“)

Definition: Die Menge **G = {(x | f(x)) | x ∈ A}** heißt **Graph der Funktion f**.

Der Graph G entspricht einer Punktmenge im Koordinatensystem. Man bezeichnet aber auch das Bild dieser Punktmenge als Graph.

Schreibweise:	dazugehörige Sprechweise:
$f: A \rightarrow \mathbb{R}$	f ist eine Funktion von A nach $\mathbb{R}$
$f: A \rightarrow \mathbb{R} \mid x \mapsto f(x)$	f ist eine Funktion von A nach $\mathbb{R}$ mit x wird zugeordnet f von x
$f: x \mapsto f(x)$	f x wird zugeordnet f von x
$f: x \mapsto y$	f x wird zugeordnet y
$x \mapsto f(x)$	x wird zugeordnet f von x
$f: y = f(x)$	f mit y gleich f von x

2.12 Zeichnen und Interpretieren von Funktionsgraphen

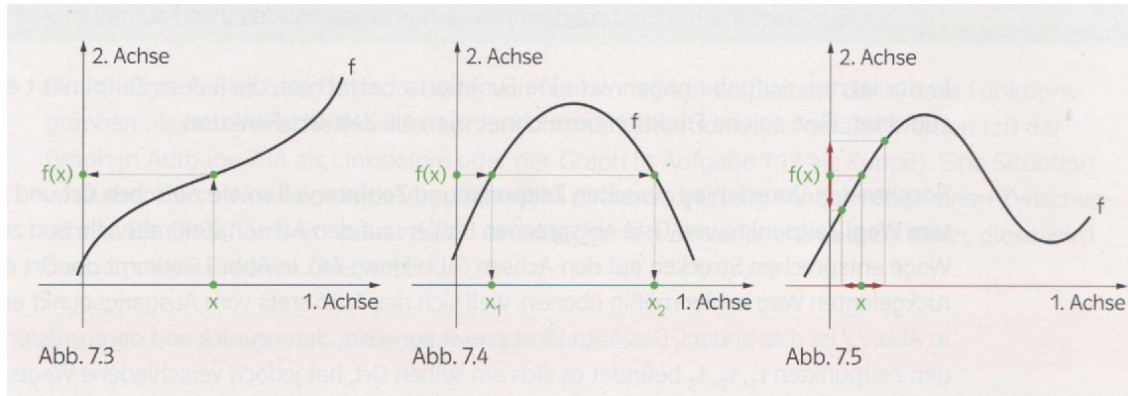
Nicht nur essentielle Begriffe sollten Schüler/innen kennen, sondern auch einen Funktionsgraphen zeichnen und interpretieren können. Aus einem Funktionsgraphen kann man vieles herauslesen, wichtig ist, dass Schüler/innen zwei Typen von Fragen beantworten können:

Zuordnung:

- ❖ Welcher Funktionswert gehört zu einem bestimmten Argument? (Abb. 7.3)
- ❖ Welche Argumente gehören zu einem bestimmten Funktionswert? (Abb. 7.4)

Veränderung:

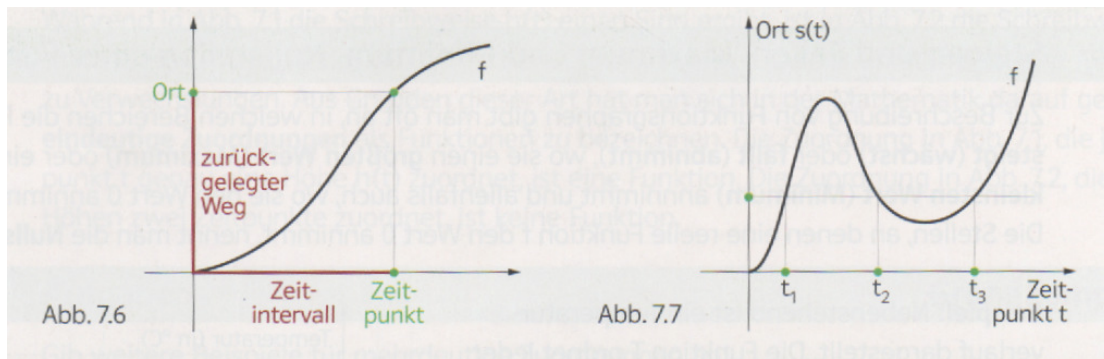
- ❖ Wie ändern sich die Funktionswerte, wenn die Argumente in bestimmter Weise verändert werden (Abb. 7.5)
- ❖ Wie ändern sich die Argumente, wenn die Funktionswerte in bestimmter Weise verändert werden? (Abb. 7.5)



(Abbildung aus „Mathematik Verstehen 5“)

Grundlegend ist ebenfalls, dass Schüler/innen das Steigen und Fallen, Maximum und Minimum und Nullstellen eines Funktionsgraphen erkennen und interpretieren können. Hier ist jedoch noch nicht von Monotonie die Rede, sondern das Steigen bedeutet, dass mit zunehmendem Argument die Funktionswerte zunehmen. Analog lässt sich das Fallen eines Funktionsgraphen formulieren; Begriffe wie (streng) monoton wachsend beziehungsweise fallend werden erst in der 6.Klasse eingeführt. Der Monotoniebegriff kommt hier also nur intuitiv zur Geltung.

In diesem Zusammenhang eignen sich Zeit-Ort Funktionen willkommen zur Interpretation. Von besonderer Bedeutung ist dabei, dass Schüler/innen zwischen dem Zeitpunkt und Zeitintervall sowie zwischen Ort und zurückgelegtem Weg unterscheiden können. Zeitpunkte und Orte entsprechen Stellen auf den Achsen, Zeitintervalle und der zurückgelegte Weg hingegen Strecken auf den Achsen.



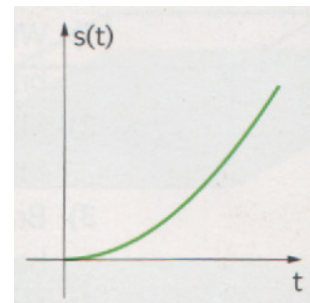
(aus „Mathematik Verstehen 5“)

Ein häufiger Fehler, der beim Interpretieren von Funktionsgraphen den Schülern/innen unterläuft ist der, dass Funktionsgraphen als photographische Abbilder aufgefasst werden.

Ein Beispiel dazu:

Die Abbildung zeigt eine Zeit-Ort-Funktion eines Autos.

Fährt das Auto eine Linkskurve?



(aus „Mathematik Verstehen 5“)

2.13 Termdarstellung und Gleichung einer reellen Funktion

Weitere essentielle Begriffe, die in der Funktionslehre unumgänglich sind, sind „Termdarstellung“ und „Funktionsgleichung“ einer Funktion.

Beispiel: Die Funktion $f: x \mapsto 2x - x^2$ besitzt die Termdarstellung $f(x) = 2x - x^2$.

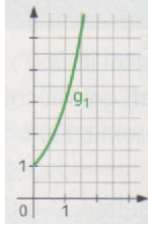
Diese Funktion kann auch durch die Gleichung $y = 2x - x^2$ festgelegt werden. Durch diese Gleichung wird nämlich jeder Zahl $x \in \mathbb{R}$ genau eine Zahl $y \in \mathbb{R}$ zugeordnet.

Auch jede dazu äquivalente Gleichung, wie z. B. $y + x^2 = 2x$, legt dieselbe Funktion f fest.

Definition: Eine Gleichung in zwei Variablen, die eine Funktion f festlegt, heißt **Funktionsgleichung der Funktion f** oder kurz **Gleichung von f** .

Zu beachten ist auch, dass reelle Funktionen auf verschiedene Weisen angegeben werden können. So kann eine Funktion mittels Wertetabelle, Zuordnungsvorschrift, Termdarstellung, Graph oder einer Funktionsgleichung angeführt werden.

Beispiel:

Wertetabelle		Zuordnungsvorschrift	Termdarstellung	Graph	Funktionsgleichung
x	3^x	$f: x \mapsto 3^x$	$f(x) = 3^x$		$y = 3^x$
0	1				
1	3				
2	9				

2.2 Lineare Funktionen

Grundkompetenzen

- **Lineare Funktionen f** mit $f(x) = k \cdot x + d$ und deren **Graphen** kennen.
- Die **Parameter k und d** innermathematisch und in Anwendungskontexten interpretieren können.
- **Charakteristische Eigenschaften einer linearen Funktion f** kennen und interpretieren können.
- Zwischen **Termdarstellung, Graph und Tabelle** linearer Funktionen wechseln können.
- Den **Schnittpunkt** zweier linearer Funktionsgraphen ermitteln und interpretieren können.
- **Direkte Proportionalitäten** durch lineare Funktionen der Form $f(x) = k \cdot x$ beschreiben können und den **Proportionalitätsfaktor k** interpretieren können.
- **Charakteristische Eigenschaften einer direkten Proportionalitätsfunktion f** kennen.
- Die **Angemessenheit linearer Modelle** bewerten können.

2.21 Lineare Funktionen und ihre Graphen

Definition:

Eine reelle Funktion $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = k \cdot x + d$ (mit $k, d \in \mathbb{R}$) heißt **lineare Funktion**.

Merksenswert ist auch dieser Satz:

Satz: Der Graph einer linearen Funktion f mit $f(x) = k \cdot x + d$ (mit $k, d \in \mathbb{R}$) ist eine Gerade.

Beweis:

Wir führen den Beweis in zwei Schritten:

1. Wir betrachten zuerst eine Funktion f_0 mit

$$f_0(x) = k \cdot x.$$

Wir können $k \neq 0$ voraussetzen, denn für $k = 0$ ist $f_0(x) = 0$ und der Graph von f ist somit eine Gerade (die 1. Achse).

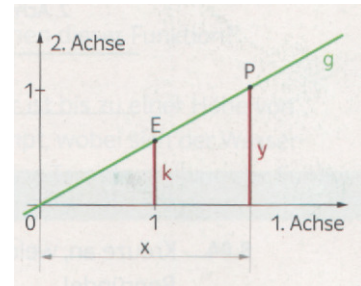
Es sei g die Gerade durch die Punkte $O = (0 \mid 0)$ und $E = (1 \mid k)$.

Für alle Punkte $P = (x \mid y)$ auf dieser Gerade gilt nach dem Strahlensatz $y : k = x : 1$, also $y = k \cdot x = f_0(x)$. Dies gilt nur für diese Punkte. Somit gilt:

$$g = \{ (x \mid f(x)) \mid x \in \mathbb{R} \}$$

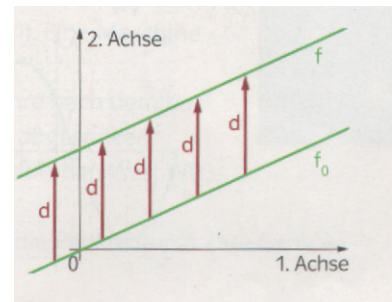
Dies ist aber nichts anderes als der Graph von f_0 .

Also ist der Graph von f_0 eine Gerade.



2. Wir betrachten nun eine Funktion f mit

$f_0(x) = k \cdot x + d$ mit $d \neq 0$. Der Graph von f geht aus dem Graphen von f_0 durch eine Parallelverschiebung um d in Richtung der zweiten Achse hervor (nach oben, falls $d > 0$; nach unten, falls $d < 0$).



Somit ist auch der Graph von f eine Gerade.

□

Nicht nur eine korrekte Definition einer linearen Funktion ist im Schulunterricht von Bedeutung, sondern auch die Deutungen von k und d sind merkwürdig.

Deutung von d : Es ist $f(0) = k \cdot 0 + d = d$. Die Zahl d ist also der **Funktionswert von f an der Stelle 0**. Der Graph von f schneidet die zweite Achse im Punkte $(0 \mid d)$.

Deutung von k : Man erkennt, dass sich der Graph von f mit steigendem k im Gegenuhrzeigersinn dreht. Die Zahl k ist also ein Maß dafür, wie stark der Graph von f steigt bzw. fällt. (Ist $k > 0$, so steigt die Gerade,

ist $k < 0$, so fällt sie.) Man bezeichnet k als **Steigung der Funktion f** (bzw. **Steigung der Geraden**).

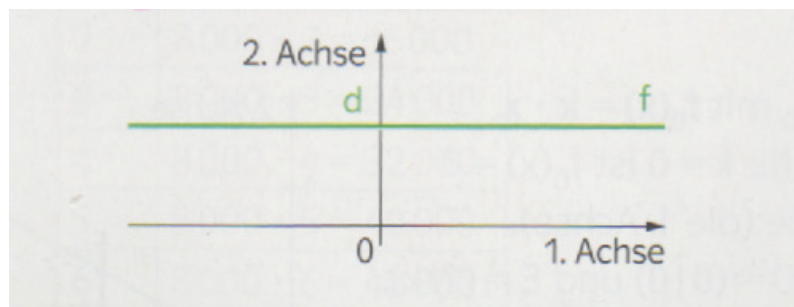
Für eine **lineare Funktion f** mit $f(x) = k \cdot x + d$ gilt:

k = Steigung der Funktion (Geraden)

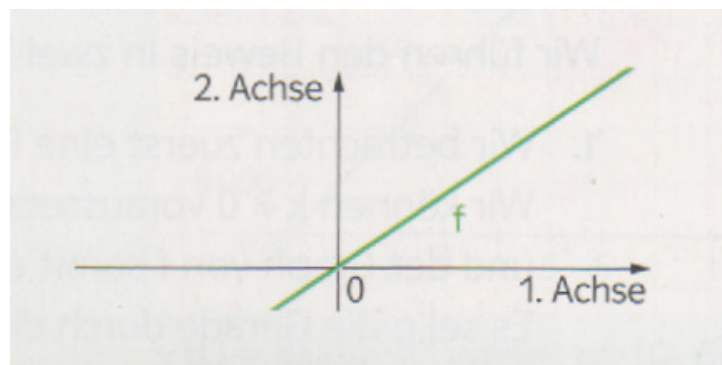
d = Funktionswert an der Stelle 0

Spezialfälle linearer Funktionen:

- ❖ Für **$k = 0$** ist **$f(x) = d$** . Man bezeichnet f als **konstante Funktion**. Der Graph ist parallel zur 1. Achse. Für $d = 0$ ist der Graph sogar identisch mit der 1. Achse.



- ❖ Für **$d = 0$** ist **$f(x) = k \cdot x$** und somit $f(0) = 0$.
Der Graph einer solchen Funktion ist eine Gerade durch den Ursprung.



2.22 Eigenschaften linearer Funktionen

Folgende Eigenschaften linearer Funktionen werden erläutert:

Satz: Ist f eine lineare Funktion mit $f(x) = k \cdot x + d$, dann gilt:

1) $f(x+1) = f(x) + k$

Wird das Argument um 1 vergrößert, dann ändert sich der Funktionswert um k .

2) $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = k \quad (x_2 \neq x_1)$

Das Verhältnis der Änderung der Funktionswerte zur Änderung der Argumente ist gleich der Steigung k .

Beweis: 1) $f(x+1) = k \cdot (x+1) + d = k \cdot x + k + d = (k \cdot x + d) + k = f(x) + k$

$$2) \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{k x_2 + d - (k x_1 + d)}{x_2 - x_1} = \frac{k x_2 + d - k x_1 - d}{x_2 - x_1} = \frac{k x_2 - k x_1}{x_2 - x_1} = \frac{k (x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = k$$

Bemerkung: Der Ausdruck $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ heißt auch **Differentialquotient**.

Mit Hilfe eines beliebigen Steigungsdreiecks kann man die Steigung ermitteln:

Merke

Die Steigung ist gleich dem Verhältnis b zu a („Senkrechte zu Waagrechte“). Die Steigung ist positiv, wenn f steigend ist, und negativ, wenn f fallend ist.

Ein weiterer wichtiger Merksatz ist:

Satz: Für eine lineare Funktion f mit $f(x) = k \cdot x + d$ gilt: $f(x + h) = f(x) + k \cdot h$

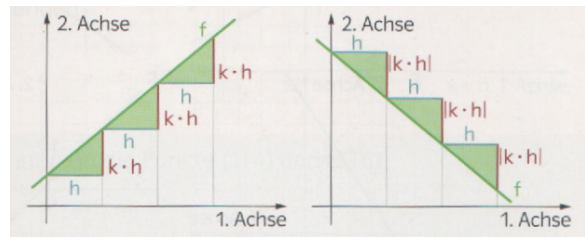
Beweis: $f(x + h) = k \cdot (x + h) + d = k \cdot x + k \cdot h + d = (k \cdot x + d) + k \cdot h = f(x) + k \cdot h$

□

Lineares Wachsen bzw. Abnehmen

bedeutet also:

Gleiche Zunahme der Argumente bewirkt stets gleiche Zu- bzw. Abnahme der Funktionswerte.



2.23 Anwendungen linearer Funktionen; Interpretation von k und d

Anwendungsaufgaben lassen sich bei linearen Zeit-Ort-Funktionen, Kostenfunktionen und Gebührenfunktionen finden.

k und d wird in diesen Anwendungssituationen unterschiedlich interpretiert:

Funktion $f: x \mapsto k \cdot x + d$	k	d
Lineare Zeit-Ort-Funktion	Geschwindigkeit	Entfernung vom Ausgangsort zum Zeitpunkt 0
Lineare Kostenfunktion	Kostenzuwachs pro Einheit	Fixkosten
Lineare Gebührenfunktion	Gebührenzuwachs pro E	Grundgebühr (Grundtarif)

2.24 Direkte Proportionalitätsfunktionen

Nach einem Einleitungsbeispiel wird folgende Definition angegeben:

Definition:

Ist f eine reelle Funktion mit $f(x) = k \cdot x$ (mit $k \neq 0$), so sagt man:

Die Funktionswerte $f(x)$ sind zu den Argumenten x direkt proportional.

Die Funktion f nennt man eine **direkte Proportionalitätsfunktion**.

Die Konstante k heißt **Proportionalitätsfaktor**.

Eine **direkte Proportionalitätsfunktion** ist eine **lineare Funktion** f mit

$f(x) = k \cdot x + d$ und $d = 0$.

Satz: Eigenschaften einer direkten Proportionalitätsfunktion mit $f(x) = k \cdot x$ ($k \neq 0$), dann gilt:

1) $f(a \cdot x) = a \cdot f(x)$

Dem a-fachen Argument entspricht der a-fache Funktionswert.

2) $f(x + y) = f(x) + f(y)$

Der Summe der Argumente entspricht die Summe der Funktionswerte.

3) $k = f(1)$

Der Proportionalitätsfaktor ist der Funktionswert an der Stelle 1.

4) $\frac{f(x)}{x} = k \quad (\text{für } x \neq 0)$

Der Proportionalitätsfaktor ist gleich dem (konstanten) Verhältnis von Funktionswert und Argument.

Beweis: 1) $f(a \cdot x) = k \cdot (a \cdot x) = a \cdot (k \cdot x) = a \cdot f(x)$

2) $f(x + y) = k \cdot (x + y) = k \cdot x + k \cdot y = f(x) + f(y)$

3) $f(1) = k \cdot 1 = k$

4) $\frac{f(x)}{x} = \frac{k \cdot x}{x} = k$

□

Satz:

Sind die Funktionswerte zu den Argumenten direkt proportional, dann sind auch die Argumente zu den Funktionswerten direkt proportional (wobei der neue Proportionalitätsfaktor der Kehrwert des alten ist). Kurz: **Die Funktionswerte und die Argumente sind zueinander direkt proportional.**

2.25 Vergleich von linearen Funktionen

Um zwei lineare Funktionen zu vergleichen, berechnet man zumeist den Schnittpunkt der beiden Funktionsgraphen, damit eine Aussage getroffen werden kann, ab wann eine Funktion die andere übertrifft. Dies kann an zahlreichen Aufgaben zu Kostenfunktionen, Gebührenfunktionen und Zeit-Ort-Funktionen eingeübt werden.

2.3 Einige nichtlineare Funktionen

Grundkompetenzen

- **Indirekte Proportionalität** durch Funktionen der Form $f(x) = \frac{k}{x}$ beschreiben können.
- **Charakteristische Eigenschaften** einer **indirekten Proportionalitätsfunktion** f kennen.
- **Quadratische Funktionen** und deren Graphen kennen.
- **Proportionalitäten höherer Ordnung** kennen.
- **Funktionen als mathematische Modelle** auffassen können, insbesondere die **Angemessenheit quadratischer Modelle** bewerten können.
- **Abschnittsweise definierte Funktionen** und **Sprungfunktionen** kennen.
- Aus **Formeln Funktionen herauslesen** können.

2.31 Indirekte Proportionalitätsfunktionen

Definition:

Gilt für eine reelle Funktion $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ stets $f(x) = \frac{k}{x}$ (mit $k \neq 0$, $x \neq 0$) so sagt man, **die Funktionswerte $f(x)$ sind zu den Argumenten x indirekt proportional**. Die Funktion f nennt man eine **indirekte Proportionalitätsfunktion** oder eine **Reziprofunktion**.

Satz:

Ist f eine indirekte Proportionalitätsfunktion mit $f(x) = \frac{k}{x}$ (mit $k \neq 0, x \neq 0$), dann gilt:

1) $f(a \cdot x) = \frac{f(x)}{a}$ (für $a \neq 0$) Dem a -fachen Argument entspricht der a -te Teil des Funktionswertes.

2) $k = f(1)$ Die Konstante k ist der Funktionswert an der Stelle 1.

3) $f(x) \cdot x = k$ Das Produkt aus Funktionswert und Argument ist konstant.

Beweis: 1) $f(a \cdot x) = \frac{k}{a \cdot x} = \frac{1}{a} \cdot \frac{k}{x} = \frac{1}{a} \cdot f(x) = \frac{f(x)}{a}$

2) $f(1) = \frac{k}{1} = k$

3) $f(x) \cdot x = \frac{k}{x} \cdot x = k$

□

Aus $f(x) = \frac{k}{x}$ (mit $k \neq 0, x \neq 0$) folgt $x = \frac{k}{f(x)}$. Es gilt somit:

Sind die Funktionswerte zu den Argumenten indirekt proportional, dann sind auch die Argumente zu den Funktionswerten indirekt proportional.

Kurz: **Die Funktionswerte und die Argumente sind zueinander indirekt proportional.**

2.32 Quadratische Funktionen

Definition:

Eine Funktion f mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ (mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$) bezeichnet man als **quadratische Polynomfunktion** oder kurz als **quadratische Funktion**. Den Graphen einer solchen Funktion bezeichnet man als **Parabel**.

Eine Parabel besitzt stets eine Symmetrieachse, die man als Achse der Parabel bezeichnet. Den tiefsten beziehungsweise höchsten Punkt S einer Parabel bezeichnet man als Scheitel der Parabel. Scheitelkoordinaten einer Parabel müssen sich Schüler/innen meines Erachtens nicht einprägen, da man sie auch notfalls im Buch nachschlagen kann.

Satz: 1) Der Graph einer Funktion f mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ ist eine Parabel, deren Achse zur 2. Achse parallel ist und die den Scheitel $S = \left(-\frac{b}{2a} \mid c - \frac{b^2}{4a} \right)$ besitzt. Diese Parabel ist für $a > 0$ nach oben offen und für $a < 0$ nach unten offen.

