



universität
wien

DISSERTATION

Titel der Dissertation

Simultane diophantische Approximation

Verfasser

Johannes Schleisnitz

angestrebter akademischer Grad

Doktor der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

Wien, 2012

Studienkennzahl lt. Studienblatt: A 791 405

Dissertationsgebiet lt. Studienblatt: Mathematik

Betreuer: Ao. Univ. Prof. Dr. Leonhard Summerer

*Ich möchte mich für die durchgehende Unterstützung bei
der Anfertigung dieser Dissertation bei meinem Betreuer
Leonhard Summerer bedanken.*

Inhaltsverzeichnis

1	Approximation durch rationale Zahlen	7
1.1	Klassische und neuere Ergebnisse	7
1.1.1	Klassische Ergebnisse zur Approximation einer reellen Zahl	7
1.1.2	Geometrie der Zahlen: Gitter, sukzessive Minima und die Funktionen $\psi_j(Q)$	10
1.1.3	Die klassischen Approximationskonstanten $\omega_j, \hat{\omega}_j$ und der Zusammenhang zu den Funktionen $\psi_j(Q)$	21
1.2	Assoziierte Liouvillezahlen und assoziierte schwache Liouvillezahlen	24
1.2.1	Die Berechnung von $\omega, \hat{\omega}$	25
1.2.2	Der Fall $\omega = \infty$: Höhere sukzessive Minima für Liouvillezahlen	35
1.2.3	Konstruktion des Falles in dem alle $\psi_j(Q)$ simultan ihr maximales Wertespektrum ausfüllen	50
1.2.4	Eine konstruktive Verallgemeinerung des Spezialfalls $i = 1$ der bewiesenen Vermutung von W.M. Schmidt	51
1.2.5	Der Fall $\omega < \infty$: Höhere sukzessive Minima für schwache Liouvillezahlen	53
1.2.6	Explizite Konstruktion von Spezialfällen der bewiesenen Vermutung von W.M.Schmidt	62
1.3	Verallgemeinerung auf eine größere Klasse von Liouvillezahlen	64
2	Das dynamische Verhalten der sukzessiven Minima	75
2.1	$\psi_j(Q)$ als Funktionen	75
2.1.1	Ein konkretes Beispiel	76
2.1.2	Abschätzungen für die letzten beiden sukzessiven Minima aus Kapitel 1.2.5	81
2.2	Der aufgefächerte Fall	99
2.2.1	Extremal numbers	100
2.2.2	Der extremale Fall und die Schranken für $\omega, \hat{\omega}$	101
2.2.3	Der allgemeine (nicht extremale) aufgefächerte Fall	103
2.2.4	Die Rolle der Kettenbruchentwicklung	107
2.2.5	Abschätzungen für $\hat{\omega}$ in Abhängigkeit von ω	114
2.2.6	Der Zusammenhang zur Schmidtschen Vermutung	117
3	Approximation durch algebraische Zahlen	121
3.1	Die Methode von Kapitel 1 im Spezialfall $\zeta_i = \zeta^i$	121
3.2	Das duale Problem	132
3.2.1	Polynome, Höhen und ein Ergebnis von Sprindžuk	135
3.2.2	Anwendungen des ersten Gitterpunktsatzes und Bestätigung einer Abschätzung von Bugeaud und Laurent	138
3.2.3	Anwendungen des zweiten Gitterpunktsatzes, Bestätigung einer Abschätzung von Davenport und Schmidt und ein neues Resultat	167

A Programm	176
A.1 Herleitung eines Algorithmus	176
A.2 Matlabcode	182
B Zusammenfassung (Abstract)	191
C Lebenslauf	192

Einleitung

Zentraler Gegenstand der Arbeit ist das Studium der simultanen Approximierbarkeit einer endlichen Menge reeller Zahlen $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ durch (hauptsächlich) rationale oder algebraische Zahlen. Das erste Kapitel ist der Approximation durch rationale Zahlen gewidmet. Wir untersuchen dazu das Verhalten des Ausdrucks $\max_{1 \leq t \leq k} |\zeta_t x - y_t|$ für ganzzahlige $(x, y_1, \dots, y_k)$ für die $|x|$ durch einen reellen Parameter Q beschränkt ist. Das daraus resultierende System von Ungleichungen (1.5)-(1.8) macht das simultane Approximationsproblem durch geeignete Wahl eines Körpers $K(Q)$ und eines Gitters $\Lambda(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k)$ zugänglich für Methoden der Geometrie der Zahlen, die auf Anwendungen der Gitterpunktsätze von Minkowski beruhen.

In diesem Zusammenhang haben W. Schmidt und L. Summerer in [14],[15] das dynamische Verhalten der sukzessiven Minimafunktionen bezüglich $K(Q)$ und $\Lambda(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k)$ untersucht und neue Approximationskonstanten $\overline{\psi}_j, \underline{\psi}_j$, ($1 \leq j \leq k+1$) eingeführt, welche die Approximierbarkeit von $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k)$ charakterisieren. Diese stehen in engem Zusammenhang zu den von Khinchin bzw Bugeaud und Laurent eingeführten Approximationskonstanten $\omega_j, \widehat{\omega}_j$, $1 \leq j \leq k+1$. Vorerst mangelt es jedoch noch an Anwendungen auf konkrete $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k)$, sodass wir zunächst daran interessiert sind, Beispiele von $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k)$ zu konstruieren, für die $\overline{\psi}_j, \underline{\psi}_j$, ($1 \leq j \leq k+1$) (oder äquivalent dazu $\omega_j, \widehat{\omega}_j$, $1 \leq j \leq k+1$) explizit bestimmt werden können. Dafür eignen sich Zahlen $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$, die sowohl einzeln als auch simultan sehr gut approximierbar sind: inspiriert von Liouville's erstem konkretem Beispiel einer transzendenten Zahl ($l = \sum_{n \geq 1} 2^{-n!}$) betrachten wir zunächst sehr rasch konvergente Reihen dieser Bauart. Dies führt gleichzeitig auf Erkenntnisse über den Zusammenhang zwischen s -adischen Entwicklungen und Approximationseigenschaften, die auch für sich interessant sind.