2) Der Graph einer Funktion f mit $f(x) = x^2 + px + q$ ist eine nach oben offene Parabel mit zur 2. Achse paralleler Achse und dem Scheitel

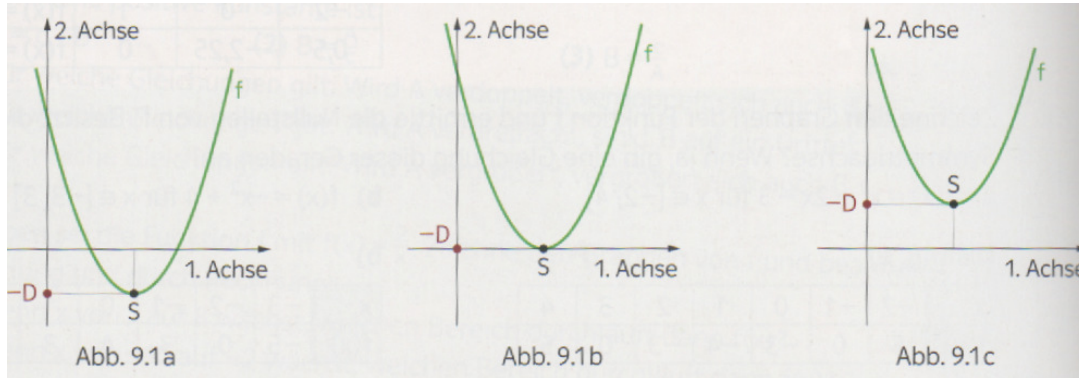
$$S = \left(-\frac{p}{2} \mid q - \frac{p^2}{4} \right)$$

Quadratische Gleichungen und quadratische Funktionen

Die Nullstellen einer quadratischen Funktion f mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ sind die Stellen mit $f(x) = 0$, also die Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$. Diese Gleichung kann man daher (zumindest näherungsweise) lösen, indem man den Graphen der Funktion f mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ zeichnet und eventuell vorhandene Nullstellen von f abliest.

Eine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$ kann man mittels Division durch a stets auf die Form $x^2 + px + q = 0$ bringen. Der Graph der Funktion f mit

$f(x) = x^2 + px + q$ ist eine nach oben offene Parabel. Je nach Lage dieser Parabel gibt es zwei Nullstellen, genau eine oder keine Nullstellen von f und somit zwei Lösungen, genau eine oder keine Lösung der Gleichung.



(Abbildung aus „Mathematik Verstehen 5“)

Den Scheitel einer Parabel kann man auch mit Hilfe der Diskriminante $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ anschreiben:

$$S = \left(-\frac{p}{2} \mid q - \frac{p^2}{4} \right) = \left(-\frac{p}{2} \mid -D \right) \text{ mit } D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

Daran erkennt man nochmals die drei Lösungsfälle:

Ist die Diskriminante größer 0, dann liegt der Scheitel unterhalb der 1.Achse und es gibt zwei Nullstellen der Funktion. (Abb. 9.1 a)

Ist die Diskriminante gleich 0, dann liegt der Scheitel auf der 1.Achse und es gibt genau eine Nullstelle der Funktion. (Abb. 9.1 b)

Ist die Diskriminante kleiner 0, dann liegt der Scheitel oberhalb der 1.Achse und es gibt keine Nullstellen der Funktion. (Abb. 9.1 c)

Man erkennt außerdem: Für positives D unterscheiden sich die beiden Nullstellen umso weniger, je kleiner D wird, bis sie schließlich für $D = 0$ zusammenfallen.

Quadratische Modelle findet man zum Beispiel beim Treibstoffverbrauch in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit bei Autos.

2.33 Proportionalitäten höhere Ordnung

Weitere wichtige nichtlineare Funktionen sind unter dem Sammelbegriff „Proportionalitäten höherer Ordnung“ zu finden. Hier einige Definitionen:

Definition:

Eine Funktion f mit $f(x) = c \cdot x^n$ (mit $n \in \mathbb{N}$, $c \neq 0$) heißt **Potenzfunktion vom Grad n** . Eine Funktion f mit $f(x) = \frac{c}{x^n}$ (mit $n \in \mathbb{N}$, $c \neq 0$) heißt **reziproke Potenzfunktion vom Grad n** .

Definition:

Gilt $f(x) = c \cdot x^2$ (mit $c \neq 0$), sagt man: **$f(x)$ ist direkt proportional zum Quadrat von x** .

Definition:

Gilt $f(x) = c \cdot x^3$ (mit $c \neq 0$), sagt man: **$f(x)$ ist direkt proportional zur dritten Potenz von x** .

Definition:

Gilt $f(x) = \frac{c}{x^n}$ (mit $c \neq 0$), sagt man: **$f(x)$ ist indirekt proportional zum Quadrat von x** .

Definition:

Gilt $f(x) = \frac{c}{x^3}$ (mit $c \neq 0$), sagt man: **$f(x)$ ist indirekt proportional zur dritten Potenz von x** .

Geeignete Aufgaben können zu abschnittsweise definierten Funktionen und Sprungfunktionen führen. Eine Zeit-Ort Funktion eines Zuges ist zum Beispiel eine typische Funktion, die abschnittsweise definiert wird, da man zwischen aktiver

Fahrzeit und dem Halt in der Regel unterscheidet. Eine Sprungfunktion hingegen taucht bei Parkgebühren in Abhängigkeiten der Zeit auf.

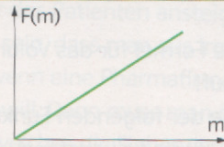
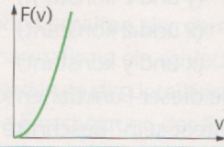
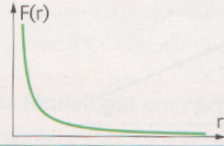
2.34 Formeln und Funktionen

In Formeln kann man Funktionen erkennen, wenn man einige der vorkommenden Variablen konstant hält. Hierzu ein Beispiel:

Beispiel 2: Fliehkraft eines Autos (Masse m , Geschwindigkeit v , Kurvenradius r):

$$F = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

Hält man jeweils zwei der Variablen m , v , r konstant, kann man in dieser Formel folgende Funktionen sehen:

Funktion	Typ	Graph
$F(m) = \frac{v^2}{r} \cdot m$ (v und r konstant)	$f(x) = k \cdot x$ $[k \triangleq \frac{v^2}{r}, x \triangleq m]$	
$F(v) = \frac{m}{r} \cdot v^2$ (m und r konstant)	$f(x) = c \cdot x^2$ $[c \triangleq \frac{m}{r}, x \triangleq v]$	
$F(r) = \frac{mv^2}{r}$ (m und v konstant)	$f(x) = \frac{c}{x}$ $[c \triangleq mv^2, x \triangleq r]$	

(aus „Mathematik Verstehen 5“)

2.35 Funktionen als mathematische Modelle

Ein **mathematisches Modell** beschreibt den zugrundeliegenden Sachverhalt im Allgemeinen nur **abschnittsweise** und **ungenau**.

Um einschätzen zu können, ob ein **mathematisches Modell** **gut** oder **schlecht** ist, muss man wissen, zu welchem **Zweck** das Modell verwendet wird.

Ein mathematisches Modell gibt einen realen Sachverhalt im Allgemeinen in **idealisierter Form** wieder, wobei gewisse **Annahmen** getroffen werden (auch wenn man weiß, dass diese in der Realität nicht genau erfüllt sind). Die Annahmen werden nach Möglichkeit so getroffen, dass das Modell **überschaubar** und **handhabbar** wird.

Ein und derselbe **Sachverhalt** kann durch **verschiedene mathematische Modelle** beschrieben werden.

Mit ein und demselben **mathematischen Modell** kann man **verschiedene Sachverhalte** beschreiben.

Diese Merksätze sollten die Schüler/innen auch bei manchen Aufgaben selbst erkennen können.

2.4 Reelle Funktionen in der 6.Klasse

Grundkompetenzen:

- **Definitionen des (strengen) monotonen Steigens und Fallens** kennen und anwenden können.
- Die **Definitionen globaler und lokaler Extremstellen** von Funktionen kennen.
- **Extremstellen quadratischer Polynomfunktionen** ermitteln können.
- **Potenzfunktionen und deren Graphen** kennen (einschließlich Wurfelfunktionen)
- **Polynomfunktionen und typische Graphen** solcher Funktionen kennen.
- **Änderungsmaße von Funktionen** kennen (absolute und relative Änderung, mittlere Änderungsrate, Änderungsfaktor).
- Die **Veränderung des Graphen** einer Funktion f beschreiben können, wenn man von $f(x)$ zu $\pm c \cdot f(x)$, $f(x) \pm c$, $f(x \pm c)$ bzw. $f(c \cdot x)$ übergeht.

2.41 Monotonie und Extremstellen von Funktionen

Nachdem wir nun die Funktionenlehre der 5.Klasse hinter uns gebracht haben, springen wir in die 6.Klasse und erweitern unsere Kenntnis über Funktionen. Nun ist erstmals von Monotonie, lokalen und globalen Extremstellen die Rede. Zu Beginn sollten grundlegende Begriffe geklärt werden:

Definition:

Es sei $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und M eine Teilmenge von A . Die Funktion f heißt

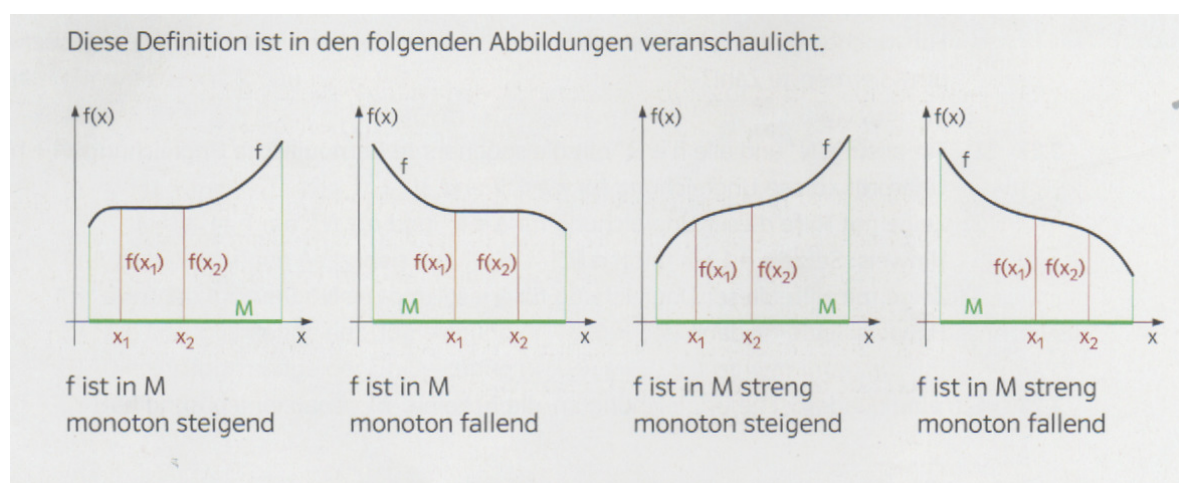
■ **monoton steigend in M** , wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

■ **monoton fallend in M** , wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

■ **streng monoton steigend in M** , wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

■ **streng monoton fallend in M** , wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Die Funktion f heißt **(streng) monoton in M** , wenn sie (streng) monoton steigend in M oder (streng) monoton fallend in M ist.



(Abbildung aus „Mathematik Verstehen 6“)

Definition: Es sei $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $M \subseteq A$.

Eine Stelle $p \in M$ heißt

■ **Maximumstelle von f in M** , wenn $f(x) \leq f(p)$ für alle $x \in M$,

■ **Minimumstelle von f in M** , wenn $f(x) \geq f(p)$ für alle $x \in M$.

Eine Stelle $p \in M$ heißt **Extremstelle von f in M** , wenn sie eine Maximumstelle oder Minimumstelle von f in M ist. Ist M der gesamte Definitionsbereich von f , so bezeichnet man p als **globale Extremstelle von f** .

Definition: Sei $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Eine Stelle $p \in A$ heißt

■ **lokale Maximumstelle von f** , wenn es eine Umgebung $U(p)$ gibt, sodass
 $f(x) \leq f(p)$ für alle $x \in U(p)$

■ **lokale Minimumstelle von f** , wenn es eine Umgebung $U(p)$ gibt, sodass
 $f(x) \geq f(p)$ für alle $x \in U(p)$

Eine Stelle $p \in A$ heißt **lokale Extremstelle von f** , wenn p eine lokale Maximumstelle oder eine lokale Minimumstelle von f ist.

2.42 Potenzfunktionen und Polynomfunktionen

Definition:

Eine reelle Funktion f mit $f(x) = c \cdot x^r$ ($c, r \in \mathbb{R}$) nennt man eine **Potenzfunktion**.

Der größtmögliche Definitionsbereich einer Potenzfunktion hängt vom Exponenten r ab. In „Mathematik Verstehen 6“ werden in weiterer Folge Graphen von Potenzfunktionen mit unterschiedlichen Exponenten vorgestellt und Eigenschaften formuliert.

Insbesondere:

Satz: Eigenschaften von Potenzfunktionen f mit Exponenten aus $\mathbb{N}^*$

- 1) Alle Graphen gehen durch die Punkte $(0 \mid 0)$ und $(1 \mid 1)$.
Für gerades n gehen alle Graphen durch $(-1 \mid 1)$, für ungerades n durch $(-1 \mid -1)$
- 2) f ist in $\mathbb{R}_+^0$ streng monoton steigend
- 3) f ist in $\mathbb{R}_-^0$ streng monoton fallend, falls n gerade ist, und streng monoton steigend, falls n ungerade ist.

Hier ergibt sich die Gelegenheit, die folgenden Begriffe einzuführen:

Definition: Eine reelle Funktion $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

- gerade, wenn für alle $x \in A$ gilt: $f(-x) = f(x)$
- ungerade, wenn für alle $x \in A$ gilt: $f(-x) = -f(x)$

Der Graph einer geraden Funktion ist symmetrisch bezüglich der 2.Achse, der Graph einer ungeraden Funktion symmetrisch bezüglich des Ursprungs.

Nun kann man auch die Wurzelfunktionen von der Form

$f: \mathbb{R}_+^0 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt[n]{x}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) definieren.

Diese sind spezielle Potenzfunktionen, weil $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ ist.

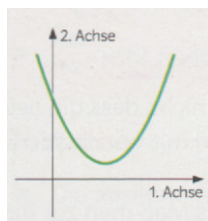
Diese Funktionen sind streng monoton steigend in $\mathbb{R}_+^0$.

Alle Graphen gehen durch die Punkte $(0 \mid 0)$ und $(1 \mid 1)$.

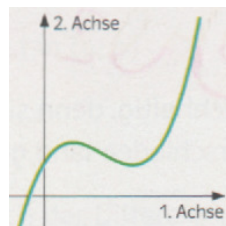
Weiters definiert man Polynomfunktionen:

Definition: Eine reelle Funktion f mit $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ (wobei $n \in \mathbb{N}$, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$) heißt **Polynomfunktion**. Ist $a_n \neq 0$, so bezeichnet man f als **Polynomfunktion vom Grad n** .

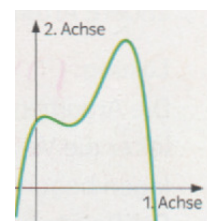
Der Graph einer Polynomfunktion vom Grad 2 ist eine Parabel, der Graph einer Polynomfunktion vom Grad 3 hat meist die Gestalt einer S-Kurve und der einer Polynomfunktion vom Grad 4 meist die Gestalt einer Doppel-S-Kurve. Es sind aber auch „Entartungen“ möglich, bei denen diese Gestalten nicht mehr zu sehen sind.



Grad 2



Grad 3



Grad 4

(Abbildungen aus „Mathematik Verstehen 6“)

2.43 Änderungsmaße von Funktionen

Definition: Sei f auf einem Intervall $[a ; b]$ definierte Funktion. Die reelle Zahl

i) $f(b) - f(a)$ heißt **absolute Änderung** (oder kurz Änderung) von f in $[a ; b]$

ii) $\frac{f(b) - f(a)}{f(a)}$ heißt **relative Änderung** von f in $[a ; b]$

iii) $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ heißt **mittlere Änderungsrate** (oder Differenzenquotient) von f in $[a ; b]$

iv) $\frac{f(b)}{f(a)}$ heißt **Änderungsfaktor** von f in $[a ; b]$

Hier kann man die folgenden Sprechweisen forcieren:

- Die absolute Änderung ist gleich der Differenz der Funktionswerte.
- Die relative Änderung ist gleich dem Verhältnis der Änderung der Funktionswerte zum Ausgangsfunktionswert.
- Die mittlere Änderung (der Differenzenquotient) ist gleich dem Verhältnis der Änderung der Funktionswerte zur Änderung der Argumente.
- Der Änderungsfaktor gibt an, mit welchem Faktor der Ausgangsfunktionswert multipliziert wird, um den Endfunktionswert zu erhalten.

$$[\text{Es gilt nämlich: } f(a) \cdot \frac{f(b)}{f(a)} = f(b)]$$

2.44 Veränderung von Funktionsgraphen

Durch dementsprechende Aufgaben stößt man auf folgende Erkenntnisse:

	Für $c > 0$ geht der Graph von g aus dem Graphen von f so hervor:
$g(x) = c \cdot f(x)$	Streckung bzw. Stauchung mit dem Faktor c normal zur 1.Achse (Streckung für $c > 1$, Stauchung für $0 < c < 1$)
$g(x) = -c \cdot f(x)$	Streckung bzw. Stauchung mit dem Faktor c normal zur 1.Achse und anschließend Spiegelung an der 1.Achse
$g(x) = f(x) + c$	Verschiebung um c parallel zur 2.Achse nach oben
$g(x) = f(x) - c$	Verschiebung um c parallel zur 2.Achse nach unten
$g(x) = f(x - c)$	Verschiebung um c parallel zur 1.Achse nach rechts
$g(x) = f(x + c)$	Verschiebung um c parallel zur 1.Achse nach links
$g(x) = f(c \cdot x)$	Streckung bzw. Stauchung mit dem Faktor $1/c$ normal zur 2.Achse (Stauchung für $c > 1$, Streckung für $0 < c < 1$)

2.5 Exponential- und Logarithmusfunktion

Grundkompetenzen

- **Exponentialfunktionen** f mit $f(x) = c \cdot a^x$ und deren **Graphen** kennen.
- Die **Parameter** c und a innermathematisch und in Anwendungskontexten **interpretieren**
- **Charakteristische Eigenschaften** einer Exponentialfunktion f kennen und interpretieren können.
- Exponentialfunktionen auf **Wachstums- und Abnahmeprozesse** anwenden können. Die Begriffe der **Verdoppelungs-** und **Halbwertszeit** erläutern können.
- **Logarithmusfunktionen** f mit $f(x) = c \cdot {}^a\log x$ und deren **Graphen** kennen.

2.51 Exponentialfunktionen und ihre Graphen

Als Einstiegsbeispiel für die Exponentialfunktionen eignet sich das Wachsen einer Bakterienkultur.

Definition:

Eine reelle Funktion $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = c \cdot a^x$ ($c \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+$) heißt **Exponentialfunktion** mit der Basis a .

Beachte: Bei einer Exponentialfunktion muss $a > 0$ vorausgesetzt werden, weil die Potenz a^x für $a \leq 0$ nicht immer definiert ist. Z. B. ist $(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$ oder 0^0 nicht definiert.

Mit Hilfe eines Computers kann man die Graphen einiger Exponentialfunktionen der Form $f(x) = a^x$ für verschiedene Werte von a zeichnen lassen und daran gewisse Eigenschaften erkennen:

Satz: Eigenschaften von Exponentialfunktionen f mit $f(x) = c \cdot a^x$ und $c > 0$

1) Alle Funktionswerte sind positiv und alle Graphen gehen durch den Punkt $(0 \mid c)$.

2) Die Funktionen sind

- **streng monoton steigend**, wenn $a > 1$ ist,
- **streng monoton fallend**, wenn $0 < a < 1$ ist,
- **konstant**, wenn $a = 1$ ist.

3) Die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = c \cdot a^x$ und $g(x) = c \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^x$ liegen **symmetrisch bezüglich der 2.Achse**.

Weitere Eigenschaften:

- ❖ Für $a > 0$ nähern sich die Graphen unbegrenzt der negativen 1.Achse, für $0 < a < 1$ unbegrenzt der positiven 1.Achse.
- ❖ Für $c > 0$ nehmen die Funktionswerte unbeschränkt große und für $c < 0$ unbeschränkt kleine Werte an.

Deutung von c : Wegen $f(0) = c \cdot a^0 = c$ ist der Funktionswert von f an der Stelle 0. Der Graph von f schneidet die zweite Achse im Punkt $(0 \mid c)$.

Deutung von a : Die Basis a ist ein Maß für die Stärke des Steigens beziehungsweise Fallens der Funktion f . Falls $a > 1$ ist, steigt f umso stärker, je größer a ist. Falls $0 < a < 1$ ist, fällt f umso stärker, je kleiner a ist.

2.52 Eigenschaften von Exponentialfunktionen

Satz:

Ist f eine Exponentialfunktion mit $f(x) = c \cdot a^x$ ($c \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+$), dann gilt:

$$f(x+1) = f(x) \cdot a$$

Wird das Argument um 1 vergrößert, dann ändert sich der Funktionswert mit dem Faktor a .

Beweis: $f(x + 1) = c \cdot a^{x+1} = c \cdot (a^x \cdot a) = (c \cdot a^x) \cdot a = f(x) \cdot a$ □

Satz:

Ist f eine Exponentialfunktion mit $f(x) = c \cdot a^x$ ($c \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+$), dann gilt für alle

$$h \in \mathbb{R}: \quad \mathbf{f(x + h) = f(x) \cdot a^h}$$

Beweis: $f(x + h) = c \cdot a^{x+h} = c \cdot (a^x \cdot a^h) = (c \cdot a^x) \cdot a^h = f(x) \cdot a^h$ □

Setzen wir $a^h = 1 \pm \frac{p}{100}$, dann geht die Gleichung $\mathbf{f(x + h) = f(x) \cdot a^h}$ über in:

$$\mathbf{f(x + h) = f(x) \cdot (1 \pm \frac{p}{100})}$$

Dies bedeutet eine Erhöhung bzw. Verminderung von $f(x)$ um p %. Wir halten fest:

Exponentielles Wachsen bzw. Abnehmen bedeutet:

Gleiche Zunahme der Argumente [um h] bewirkt stets eine Erhöhung bzw. Verminderung der Funktionswerte mit dem gleichen Faktor [a^h] bzw. um den gleichen Prozentsatz [$p\%$] vom jeweiligen Ausgangswert.

2.53 Anwendung von Exponentialfunktionen

Für exponentielle Wachstums- und Abnahmeprozesse schreibt man in der Praxis meist $N(0)$ statt c , wenn sich eine Größe N mit der Zeit exponentiell verändert.

$$\mathbf{N(t) = N_0 \cdot a^t} \quad \text{mit } \mathbf{N_0 = N(0)}$$

- ❖ Für $\mathbf{a > 1}$ liegt ein **exponentieller Wachstumsprozess** vor.
- ❖ Für $\mathbf{0 < a < 1}$ liegt ein **exponentieller Abnahmeprozess** vor.
- ❖ $\mathbf{N_0 = N(0)}$ ist der Anfangswert von N (Wert zum Zeitpunkt 0).

Ein wichtiger exponentieller Abnahmeprozess ist zum Beispiel der radioaktive Zerfall. Beim radioaktiven Zerfall zerfallen die Atome eines radioaktiven Stoffes, dh. sie wandeln sich (unter Aussendung von Strahlung) in Atome eines anderen Stoffes um.

Die Anzahl der noch unzerfallenen Atome nimmt dabei exponentiell ab. Ist $N(t)$ die Anzahl der zum Zeitpunkt t noch unzerfallenen Atome und $N_0 = N(0)$ die Anzahl der unzerfallenen Atome zu Beobachtungsbeginn, so gilt:

Radioaktives Zerfallsgesetz:

$$N(t) = N_0 \cdot a^t \quad (\text{mit } 0 < a < 1)$$

Da die Masse des noch vorhandenen radioaktiven Stoffes zur Anzahl der noch zerfallenen Atome direkt proportional ist, gilt ein analoges Zerfallsgesetz für die Masse.

Zu den exponentiellen Wachstums- bzw. Abnahmeprozessen treten in „Mathematik Verstehen 6“ drei wichtige Typen von Aufgaben auf. Als Erstes sollen Schüler/innen in der Lage sein ein Wachstums- bzw. Abnahmengesetz anhand zwei gegebener Wertepaare zu finden. Ein weiterer Typ ist das Ermitteln des Exponenten. Die dritte Aufgabenstellung beschäftigt sich mit der Verdoppelungs- bzw. Halbwertszeit.

Wird ein exponentieller Wachstums- bzw. Abnahmeprozess durch $N(t) = N_0 \cdot a^t$ beschrieben, so nennt man die Zeit t , in der N jeweils verdoppelt bzw. halbiert wird, die Verdoppelungszeit bzw. Halbwertszeit des Prozesses. Die Halbwertszeit spielt insbesondere beim radioaktiven Zerfall eine Rolle, weil sie ein Maß für die Schnelligkeit des Zerfalls ist.

Durch den radioaktiven Zerfall kann man beispielsweise auch das Alter von Fossilien bestimmen.

Darstellung von Wachstums- und Abnahmevorgängen mit Hilfe der Euler'schen Zahl

Ein exponentieller Wachstums- bzw. Abnahmeprozess sei gegeben durch:

$$N(t) = N_0 \cdot a^t$$

In vielen Anwendungen nimmt man anstelle der Basis die Euler'sche Zahl e als Basis.

Man schreibt:

Wachstumsprozess:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$$

$\lambda \in \mathbb{R}^+$ heißt Wachstumskonstante.

Abnahmeprozess:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

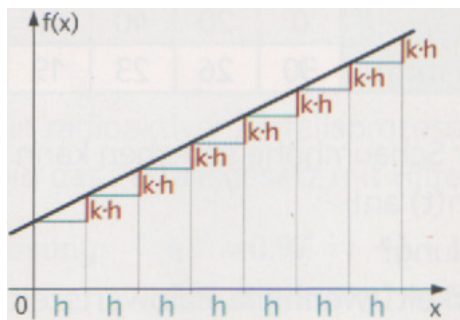
$\lambda \in \mathbb{R}^+$ heißt Abnahmekonstante, beim radioaktiven Zerfall auch Zerfallskonstante.

Exponentieller Wachstumsprozess	$N(t) = N(0) \cdot a^t$ mit $a > 1$	$N(t) = N(0) \cdot e^{\lambda t}$ mit $\lambda > 0$
Exponentieller Abnahmeprozess	$N(t) = N(0) \cdot a^t$ mit $0 < a < 1$	$N(t) = N(0) \cdot e^{-\lambda t}$ mit $\lambda > 0$

Vergleich von linearen Funktionen und Exponentialfunktionen:

Lineares Wachstum

$$f(x) = k \cdot x + d \quad (\text{mit } k > 0)$$



Gleiche Zunahme der Argumente bewirkt stets gleiche Zunahme der Funktionswerte:

$$f(x + h) = f(x) + k \cdot h$$

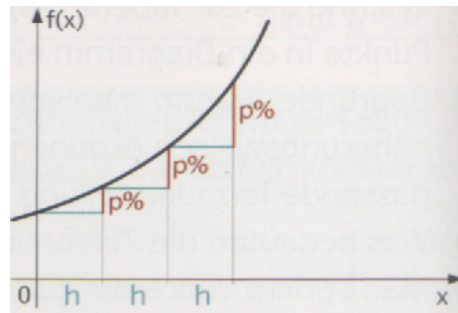
Die **absolute Änderung** $f(x + h) - f(x)$

hängt nur von der Intervalllänge h , aber nicht von der Stelle x ab:

$$f(x + h) - f(x) = k \cdot h$$

Exponentielles Wachstum

$$f(x) = c \cdot a^x \quad (\text{mit } a > 1)$$



Gleiche Zunahme der Argumente bewirkt stets Zunahme der Funktionswerte mit dem gleichen Faktor bzw. um den gleichen Prozentsatz:

$$f(x + h) = f(x) \cdot a^h = f(x) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

Die **relative Änderung** $\frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)}$

hängt nur von der Intervalllänge h , aber nicht von der Stelle x ab:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)} = a^h - 1$$

Der **Differenzenquotient** $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

ist konstant, hängt also weder von der Intervalllänge h noch von der Stelle x ab:

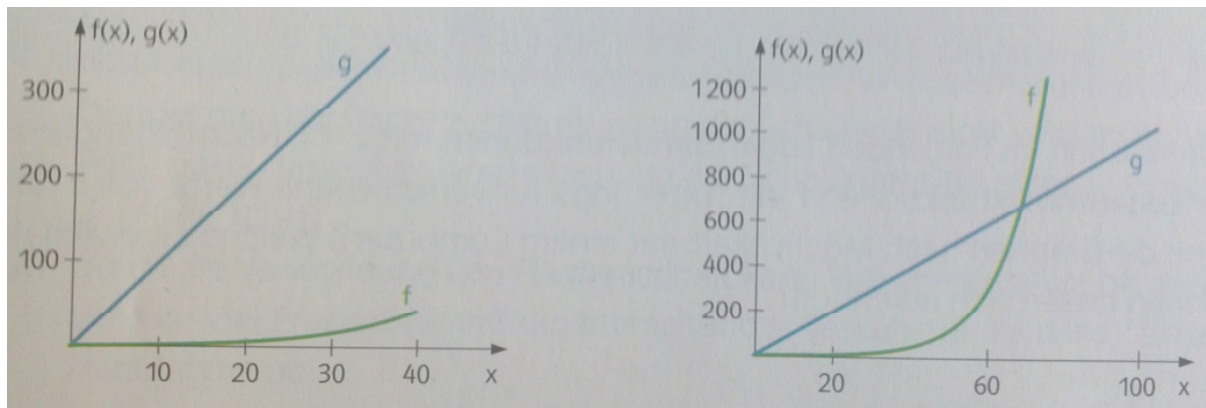
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k$$

Der **Änderungsfaktor** $\frac{f(x+h)}{f(x)}$

hängt nur von der Intervalllänge h ab:

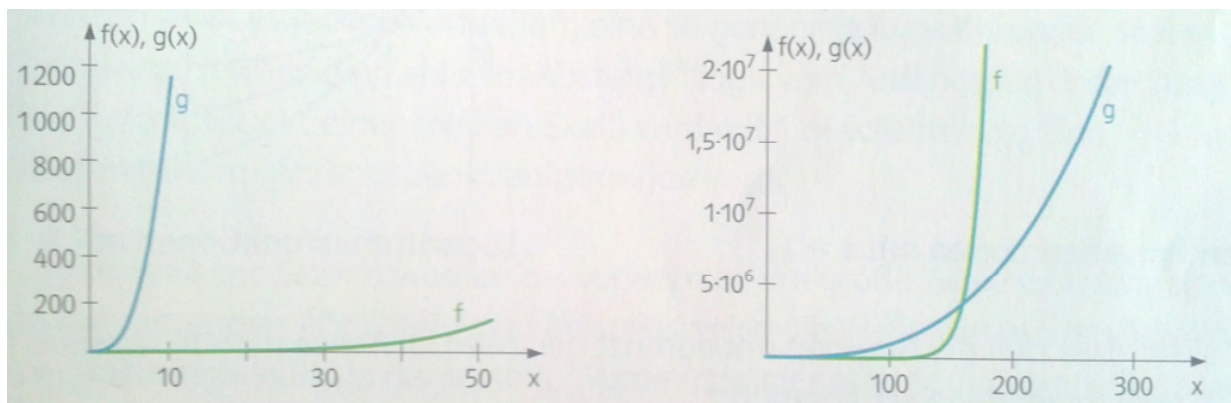
$$\frac{f(x+h)}{f(x)} = a^h$$

Interessant sind auch „exponentielle Katastrophen“. Mit Hilfe eines Computerprogramms kann man eine lineare Funktion und eine Exponentialfunktion vergleichen. Vergleicht man etwa die Funktion f und g mit $f(x) = 1,1^x$ und $g(x) = 10 \cdot x$, so hat man den Eindruck, dass f wesentlich langsamer wächst als g . Durch Zoomen kann man jedoch feststellen, dass die Exponentialfunktion f schließlich die lineare Funktion g übertrifft.



(Abbildung aus „Mathematik Verstehen 6“)

Ähnliches beobachtet man, wenn man eine Exponentialfunktion mit einer Potenzfunktion vergleicht: $f(x) = 1,1^x$, $g(x) = x^3$



(Abbildung aus „Mathematik Verstehen 6“)

Man kann beweisen, dass eine Exponentialfunktion jede Polynomfunktion (und damit auch jede lineare Funktion und jede Potenzfunktion) bei genügend großem x übertrifft.

Das Heimtückische an exponentiellen Wachstumsprozessen liegt darin, dass diese anfänglich meist unterschätzt werden, weil das Wachstum zunächst langsam und beinahe linear verläuft (z.B. Bevölkerungswachstum). Man glaubt also, dass es immer so harmlos weitergehen wird, doch kommt es früher oder später zu einer „Explosion“ und damit zu einer Katastrophe.

Eine praktische Anwendung dieser Erkenntnis betrifft die Rechenzeit von Computeralgorithmen. Oft hängt die Rechenzeit $T(n)$ eines Algorithmus im Großen und Ganzen von der Größe eines Parameters n ab (z.B. bei der Überprüfung, ob n eine Primzahl ist). Bei manchen Algorithmen wächst die Rechenzeit $T(n)$ annähernd exponential mit n , dh. Sie nimmt zunächst langsam zu, steigt aber ab einem gewissen Wert von n unerwartet stark an. Dies kann zum Beispiel zur Folge haben, dass die Rechenzeit für ein gewisses n nur wenige Minuten beträgt, für nur wenig größere n schon mehrere Jahre und für nachfolgende n so groß ist, dass der Algorithmus nicht mehr durchgeführt werden kann. Man bemüht sich deshalb, Algorithmen zu finden, bei denen $T(n)$ nicht exponentiell wächst, sondern annähernde wie eine Polynomfunktion in n . Leider ist das bei vielen Problemen nicht gelungen und vermutlich auch nicht immer möglich.

Am Ende des Abschnitts wird in „Mathematik Verstehen 6“ noch kurz auf die Logarithmus- und Exponentialfunktion bei beschränktem Wachstum eingegangen. Insbesondere wird das logistische Wachstum noch genauer erklärt. Dies möchte ich jedoch nicht näher behandeln, da es in der Grundkompetenzenliste des BIFIE nicht verlangt wird.

2.6 Winkelfunktionen

Grundkompetenzen

- Das **Bogenmaß** kennen, Gradmaß und Bogenmaß ineinander umrechnen können.
- Die **Erweiterung von Sinus und Cosinus auf ganz $\mathbb{R}$** kennen und erläutern können.
- Der **Sinus, Cosinus- und Tangensfunktion** und deren Graphen kennen. Wichtige Eigenschaften an den Graphen ablesen können (insbesondere Periodizität).
- Den typischen Verlauf von **Funktionen f der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c)$** kennen und die **Parameter im Kontext interpretieren** können (insbesondere bei Schwingungsvorgängen).

2.61 Das Bogenmaß

Wird ein Winkel im Gradmaß gemessen, so teilt man einen vollen Winkel in 360° , einen rechten Winkel somit in 90° ein. In der Vermessungskunde ist das Neugradmaß gebräuchlich. Dabei misst ein voller Winkel 400^g [= $400 \text{ gon} = 400 \text{ Neugrad}$], ein rechter Winkel somit 100^g .

Beide Maße beruhen auf zufälligen außermathematischen Gegebenheiten. Das Gradmaß wurde von den Babyloniern eingeführt und hängt vermutlich damit zusammen, dass die Erde bei ihrem Umlauf um die Sonne zufällig ca. 360 Tage braucht. Das Neugradmaß ist durch eine Angleichung an das Zehnersystem entstanden und hängt damit zusammen, dass wir zufällig zehn Finger an unseren Händen haben. In der Mathematik wünscht man sich aber ein Winkelmaß, das nicht von zufälligen Gegebenheiten abhängt.

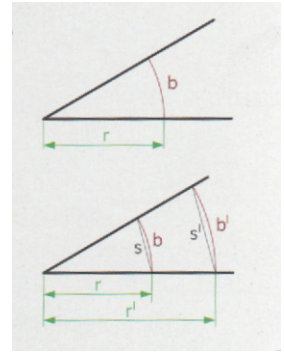
Das Auffinden eines solchen Maßes beruht auf der Idee, die Größe eines Winkels durch die Länge b eines zum Winkel gehörigen Winkelbogens anzugeben. Die Länge b hängt jedoch vom gewählten Radius r ab.

In der nebenstehenden Abbildung gilt aufgrund ähnlicher Dreiecke:

$$\frac{s}{r} = \frac{s'}{r'}$$

Analoges kann man für die Winkelbögen beweisen:

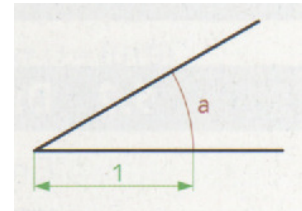
$$\frac{b}{r} = \frac{b'}{r'}$$



Für einen vorgegebenen Winkel ist also der Quotient $\frac{b}{r}$ konstant und unabhängig vom gewählten Radius. Er kann daher als Maß für die Größe eines Winkels verwendet werden.

Definition: Das **Bogenmaß** eines Winkels ist der Quotient $a = \frac{b}{r}$, wobei b die Länge des zum Winkel gehörigen Bogens mit dem Radius r ist.

Wählt man $r = 1$, dann ist $a = \frac{b}{1} = b$. Das Bogenmaß ist also gleich der Maßzahl der Länge des zum Winkel gehörigen Bogens mit dem Radius 1.



Bemerkung: Das Bogenmaß ist als Quotient zweier Längen eine dimensionslose Zahl. Trotzdem wird es manchmal mit der Bezeichnung Radiant (rad) versehen, um es von anderen Winkelmaßen deutlich zu unterscheiden.

Grundlegend für Schüler/innen sollte natürlich das Umrechnen von Grad- und Bogenmaß sein.

Für einen gestreckten Winkel (180°) ist die Länge des zugehörigen Winkelbogens $b = r\pi$.

Somit gilt für das Bogenmaß eines gestreckten Winkels: $a = \frac{b}{r} = \frac{r\pi}{r} = \pi$

Daraus ergeben sich weitere Bogenmaße, die man auswendig wissen sollte:

Gradmaß	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Andere Umrechnungen vom Gradmaß ins Bogenmaß oder umgekehrt erledigt man am besten mittels einer Proportion. Misst der Winkel g° und ist a das dazugehörige Bogenmaß, so gilt:

$$\frac{a}{\pi} = \frac{g}{180}$$

Bei gegebenem g kann daraus a berechnet werden.

Mit dem Taschenrechner kann man nicht nur $\sin \varphi$, $\cos \varphi$ oder $\tan \varphi$ für ein Gradmaß φ berechnen, sondern auch $\sin a$, $\cos a$ oder $\tan a$ für ein Bogenmaß a . Dabei ist auf die Winkelmaß-Einstellung des Taschenrechners zu achten. Die meisten Taschenrechner sind auf das Gradmaß (DEG) voreingestellt. Wenn man mit dem Bogenmaß oder dem Neugradmaß rechnen will, muss auf das Bogenmaß (RAD) bzw. Neugradmaß (GRAD) umgestellt werden. Die Bedienungsanleitung des verwendeten Taschenrechners gibt über die genaue Vorgangsweise Auskunft.

Das Umrechnen zwischen Grad- und Bogenmaß sollte wiederum anhand von Aufgaben aus dem Schulbuch von den Schülern/innen geübt werden.

2.62 Verallgemeinerung von $\sin x$, $\cos x$ und $\tan x$

In der 5.Klasse wurden $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ nur für $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ definiert. Die Ausdehnung auf alle Winkelmaße von $-\infty$ bis $+\infty$ wird durch Drehbewegungen motiviert.

- **Drehbewegung:** Angabe durch **Drehsinn** und **Drehwinkelmaß**
- Das **Drehwinkelmaß** kann größer als 360° (bzw. 2π) oder kleiner als -360° (bzw. -2π) sein.

Positives Vorzeichen bedeutet Drehung im **Gegenuhrzeigersinn**.

Negatives Vorzeichen bedeutet Drehung im **Uhrzeigersinn**.

- Zu einem **Drehwinkelmaß** erhält man das dazugehörige **Polarwinkelmaß**, indem man ein geeignetes Vielfaches von 360° bzw. 2π addiert bzw. subtrahiert, sodass das Ergebnis in $[0^\circ; 360^\circ[$ bzw. $[0; 2\pi[$ liegt.

2.63 Die Sinus-, Cosinus, und Tangensfunktion

Jedem $x \in \mathbb{R}$ kann man die Zahlen $\sin x$, $\cos x$ und $\tan x$ zuordnen, wobei im letzten

Fall die Stellen $\pm \frac{\pi}{2}$, $\pm \frac{3\pi}{2}$, $\pm \frac{5\pi}{2}$,ausgenommen werden müssen. Es liegen somit folgende Funktionen vor:

Sinusfunktion: $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\sin(x) = \sin x$

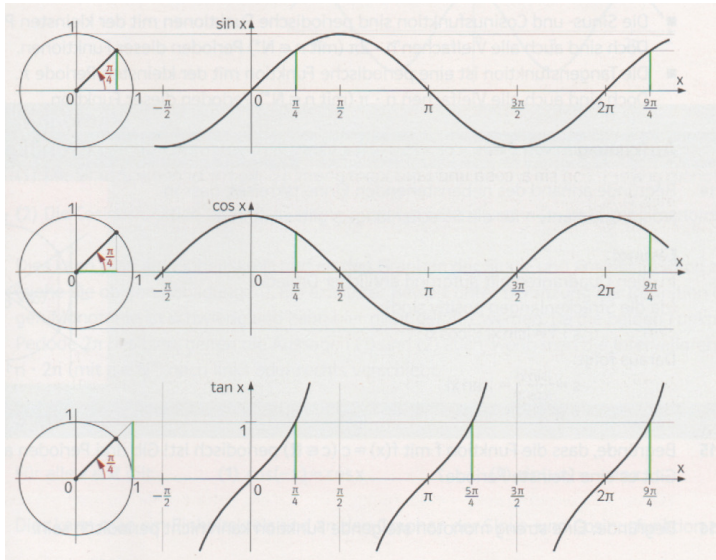
Cosinusfunktion: $\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\cos(x) = \cos x$

Tangensfunktion: $\tan: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tan(x) = \tan x$, wobei

$$A = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots \right\}$$

Diese Funktionen werden als **Winkelfunktionen**, **Kreisfunktionen** oder **trigonometrische Funktionen** bezeichnet.

Diese kann man mit Hilfe eines Computerprogramms zeichnen lassen:



Die wesentlich neue, bisher bei Funktionen nicht aufgetretene Eigenschaft, ist die Periodizität.

Definition:

Eine reelle Funktion $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **periodisch**, wenn es eine positive Zahl p gibt, sodass für alle $x \in A$ auch $x + p \in A$ und $f(x + p) = f(x)$ ist.

Die Zahl p heißt eine **Periode** der Funktion f .

2.64 Eigenschaften der Sinus- und Cosinusfunktion

Schranken:

Satz: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $-1 \leq \sin x \leq 1$ und $-1 \leq \cos x \leq 1$

Monotonie:

Satz: 1) Die Sinusfunktion ist in $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ streng monoton steigend und in $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ streng monoton fallend.

2) Die Cosinusfunktion ist in $[0; \pi]$ streng monoton fallend und in $[\pi; 2\pi]$ streng monoton steigend.

Symmetrie:

Satz: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: 1) $\cos(-x) = \cos x$ 2) $\sin(-x) = -\sin x$

Beziehung zwischen Sinus und Cosinus:**Satz:**

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: 1) $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ 2) $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$

Diese Sätze kann man einerseits am Einheitskreis und andererseits an den Graphen der Funktionen erkennen.

2.65 Harmonische Schwingungen

Eine wichtige Anwendung der Winkelfunktionen bilden die harmonischen Schwingungen, bei denen folgende Begriffe eine Rolle spielen:

Amplitude r:

Größte Entfernung des schwingenden Körpers von der Ruhelage. Einheit: 1 m

Schwingungsdauer T:

Zeitdauer einer vollen Schwingung. Einheit: 1 s

Frequenz:

Zahl der Schwingungen pro Sekunde. Einheit: 1 Hz

Elongation s(t) zum Zeitpunkt t:

Der mit Vorzeichen versehene Abstand des Körpers von der Ruhelage zum Zeitpunkt t. Einheit: 1 m

Merke: $f = \frac{1}{T}$ Die **Frequenz** ist der **Kehrwert der Schwingungsdauer**.

Elongation einer harmonischen Schwingung:

$$s(t) = r \cdot \sin(\omega t + \varphi) = r \cdot \sin \omega \left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right)$$

Man bezeichnet $\frac{\varphi}{\omega}$ als **Phasenverschiebung** der Schwingung.

In „Mathematik Verstehen 6“ wird auch die Phasenverschiebung behandelt, obwohl diese bei der Zentralmatura nicht vorkommen wird, da sie nicht in der Grundkompetenzenliste des BIFIEs vermerkt wird.

2.7 Ergänzung zu Funktionen

Die folgenden Begriffe wurden bisher noch nicht verwendet. Es ist aber sinnvoll, sie kennenzulernen.

- ❖ Das Element **x** heißt **Stelle** oder **Argument** oder **Urelement von f(x)**.
- ❖ Das Element **f(x)** heißt **Funktionswert von f an der Stelle x** oder **Bildelement von x**.
- ❖ Die Menge **A** heißt **Definitionsmenge** der Funktion f.
- ❖ Die Menge $\mathbb{R}$ heißt **Zielmenge** der Funktion f.
- ❖ Die Menge **f(A) = { f(x) ∈ ℝ | x ∈ A }** heißt **Wertemenge** der Funktion f.

Durch Einschränkung der Zielmenge einer reellen Funktion auf ihre Wertemenge kann man erreichen, dass jedes Element der Zielmenge mindestens ein Urelement besitzt.

In diesem Zusammenhang ist eine leichte Verallgemeinerung des Begriffes der reellen Funktionen zweckmäßig:

Definition: Eine Funktion **f: A → B** mit **A ⊆ ℝ** und **B ⊆ ℝ** nennt man eine **reelle Funktion**.

Weiters wird im Buch auf die Verkettung und die Umkehrung von Funktionen eingegangen. Dies möchte ich jedoch hier nicht näher ausführen, da dies ebenfalls bei der Zentralmatura nicht vorkommen wird.

Wichtiger ist jedoch eine weitere Verallgemeinerung des Funktionsbegriffes:

Definition:

Eine Funktion $f: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ mit $\mathbf{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{B} \subseteq \mathbb{R}$ nennt man eine **reelle Funktion in n Variablen**.

In weiterer Folge lässt man als Definitions- und Zielmenge auch geometrische Mengen zu, bis man schließlich einem sehr allgemeinen (auf DEDEKIND zurückgehenden) Funktionsbegriff gelangt:

Definition:

Wird jedem Element einer Menge A genau ein Element einer Menge B zugeordnet, dann heißt diese Zuordnung eine **Funktion** (oder **Abbildung**) **von A nach B**.

Die Menge A heißt **Definitionsmenge** der Funktion, die Menge B die **Zielmenge** der Funktion

Durch diese Verallgemeinerung kann man zum Beispiel eine Funktion bei einem Kinobesuch, bei dem jedem/r Kinobesucher/in ein Sitzplatz zugeordnet werden kann, entdecken. In der Regel jedoch lassen sich dazu in der Schule keine sinnvollen Aufgaben mehr aufstellen.

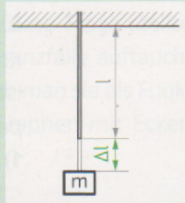
Auch funktionale Aspekte von Formeln werden in diesem Abschnitt des Buches nochmals aufgegriffen. Neu ist dabei das Aufstellen von Formeln aus der Kenntnis von Abhängigkeiten. Hier ein Beispiel dazu:

6.36 Drähte aus einem bestimmten Metall mit verschiedenen Querschnitten und Längen werden durch Anhängen verschiedener Gewichtsstücke geringfügig gedehnt. Durch Messungen stellt man fest:

- Die Längenzunahme Δl [lies: Delta l] ist direkt proportional zur Masse m des Gewichtsstücks und zur Länge l des Drahtes.
- Die Längenzunahme Δl ist indirekt proportional zum Inhalt q der Querschnittsfläche des Drahtes.