Eine mögliche Anwendung dieser Untersuchungen ist die *explizite* Konstruktion von $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$, deren Approximationskonstanten eine Vermutung von W. Schmidt bestätigen, die erst kürzlich von N. Moshchevitin in [9] auf nicht-konstruktive Weise verifiziert wurde, sowie gewisse Verallgemeinerungen davon in Spezialfällen.

Standen im 1. Kapitel die Approximationskonstanten $\underline{\psi}_j, \overline{\psi}_j$ ($1 \leq j \leq k+1$) für konkrete Werte von $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ im Mittelpunkt, so beschäftigt sich das 2. Kapitel mit den parameterabhängigen Funktionen $\psi_j(Q)$, $1 \leq j \leq k+1$, aus denen diese Konstanten abgeleitet sind. Das Verhalten dieser (und der in diesem Zusammenhang definierten Funktionen $L_j(q)$, $1 \leq j \leq k+1$, die im wesentlichen den Logarithmen der sukzessiven Minima entsprechen) ermöglicht ein noch genaueres Verständnis des Systems (1.5)-(1.8).

Dabei beginnen wir mit Untersuchungen von Beispielen von $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ aus Kapitel 1 und verfeinern gewisse Ergebnisse. Dabei ist insbesondere eine Verbesserung des Verhaltens der letzten beiden sukzessiven Minima aus Korollar 1.6 hervorzuheben, welche sich in deutlich verbesserten Schranken für die Approximationskonstanten ω_k, ω_{k+1} bzw $\widehat{\omega}_k, \widehat{\omega}_{k+1}$ im Kontext selbigen Korollars widerspiegeln.

Der zweite Teil von Kapitel 2 ist dem Studium eines noch mäßig gut verstandenen Spezialfalls des Zusammenspiels der Funktionen $\psi_j(Q)$, $1 \leq j \leq k+1$ gewidmet, der bereits durch den

Wert der Approximationskonstante $\omega = \omega_1$ bestimmt wird. Ziel ist es, in beliebiger vorgegebener Dimension k und zu jedem zulässigen Parameter $\omega = \omega_1$ reelle Zahlen $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ zu finden, die diesem Fall genügen, oder andernfalls seine Existenz widerlegen. Es werden dazu die von Roy eingeführten sogenannten extremal numbers als bekannte Beispiele in Dimension $k = 2$ vorgestellt, bevor, teilweise mithilfe von Resultaten aus früheren Kapiteln, die Existenz eines in gewisser Hinsicht ausgearteten Falls in beliebiger Dimension bewiesen, sowie notwendige Voraussetzungen an $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ erarbeitet werden. Dabei ergeben sich als eigenständiges Resultat scharfe Schranken für alle Werte $\omega_j, \hat{\omega}_j$ und eine minimale Anzahl von Vektoren $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k)$ deren zugeordnete Approximationskonstanten $\omega_j, \hat{\omega}_j$ alle in den Schranken auftretenden Werte annehmen.

Gerade in Kapitel 2 sind viele Ergebnisse durch Matlabplots der Approximationsfunktionen $L_j(q)$ motiviert, und die abgeleiteten Ergebnisse damit illustriert. Der zugehörige Programmcode ist im Appendix zu finden.

Schließlich widmet sich Kapitel 3 der Approximation durch algebraische Zahlen. Dabei steht die Approximationskonstante $w_n^*(\zeta)$ im Mittelpunkt der Betrachtung, welche wir in Definition 3.5 im Zusammenhang mit Definition 3.3 definieren werden. Diese Approximationskonstante beschreibt das Verhalten des Ausdrucks $|\zeta - \alpha|$, wobei α alle algebraische Zahlen vom Grad höchstens n durchläuft, in Abhängigkeit einer oberen Schranke für die Größe des größten auftretenden Koeffizienten des Minimalpolynoms von α mit teilerfremden ganzzahligen Koeffizienten. Insbesondere werden wir die offene Vermutung thematisieren, ob $w_n^*(\zeta) \geq n$ für alle reellen ζ und natürlichen Zahlen n gilt. In diesem Zusammenhang hat Sprindžuk gezeigt, dass es höchstens eine Lebesgue-Nullmenge von Ausnahmen ζ gibt. Die Konstante $w_n^*(\zeta)$ steht in engem Zusammenhang zu einem Problem der Approximation der Linearform $x + \zeta y_1 + \zeta^2 y_2 + \dots + \zeta^n y_n$ und ist damit in gewissem Sinn dual zu dem Problem der simultanen Approximation von $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ (wobei n dem obigen k entspricht, der Notationswechsel hat technische Gründe) aus den Kapiteln 1 und 2 im Spezialfall $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) = (\zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^n)$.

Hauptergebnisse von Kapitel 3 sind alternative Beweise zweier bekannter Ergebnisse von Bugeaud/Laurent bzw. W. Schmidt betreffend klassische Approximationskonstanten, deren hier angegebene Beweise auf den Gitterpunktsätzen von Minkowski beruhen. Aus zweiterem Ergebnis wird die Beziehung $w_n^*(\zeta) \geq \frac{n+3}{2} + o(1)$ für $n \rightarrow \infty$ folgen, was eine Verbesserung der gleichmäßigen Schranke $w_n^*(\zeta) \geq \frac{n+1}{2}$ aus Wirsings Arbeit [18] darstellt. Weiter führen wir im Zusammenhang mit der Vermutung $w_n^*(\zeta) \geq n$ Funktionen $\Gamma_{n,\zeta}, \Gamma_{n,\zeta}^*$ ein, die es ermöglichen einige Folgerungen abzuleiten, die sich aus der Existenz von $n \in \mathbb{N}$ und $\zeta \in \mathbb{R}$ mit $w_n^*(\zeta) < n$ ergeben würden.

Kapitel 1

Approximation durch rationale Zahlen

1.1 Klassische und neuere Ergebnisse

1.1.1 Klassische Ergebnisse zur Approximation einer reellen Zahl

Bevor wir unser Augenmerk auf die *simultane* Approximation legen, seien noch ausgewählte Resultate hauptsächlich aus der eindimensionalen Approximationstheorie erwähnt, auf die später referenziert werden wird.

Das vielleicht klassischste Resultat der diophantischen Approximation lässt sich wie folgt formulieren.

Satz 1.1 (Dirichletscher Approximationssatz, eindimensional). Für jede reelle Zahl ζ und jedes $Q > 1$ gibt es eine ganzzahlige Lösung $(x, y) \neq (0, 0)$ des Systems

$$\begin{aligned} |x| &\leq Q \\ |\zeta x - y| &\leq \frac{1}{Q}. \end{aligned}$$

Insbesondere gibt es unendlich viele rationale Zahlen $\frac{p}{q}$, sodass

$$\left| \zeta - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}. \quad (1.1)$$

Beweis: Man kann den Satz leicht aus dem 1. Gitterpunktsatz von Minkowski folgern, welchen wir im nächsten Abschnitt 1.1.2 mit Quelle eines Beweises angeben werden. Siehe auch die Bemerkung nach dem 1. Gitterpunktsatz von Minkowski. $\square$

Bemerkung: Das Resultat (1.1) lässt sich auf vielfältige Weise verbessern, siehe zB Satz 15 Seite 49 in [10]. Die eindimensionale Version des Approximationssatzes wird für diese Arbeit aber eine untergeordnete Rolle spielen und er ist hauptsächlich der Vollständigkeit halber angeführt.

Eine Verallgemeinerung für die simultane diophantische Approximation mehrerer Veränderlicher lautet:

Satz 1.2 (Dirichletscher Approximationssatz, allgemein). Für jeden Vektor reeller Zahlen $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k)$ und jedes $Q > 1$ gibt es eine ganzzahlige Lösung $(x, y_1, \dots, y_k) \neq (0, 0, \dots, 0)$ des Systems

$$\begin{array}{rcl}
|x| & \leq & Q \\
|\zeta_1 x - y_1| & \leq & Q^{-\frac{1}{k}} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
|\zeta_k x - y_k| & \leq & Q^{-\frac{1}{k}}.
\end{array}$$

Beweis: Wiederum einfaches Korollar aus dem 1. Gitterpunktsatz von Minkowski, siehe auch die Bemerkung nach selbigem Satz. $\square$

Ein grundlegendes Resultat zur Approximation algebraischer Zahlen lautet:

Satz 1.3 (Satz von Roth). Zu einer irrationalen algebraischen Zahl ζ gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ nur endlich viele ganzzahlige Lösungspaare (p, q) der Gleichung

$$\left| \zeta - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^{2+\epsilon}}.$$

Beweis: Siehe [11]. $\square$

Das nachfolgende Resultat von Khinchin besagt, dass im maßtheoretischen Sinn fast keine reelle Zahl besonders gut approximierbar ist.

Satz 1.4 (Khinchin). Sei $\psi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}_+$ eine monoton fallende Funktion und es sei $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$ im eigentlichen Sinne konvergent. Dann hat für reelles ζ außerhalb einer Lebesgue-Nullmenge die Ungleichung

$$\left| \zeta - \frac{x}{y} \right| < \frac{\psi(y)}{y}$$

höchstens endlich viele Lösungspaare $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. Insbesondere hat für jedes $\epsilon > 0$ mit $\psi(y) := \frac{1}{y^{1+\epsilon}}$ die Gleichung

$$\left| \zeta - \frac{x}{y} \right| < \frac{1}{y^{2+\epsilon}}$$

nur endlich viele Lösungspaare $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

Beweis: Siehe [5], Satz auf Seite 707. $\square$

Es gibt zu diesem Satz auch mehrdimensionale Verallgemeinerungen analog zur Verallgemeinerung des Dirichletschen Approximationssatzes. In der allgemeinen Version ist der Exponent $2 + \epsilon$ durch $1 + \frac{1}{k} + \epsilon$ zu ersetzen, wenn k wieder die Zahl der Variablen ζ_i bezeichnet.

Zusammen mit dem Dirichletschen Approximationssatz, genauer (1.1), ergibt sich also, dass für fast alle reellen Zahlen $\nu = 2$ genau der richtige Exponent für das klassische eindimensionale Approximationsproblem ist, den besten Exponenten zu finden für welchen

$$\left| \zeta - \frac{x}{y} \right| \leq \frac{1}{y^\nu} \tag{1.2}$$

unendlich viele Lösungspaare $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ besitzt.