Ein Messergebnis ist in der Tabelle angegeben.
Stelle eine Formel für die Längenzunahme Δl auf!

m (in kg)	l (in mm)	q (in mm ²)	Δl (in mm)
6,8	700	2	3,00



(aus „Mathematik Verstehen 6“)

3. Notationsprobleme der Funktionslehre in der Schule

Nun möchte ich auf Notationsprobleme der Funktionslehre in der Schule näher eingehen. Eine mathematische Korrektheit in den Bezeichnungen ist in der Schule wichtig und ist daher auch Malle ein Anliegen. In einem unveröffentlichten Artikel (Malle 2012) macht er auf häufige Fehler aufmerksam.

3.1 Koordinaten- und Achsenbezeichnungen

Im Schulunterricht ist es häufig üblich, dass man die Achsen eines zweidimensionalen Koordinatensystems mit x und y beschriftet. In den meisten Aufgaben, vor allem bei Textaufgaben, ist dies jedoch nicht sinnvoll. Bei Zeit-Ort-Funktionen etwa beschriftet man Achsen mit s und t . Würde man bei Zeit-Ort Funktionen die Achsen auch mit x und y beschriften, würde dies lediglich für Verwirrung sorgen. Malle beschreibt dazu die Äußerung eines Lehrers:

„Jetzt tragen wir auf der x -Achse die Zeit t und auf der y -Achse den zurückgelegten Weg s auf“. Damit hätte man das Kunststück geschafft, vier Variable einzuführen, obwohl zwei genügt hätten. Das sture Festhalten an der Variablen x (und damit auch an y) ist in der wissenschaftlichen Mathematikdidaktik auch unter dem Namen „ x -Krankheit der Schule“ bekannt. (Malle 2012)

Besser wäre es die Achsen nur dann mit x und y zu bezeichnen, wenn die Größen wirklich so heißen. In der analytischen Geometrie ist dies bei der Darstellung von Kurven durchaus angebracht, da wirklich von einer x - und einer y -Koordinate gesprochen werden kann.

Heißen die Größen allerdings anders, ist es zielführender, wenn man die jeweiligen Bezeichnungen der Größen beibehält.

Gibt es gute Gründe, die Achsenbezeichnungen nicht auf bestimmte Buchstaben festzulegen, wären die Bezeichnungen „1.Achse“ und „2.Achse“ geeigneter (das sind neutrale Sammelnamen für unterschiedliche Anwendungen.) Auch in diesem Fall wäre es nicht sinnvoll, von der x-Koordinate und der y-Koordinate zu sprechen. Hier bietet es sich geradezu an, von der ersten und zweiten Koordinate zu sprechen. (Malle 2012)

3.2 Funktionen: Unterschied zwischen f und $f(x)$

Blickt man in der Geschichte zurück, wird seit der zweiten Hälfte des 19.Jahrhunderts (DEDEKIND) zwischen der Funktion f und dem Funktionswert $f(x)$ differenziert. Im Schulunterricht jedoch kommt es häufig zur Verwechslung oder Vermischung dieser beiden Begriffe.

f ist eine Zuordnung und $f(x)$ ist eine Zahl. Diese Zahl ist zwar nicht näher bekannt bzw. bestimmt, aber das ändert nichts daran, dass es eine Zahl ist.

(Man nennt dies den Gegenstandsaspekt einer Variablen, ausführlich dargestellt in: Malle, G.: Didaktische Probleme der elementaren Algebra, Vieweg, Braunschweig 1993.) (Malle 2012)

Wichtig ist, dass der/die Lehrer/in diesen Unterschied bei schriftlichen Aufgabenstellungen berücksichtigt. Es wäre zum Beispiel falsch, wenn man von der Funktion $f(x) = 2x$ spricht, da $f(x)$, wie bereits erwähnt, ja eine Zahl ist. Korrekt ist es hingegen, wenn man sagt, es liegt eine Funktion f mit $f(x) = 2x$ vor, oder f ist von der Form $f(x) = 2x$.

3.3 Vermischung von Termdarstellung und Funktionsgleichung

Manchmal werden die Termdarstellung $f(x) = \dots$ und die Funktionsgleichung

$y = \dots$ zu einer Hybriddarstellung $f: y = \dots$ vermischt, z. B. zu $f: y = 2x$.

Dies ist jedoch eher verwirrend, da das y eigentlich gar nicht benötigt wird. Es wäre besser einfach zu schreiben: $f(x) = 2x$.

Die Schreibweise $f(x) = \dots$ ist für viele Aufgabenstellungen zweckmäßiger als die Schreibweise $f: y = \dots$. Zum Beispiel:

Aufgabe 1: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2$. Wie groß ist der Funktionswert an der Stelle 2?

Lösung: $f(2) = 2^2 = 4$

Die Schreibweise $y = 2^2 = 4$ wäre hier unangemessen, weil sie nicht zum Ausdruck bringt, dass der Funktionswert an der Stelle 2 berechnet wurde.

Aufgabe 2: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2$. Zeige: Wird das Argument x verdoppelt, so vervierfacht sich der Funktionswert $f(x)$.

Lösung: $f(2 \cdot x) = (2 \cdot x)^2 = 4 \cdot x^2 = 4 \cdot f(x)$

Die y -Schreibweise würde hier zu einem unangemessenen und eher kuriosen Vorgehen zwingen, etwa:

$$y_{\text{neu}} = (2 \cdot x)^2 = 4 \cdot x^2 = 4 \cdot y_{\text{alt}}$$

Aufgabe 3: Zeichne den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^2$!

Lösung: Beim Zeichnen des Graphen ist es sinnvoller, die Achsen mit x und $f(x)$ anstelle von x und y zu beschriften. Das y ist nicht notwendig und bringt auch nicht zum Ausdruck, was an jeder Stelle x aufgetragen wird, nämlich der Funktionswert von f an der Stelle x .

(Malle 2012)

Aufgrund der vorangegangenen Aufgaben erkennt man also, dass die Schreibweise $f: y = \dots$ weitgehend vermieden werden sollte.

3.4 Zuordnungspfeile

Bei Funktionen werden verschiedene Pfeile unterschieden.

In der Schreibweise $f: A \rightarrow B$ | $x \mapsto f(x)$ bzw. $f: A \rightarrow B, x \mapsto f(x)$ kommen zwei verschiedene Pfeile vor, die unterschiedliche Bedeutungen haben.

Der Pfeil $\rightarrow$ ordnet der Definitionsmenge eine Zielmenge zu, der Pfeil $\mapsto$ ordnet jeder Zahl aus der Definitionsmenge eine Zahl aus der Zielmenge zu.

(Malle 2012)

Manchmal werden diese Pfeile vertauscht oder ignoriert, es sollte aber unbedingt betont werden, dass sie unterschiedliche Bedeutung haben.

3.5 Lineare Funktionen

Im gängigen Schulunterricht bezeichnet man eine Funktion als linear, wenn sie von der Form $f(x) = k \cdot x + d$ mit $k, d \in \mathbb{R}$ ist. Es tauchen aber manchmal auch noch ältere Bezeichnungen wie „linear homogen“ ($d = 0$) und „linear inhomogen“ ($d \neq 0$) auf.

Von diesen ist abzuraten, weil unnötige Differenzen zum Sprachgebrauch der Linearen Algebra an der Hochschule auftreten. Dort heißt eine Funktion linear, wenn sie folgende beiden Eigenschaften erfüllt:

1) Additivität: $f(x + y) = f(x) + f(y)$

2) Homogenität $f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$

Laut dieser Definition würden also in der Schule nur direkte Proportionalitätsfunktionen lineare Funktionen sein, da nur diese die beiden Eigenschaften erfüllen. Malle schreibt dazu:

Bisher hat noch kein österreichisches Schulbuchteam den Mut gefunden, den Sprachgebrauch der Schule jenem der Linearen Algebra anzupassen. Die Schultradition ist hier so stark, dass man dies wohl akzeptieren muss. Der Ausdruck „linear“ ist auch für die Funktionen $d \neq 0$ nicht ganz dumm gewählt, weil der Graph einer solchen Funktion stets eine Gerade (bzw. „gerade Linie“) ist.Die nachfolgende Unterscheidung in „linear homogen“ und „linear inhomogen“ ist aber nicht sinnvoll, weil sie den Unterschied zur Linearen Algebra in unnötiger Weise verstärkt. Im Sinne der Linearen Algebra ist der Ausdruck „linear homogen“ ein Pleonasmus, weil eine lineare Funktion automatisch homogen ist. Der Ausdruck „linear inhomogen“ ist hingegen im Sinne der Linearen Algebra ein Widerspruch, weil eine lineare Funktion nicht inhomogen sein kann. (Malle 2012)

In der Schule ist es daher besser diese Begriffe zu vermeiden und generell nur von linearen Funktionen zu sprechen. Die Funktionen bei denen $d = 0$ ist, kann man, wie in „Mathematik Verstehen“, als direkte Proportionalitätsfunktionen bezeichnen.

3.6 Extremstellen

Definitionen zu globalen und lokalen Extremstellen habe ich bereits in meinem Theorieteil angeführt, oftmals wird aber beim globalen Maximum bzw. Minimum statt $f(x) \leq f(p)$ bloß $f(x) < f(p)$ geschrieben. Das entspricht zwar den in der Schule

hauptsächlich vorkommenden Funktionen, ist aber problematisch. Globale Maximumstellen müssen mit $f(x) \leq f(p)$ definiert werden

,weil der bekannte Satz, dass jede in einem abgeschlossenen Intervall $[a ; b]$ stetige Funktion f eine Maximumstelle in $[a ; b]$ besitzt, nicht gelten würde. Man denke etwa an eine in $[a ; b]$ konstante Funktion. Leider muss man den Nachteil in Kauf nehmen, dass für diese konstante Funktion jede Stelle $x \in [a ; b]$ sowohl eine Maximumstelle als auch eine Minimumstelle von f in $[a ; b]$ ist. Das ist zwar kontraintuitiv, lässt sich aber nicht vermeiden. (Malle 2012)

Wenn man globale Maximumstellen mit $f(x) \leq f(p)$ und lokale Maximumstellen mit $f(x) < f(p)$ definiert, ergibt sich der Nachteil

dass es globale Maximumstellen von f geben kann, die keine lokalen Maximumstellen sind. Zum Beispiel wäre für eine in $[a ; b]$ konstante Funktion jede Stelle $x \in [a ; b]$ zwar eine globale, aber keine lokale Maximumstelle. Die Maximumeigenschaft, die für den ganzen Definitionsbereich gilt, würde also in einer Umgebung nicht mehr gelten, was doch eher merkwürdig ist. (Malle 2012)

Beide Varianten bringen also Vor- und Nachteile mit sich. Malle findet die Variante mit $f(x) \leq f(p)$ charmanter:

Mir persönlich erscheint die Vorstellung, dass jede Stelle einer konstanten Funktion sowohl höchste als auch eine tiefste Stelle ist, leichter zu verkraften als die Vorstellung, dass etwas, was im ganzen Definitionsbereich gilt, plötzlich in einer Umgebung nicht mehr gelten soll. Aber das kann man natürlich auch anders sehen. Einen geringfügigen Vorteil, beide Definitionen mit $\leq$ anzuschreiben, sehe ich allerdings darin, dass beide Definitionen gleichartig aufgebaut sind, wodurch die Verwechslungsgefahr vermindert wird.

(Malle 2012)

4 Empirische Untersuchung

4.1 Schriftliche Befragung

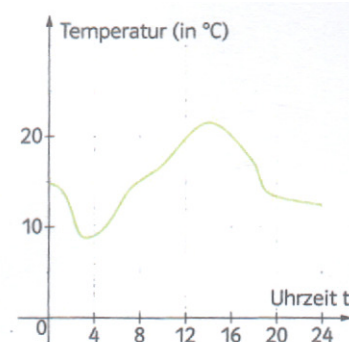
In diesem Abschnitt werde ich nun näher auf die schriftliche Befragung, die ich in zwei 7.Klassen eines Oberstufenrealgymnasiums durchgeführt habe, eingehen. Man kann diese Tests nur als Fallstudien und keinesfalls repräsentativ sehen, da von zwei Klassen nicht auf die Grundgesamtheit aller österreichischen Schüler/innen geschlossen werden kann. Dennoch gibt diese Untersuchung Aufschluss über die Problemfelder der Schüler/innen in der Funktionenlehre und ruft nach einer genaueren Analyse.

Bei der Auswahl der Aufgaben war ich bemüht grundlegende Aufgaben zu den einzelnen Themenkreisen zu finden. Wichtig war mir, dass ich alle Themenbereiche abdecke, sodass ich genauer sehen kann, wo die Probleme der Schüler/innen liegen. Interessante Interpretationen lassen sich aus dem Ergebnis der Befragung später formulieren, doch zunächst möchte ich die Aufgaben einmal vorstellen. Wie man auf den nächsten Seiten sehen kann, bekamen die Schüler/innen von mir ein doppelseitig bedrucktes Arbeitsblatt mit zwölf Aufgaben ausgehändigt. Diese sind gezielt auf die zentrale Reifeprüfung ausgerichtet, das heißt: weniger rechnen und mehr interpretieren. Alle Aufgaben stammen aus „Mathematik Verstehen“. Die Formate sind meist Multiple-Choice-Aufgaben.

1

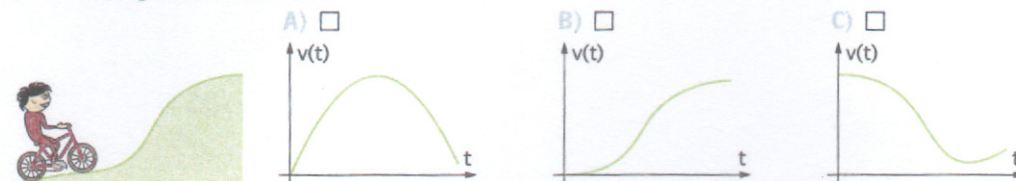
Dieser Graph zeigt den Temperaturverlauf für einen Tag. Kreuze die wahren Aussagen an!

- A) ☐ Zwischen 12 Uhr und 16 Uhr waren es über 18°C.
- B) ☐ Die höchste Tagestemperatur war um 13 Uhr.
- C) ☐ Dreimal betrug die Temperatur 12°C.
- D) ☐ Dreimal betrug die Temperatur 14°C.



2

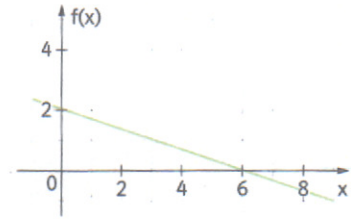
Der Radfahrer fährt diesen Hügel hinauf. Welcher der drei Graphen zeigt am besten, wie sich die Geschwindigkeit im Lauf der Zeit ändert?



3

Der Graph welcher Funktion f ist hier dargestellt?

- A) ☐ $f(x) = -2x + 6$ C) ☐ $f(x) = -3x + 2$
 B) ☐ $f(x) = -\frac{1}{3}x + 6$ D) ☐ $f(x) = 2 - \frac{x}{3}$



4

Der monatliche Stromrechnungsbetrag f in Abhängigkeit von den verbrauchten kWh wurde als lineare Funktion $f(x) = k \cdot x + d$ modelliert. Kreuze alle wahren Aussagen an!

- A) ☐ k = Zahl der verbrauchten kWh C) ☐ x = Preis für eine kWh
 B) ☐ d = monatliche Grundgebühr D) ☐ $f(x)$ = gesamter zu zahlender Betrag

5

Welche Formeln beschreiben eine indirekte Proportionalität zwischen v und w (u konstant)?

- A) ☐ $v = \frac{w}{u}$ B) ☐ $v \cdot w = u$ C) ☐ $u = \frac{1}{v \cdot w}$ D) ☐ $v = u - w$

6

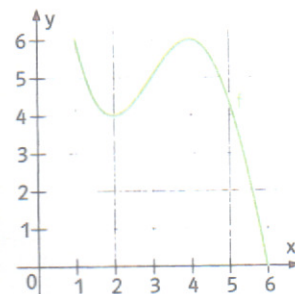
Der Mantelflächeninhalt M eines Drehzylinders mit dem Radius r und der Höhe h ist gegeben durch $M = 2\pi rh$. Bei welchen dieser Funktionen handelt es sich um indirekte Proportionalitätsfunktionen?

- A) ☐ $r \mapsto M; h$ konst. B) ☐ $M \mapsto h; r$ konst. C) ☐ $h \mapsto r; M$ konst. D) ☐ $r \mapsto h; M$ konst.

7

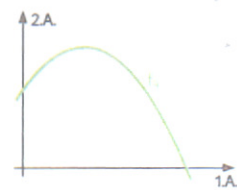
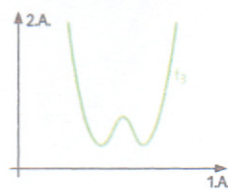
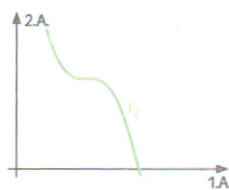
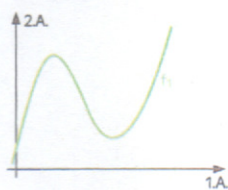
Welche der folgenden Aussagen treffen für den rechts abgebildeten Graphen der Funktion $f: [1; 6] \rightarrow \mathbb{R}$ zu?

- A) ☐ 1 und 4 sind globale Maximumstellen von f in $[1; 6]$.
 B) ☐ 4 ist eine lokale Maximumstelle von f .
 C) ☐ 6 ist eine lokale Minimumstelle von f .
 D) ☐ 2 ist eine globale Minimumstelle von f in $[1; 6]$.



8

Welchen Grad könnte die abgebildete Polynomfunktion haben?



- A) ☐ Grad (f_1) = 2 D) ☐ Grad (f_2) = 2 G) ☐ Grad (f_3) = 2 J) ☐ Grad (f_4) = 2
 B) ☐ Grad (f_1) = 3 E) ☐ Grad (f_2) = 3 H) ☐ Grad (f_3) = 3 K) ☐ Grad (f_4) = 3
 C) ☐ Grad (f_1) = 4 F) ☐ Grad (f_2) = 4 I) ☐ Grad (f_3) = 4 L) ☐ Grad (f_4) = 4

9

In einer Region leben derzeit 90 000 Einwohner. Jährlich wandern ca. 3 % ab. Welche Formel für die Einwohnerzahl $E(t)$ zum Zeitpunkt t ist korrekt?

- A) ☐ $E(t) = 90\,000 \cdot 0,03^t$ B) ☐ $E(t) = 90\,000 \cdot 0,97 \cdot t$ C) ☐ $E(t) = 90\,000 \cdot 0,97^t$

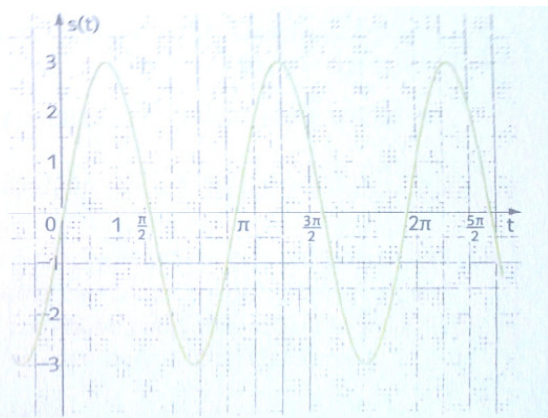
10

Welche dieser Aussagen trifft für Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = c \cdot a^x$ ($a \in \mathbb{R}^+$, $c \in \mathbb{R}^*$) zu?

- A) ☐ Der Graph der Funktion geht stets durch den Punkt $(0|c)$.
 B) ☐ Für $c > 0$ und $a < 1$ ist die Funktion streng monoton fallend in $\mathbb{R}$.
 C) ☐ Die Zahl c ist der Funktionswert von f an der Stelle 1.
 D) ☐ Gleiche Zunahme der Argumente bewirkt stets eine Zu- bzw. Abnahme der Funktionswerte um denselben Prozentsatz vom jeweiligen Ausgangswert.

11

Nebenstehend ist eine harmonische Schwingung dargestellt. Entnimm daraus die Amplitude, die Schwingungsdauer, die Frequenz und die Elongation zum Zeitpunkt $t = 1$!



12

Gib die absolute Änderung, die relative Änderung, die mittlere Änderungsrate und den Änderungsfaktor der Funktion f im Intervall $[0; 2]$ an!

- a) $f(x) = 2x + 2$ b) $f(x) = -3x + 2$ c) $f(x) = 4x + 5$ d) $f(x) = x^2 + 2$ e) $f(x) = x^3 + 3$

4.11 Grundkompetenzen in den Aufgaben

Aufgabe 1: In Aufgabe 1) wird die Grundkompetenz 1.4 angesprochen, da aus einem Graphen Wertepaare abgelesen werden müssen. Alle vier Aussagen kann man überprüfen, in dem man einfach vom Graphen abliest.

Aufgabe 2: Die gleiche Kompetenz wie in Aufgabe 1) wird auch in Aufgabe 2), in der Schüler/innen nun aber den Graphen „im Kontext deuten“ sollen, abverlangt. Sie

müssen dabei interpretieren wie sich die Fahrt eines Radfahrers über einen Hügel in einem Graphen, in dem auf der ersten Achse die Zeit und auf der zweiten die Geschwindigkeit aufgetragen wird, auswirkt.

Aufgabe 3: Bei der dritten Aufgabe sollten Schüler/innen die Grundkompetenz FA 2.2 erworben haben, da sie entweder durch das Ablesen am Funktionsgraphen und Einsetzen von Wertepaaren oder durch das Ermitteln von k und d auf die richtige Termdarstellung der Funktion f stoßen.

Aufgabe 4: Die vierte Aufgabe behandelt im Wesentlichen ebenfalls die Grundkompetenz der Aufgabe 3, nur spielt bei dieser Aufgabenstellung das „im Kontext deuten“ wieder eine zentrale Rolle. Die monatliche Stromrechnung soll durch die verschiedenen Parameter erklärt werden.

Aufgabe 5: Dies ist eine Aufgabe zur indirekten Proportionalität, die in der Grundkompetenz FA 3.4 zum Ausdruck gebracht wird. In Aufgabe 5 geht es darum, dass man weiß, wie indirekte Proportionalitäten angeschrieben werden und die vorgegebene Gleichung gegebenenfalls umformen kann, sodass die indirekte Proportionalität erkannt werden kann.

Aufgabe 6: Gleiches gilt für die Aufgabe 6), in der ebenfalls die Grundkompetenz FA 3.4 von den Schülern/innen abverlangt wird.

Aufgabe 7: Diese Aufgabe behandelt die Grundkompetenz FA 1.5 näher, da Schüler/innen über Extremstellen Bescheid wissen sollten. Wichtig bei dieser Aufgabe ist, dass der Unterschied zwischen lokalen und globalen Extremstellen beherrscht wird, ansonsten wird man diese Aufgabe nicht korrekt beantworten können.

Aufgabe 8: In Aufgabe 8) wird die Grundkompetenz FA 4.4 angesprochen, da man den Grad einer Polynomfunktion erkennen muss. Tückisch ist der letzte Graph, da dieser sowohl Grad 2 als auch Grad 4 haben kann, da es auch eine entartete Funktion vierten Grades sein könnte.

Aufgabe 9: In Aufgabe 9) liegt die Grundkompetenz FA 5.1 zu Grunde, da Schüler/innen einem Text einen Funktionsterm zuordnen sollen.

Aufgabe 10: In dieser Aufgabe müssen Schüler/innen über Eigenschaften einer Exponentialfunktion Bescheid wissen. Diese werden zwar nicht alle explizit in der Grundkompetenz FA 5.4 genannt, ich denke aber, dass mit „charakteristischen Eigenschaften“ auch jene gemeint sind, die in Aufgabe 10) zur Geltung kommen.