Eine Verallgemeinerung des Satzes von Roth auf die simultane diophantische Approximation ist der folgende

Satz 1.5 (Schmidtscher Teilraumsatz). Seien $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_k$ $\mathbb{Q}$ -linear unabhängige Linearformen in k Variablen mit *algebraischen* Koeffizienten. Dann liegen für alle $\delta > 0$ die von $(0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^k$ verschiedenen Lösungen $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^k$ der Gleichung

$$|\mathcal{L}_1(\mathbf{x})| \cdot |\mathcal{L}_2(\mathbf{x})| \dots |\mathcal{L}_k(\mathbf{x})| \leq |\mathbf{x}|^{-\delta}$$

in endlich vielen Hyperebenen von $\mathbb{Q}^k$. Insbesondere hat für $\delta > 0$ und algebraische Zahlen $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$, sodass $\{1, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k\}$ eine $\mathbb{Q}$ -linear unabhängige Menge ist, das System

$$\left| \zeta_t - \frac{y_t}{x} \right| < \frac{1}{x^{1+\frac{1}{k}+\delta}}, \quad 1 \leq t \leq k$$

höchstens endlich viele Lösungen $(x, y_1, y_2, \dots, y_k) \in \mathbb{Z}^{k+1}$.

Beweis: Siehe [13]. Das allgemeine Resultat ist im wesentlichen Inhalt von Theorem 1 und Theorem 1' Seite 530, die spezialisierte Variante folgt leicht aus Lemma 7 Seite 536. $\square$

Die spezialisierte Version besagt also, dass im Falle algebraischer Zahlen stets $1 + \frac{1}{k}$ der bestmögliche Exponent der simultanen Approximation ist, womit alle im späteren Abschnitt 1.1.3 definierten Approximationskonstanten $\omega_j, \hat{\omega}_j$ den Wert $\frac{1}{k}$ annehmen. Dieser Fall wird im weiteren also nicht von großer Relevanz für unsere Betrachtungen gut approximierbarer Zahlen sein. Weiter stellen wir noch zwei grundlegende Resultate zu Kettenbrüchen vor, die wir später benutzen werden. Vorbereitend an dieser Stelle gleich Definitionen, die sich durch die Arbeit ziehen werden.

Definition 1.1. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ bezeichne $||\alpha|| := \min\{|\alpha - y| : y \in \mathbb{Z}\}$ den Abstand zur nächstgelegenen ganzen Zahl, $\lfloor \alpha \rfloor := \max\{y \in \mathbb{Z} : y \leq \alpha\}$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich α , $\lceil \alpha \rceil := \min\{y \in \mathbb{Z} : y \geq \alpha\}$ die kleinste ganze Zahl größer oder gleich α und $\{\alpha\} := \alpha - \lfloor \alpha \rfloor$ den Nachkommaanteil (für positives α).

Insbesondere gilt also entweder $||\alpha|| = \alpha - \lfloor \alpha \rfloor$ oder $||\alpha|| = \lceil \alpha \rceil - \alpha$, sowie $||\alpha|| \leq \frac{1}{2}$. Für gute Approximationsvektoren $(x, y_1, \dots, y_k)$ gilt offenbar $|\zeta_t x - y_t| = ||\zeta_t x||$ für $1 \leq t \leq k$. Siehe in diesem Zusammenhang auch Lemma 1.1 aus dem nächsten Abschnitt 1.1.2.

Definition 1.2 (Kettenbruch). Ein unendlicher Kettenbruch ist ein fortgesetzter Bruch der Form

$$[b_0; b_1, b_2, \dots] := b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{\dots}}}, \quad b_i \in \mathbb{N}.$$

Die Zahlen b_i heißen *Teilnenner*. Definieren wir weiter für ganze Zahlen $n \geq 0$ rekursiv

$$p_n = b_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad p_{-1} = 1, p_{-2} = 0 \quad (1.3)$$

$$q_n = b_n q_{n-1} + q_{n-2}, \quad q_{-1} = 0, q_{-2} = 1, \quad (1.4)$$

sodass also $\frac{p_i}{q_i} = [b_0; b_1 b_2 \dots b_i]$, nennen wir $\frac{p_i}{q_i}$ die *i-te Kettenbruchnäherung* oder den *n-ten Näherungsbruch* und p_i den *i-ten Hauptzähler* und q_i den *i-ten Hauptnenner*. Jede positive reelle Zahl besitzt eine eindeutige solche Kettenbruchdarstellung mit $\zeta = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{p_i}{q_i}$. Für negative $\zeta < 0$ definieren wir $\zeta = [-b_0 - 1; b_1, b_2, \dots]$ wobei $\lfloor -\zeta \rfloor =: b_0$ und $1 - \{\zeta\} = [0; b_1, \dots]$.

Satz 1.6 (Legendre, 1803). Gilt für $\zeta \in \mathbb{R}$ und $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ die Beziehung

$$\left| \zeta - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{2q^2},$$

so ist $\frac{p}{q}$ ein Näherungsbruch in der Kettenbruchentwicklung von ζ .

Beweis: Siehe [10], Satz 12 Seite 45,46. $\square$

Satz 1.7 (Lagrange, 1798). Sind $(\frac{p_i}{q_i})_{i \geq 1}$ die Kettenbruchnäherungen an ein $\zeta \in \mathbb{R}$ und ist $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ gegeben mit $(p, q) \neq (Mp_{i-1}, Mq_{i-1})$ für alle $M \in \mathbb{Z}$ und $(p, q) \neq (p_i, q_i)$, und weiter $q \leq q_i$, dann folgt $|\zeta q - p| > |\zeta q_{i-1} - p_{i-1}|$. Insbesondere gilt im Falle $(p, q) \notin \{(p_{i-1}, q_{i-1}), (p_i, q_i)\}$ und $0 < q \leq q_i$ stets $|\zeta q - p| \geq |\zeta q_{i-1} - p_{i-1}|$.

Beweis: Siehe [10], Seite 52,53. $\square$

Die mehrdimensionale Version des Dirichletschen Approximationssatzes wird im weiteren ein wichtiges Resultat für das Studium des ersten sukzessiven Minimums sein, das wir in Kürze einführen. Der Schmidtsche Teilraumsatz besagt zusammen mit dem Resultat von Khinchin, dass Tupel $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ algebraischer Zahlen generische Approximationseigenschaften besitzen. Die meisten Konstruktionen von guten simultanen Approximationen die von Interesse sein werden, schließen also solche Tupel algebraischer Zahlen aus. Allerdings ist es im allgemeinen schwer von gegebenen $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ nachzuweisen, dass sie den generischen Fall ergeben, sodass es hilfreich ist konkrete Beispiele zu haben. Wir werden dies für die Konstruktion von (1.19) sowie in Korollar 2.3 ausnutzen.

Die angeführten Resultate zu Kettenbrüchen werden wir im Abschnitt 2.2.4 benötigen um notwendige Bedingungen für die Existenz von Zahlen $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ mit gewissen simultanen Approximationseigenschaften zu erarbeiten.

1.1.2 Geometrie der Zahlen: Gitter, sukzessive Minima und die Funktionen $\psi_j(Q)$

Um simultane Approximationseigenschaften, die üblicherweise über Ungleichungssysteme definiert sind, zu studieren, hat sich die Geometrie der Zahlen als hilfreiches Werkzeug erwiesen. Die Ungleichungssysteme kann man nämlich in die Sprache von Gitterpunktproblemen übersetzen. Dazu benötigen wir zunächst einige elementare Definitionen und Eigenschaften von Gittern.

Definition 1.3. Ein Gitter in $\mathbb{R}^{k+1}$ ist ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$ -Untermodul der abelschen Gruppe $(\mathbb{R}^{k+1}, +)$.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass Gitter genau die diskreten Untergruppen von $(\mathbb{R}^{k+1}, +)$ sind. Dabei heißt eine Untergruppe U von $\mathbb{R}^{k+1}$ diskret, wenn für jedes $x \in U$ eine Umgebung $V \ni x$ existiert mit $V \cap U = \{x\}$.

Definition 1.4. Ein zentralsymmetrischer konvexer Körper $K \subset \mathbb{R}^{k+1}$ ist eine nichtleere, konvexe und kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^{k+1}$ welche zusätzlich die Eigenschaft $K = -K := \{-x : x \in K\}$ besitzt.

Definition 1.5. Sei $K \subset \mathbb{R}^{k+1}$ ein zentralsymmetrischer konvexer Körper und $\Lambda \subset \mathbb{R}^{k+1}$ ein Gitter. Dann ist für $1 \leq i \leq k+1$ das i -te sukzessive Minimum λ_i bezüglich Λ und K definiert als das Infimum aller $\lambda \geq 0$, für die $\dim(\text{span}\{\lambda K \cap \Lambda\}) = i$ als reeller Vektorraum.

Bemerkung: Insbesondere ist λ_1 die kleinste positive Zahl λ , für die $\lambda K \cap \Lambda \neq \emptyset$.

Aufgrund der Kompaktheit von K und weil Λ diskret ist, darf man statt dem Infimum in der Definition auch Minimum schreiben. Der Vorteil der Gitterpunktversion ist, dass man Ergebnisse aus der Geometrie der Zahlen zur Verfügung hat. Von zentraler Bedeutung sind die Gitterpunktsätze von Minkowski. Sie liefern erste Erkenntnisse über das Verhalten der Funktionen $\psi_i(Q)$.

Definition 1.6. Die Grundmasche eines Gitters Λ in $\mathbb{R}^{k+1}$ ist das von einem Erzeugendensystems des Gitters als $\mathbb{Z}$ -Modul aufgespannte Parallelepiped.

Man kann zeigen, dass sich alle Grundmaschen eines Gitters durch eine unimodulare Matrix, also eine Matrix mit ganzzahligen Einträgen und Determinante Eins, ineinander überführen lassen und damit das selbe Volumen $\det(\Lambda)$ haben. Dies zeigt die Wohldefiniertheit der folgenden Gitterpunktsätze von Hermann Minkowski. Beachte dabei auch, dass konvexe Mengen $M \subset \mathbb{R}^{k+1}$ stets Lebesgue-messbar sind, ihr $(k+1)$ -dimensionales Lebesguemaß nennen wir ihr Volumen. Siehe dazu [3], Korollar 7.8 auf Seite 69 oder auch Theorem 5 auf Seite 9 in [4].

Satz 1.8 (Minkowskis 1. Gitterpunktsatz). Sei K ein zentralsymmetrischer konvexer Körper in $\mathbb{R}^{k+1}$ mit Volumen $V(K) \geq 2^{k+1}$ und Λ ein Gitter mit Grundmaschenvolumen $\det(\Lambda)$. Gilt $V(K) \geq 2^{k+1} \det(\Lambda)$, dann enthält K mindestens einen vom Nullvektor verschiedenen Gitterpunkt (und wegen der Symmetrie sogar zwei).