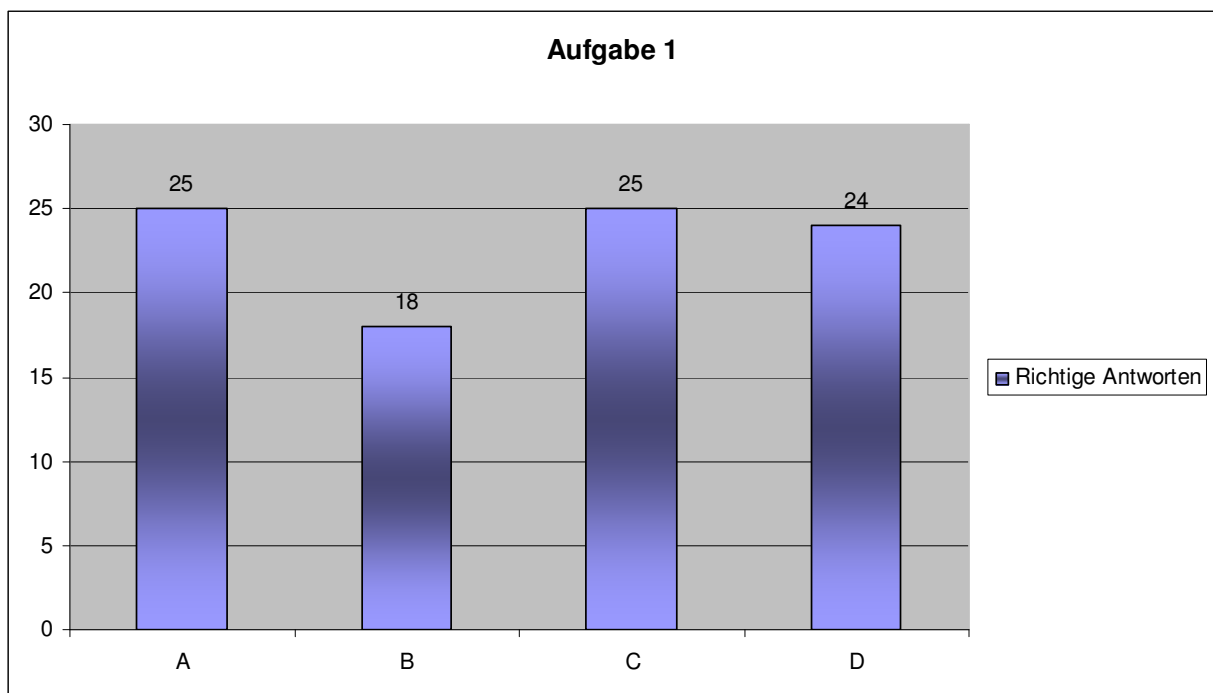
Aufgabe 11: In Aufgabe 11) werden zwei Grundkompetenzen abverlangt. Zum einen wird in dieser Aufgabe die Grundkompetenz FA 6.1 abverlangt, da Schüler/innen die Funktion als „allgemeine Sinusfunktion erkennen und betrachten“ müssen und zum anderen wird auch die Grundkompetenz FA 6.2 gefordert, weil man Wertepaare aus dem Funktionsgraphen ablesen muss.

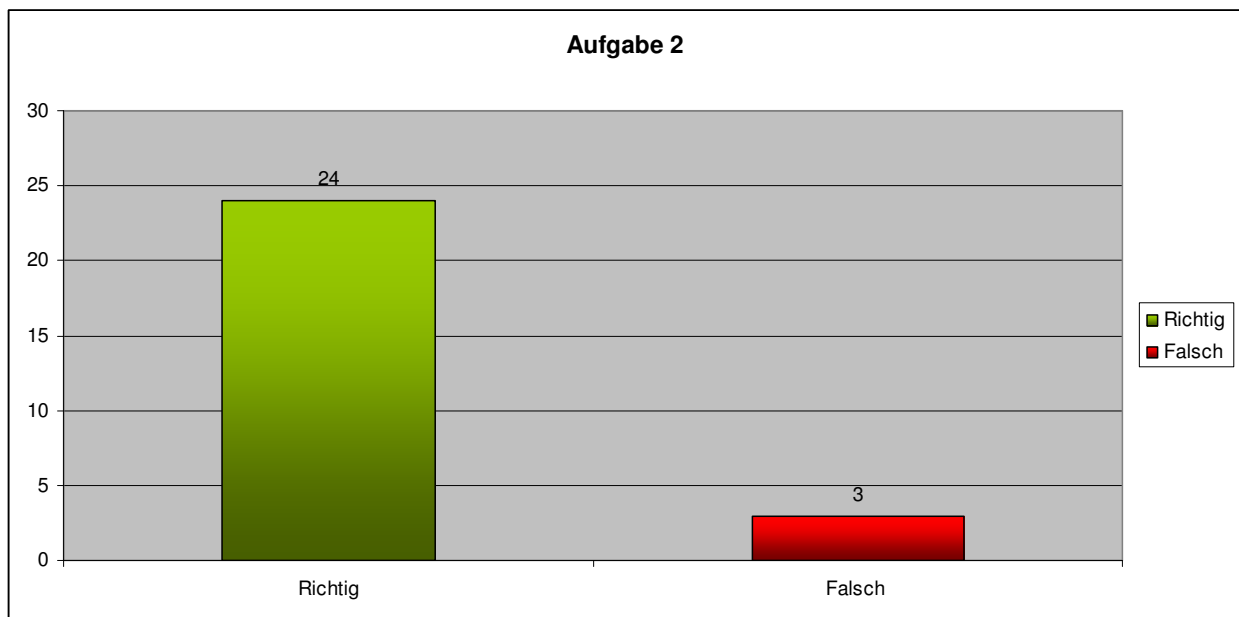
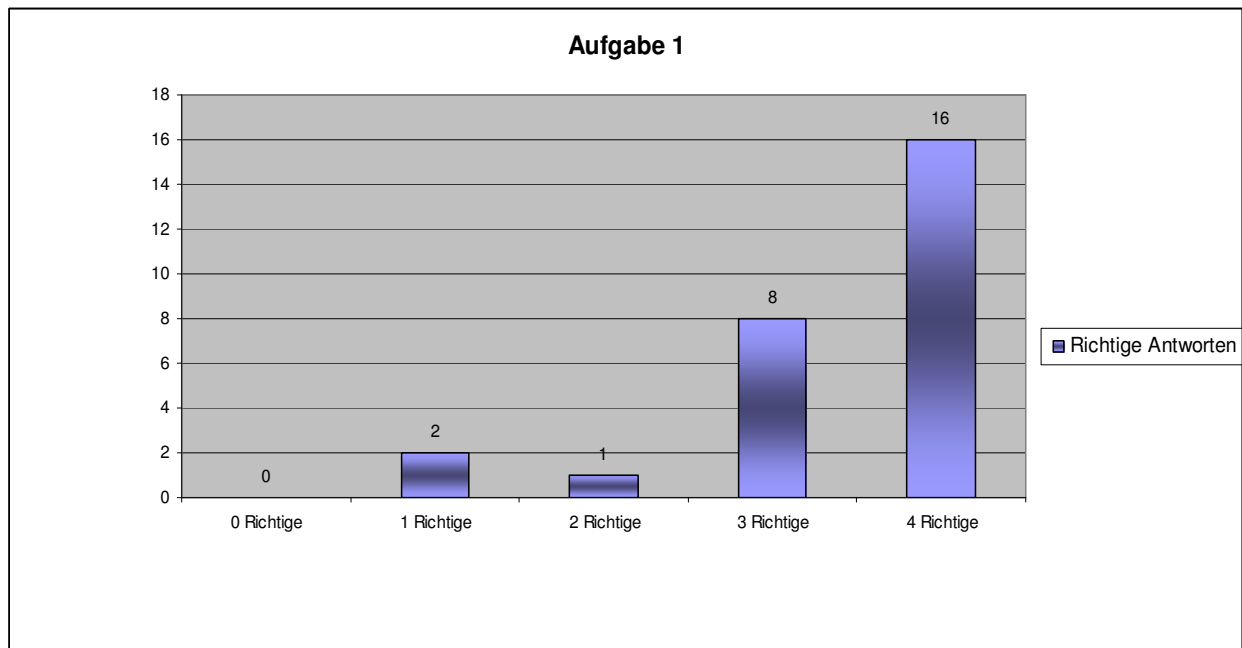
Aufgabe 12: In dieser Aufgabe sind verschiedene Änderungsmaße zu berechnen. Dies entspricht einer in dieser Arbeit nicht besprochenen Grundkompetenz der BIFIE-Liste aus dem Bereich der Analysis (AN 1.1).

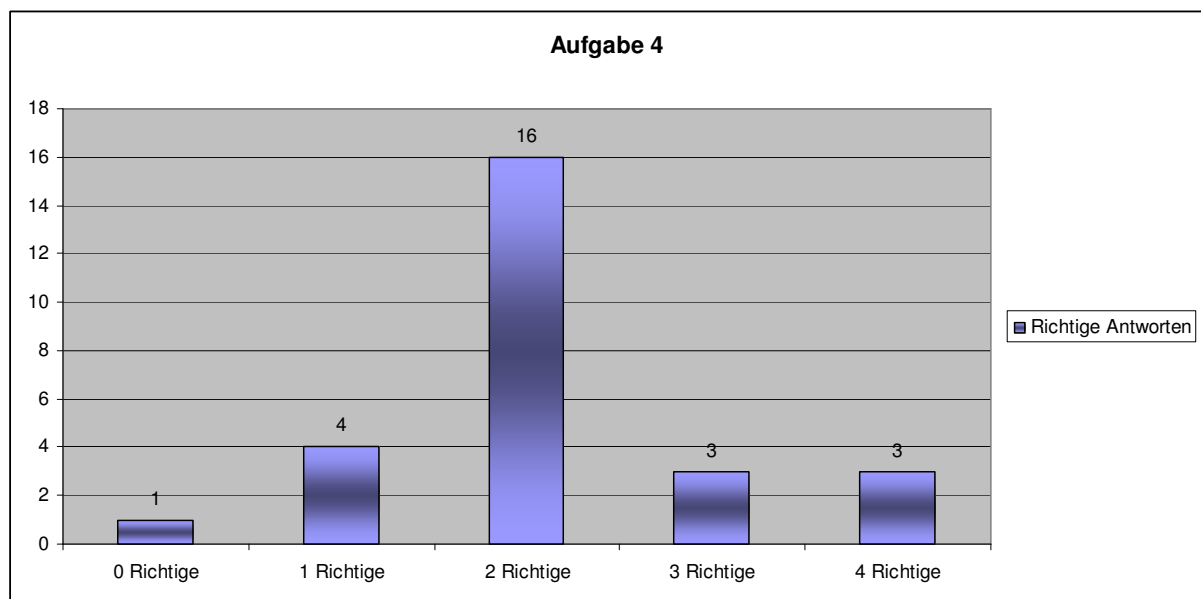
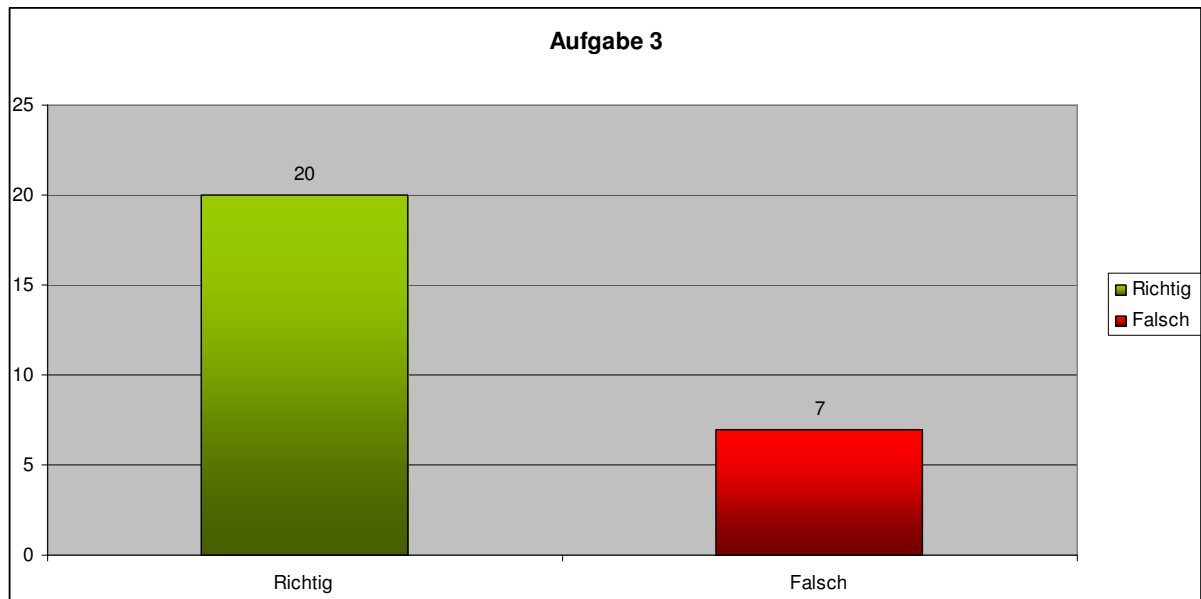
Zusammenfassend möchte ich erwähnen, dass die Auswahl der Aufgaben willkürlich vollzogen wurde, das heißt, dass nicht alle Grundkompetenzen abgedeckt werden und manche auch öfters in den Aufgaben versteckt sind. Dies ist meines Erachtens in einer solchen Befragung auch nicht wichtig, da ja das Wissen der Schüler/innen ohnehin nur stichprobenartig überprüft werden kann. Man kann nicht alles abfragen, da dies die Zeit und die Geduld der Schüler/innen nicht zulassen würde.

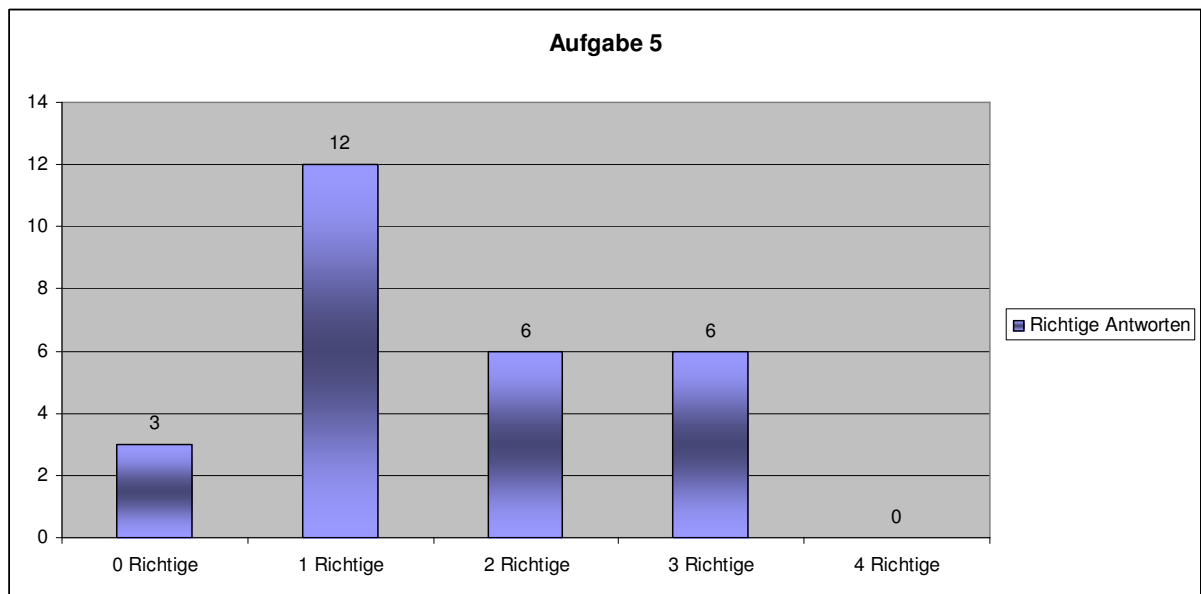
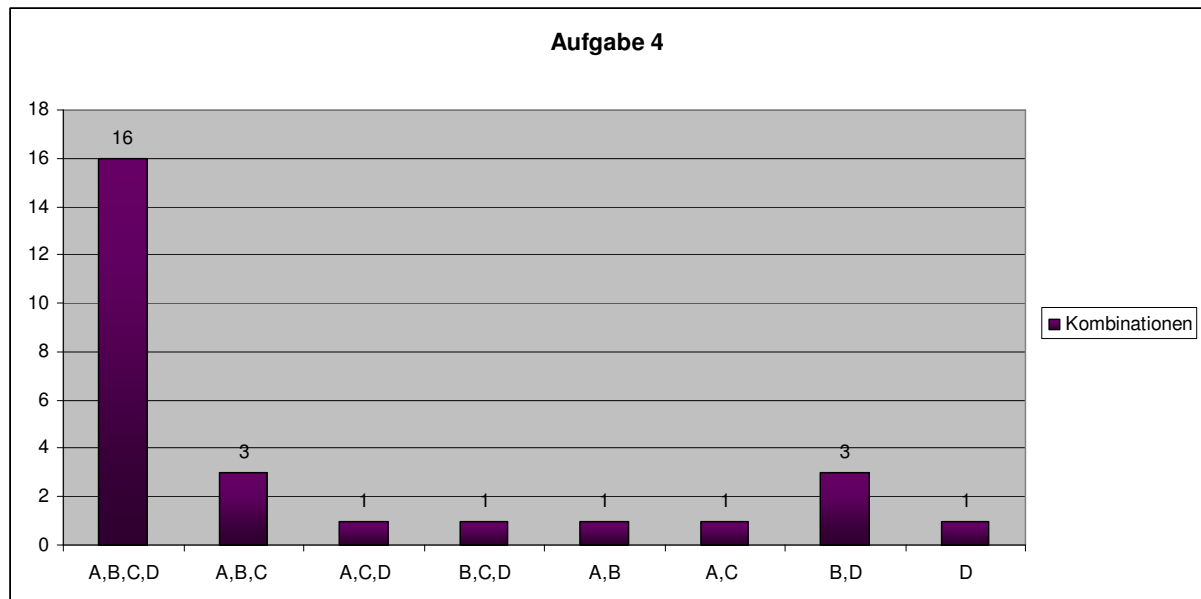
4.12 Auswertung der Fragebögen

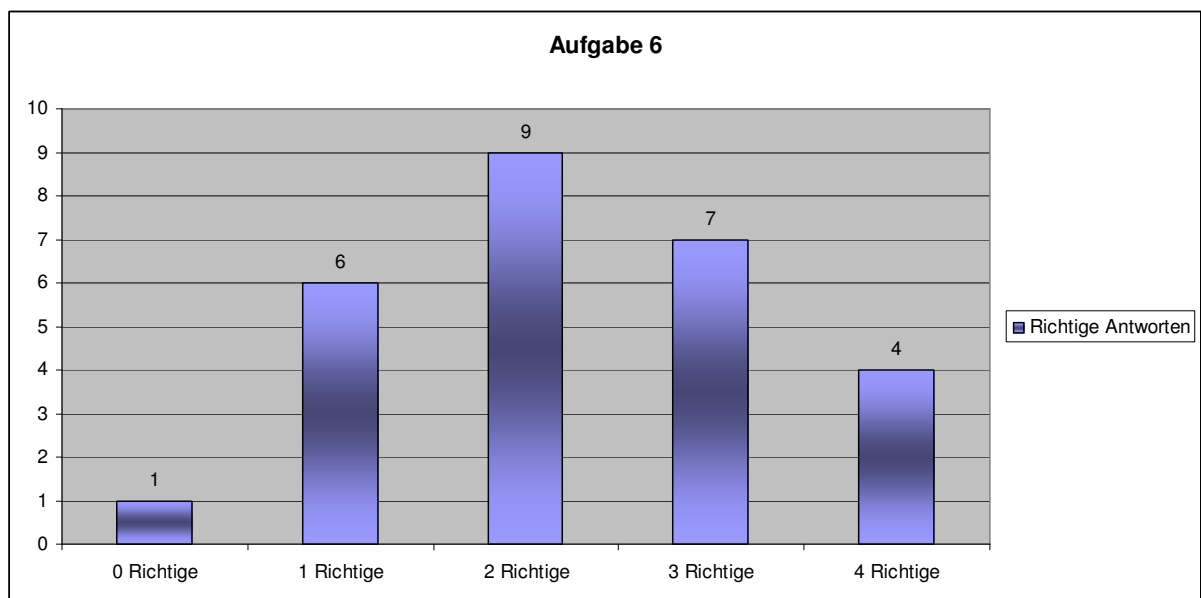
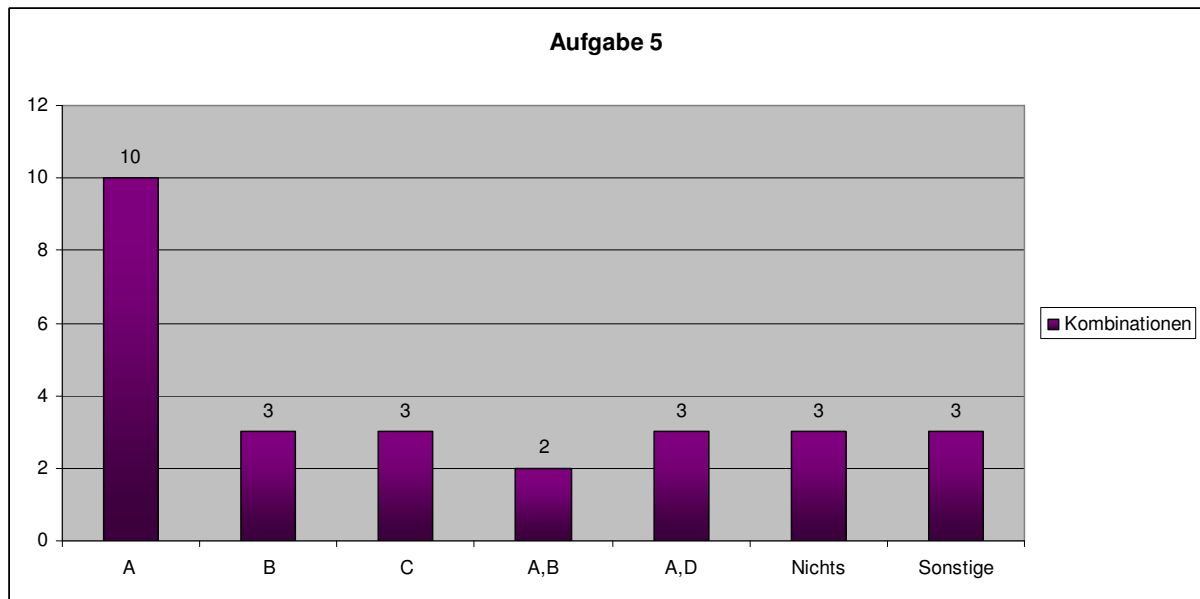
Dieser Abschnitt enthält die Auswertung der schriftlichen Befragungen. Die einzelnen Aufgaben werden unterschiedlich ausgewertet. Bei manchen Aufgaben werden auch Kombinationen ausgewertet, um später weitergehende Interpretationen treffen zu können. Insgesamt haben 27 Schüler/innen an der schriftlichen Befragung teilgenommen.