Beweis: Siehe [4], Theorem 1 Seite 40. $\square$

Bemerkung: Man kann mithilfe des 1. Gitterpunktsatzes von Minkowski leicht den (allgemeinen) Dirichletschen Approximationssatz folgern, indem man die in Kürze eingeführten Gitter Λ aus (1.11) und $K(Q)$ gegeben durch (1.12), (1.13) verwendet. Denn mit diesen Wahlen berechnet man $\det(\Lambda) = 1$ sowie $V(K(Q)) = 2^{k+1}$ für alle $Q > 1$.

Satz 1.9 (Minkowskis 2. Gitterpunktsatz). Sei K ein zentralsymmetrischer konvexer Körper in $\mathbb{R}^{k+1}$ mit Volumen $V(K) \geq 2^{k+1}$ und Λ ein Gitter mit Grundmaschenvolumen $\det(\Lambda)$. Dann erfüllen die sukzessiven Minima bezüglich K, Λ die Ungleichungen

$$\frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \frac{\det(\Lambda)}{V(K)} \leq \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{k+1} \leq 2^{k+1} \frac{\det(\Lambda)}{V(K)}.$$

Beweis: Siehe [4], Kombination aus Theorem 1 Seite 60 und Theorem 2 Seite 62. $\square$

Nun wollen wir den Zusammenhang zur diophantischen Approximation herstellen. Ausgangspunkt ist das vom reellen Parameter $Q > 1$ abhängige System

$$\begin{aligned} |x| &\leq Q^{\mu_1 + \theta} \\ |\zeta_1 x - y_1| &\leq Q^{\mu_2 + \theta} \\ &\vdots \\ |\zeta_k x - y_k| &\leq Q^{\mu_{k+1} + \theta} \end{aligned}$$

mit vorgegebenen $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{k+1}$ mit $\sum_{i=1}^{k+1} \mu_i = 0$, und wir untersuchen für vorgegebene $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ in Abhängigkeit von θ die ganzzahligen Lösungsvektoren $(x, y_1, \dots, y_k)$. Wir werden durchgehend die Annahme $x \geq 0$ treffen, denn da $(x, y_1, \dots, y_k) \mapsto (-x, -y_1, \dots, -y_k)$ die Approximationskonstanten nicht verändert ist dies keine Einschränkung. Da dieses System sehr allgemein ist, werden wir uns mit dem Spezialfall $\mu_1 = 1, \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_{k+1} = -\frac{1}{k}$ beschäftigen. Das System geht dann über in

$$|x| \leq Q^{1+\theta} \tag{1.5}$$

$$|\zeta_1 x - y_1| \leq Q^{-\frac{1}{k} + \theta} \tag{1.6}$$

$$\vdots \tag{1.7}$$

$$|\zeta_k x - y_k| \leq Q^{-\frac{1}{k} + \theta}. \tag{1.8}$$

Bis zum 3. Kapitel, in dem wir einen Spezialfall des dazu dualen Problems behandeln, wird sich die Arbeit immer implizit mit der Beschreibung des dynamischen Verhaltens von $\theta = \theta(Q)$ in

diesem System (1.5)-(1.8) in Abhängigkeit von $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ beschäftigen.

Zunächst definieren wir das Infimum aller Werte $\theta = \theta(Q)$, zu denen das System eine Menge von j linear unabhängigen Lösungen aus $\mathbb{Z}^{k+1}$ besitzt, als $\psi_j(Q)$. Der Dirichletsche Approximationssatz besagt, dass für alle $Q > 1$ gilt:

$$\psi_1(Q) < 0. \quad (1.9)$$

Weiter sieht man leicht, dass für alle $Q > 1$

$$-1 \leq \psi_1(Q) \leq \psi_2(Q) \leq \dots \leq \psi_{k+1}(Q) \leq \frac{1}{k} \quad (1.10)$$

erfüllt ist. Denn im Falle $\psi_1(Q) < -1$ für ein Q und in Konsequenz $\theta(Q) < 0$ im System folgt aus der ersten Ungleichung $x = 0$ und aus den anderen Ungleichungen weiter, dass auch alle übrigen $y_i = 0$ sind, ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit des Approximationsvektors. Den Fall $\psi_{k+1}(Q) > \frac{1}{k}$ kann man auch leicht ausschließen, vergleiche dazu etwa die Argumentation von $\hat{\omega}_j \geq 0$ nach (1.38) oder die im folgenden gegebene Beschreibung des stückweise linearen Verhaltens der Funktionen $L_i(q)$ mit Steigung $\leq \frac{1}{k}$, woraus die Aussage unmittelbar über die Definition selbiger Funktionen aus den ψ_i folgt. Siehe auch die Ausführungen auf Seiten 75,76 in [14].

Darüber hinaus sind alle ψ_i stetig als Funktionen von Q , wie wir in Kürze sehen werden.

Eine andere Sichtweise der Funktionen ψ_i ist, sie direkt über die sukzessiven Minima eines Gitterpunktproblems zu definieren.

Sei das Gitter Λ in Abhängigkeit der vorgegebenen $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ gegeben als

$$\Lambda = \{(x, \zeta_1 x - y_1, \dots, \zeta_k x - y_k) : x, y_1, \dots, y_k \in \mathbb{Z}\} \quad (1.11)$$

und der konvexe Körper $K = K(Q)$ in Abhängigkeit von Q definiert als der Quader aller Punkte $(z_1, z_2, \dots, z_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1}$, die den Ungleichungen

$$|z_1| \leq Q \quad (1.12)$$

$$|z_i| \leq Q^{-\frac{1}{k}}, \quad 2 \leq i \leq k+1. \quad (1.13)$$

genügen. Die Funktionen $\psi_i(Q)$ definiert via (1.5)-(1.8) ergeben sich dann offenbar aus den sukzessiven Minima $\lambda_i(Q)$ bezüglich Λ und $K(Q)$ als

$$\lambda_i(Q) = Q^{\psi_i(Q)}.$$

Damit vererbt sich die Stetigkeit der Funktionen λ_i , deren Stetigkeit unmittelbar aus ihrer Definition und der Abgeschlossenheit von $K = K(Q)$ folgt, auf die Funktionen ψ_i . Von zentralem Interesse für das Verständnis des Verhaltens der Funktionen ψ_i für große Werte von Q sind

$$\underline{\psi}_i := \liminf_{Q \rightarrow \infty} \psi_i(Q), \quad \overline{\psi}_i := \limsup_{Q \rightarrow \infty} \psi_i(Q)$$

für $1 \leq i \leq k+1$.

Neben den Funktionen ψ_i werden wir noch von den daraus via $q := \log(Q)$ und

$$L_i(q) := q\psi_i(Q) \quad (1.14)$$

abgeleiteten Funktionen L_i Gebrauch machen. Der Vorteil gegenüber den Funktionen ψ_i ist, dass die L_i stückweise linear mit Steigungen in $\{-1, \frac{1}{k}\}$ sind. Denn definiert man für ein

$\mathbf{x} = (x, y_1, y_2, \dots, y_k) \in \mathbb{Z}^{k+1}$ den Ausdruck

$$L_{\mathbf{x}}(q) := \max \left\{ \log(x) - q, \max_{1 \leq t \leq k} \log(|\zeta_t x - y_t|) + \frac{q}{k} \right\}, \quad (1.15)$$

so ist $L_i(q)$ der kleinste Wert s , zu dem i linear unabhängige $\mathbf{x}$ existieren mit $L_{\mathbf{x}}(q) \leq s$. Also folgt $L_j(q)$ stets dem Verlauf eines $L_{\mathbf{x}}$, von denen es für beschränkte q nur endlich viele gibt. Die Funktionen $L_{\mathbf{x}}$ haben aber offensichtlich die geforderte Eigenschaft, Steigungen in $\{-1, \frac{1}{k}\}$ zu haben.

Dadurch erkennt man nun auch leicht, dass Intervalle $[q_0, q_1]$ auf denen ein $L_j(q)$ fällt respektive steigt, Intervalle $[Q_0, Q_1] := [e^{q_0}, e^{q_1}]$ induzieren auf denen $\psi_j(Q)$ fällt respektive steigt. Dies sieht man ein, da außerhalb der diskreten lokalen Extrema von $L_j(q)$ diese Funktionen differenzierbar sind mit Differentialquotienten $L'_j(q) \in \{-1, \frac{1}{k}\}$ und wir berechnen mit der Quotienten- und Kettenregel und (1.14)

$$\psi'_j(Q) = \frac{d}{dQ} \left[\frac{L_j(\log(Q))}{\log(Q)} \right] = \frac{\log(Q)L'_j(\log(Q)) - L_j(\log(Q))}{Q \log(Q)^2} = \frac{qL'_j(q) - L_j(q)}{Qq^2}.$$

Im Falle, dass L_j fällt, gilt wie oben festgestellt aber $L'_j(q) = -1$ und auf steigenden Intervallen $L'_j(q) = \frac{1}{k}$. Zusammen mit (1.10), (1.14) folgt offenbar die Behauptung, dass fallendes respektive steigendes Verhalten von $L_j(q)$ an einer Stelle q fallendes respektive steigendes Verhalten von $\psi_j(Q)$ an der Stelle $Q = e^q$ impliziert.

Weil die Exponentialfunktion eine Bijektion von $[0, \infty) \mapsto [1, \infty)$ darstellt, ist dadurch insbesondere eine eindeutige Zuordnung von lokalen Extrema von $\psi_j(Q)$ und lokalen Extrema von $L_j(q) = L_j(\log(Q))$ gegeben.

An dieser Stelle sei gleich erwähnt, dass durchwegs in den Plots Teile der Graphen mancher L_j aufgrund mangelnder Auflösung in Bereichen rasch aufeinanderfolgender lokaler Extrema gekrümmt erscheinen, obwohl die Funktionen L_i stückweise linear sind. Sehr intensiv ist dieser täuschende Effekt bei Abbildung 1.1 bei L_2 etwa im Bereich $13 < q < 16$, bei Abbildung 2.2 bei L_3 bei etwa $13 < q < 15$, Abbildung 2.3 ebenso L_3 etwa in $11 < q < 14$, Abbildung 2.4 an mehreren Stellen bei L_4 , in Abbildung 2.5 bei L_2 im Intervall $15 < q < 18$ sowie in Abbildung 2.6 bei L_2 in den Intervall $8 < q < 10$ und $14 < q < 16$, sowie bei L_3 im Intervall $14 < q < 17$.

Weiters erscheinen gelegentlich L_i, L_{i+1} auf Intervallen I als gleich, obwohl natürlich $L_{i+1} > L_i$ mit kleinen Werten $L_{i+1}(q) - L_i(q)$ für $q \in I$, da es auf beschränkten Intervallen nur endlich viele Stellen mit $L_i(q) = L_{i+1}(q)$ geben kann. Dieses Phänomen lässt sich zB in Abbildung 1.1 beobachten.