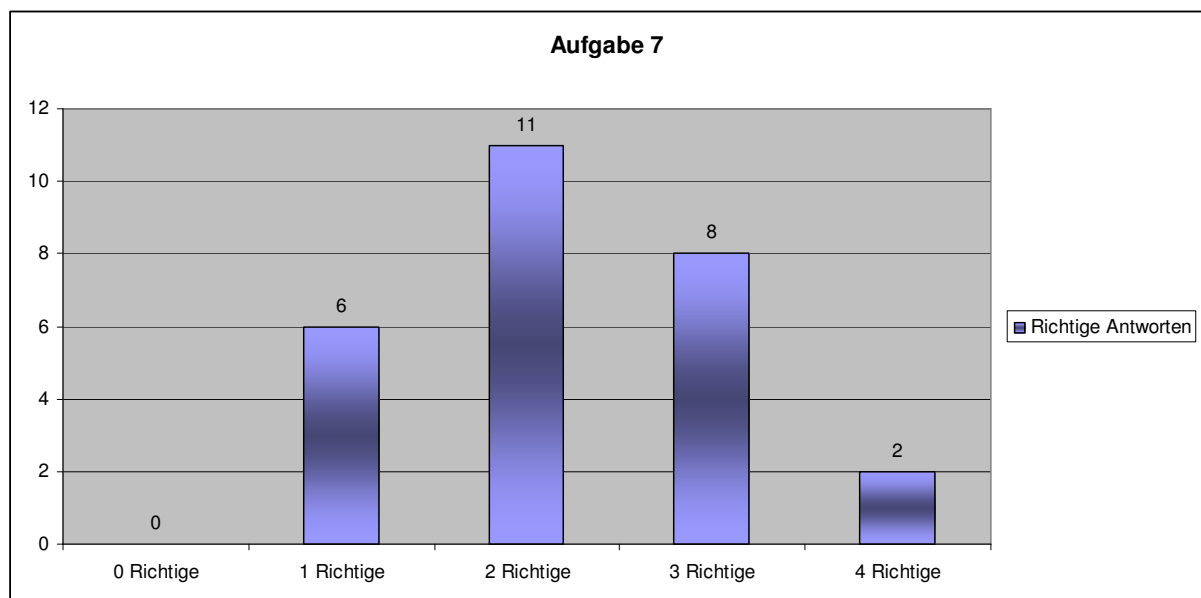
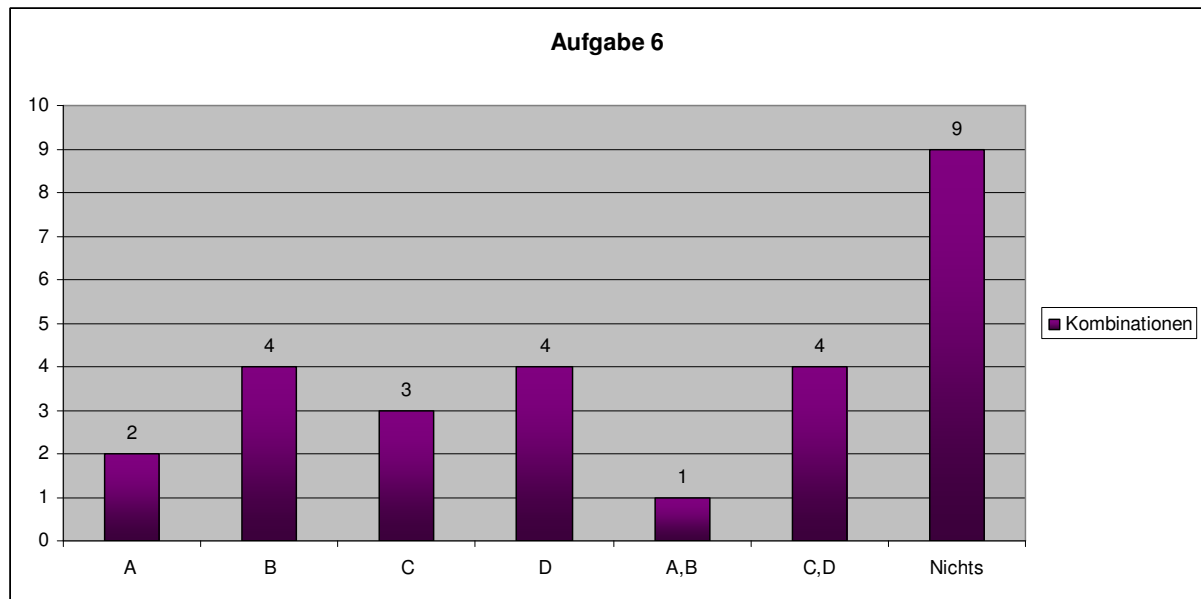


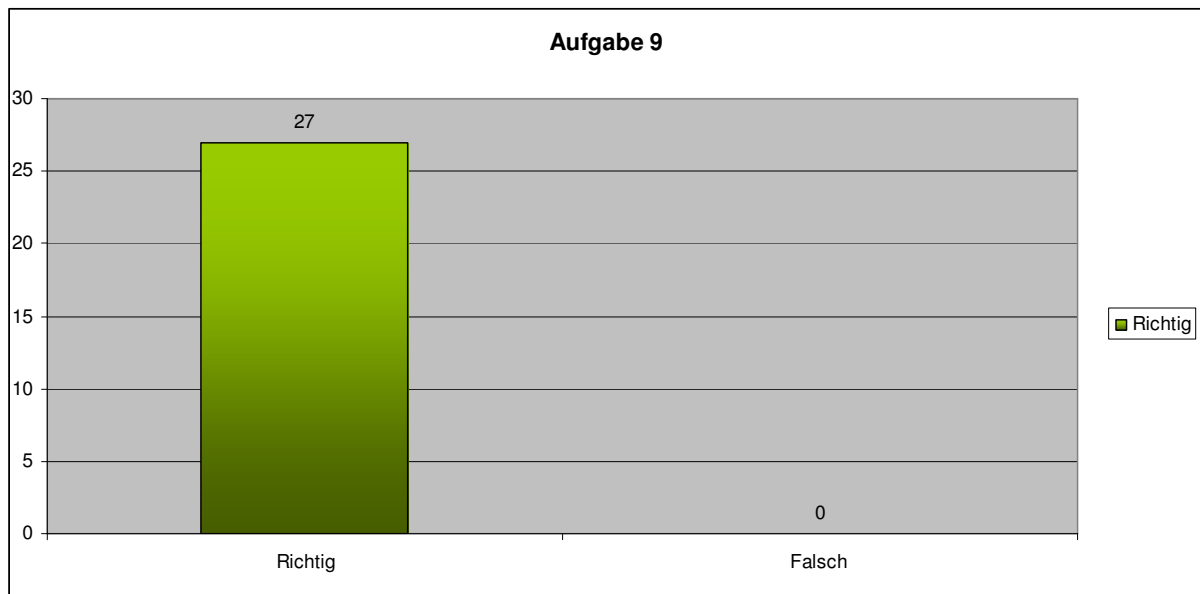
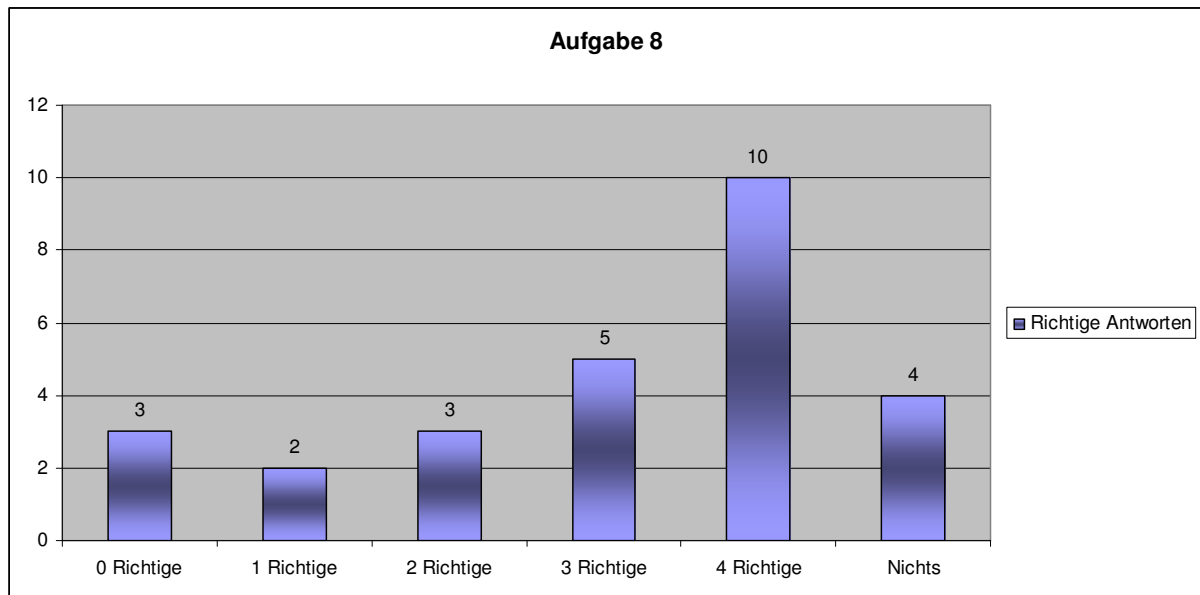
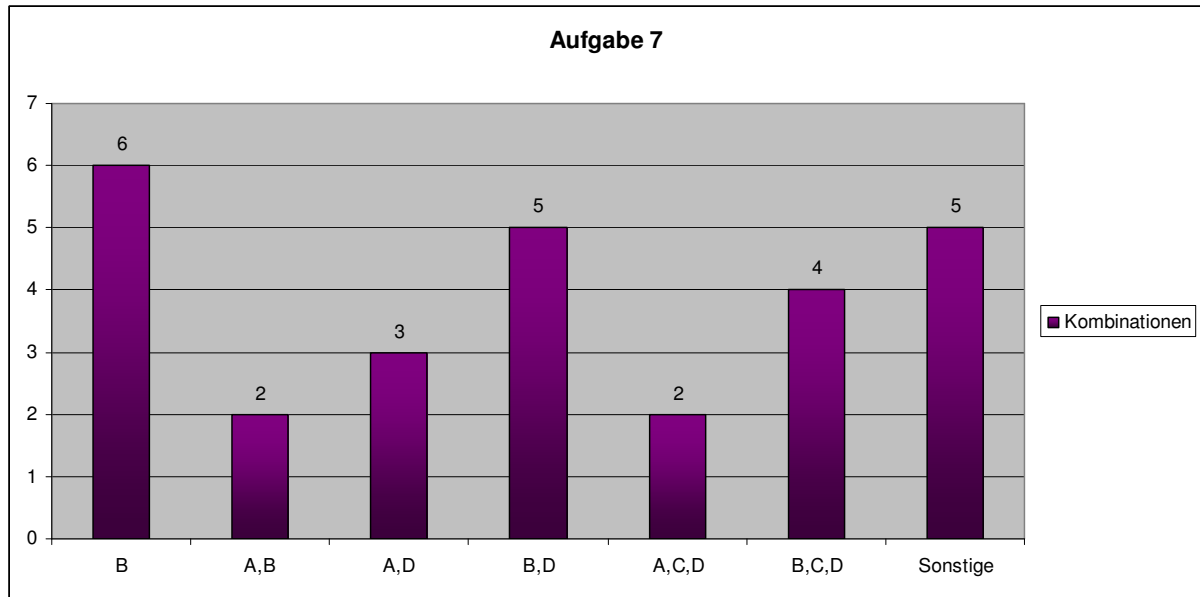


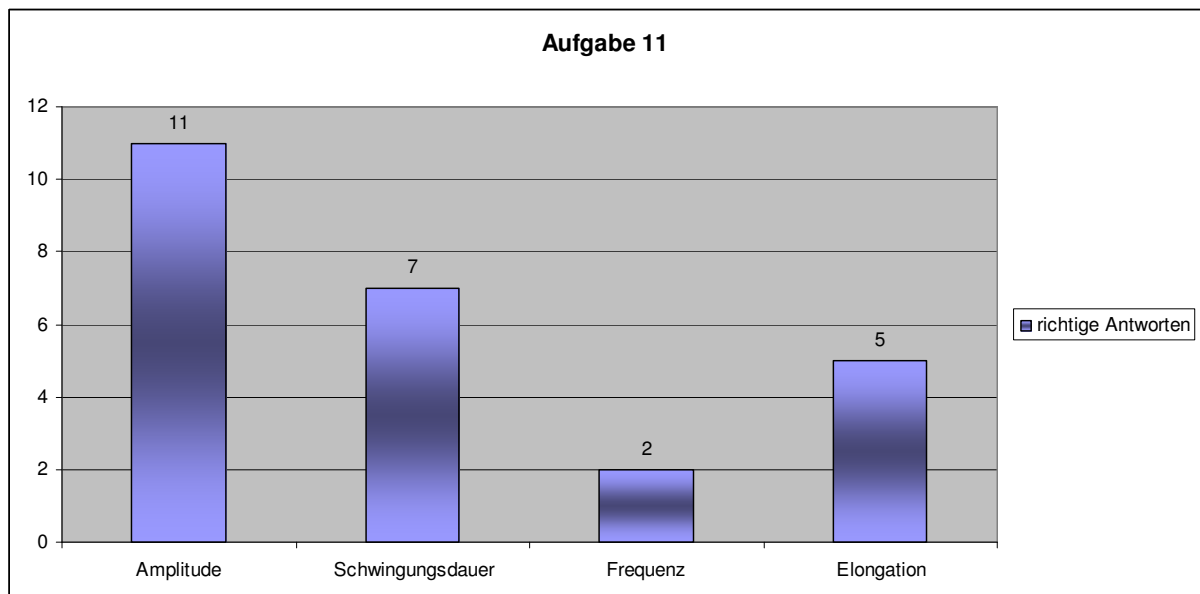
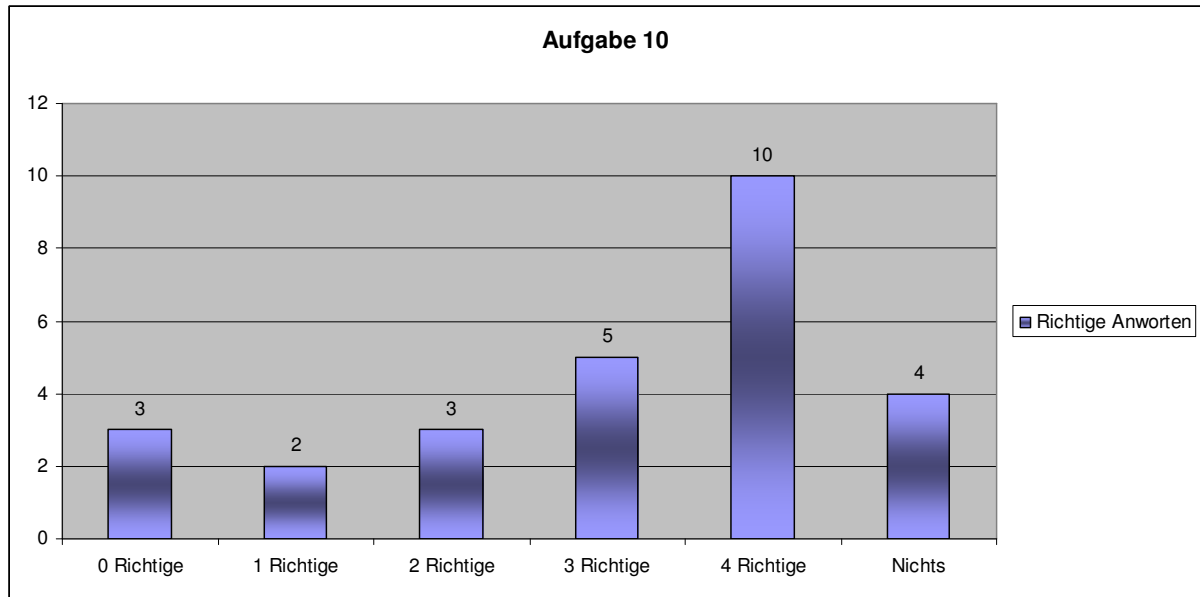












Aufgabe 12 wurde von keinem/r Schüler/in bewältigt.

4.13 Analyse

Ich möchte nun nach den Ergebnissen der schriftlichen Befragung nun analysieren, welche Grundkompetenzen die befragten Schüler/innen aufgrund des Tests aufweisen und welche nicht in ihren Köpfen verankert sind. Natürlich kann ich wiederum nur die abgefragten Kompetenzen in den Aufgaben betrachten, da ich über das Vorhandensein andere Grundkompetenzen nicht Bescheid weiß.

In den ersten beiden Aufgaben ist, wie ich bereits erwähnt habe, die Grundkompetenz FA. 1.4 abverlangt worden. Anhand der beiden Diagramme kann man sehen, dass diese Grundkompetenz bei den befragten Schülern/innen im Großen und Ganzen vorhanden ist. Die erste Aufgabe lösten 16 und die zweite 24 von 27 Schülern/innen richtig. Die erste Aufgabe ist dennoch, meines Erachtens, gut bewältigt worden, da in dieser Aufgabe mehrere Antworten richtig sein konnten und alle Kreuze richtig gesetzt werden mussten, damit die Aufgabe als richtig gewertet wird.

Die Aufgaben 3 und 4, die die Grundkompetenz FA. 2.2 behandelten, wurden jedoch nicht befriedigend gelöst. Vor allem Aufgabe 4 wurde nur dreimal richtig beantwortet. Viele tappten in die Falle hinein und vertauschten k mit x . Dies erkennt man auch an den Kombinationen, da viele Schüler/innen alles angekreuzt haben. d und $f(x)$ stellten hierbei weniger Probleme.

Die Aufgaben 5 und 6, die die Grundkompetenz 3.4 von den Schülern/innen abverlangte, sind katastrophal beantwortet worden. Aufgabe 5 konnte kein/e Schüler/in korrekt beantworten und bei Aufgabe 6 waren es auch nur vier. Diese Grundkompetenz ist also bei den Befragten so gut wie nicht vorhanden. Anhand der Diagramme kann man auch erkennen, dass bei diesen Aufgaben nur geraten wurde, denn es treten sehr viele Kombinationen auf.

Als nächste Kompetenz wurde Kompetenz FA 1.5 in Aufgabe 7 abgefragt. Auch diese Kompetenz ist in den Köpfen der Schüler/innen wenig verankert, da nur zwei diese Aufgabe korrekt beantworten konnten. Definitionen zu globalen und lokalen Extrema sind also keineswegs bei allen Schülern/innen abrufbar.

Aufgabe 8 ist hingegen passabel beantwortet worden. Bis auf den letzten Graphen, wo die Schüler/innen vergaßen, dass es auch eine entartete Polynomfunktion vierten Grades sein könnte, wurde diese Aufgabe eigentlich gut beantwortet, da vier Graphen der Grad zugeordnet werden musste und zumindest 15 Schüler/innen entweder drei oder vier richtige Kreuze gesetzt haben.

Aufgabe 9, in der die Grundkompetenz FA 5.1 zur Geltung kommt, wurde perfekt beantwortet. Alle der befragten Schüler/innen lösten die Aufgabe korrekt. Diese Grundkompetenz dürfte also durchaus vorhanden sein.

Mit der Aufgabe 10 bin ich wenigstens teilweise zufrieden, da 15 von 27 Schülern/innen zumindest 3 richtige Antworten gaben. Die Grundkompetenz FA 5.4 wurde meines Erachtens von den Schülern/innen teilweise erworben. Vier Schüler/innen kreuzten allerdings nichts an und haben daher vermutlich keine Ahnung.

Aufgabe 11 behandelt zwei Kompetenzen, nämlich FA 6.1 und FA 6.2. So eine Aufgabe wurde laut den Schülern/innen nicht im Unterricht behandelt. Dennoch wussten manche Bruchstücke. Dies kommt vielleicht auch daher, dass sie in der Physik schon Begriffe wie Amplitude oder Schwingungsdauer gehört haben. Immerhin wussten elf Schüler/innen über die Amplitude Bescheid.

Aufgabe 12 wurde im Unterricht gar nicht behandelt und kommt daher bei meiner Auswertung und Analyse nicht mehr vor.

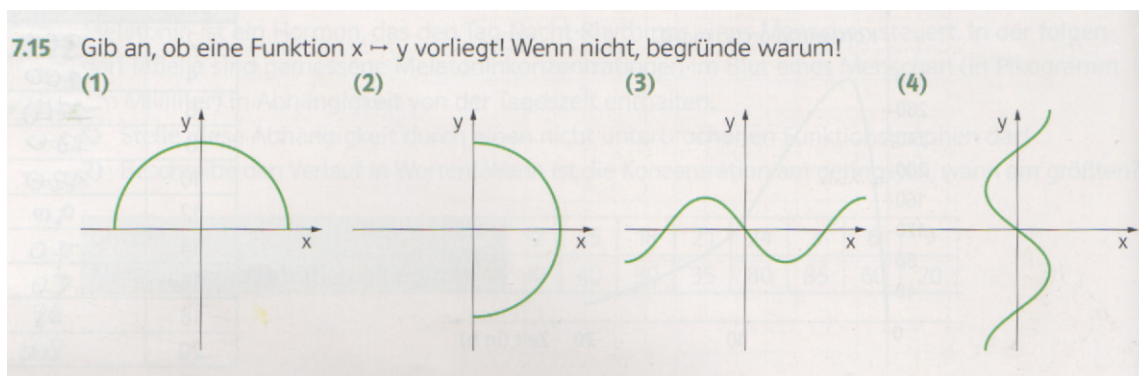
Alles in allem bestätigt sich mein Eindruck, dass bei den Schülern/innen viel Bruchstückwissen und kein vollständiges Basiswissen vorhanden ist. Ansätze sind da, aber mehr nicht; ob sie die meisten Grundkompetenzen der Funktionenlehre erworben haben, ist sehr fraglich.

4.2 Mündliche Befragungen der Schüler/innen

Nun möchte ich genauer auf meine mündlichen Interviews, die ich mit zehn Schülern/innen und neun Studenten/innen durchgeführt habe, eingehen. Zunächst befragte ich die Schüler/innen zu weiteren Aufgaben aus dem Buch. Die Studenten/innen hingegen befragte ich zu drei Aufgaben der schriftlichen Befragung, die ich in den Schulen durchgeführt habe. Wichtig an dieser Stelle ist vielleicht auch, dass die Studenten/innen keine Mathematiker/innen sind, sondern aus anderen Studienrichtungen kommen.

In weiterer Folge habe ich nur die interessanten Stellen transkribiert, da nur diese für meine Analyse relevant sind.

Aufgabe 7.15:



Schüler C:

Schüler C: Em. (Pause 10 s) Das weiß ich nicht.

Interviewer: Was, vielleicht irgendeine Vermutung oder?

Schüler C: Nein, nicht einmal eine Vermutung

Interviewer: Wie habt ihr den Begriff „Funktion“ in der Schule gemacht?

Schüler C: Em, eigentlich nur em, quasi (Schüler räuspert sich), em als Strich auf einer, auf dem Koordinatensystem. Em, blöde gesagt, im Prinzip ist eine Funktion, gibt es eine andere Bedeutung für Strich? (Schüler lacht)

Interviewer: Ja aber da ist ja eine Funktion kein Strich oder?

Schüler C: Ja, ja ein Runder halt. (Schüler lacht) Ja es gibt eben, Funktion von 1) und 2) und 3), und da ist eben ob es eine Gerade ist, ob es eine Kurve, zwei Kurven, drei Kurven hat und weiter.

Interviewer: O.K.

Schüler C: So haben wir das dann weiter gemacht, das haben wir in der Sechsten gemacht, oder, glaub ich.

Interviewer: Wenn du da zum Beispiel ratest, ist 4) eine Funktion oder nicht?

Schüler C: 4) ist eine Funktion ja, em, ja Funktionen sind im Prinzip ja alle.

Gesamtbeurteilung:

Dieser Schüler kennt die Definition einer Funktion nicht und kann sie daher auch nicht anwenden. Er hat nur eine Vorstellung, dass der Graph einer Funktion eine gerade oder auch gebogene Linie ist.

Schüler E und Schülerin G:

Schüler E: Em, 1) ist keine Funktion, 2) auch keine, 1) könnte eine sein, 2) ist keine, 3) ist eine und 4) ist keine.

Interviewer: Und wieso ist 4) zum Beispiel keine?

Schüler E: Weil ich nicht glaube, dass eine Funktion y mehr als einmal geschnitten werden darf.

Interviewer: Ah O.K. und was war noch keine Funktion bei dir?

Schüler E: Em, 2) zum Beispiel.

Interviewer: Wieso ist 2) keine?

Schüler E: Weil (Pause 5 s) hier wieder y zweimal geschnitten wird im Prinzip, zwar nicht direkt auf der Achse, aber halt der Länge nach.

Interviewer: O.K. passt.

Schüler E: Einem x - Wert können nicht zwei y - Werte zugeordnet werden.

Schülerin G: Ja also es ist 3) und, nein 3) und 1) sind eine Funktion und 2) und 4) nicht.

Interviewer: Wieso sind 2) und 4) keine Funktionen?

Schülerin G: Weil sie so gehen und nicht auf der x entlang, sondern auf der y .

Gesamtbeurteilung:

Bei diesem Schüler und dieser Schülerin ist die Definition einer Funktion intuitiv vorhanden. Trotz der Unsicherheit des Schülers am Anfang, kommt er auf die richtige Lösung. Warum er sich bei 1) nicht ganz sicher ist, könnte daran liegen, dass er Funktionsgraphen die senkrecht auf der 1. Achse enden, nicht akzeptieren (was man auch in der Forschung festgestellt hat).

Die Schülerin G hat die Aufgabe einigermaßen richtig gelöst, auch wenn sie sich ein bisschen holprig ausdrückt.

Schülerin F:

Interviewer: Du glaubst, dass 3) eine Funktion ist. Und was ist mit den anderen, 1), 2), 3), sind das Funktionen?

Schülerin F: Ich weiß nicht, ich habe noch nie solche Funktionen gesehen.
(Schülerin lacht). Möglicherweise das auch noch.

Interviewer: 4) O.K.

Schülerin F: Alles andere habe ich noch nie gesehen.

Interviewer: Punkt 1) und Punkt 2) hast du noch nie gesehen?

Schülerin F: Nein.

Interviewer: O.K., wie habt ihr den Funktionsbegriff in der Schule gemacht?

Schülerin F: Na sicher. (Schülerin lacht) Ja schon aber.

Interviewer: Also bei dir sind jetzt 1) und 2) keine Funktionen.

Schülerin F: Na ja, O.K. wahrscheinlich schon.

Interviewer: Warum ist 1) und 2) keine Funktionen?

Schülerin F: Es schaut so komisch aus.

Interviewer: O.K. es schaut komisch aus. (Schülerin und Interviewer lachen)

Schülerin F: Na ja vielleicht ist es eh eine Funktion, aber ich wüsste nicht, weil alle Funktionen, die wir bisher gemacht haben, die steigen, oder so Linien oder drunter oder.

Interviewer: O.K.

Schülerin F: Aber kein Halbkreis.

Gesamtbeurteilung:

Diese Schülerin hat wenig Ahnung von der Materie. Auffällig ist, dass sie keinen Halbkreis als Funktion zulassen möchte. In der Forschung hat man festgestellt, dass Schüler/innen oft einen Halbkreis nur mit der Geometrie und nicht mit der Funktionenlehre verbinden und daher diese auch nicht als Funktionen akzeptieren.

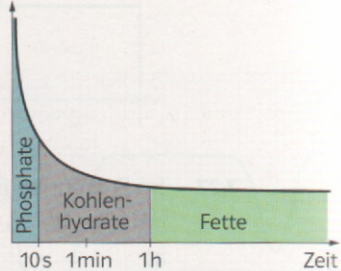
Aufgabe 7.32:

7.32 Wenn jemand längere Zeit läuft, nimmt seine Leistung ab. Die nötige Energie wird zuerst vorwiegend durch Abbau von Phosphaten, dann von Kohlenhydraten und schließlich von Fetten geliefert. In einem sportmedizinischen Buch findet sich die nebenstehende Abbildung, die die Abnahme der Leistung mit der Zeit wiedergibt.

a) Welche Mängel fallen an der Beschriftung der Achsen auf? Kann man die Darstellung trotzdem rechtfertigen?

b) Was kann man aus der Abbildung alles herauslesen?

c) Wie lange sollte man nach dieser Abbildung mindestens laufen, um durch das Laufen wirkungsvoll abzunehmen?



Schülerinnen A und C:

Schülerin A: Bei Beispiel a), em würde ich sagen, äh, fehlt einmal die Beschriftung der y- Achse.

Interviewer: O.K.

Schülerin A: Es ist nur die x-Achse mit der Zeit beschriftet, die y-Achse müsste man dann noch beschriften.

Interviewer: Mhm.

Schülerin: Em, ja man kann herauslesen, dass em, nach zehn Sekunden, also am Anfang ist der Abbau von den Phosphaten sehr hoch. Mit zunehmender Zeit wird der Abbau der Phosphate niedriger.

Interviewer: Mhm.

Schülerin A: Und em, ab einer Stunde werden dann Fette erst abgebaut und es bleibt dann ziemlich konstant.

Interviewer: O.K. ja gut, c) vielleicht noch.

Schülerin A: Mhm. Ja also mindestens eine Stunde, dass man erst einmal anfängt, Fette abzubauen.

Schülerin C: Em ja, also da fällt mir einmal auf die y-Achse ist irgendwie nicht richtig beschrieben worden, also wie viele jetzt da an Phosphaten abnimmt oder Kohlenhydrate und Fette, em, ob man es trotzdem rechtfertigen kann? Em, es lässt sich zumindest veranschaulichen einmal.

Interviewer: O.K., b).

Schülerin C: Em, herauslesen kann man halt einmal, em, die Zeit. Nach wie viel Sekunden, Minuten oder so was passiert.

Interviewer: Mhm.

Schülerin C: Und (Pause 10 s). Und em, auf jeden Fall länger als eine Stunde, damit Fett abgebaut wird.

Gesamtbeurteilung:

Diese Schülerinnen haben im Prinzip die Aufgabe richtig gelöst. Das einzige was sie vergessen haben, ist, dass die Skala nicht äquidistant ist, das heißt dass verschiedene Einheiten auf der Achse verwendet werden.

Schüler D:

Schüler D: Bei der Beschriftung fällt natürlich ganz klar auf, dass bei dieser Achse keine Einheiten dabei stehen. Man kann sich nicht wirklich vorstellen in welchem Rahmen, das jetzt stattfindet.

Interviewer: Bei welcher Achse ist das jetzt genau?

Schüler D: Das ist die y-Achse.

Interviewer: Mhm.

Schüler D: Ja was kann man aus der Abbildung alles herauslesen. Ja (Schüler räuspert sich), dass man eigentlich überhaupt recht viel Sport machen muss, damit man Fett, so fern man Fett verbrennen will, Fett verbrennt.

.....

Naja wenn das die Leiste der Energie ist, die man hat, ja. Man nimmt ja am Anfang relativ schnell ab eigentlich.

Interviewer: O.K..

Schüler D: Was fast erschreckend ist (Schüler lacht), wenn das, wenn man dem vertrauen kann.

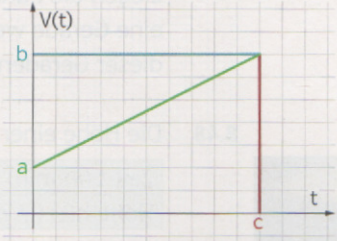
Ja zum Punkt c), man sollte eigentlich mindestens eine Stunde laufen, damit man Fett verbrennt und dadurch kann man erst abnehmen. Kohlenhydrate, na ja tragen jetzt nicht so bei zur Gewichtsabnahme wie Fette, also mindestens eine Stunde.

Gesamtbeurteilung:

Dieser Schüler hat ebenso nicht erkannt, dass die Skala nicht äquidistant ist. Dennoch hat er die Aufgabe gut interpretiert, da er anders als die anderen erkannt hat, dass es zu einer raschen Abnahme der Phosphate kommt.

Aufgabe 8.45:

8.45 Eine Badewanne wird gleichmäßig mit Wasser voll gefüllt. Die Abhängigkeit des in der Wanne befindlichen Wasservolumens $V(t)$ (in Liter) von der Zeit t (in Minuten) ist rechts dargestellt.



- 1) Was bedeuten die Zahlen a , b , c ?
- 2) Wie viel Liter Wasser fließen pro Minute zu?
- 3) Fließt in der doppelten Zeit die doppelte Wassermenge zu?
- 4) Verdoppelt sich in der doppelten Zeit das Volumen des Wassers in der Wanne?
- 5) Übertrage die Abbildung in das Heft und zeichne zusätzlich den Graphen der Funktion $t \mapsto \bar{V}(t)$ ein, wenn pro Minute doppelt so viel Wasser zufließt! Zeichne auch den Zeitpunkt d ein, zu dem in diesem Fall die Wanne voll wäre! Ist die Wanne in der halben Zeit wie vorhin voll?

Schüler B:

Schüler B: Also a ist die Volumenzunahme des Wassers im Bad.

Interviewer: Mhm.

Schüler B: Und b wird die Zeit sein und c die Liter.

Interviewer: Mhm.

Schüler B: Wie viel ist eine Minute, ein Kasterl oder?

Interviewer: Mh ja, also da muss man erst feststellen, was damit gemeint ist.

Schüler B: Aja mhm (Pause 10).

Interviewer: Wenn du es nicht weißt, kein Problem, dann gehen wir hald zum nächsten Punkt.

Schüler B: O.K. Ja und Punkt 3) müsste eigentlich so stimmen, also wenn es konstant zunimmt, müsste in der doppelten Zeit doppelt soviel Wasser sein am Schluss.

Interviewer: Mhm ja.

Schüler B: Würde ich jetzt nicht sagen, genau begründen, also 4).

Interviewer: Wieso hast du auch eine Erklärung dafür oder?

Schüler B: Em, na ja das Volumen ist ja mehr oder weniger, das ist, wie erkläre ich das, ah, na ja ich habe so eine Ahnung, es steigt ja, das Volumen steigt viel zu hoch, dadurch dass es hoch Drei ist, das heißt das doppelte Volumen (Pause 10), nein kann ich nicht wirklich.

Gesamtbeurteilung:

Dieser Schüler kann diese Aufgabe gar nicht lösen. a, b und c wurde völlig falsch interpretiert und somit ist auch der Rest der Aufgabe falsch. Die Grundkompetenz, k und d in Anwendungssituationen deuten, ist also bei diesem Schüler sicherlich nicht vorhanden.

Schüler E:

Schüler E: Na ja also, a dürfte in dem Fall, ich gehe davon aus, dass die Wanne am Anfang leer ist, oder? Deshalb verstehe ich nicht ganz warum das einen Anfangsgraphen schon hat, so zu sagen, dann wäre schon was drinnen, weil das ist viel, viel weiter oben.

Interviewer: Mhm.

Schüler E: Em, ja und dann wird es durch eine lineare Funktion weiter vollgefüllt.

Interviewer: Ja.

Schüler E: Und b ist der Punkt, wo die Wanne voll ist.

....

Also b ist der Punkt auf der x -Achse, äh, für den Zeitpunkt eben wo die Wanne auf der y -Achse b , äh voll.

Interviewer: Mhm.

Schüler E: Äh wie viel Liter Wasser fließen pro Minute zu? Das kommt dann drauf an, was für eine Einheit gegeben ist. Da steht jetzt keine da.

Interviewer: O.K..

Schüler E: Deshalb kann man das nicht sagen.

Interviewer: Gut.

Schüler E: Fließt in der doppelten Zeit die doppelte Wassermenge zu? Ja, weil es eine lineare Funktion ist.

Interviewer: Ja.

Schüler E: Verdoppelt sich in der doppelten Zeit das Volumen des Wassers in der Wanne? Ja.

Gesamtbeurteilung:

Auch dieser Schüler kann mit den Parametern a , b und c nichts anfangen. Im Gegensatz zu Schüler B, hat er aber 3) und 4) verstanden.

Schülerin G:

Schülerin G: Ja also a ist die Steigung, also Ansteigende.

Interviewer: O.K.

Schülerin G: Variable. Mm, b und c sind Hilfslinien. (Schülerin lacht)

Interviewer: Hilfslinien

Schülerin G: Ja (Schülerin räuspert sich). Hm (Pause 10 s), ja ich würde sagen, 1,5 Liter pro Minute, oder so.

Interviewer: Wieso?

Schülerin G: Keine Ahnung, ich kann das da ablesen, da sind keine Zahlen.

Interviewer: O.K.

Schülerin G: (Pause 10) Ja die doppelte Menge fließt in der doppelten Zeit zu.

Interviewer: O.K.

Schülerin G: 4) ist nein.

Interviewer: 4) ist nein, wieso?

Schülerin G: Gute Frage, ja weil es ja, weil ja die Wanne nicht so haftig ist, sondern, na ja obwohl, hm, vielleicht nimmt es doch zu, gleich viel zu.

Gesamtbeurteilung:

Bei Schülerin G hat man den Eindruck, dass sie die Aufgabe lösen könnte, wenn konkrete Werte angegeben wären. Ohne Einheiten tut sie sich schwer und ist allgemein außer Stande diese Aufgabe angemessen zu interpretieren.

Schüler I:

Schüler I: a ist die Steigung des Volumens, so zu sagen, also der Volumenverlauf.

Interviewer: Ja du kannst es als Punkte auch sehen.

Schüler I: Ja ich meine, wenn a der Punkt da wäre, wäre es der Startpunkt, wo es losgeht, so zu sagen. Nein Blödsinn, wenn da Volumen ist und da Zeit. Also die Strecke a gibt einmal an, wie sich das Volumen im Verlauf der Zeit ändert. b ist die Zeit, die vergeht und c ist eben das Volumen, das sich dann in der Badewanne befindet.

Interviewer: Mhm.

Schüler I: Wie viel Liter Wasser fließen pro Minute zu? Äh, haben wir für t eine Einheit?

Interviewer: Nein.

Schüler I: Ah t in Minuten, das heißt.

Interviewer: Aber es ist alles allgemein.

Schüler I: Allgemein.

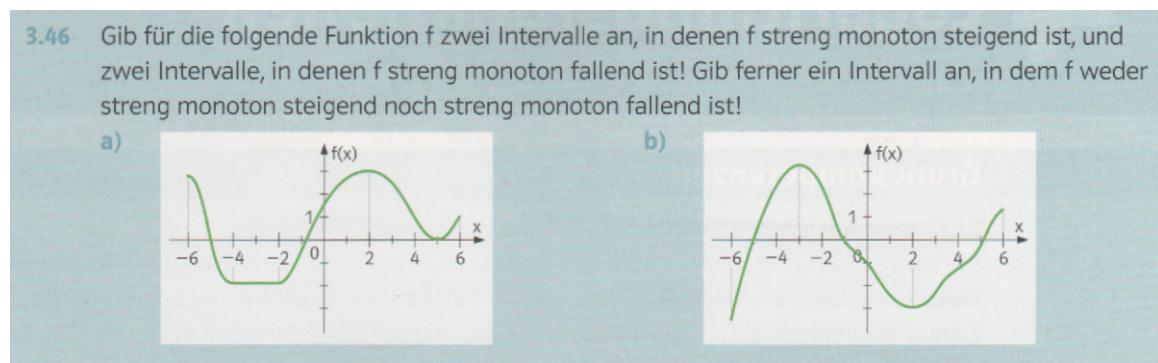
Interviewer: Mhm.

Schüler I: Hm, pro Minute geht demnach ein halber Liter.

Gesamtbeurteilung:

Auch dieser Schüler lechzt nach konkreten Zahlen. Interessant ist, dass er a als Steigung des Volumens oder den Volumenverlauf interpretiert. Vielleicht kann er k als Steigung auffassen, im vorliegenden Fall beschreibt er jedoch k falsch.

Aufgabe 3.46 a:



Schüler C:

Interviewer: Also wo ist f einmal streng monoton steigend?

Schüler C: Em, streng ist da da.

Interviewer: Wenn du vielleicht dazu sagst, was für ein Intervall.

Schüler C: Also von -2 bis 2.

Interviewer: O.K.

Schüler C: Und von 5 bis 6, ins Unendliche hald, also von 5 bis ins Unendliche.

Interviewer: O.K., streng monoton fallend?

Schüler C: Ist von -6 bis -4 und 2 bis 5.

Interviewer: Und dann haben wir noch ein Intervall, weder streng monoton steigend noch streng monoton fallend.

Schüler C: Das ist von -4 bis -2.

Gesamtbeurteilung:

Im Prinzip hat der Schüler die Aufgabe richtig gelöst. Einziges Manko ist, dass er davon ausgeht, dass, die Funktion für $x \geq 6$ streng monoton steigend ist. Dies kann jedoch nicht abgelesen werden

Schülerin F:

Schülerin F: Also streng monoton steigend, zwei Intervalle.

Interviewer: Mhm.

Schülerin F: Naja das wäre von, also, -2, -2 und das ist +2 und +3, und dann 5, 6 und 1, 6.

Interviewer: Ja.

Schülerin: Und streng monoton fallend halt von minus Unendlich bis -4, -2.

Interviewer: Mhm.

Schülerin F: Und von 3 bis 6.

Interviewer: Ok und ein Intervall, wo es weder streng monoton fallend noch streng monoton wachsend ist.

Schülerin F: Ja das wäre eigentlich das, von -4, -2 bis -2, -2.

Gesamtbeurteilung:

Diese Schülerin bezieht die Monotonie nicht immer auf Intervalle, sondern auf isolierte Stellen. Sie hat also eine falsche Vorstellung von Monotonieintervallen.

Aufgabe 4.25:

- 4.25** Ein Pulver löst sich in Wasser so auf, dass nach t Sekunden nur mehr $N(t) = 100 \cdot 0,9^t$ (g) des ungelösten Pulvers vorhanden sind.
- a) Wie viel Pulver wurde in das Wasser geschüttet?
 - b) Auf welchen Bruchteil sinkt die Menge ungelösten Pulvers pro Sekunde?
 - c) Um wie viel Prozent nimmt die Menge ungelösten Pulvers pro Sekunde ab?
 - d) Auf welchen Bruchteil sinkt die Menge ungelösten Pulvers in einer Minute?
 - e) Um wie viel Prozent nimmt die Menge ungelösten Pulvers pro Minute ab?

Schülerin A:

Schülerin A: Also em, es wurde dann ein Gramm von dem Pulver in das Wasser geschüttet, stimmt das?

Interviewer: Mh.

Schülerin A: Nein?

Interviewer: Wie kommst du auf ein Gramm?

Schülerin A: Ich hätte jetzt gesagt, da wir da unsere Gleichung sozusagen haben und nur 0,9 haben, hätte ich gedacht, dass wir ein Gramm hineingeschüttet haben. Und dass 0,9 über bleiben, so hätte ich das jetzt gesagt.

O.K., bei b) dann, müssen wir ja weil t die Zeit ist, em, halt einsetzen, dass wir das pro Sekunde bekommen und, also wir setzen da jetzt ein: $0,9^{60}$ für die Sekunden.

Interviewer: O.K..

Schülerin A: Dann, em, dann weiß man auf welchen Bruchteil es absinkt.

Interviewer: Mhm.

Schülerin A: Und dann kann man sich die Prozent ausrechnen.

Interviewer: O.K. ja.

Schülerin A: Und dann, em, rechnet man in einer Minute, ja das ist jetzt die Frage, ja so ist das Prinzip.

.....

Interviewer: Und, em, von was für einem Wachstum beziehungsweise Abnahme sprechen wir?

Schülerin A: Jetzt bei diesem Beispiel?

Interviewer: Was für ein Abnahme- bzw. Wachstumsprozess ist das da, was für ein Modell?

Schülerin A: Em, wie heißt das. Mir fällt jetzt der Begriff nicht ein. Mir fällt das jetzt nicht ein.

Gesamtbeurteilung:

Diese Schülerin kann die Parameter a und c nicht deuten und beantwortet keine Frage zufriedenstellend. Den Begriff des „exponentiellen Abnahmeprozess“ weiß sie auch nicht.

Schüler D:

Schüler D: Auf welchen Bruchteil sinkt die Menge ungelösten Pulvers pro Sekunde. Na ja, das Wasser nimmt pro Sekunde ab um ein Zehntel, also pro Sekunde wird ein Neuntel, ah, zehn Neuntel.

Interviewer: Mhm.

Schüler D: Um wie viel Prozent nimmt die Menge ungelösten Pulvers pro Sekunde ab. Das sind, ah eigentlich zehn Prozent, um 10 Prozent nimmt es ab.

Interviewer: O.K.

Schüler D: Auf welchen Bruchteil sinkt die Menge ungelösten Pulvers in einer Minute? 60 na ja.

Interviewer: Muss man da was rechnen, oder sieht man das gleich?

Schüler D: Nein da schreibt man dann einfach äh: $100 \cdot 0,9^{60}$, man geht von Sekunden aus, also 60 Sekunden sind eine Minute und dadurch kann man das ausrechnen.

Interviewer: O.K. ja.

Schüler D: Was das genau ist, kann ich jetzt nicht sagen.

Interviewer: O.K. Punkt e).

Schüler D: Um wie viel Prozent nimmt die Menge ungelösten Pulvers pro Minute ab.
Ja, hm, um wie viel Prozent nimmt die Menge ungelösten Pulvers pro Minute ab, das wird interessant. Taschenrechner darf man da nicht verwenden oder?

Interviewer: Mh, du brauchst nur sagen, was man machen soll oder was man?

Schüler D: Em, man muss eigentlich die Rechnung von d) weiterführen.

Interviewer: O.K. ja.

Schüler D: Da rechnet man sich aus wie viel übrig bleibt nach einer Minute und dann wie viel Prozent, da muss man zuerst ausrechnen, also was wegkommt, dann was übrig bleibt, je nachdem, em, man nimmt den Grundwert, also 100, also 100 minus dem Ergebnis und daraus ergeben sich dann die Prozent.

Gesamtbeurteilung:

Dieser Schüler gibt sehr vage Antworten, die nicht falsch sind. Ob er die Aufgabe lösen kann, ist fraglich. Dennoch ist meines Erachtens bei diesem Schüler ein grundlegendes Verständnis vorhanden.

Schüler H:

Schüler H: 100, die Einheit ist, also Gramm. Em also pro Sekunde auf das 0,9- fache.

Interviewer: O.K., also $\frac{9}{10}$.

Schüler H: Um zehn Prozent.

Interviewer: Mhm.

Schüler H: Wie viel ist $0,9^{60}$?

Interviewer: Sag einfach was man hier rechnen muss.

Schüler H: Also man setze für t, eine Minute hat 60 Sekunden, ein und dann bekommt man den Wert.

Interviewer: O.K. was ist dann bei d) und e)? Was macht man dann mit dem Ergebnis?

Schüler H: Also bei, äh, d) hat man gleich direkt das Ergebnis und bei e) rechnet man Eins minus dem Ergebnis von d).

.....

Interviewer: Was für eine Abnahme haben wir da, was für ein Modell wird hier verwendet, was würdest du sagen?

Schüler H: Em, hm.

Interviewer: Ja was für eine Abnahme, was?

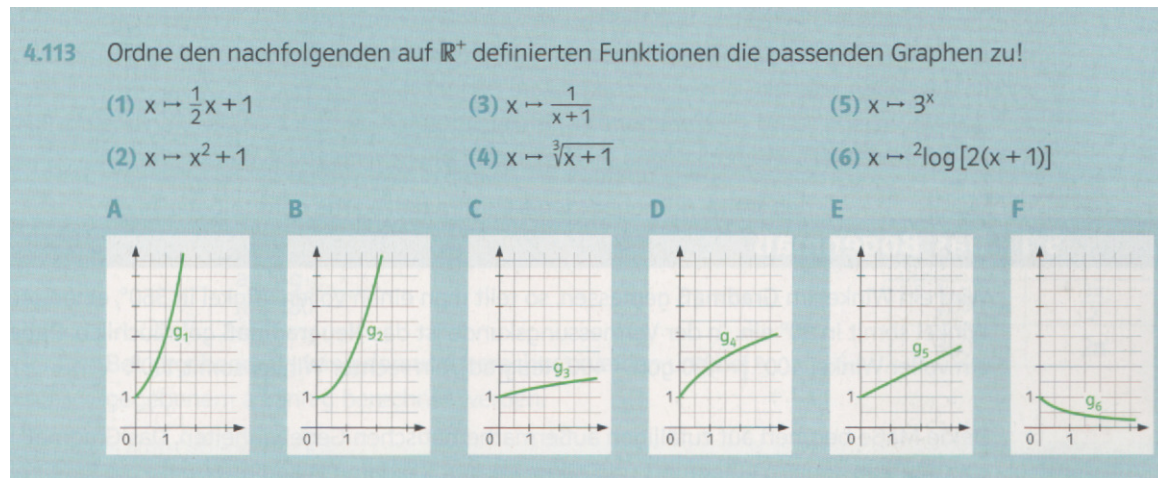
Schüler H: Eine konstante Abnahme.

Interviewer: Konstant?

Schüler H: Konstanter Verfall.

Gesamtbeurteilung:

Dieser Schüler hat eigentlich eine gute Vorstellung, nur die letzte Antwort macht mich ein bisschen stutzig. Der Schüler redet hier von einer konstanten Abnahme. Er verwechselt anscheinend lineare mit exponentiellen Abhängigkeiten.

Aufgabe 4.113:**Schüler B und Schüler I:**

Interviewer: Vielleicht das was du sofort herauslesen kannst.

Schüler B: Ist der gerade? (im Bezug auf C)

Interviewer: Nein, nicht gerade.

Schüler B: Mhm. (Pause 5). Ja dann würde, 1) müsste dann B) sein.

Interviewer: 1) B).

Schüler B: Em 2) müsste dann, em, A) sein.

Interviewer: 2) A).

Schüler B: Hm. (Pause 10). Ja und die restlichen habe ich nicht im Kopf.

Schüler I: 1) gehört zu C)

Interviewer: 1) zu C).

Schüler I: Wenn es wahr ist, gut das lassen wir mal so. Ahm (Pause 10), em 2) gehört zu D).

Interviewer: 2) D).

Schüler I: (Pause 10 s) Em dann 5) sag ich jetzt einmal gehört zu B).

Interviewer: 5) B).

Schüler I: 6) würde ich zu F) tun.

Interviewer: 6) F).

Schüler I: Bleiben noch über 4), O.K. und was habe ich noch nicht, O.K. das habe ich alles schon, äh, dann sage ich 4) zu A) und 3) zu E).

Gesamtbeurteilung:

Diese Schüler sind nicht in der Lage eine richtige Zuordnung zu treffen. Es wird geraten, ohne dass sie eine Strategie verfolgen, die Aufgabe zu lösen.

Schüler E:

Interviewer: Das was du sofort erkennst?

Schüler E: Mhm. (Pause 10) Gut A) ist eine quadratische, also eigentlich eine Exponentialfunktion. Ok, dann würde ich sagen, ich tue mir da jetzt schwer. Hm, da kann ich jetzt wirklich nur nach Gefühl antworten eigentlich.

Interviewer: Mhm.

Schüler E: Würde sagen A) ist 5).

Interviewer: A) 5) O.K.

Schüler E: B) hm (Pause 7 s), B), dann ist B) 2).

Interviewer: B) 2) O.K.

Schüler E: Mhm. Und äh ja, kann ich das umdrehen A) ist 2) und B) ist 5).

Interviewer: O.K. A) 2) und B) 5).

Schüler E: Äh C) ist, hm (Pause 5), C) dürfte 3) sein.

Interviewer: C) 3).

Schüler E: B), B) sagen wir 6).

Interviewer: Sagen wir 6).

Schüler E: E) ist 1).

Interviewer: O.K.

Schüler E: Und F) ist dann 4).

Interviewer: O.K. danke, das wars.

Schüler E: War irgendeine von denen richtig?

Gesamtbeurteilung:

Dieser Schüler kann für grundlegende Funktionen eine Zuordnung treffen. Quadratische, exponentielle und lineare Funktionen wird Schüler E häufig erkennen. Bei den anderen ist er jedoch überfordert. Verwunderlich ist, dass keiner der Befragten Werte einsetzt, um auf den richtigen Funktionsterm zu stoßen. Auch keine Monotonieüberlegungen werden durchgeführt. Prinzipiell fehlen allgemein den Schülern/innen erprobte Hilfsmittel um Aufgaben zu bewältigen.

Aufgabe 3.44 a):

3.44 Kann man etwas über das Monotonieverhalten der Funktion f im Intervall $[-4; 4]$ aussagen, wenn von f das Folgende bekannt ist? Begründe die Antwort!

a) $f(-3) = -7$, $f(-2) = -2$ **b)** Für alle $x \in]-4; 4]$ gilt: $f(x) < f(-4)$

Schüler H:

Schüler H: Ja kann man schon, also es ist streng monoton fallend, zwischen den zwei Punkten.

Gesamtbeurteilung:

Schüler H nimmt gar keinen Bezug auf die Punkte und löst daher die Aufgabe nicht korrekt.

4.3 Mündliche Befragungen der Studenten/innen

Aufgabe 2):

3) Der Radfahrer fährt diesen Hügel hinauf. Welcher der drei Graphen zeigt am besten, wie sich die Geschwindigkeit im Lauf der Zeit ändert?

A) ☐ B) ☐ C) ☐

Student C:

Student C: Ich würde sagen die Nummer C).

Interviewer: Wieso glaubst du das?

Student C: Em, aso, das habe ich mir noch gar nicht so genau angeschaut, aber ich würde trotzdem dabei bleiben, em, weil die Geschwindigkeit relativ hoch wahrscheinlich beginnt und je weiter er hinaufkommt und nachdem das ja die Zeit ist, wird die Geschwindigkeit immer weniger und am Schluss vermute ich ja, dass wir da heroben sind und dass er dann wieder Berg ab fährt.

Gesamtbeurteilung:

Dies ist ein Beispiel für eine korrekte Antwort.

Studentin E:

Studentin E: Aha das Erste.

Interviewer: Das Erste, wieso ist das Erste richtig?

Studentin E: Warte einmal muss ich überlegen, also warte einmal, na warte einmal, der fängt ja mit der Geschwindigkeit 0 an und da fängt er schon mit einer Geschwindigkeit an, em er fängt eigentlich bei 0 an. Na ja weil er am Anfang Geschwindigkeit zulegt und mit zunehmender Zeit an Geschwindigkeit verliert, weil er müde wird.

Gesamtbeurteilung:

Diese Studentin hat eine eigene Interpretation, sie schaut nicht auf den Hügel, sondern denkt nur an den Erschöpfungszustand mit zunehmender Zeit die der Radfahrer fährt.

Studentin H und Studentin B:

Studentin H: Theoretisch braucht er am Anfang mehr, nein Geschwindigkeit ist am Anfang langsam, nein das da wird es sein.

Interviewer: Antwort B) wieso?

Studentin H: Na weil du zuerst langsamer bist wenn du Berg auf bist und Berg ab bist du schneller.

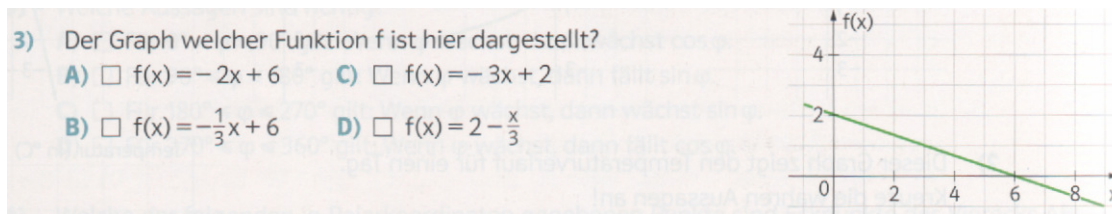
Studentin J: B)

Interviewer: Warum ist das die Nummer?

Studentin: Ja weil er zuerst langsamer wird und oben wieder schneller, weil es einfach steiler ist, oder nicht.

Gesamtbeurteilung:

Diese beiden schildern zwar die Situation richtig, tippen aber auf den falschen Graphen. Vielleicht sind sie Opfer des photographischen Fehlers geworden.

Aufgabe 3):**Studenten A,B und C:**

Student A: Ja $2x + 6$.

Interviewer: $2x + 6$ warum glaubst du das?

Student A: Weil der Graph da durch 2 geht und da durch 6.

Interviewer: Mhm.

.....

Student A: Nein, $2 - \frac{x}{3}$ stimmt.

Interviewer: Wieso?

Student A: Weil, wie geht das mit der Steigung, ah, ein x hinauf und zwei hinüber oder irgendwie so (Student lacht) und 2 ist $\frac{1}{3}$ von 6.

Interviewer: O.K.

Student A: Das heißt $2 - \frac{x}{3}$ beschreibt die Funktion vom Graphen.

Student B: Also das ist eine lineare Funktion. Aso warte, das ist -2. (Pause 4) Das ist Antwort C) oder?

Interviewer: C) wieso?

Student B: Weil d 2 ist.

Student C: Ich glaube es ist die Antwort D), weil soweit ich mich erinnern kann, em wenn man mit 2 anfängt und dann das x, pro, immer ein Stückerl wegnimmt, em, was ist das da herunteren, nein das müsste hinhauen, ich würde sagen die Antwort D).

Gesamtbeurteilung:

Diese drei Studenten wissen über das d in etwa Bescheid und sehen nur schnell hin und sagen C), weil d in gewohnter Weise zum Schluss steht. Bei Antwort D) steht das d vor dem k und wird daher auch nicht akzeptiert. Die Vertauschung der Reihung und das partielle Anschauen eines Terms bewirken häufige Fehler bei Schüler/innen.

Student D und Studentin J:

Student D: Das Erste.

Interviewer: Punkt A), wieso glaubst du das?

Student D: Mm, weil das das einzig (Student lacht) ist, wo beide Zahlen vorkommen.

Studentin J: Ich glaube C), ich habe keine Ahnung.

Interviewer: Warum ist es C)?

Studentin J: Ich kann das auch nicht begründen.

Interviewer: O.K.

Studentin J: Weil da Plus 2 steht und deswegen würde ich weil Plus 2 da hinauf und da Plus 6.

Gesamtbeurteilung:

Dieser Student und diese Studentin haben keine Ahnung, weder von d noch von k.

Student G:

Student G: Hätte ich einmal gesagt spontan Nummer C).

Interviewer: C) wieso?

Student G: Das einzige was ich weiß ist, dass plus 2 wahrscheinlicher der Wert dann, der die Höhe auf der x-Achse angibt.

Interviewer: O.K. und, dass $-3x$ das weißt du nicht.

Student G: Das weiß ich nicht, nein ich hätte das eigentlich nur wegen plus 2 gesagt.

Gesamtbeurteilung:

Wiederum ist dies ein typisches Beispiel für die Schwierigkeit der Reihenfolge. Dieser Student sagt vermutlich das Falsche, weil der Term in der gewünschten Form mit $f(x) = k \cdot x + d$ da steht. Die richtige Antwort steht allerdings in der Form $f(x) = d + k \cdot x$ da und wird somit nicht akzeptiert, weil nicht an die Vertauschung der Reihenfolge gedacht wird.

Studentin H:

Studentin H: Ich weiß es nicht, ist es D)?

Interviewer: Wieso, warum glaubst du das?

Studentin H: Na ja, 6 durch 3 ist eigentlich 2, also $\frac{x}{3}$ ist $x \cdot 2$.

Gesamtbeurteilung:

Diese Studentin hat vielleicht für $x = 6$ eingesetzt. Warum sie jedoch auf diese Antwort kommt, ist mir unklar.

Aufgabe 5):

2) Welche Formeln beschreiben eine indirekte Proportionalität zwischen v und w (u konstant)?

☒ A) $v = \frac{w}{u}$
☐ B) $v \cdot w = u$
☐ C) $u = \frac{1}{v \cdot w}$
☐ D) $v = u - w$

Student A:

Student A: Das verstehe ich nicht.

....

Student A: Es ist einmal A) richtig.

Interviewer: A) wieso?

Student A: Weil wenn w größer wird, indirekt proportional.

Interviewer: Ist noch was richtig?

Student A: Weiß ich nicht.

Interviewer: Also glaubst du nur, dass das Erste richtig ist?

Student A: Ich glaube schon.

Gesamtbeurteilung:

Dieser Student hat keine Ahnung von indirekter Proportionalität.

Student C:

Student C: Ich würde sagen B) aber das ist nur Gefühl, aber ich weiß nicht warum.

Interviewer: Irgendeine Ahnung, was mit indirekter Proportionalität gemeint ist, oder?

Student C: Nein weiß ich gar nicht mehr.

Gesamtbeurteilung:

Dieser Student hat zwar ein Gefühl für die richtige Antwort, kann es jedoch nicht begründen.

Student F:

Student F: Ja A), mal u durch v . A).

Interviewer: Warum ist A) richtig?

Student F: Ja weil es v , weil man w durch v hat und darum ist es indirekt proportional.

Interviewer: Ja aber da steht ja w durch u .

Student F: Ja aber wenn ich mal u rechne und durch v , habe ich w durch v .

Interviewer: O.K. ist sonst noch was richtig von denen, B), C), D) ist das richtig?

Student F: O.K., die sind direkt proportional.

Interviewer: Mhm.

Student F: Da hängen sie auch zusammen, da sind sie auch direkt proportional.

Interviewer: Mhm.

Student F: Ja und da gibt es eh nur Plus und Minus, da gibt es kein Dings.

Gesamtbeurteilung:

Dieser Student hat eine Fehlvorstellung zu indirekten Proportionalitäten. Er glaubt, dass Zähler und Nenner immer indirekt proportional zu einander sind. B) und C) sind daher bei ihm nicht richtig, weil $v \cdot w$ dort steht und nicht $\frac{v}{w}$. D) kann es nicht sein, weil es bei Plus und Minus keine direkten Proportionalitäten gibt, was ja eigentlich stimmt, nur unter falschen Voraussetzungen.

Student G:

Student G: Da hätte ich gesagt Antwort A) und D).

Interviewer: Wieso?

Student G: Weil bei Antwort B) und C) das Ergebnis ist und somit nicht absolut sein kann, also bei B) und C) wird sich u immer ändern, egal was für v und w dann eingesetzt wird, für ein Wert.

Gesamtbeurteilung:

Dieser Student wählt meines Erachtens B) und C) nicht, weil da u neben dem Gleichheitszeichen steht und das laut seiner Definition nicht sein darf.

Studentin H:

Studentin H: Ich hätte gesagt A) und D).

Interviewer: Wieso, geraten oder?

Studentin H: Nein, weil du das deswegen hast, weil du einfach auf beiden Seiten einmal das v und einmal das w hast.

Gesamtbeurteilung:

v und w auf derselben Seite wird von Studentin H ausgeschlossen.

Student I:

Student I: Da könnte ich das eine herüber bringen, dann habe ich 1 durch w, ja das schon.

Interviewer: B) O.K.

Student I: C) äh, wenn ich das da rüber bringe, ja B) und C).

Interviewer: Wieso stimmt C)?

Student I: Ja weil wenn ich das v auf diese Seite zum Beispiel bringe, dann habe ich v ist 1 durch w und dann habe ich indirekte Proportionalität.

.....

Student I: Em da ned, weil dass ist ein Minus und kein Mal.

Gesamtbeurteilung:

Dies ist der einzige Student, der die Aufgabe richtig begründete und löste.

4.4 Gesamtresümée

Nach der schriftlichen sowie mündlichen Befragung lassen sich verschiedene Schwächen der befragten Schüler/innen sowie auch Studenten/innen angeben:

1) Definitionen und Eigenschaften können kaum wiedergegeben werden

Dies sieht man vor allem, bei den mündlichen Interviews, bei denen ich zum Beispiel nach der Definition einer Funktion gefragt habe. Kaum einer/e konnte mir auf Anhieb eine Antwort darauf geben.

2) Ungenaueres Lesen der Angabe

Ungenaueres und rasches Lesen der Angabe rufen bei Schülern/innen meist Fehler hervor, die vermieden werden könnten, wenn die Angabe einer Aufgabe sorgfältig gelesen wird. So auch bei der 3. Aufgabe meiner schriftlichen Befragung, bei der manche Schüler/innen nur gesehen haben, dass $d = 2$ ist und dann sofort angekreuzt haben, ohne dass sie das k abgelesen haben.

3) Keine geeigneten Hilfsmittel und Strategien

Anstatt sich Hilfsmittel für Aufgaben anzueignen, verlassen sich Schüler/innen zu oft auf ihr Gefühl. Sie orientieren sich, wie man im Interview sehen kann an subjektiven Äußerungen und oft komisch klingenden Vorstellungen. Bei Aufgabe 4.113 hätte man beispielsweise nur Werte einsetzen müssen, um dem Graphen die richtige Termdarstellung zuzuordnen.

4) Photographisches Abbild

Fehler des photographischen Abbilds sind den Schülern/innen weniger unterlaufen, dafür sind die befragten Studenten/innen in diese Falle öfters getappt.

5) Probleme mit Allgemeinheit

Aufgabe 8.45 war für die Schüler/innen ein großes Problem, sie sehnten sich nach konkreten Werten, da sie mit den Variablen in einer Anwendungssituation nichts anfangen konnten.

6) Unkonzentriertheit beim Ablesen aus einem Funktionsgraphen

Die erste Aufgabe der schriftlichen Befragung dürfte normalerweise keine Probleme für Schüler/innen bewirken. Bei meiner Umfrage haben allerdings 11 von 27 Schüler/innen die Aufgabe nicht korrekt gelöst; dies zeigt mir, dass bereits das Ablesen aus einem Funktionsgraphen Schwierigkeiten mit sich tragen kann. Meine Meinung ist, dass bei höherer Konzentration der Schüler/innen solche Aufgabenstellung problemloser bewältigt werden könnten.

7) Sprachliche Mängel

Schüler/innen wissen oftmals nicht, wie sie etwas sagen sollen. Insbesondere beherrschen sie wichtige mathematische Sprech- und Schreibweisen nicht.

5 Literatur

- ❖ Malle Günther, Woschitz Helge, Koth Maria, Salzger Bernhard, Mathematik Verstehen 5, Wien 2010
- ❖ Malle Günther, Woschitz Helge, Koth Maria, Salzger Bernhard, Mathematik Verstehen 6, Wien 2010
- ❖ Malle Günther, Bemerkung zur Notation der Reifeprüfung, unveröffentlichter Artikel, Wien 2012
- ❖ Projektteam des BIFIE: V. Aue, M. Frebort, M. Hohenwarter, M. Liebscher, E. Sattlberger, I. Schirmer, H.-S. Siller (Leitung), G. Vormayr, M. Weiß, E. Willau, Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik. Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen (Stand: April 2012)
- ❖ BMBF (Bundesministerium für Bildung und Forschung). (Hrsg.). (2003, 2007). Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards – Eine Expertise. Bildungsforschung. Band 1. Berlin. Verfügbar unter: http://www.bmbf.de/pub/zur_entwicklung_nationaler_bildungsstandards.pdf [Zugriff am: 27.02.2010].
- ❖ BMUKK (Hrsg.). (1986). Bundesgesetz über die Ordnung von Unterricht und Erziehung in den im Schulorganisationsgesetz geregelten Schulen. Schulunterrichtsgesetz 1968 – SchUG. Verfügbar unter: http://www.bmukk.gv.at/schulen/recht/gvo/schug_teil1.xml#17 [Zugriff am: 27.02.2010].
- ❖ BMUKK (Hrsg.). (2000). Bundesgesetzblatt für die Republik Österreich in der Fassung BGBl. II Nr. 133/2000 und 134/2000. Verfügbar unter: <http://www.bmukk.gv.at/medienpool/881/hs17.pdf> [Zugriff am: 27.02.2010].
- ❖ BMUKK (Hrsg.). (2009). Bundesgesetzblatt für die Republik Österreich. Verordnung der Bundesministerin für Unterricht, Kunst und Kultur über Bildungsstandards im Schulwesen. 1. Verordnung. Verfügbar unter: http://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2009_II_1/BGBLA_2009_I... [Zugriff am: 27.02.2010].
- ❖ Fakultät für Psychologie der Universität Wien (Hrsg.). (2006). Standard-Tests zu den Bildungsstandards in Österreich – Wissenschaftlicher Hintergrund und

Hinweise zur Interpretation der Ergebnisse der Standard-Tests. Wien.
Verfügbar unter: http://www.bifie.at/sites/default/files/publikationen/2006-09-11_Kubinge... [Zugriff am: 27.10.2009].

- ❖ Fakultät für Psychologie der Universität Wien (Hrsg.). (2007a).
Forschungsbericht: Entwicklung eines Mathematik-Kompetenztests
(8. Schulstufe) nach testpsychologischen Richtlinien – Phase I: 2005.
Forschungsberichte der Test- und Beratungsstelle. Heft 1. Wien.
- ❖ Fakultät für Psychologie der Universität Wien (Hrsg.). (2007b).
Forschungsbericht: Entwicklung eines Mathematik-Kompetenztests
(8. Schulstufe) nach testpsychologischen Richtlinien – Phase 3: 2007.
Forschungsberichte der Test- und Beratungsstelle. Heft 6. Wien.
- ❖ Fakultät für Psychologie der Universität Wien (Hrsg.). (2008a).
Forschungsbericht: Entwicklung eines Mathematik-Kompetenztests (8.
Schulstufe) nach testpsychologischen Richtlinien – Phase 2: 2006.
Forschungsberichte der Test- und Beratungsstelle. Heft 3. Wien.
- ❖ Fakultät für Psychologie der Universität Wien (Hrsg.). (2008b).
Forschungsbericht: Entwicklung eines Mathematik-Kompetenztests
(8. Schulstufe) nach testpsychologischen Richtlinien – Phase 4: 2008.
Forschungsberichte der Test- und Beratungsstelle. Heft 11. Wien.
- ❖ Fakultät für Psychologie der Universität Wien (Hrsg.). (2009). Standard-Tests
zu den Bildungsstandards in Österreich – Abschlussbericht des
Itementwicklungsprozesses und der Testformenerstellung für Deutsch und
Mathematik am Ende der 4. und 8. Schulstufe. 2004-2008. Berichtsreihe der
Test- und Beratungsstelle. Wien.
- ❖ IDM/AECC (Institut für Didaktik der Mathematik– Österreichisches
Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik) – Fakultät für interdisziplinäre
Forschung und Fortbildung der Alpen-Adria-Universität Klagenfurt (Hrsg.).
(2007). Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer
Schülerinnen und Schüler am Ende der 8. Schulstufe, Version 4/07.
Klagenfurt. Verfügbar unter:
http://www.bifie.at/sites/default/files/publikationen/2007-05-09_BIST-M8...
[Zugriff am: 27.10.2009]. (Literatur entnommen aus der BIFIE Homepage)

6 Anhang

Lebenslauf

Person:

Dominik Schachner

geboren am 10.09.1989 in Melk

Adresse: 3370 Ybbs, Trewaldstraße 5

Telefonnummer: 0699/11925706

E-Mailadresse: dominik_schachner@yahoo.de

Schulischer Werdegang:

1994-1999: Volksschule Ybbs

1999-2008: Gymnasium Melk

Reifeprüfung am 10. Juni 2008 absolviert

Studienverlauf:

seit Sommersemester 2009 Lehramtsstudium an der Universität Wien im

- UF Geschichte, Sozialkunde und Politische Bildung
- UF Mathematik

SACHERSCHLIESSUNG

der

Fachbereichsbibliothek Mathematik, Statistik, Informatik der Universität Wien**Klassifikation**

Aufstellungsort:

☐ HoA☒ HoD

MSC2000: 97D70 – 97D40 – 97D50

BK: 31.04

Schlagwortketten nach RSWK

Funktion | Mathematik – Verstehen – Mathematikunterricht (123) - -

Funktion | Mathematik – Verstehen – Mathematikunterricht –
Unterrichtsforschung (1234)

Kontrollvermerk der Fachbibliothek:

06. Dez. 2012.....
Datum
.....
Unterschrift