Weiter sei noch angemerkt, dass mit diesen Definitionen die Beschränktheit einer Funktion L_i die Beziehungen $\psi_i = \bar{\psi}_i = 0$ impliziert, wogegen die Umkehrung nicht zwangsweise gilt. Es ist beispielsweise die Situation

$$\begin{aligned} \exists (q_n)_{n \geq 1} : \quad \lim_{n \rightarrow \infty} L_i(q_n) &= \infty \\ \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{L_i(q)}{q} &= 0 \end{aligned}$$

denkbar. Das bedeutet, dass das i -te sukzessive Minimum $\lambda_i(Q)$ schwächer als jede Potenz von Q wächst aber gegen unendlich strebt. Siehe auch den Anfang des Abschnitts 2.1 für nähere Erläuterungen zu den Funktionen L_i .

Minkowskis 2. Gitterpunktsatz impliziert nach Logarithmieren, dass es eine nur von Λ, K abhängige Konstante $C(\Lambda, K)$ gibt, sodass gleichmäßig in Q

$$q \cdot \left| \sum_{i=1}^{k+1} \psi_i(Q) \right| \leq C(\Lambda, K), \quad (1.16)$$

beziehungsweise

$$\left| \sum_{i=1}^{k+1} L_i(q) \right| \leq C(\Lambda, K) \quad (1.17)$$

gilt. Aus (1.16) folgt insbesondere $\lim_{Q \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k+1} \psi_j(Q) = 0$. Aus (1.17) und weil die L_i sämtlich Steigungen in $\{-1, \frac{1}{k}\}$ annehmen ergibt sich salopp gesprochen, dass an jeder Stelle q im Mittel immer genau eine Funktion L_i fällt und die übrigen steigen.

Eine weitere grundlegende Eigenschaft der Funktionen $\psi_i(Q)$, auf die wir uns oft berufen werden, ist, dass es für unser System beliebig große Stellen Q mit $\psi_i(Q) = \psi_{i+1}(Q)$ gibt. Für einen Beweis siehe Theorem 1.1 in [14], wo dies sogar für allgemeinere Systeme nachgewiesen wird. Daraus folgt offensichtlich

$$\underline{\psi}_{i+1} \leq \overline{\psi}_i, \quad 1 \leq i \leq k. \quad (1.18)$$

Beachte, dass für dieses Resultat die $\mathbb{Q}$ -lineare Unabhängigkeit von $\{1, \zeta_1, \dots, \zeta_k\}$ benötigt wird. Unter Weglassen dieser Bedingung hat Moshchevitin gezeigt, dass es stets möglich ist, Zahlen $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ zu konstruieren, sodass für beliebiges $1 \leq i \leq k$ die Beziehungen $\lambda_i \rightarrow 0, \lambda_{i+1} \rightarrow \infty$ gelten. Dies übersetzt sich in die Sprache der ψ_i im wesentlichen zu

$$\overline{\psi}_i < 0, \quad \underline{\psi}_{i+1} > 0, \quad (1.19)$$

wobei dies gemäß obiger Bemerkungen nur eine hinreichende Bedingung ist und auch Gleichheit in jeder der beiden Ungleichungen gelten könnte.

Der folgende Satz 1.10 beschäftigt sich näher mit dem linear abhängigen Fall. Er zeigt, dass man diesen Fall im wesentlichen auf den linear unabhängigen Fall zurückführen kann, sodass also in der Tat die Forderung der linearen Unabhängigkeit sehr natürlich und ausreichend ist. In seinem Beweis werden wir Hilfsresultate benötigen, die in Form zweier vorangestellter Lemmata und eines Korollars zusammengefasst sind.

Lemma 1.1. Sei D eine positive ganze Zahl und seien $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_D$ zusammen mit 1 linear unabhängig über $\mathbb{Q}$. Dann existieren für alle $\epsilon > 0$ und $Q = Q(\epsilon)$ hinreichend groß $D + 1$ linear unabhängige Approximationsvektoren, sodass die linken Seiten von (1.6)-(1.8) des Systems (1.5)-(1.8) sämtlich kleiner als ϵ sind.

Beweis: Im Falle $\underline{\psi}_j < \frac{1}{k}$ für ein $1 \leq j \leq D + 1$ ist die Aussage für die ersten j Approximationsvektoren trivial. Denn in diesem Fall konvergieren die rechten Seiten von (1.6)-(1.8) für eine gegen unendlich strebende Folge von Q -Werten gegen Null und damit haben auch die linken Seiten diese Eigenschaft. Weil selbige linke Seiten monoton fallend in Q sind konvergieren sie sogar gegen 0 für $Q \rightarrow \infty$. Wegen $\underline{\psi}_1 < 0$ folgt die Aussage also offensichtlich für den Bestapproximationsvektor. Für die übrigen folgt die Aussage durch Induktion nach j aus der erwähnten Tatsache, dass es im linear unabhängigen Fall beliebig große Stellen Q mit $\psi_j(Q) = \psi_{j+1}(Q)$ gibt, da an solchen Stellen die Werte der linken Seiten von (1.6)-(1.8) des j -ten und $(j + 1)$ -ten Approximationsvektors (also des zu $\psi_j(Q)$ bzw. $\psi_{j+1}(Q)$ gehörigen Approximationsvektors) übereinstimmen. $\square$

Bemerkungen: 1) Die Voraussetzung der linearen Unabhängigkeit ist im allgemeinen notwendig, siehe auch Kommentar 1 zum folgenden Satz 1.10.

2) Insbesondere sieht man mit jeder Wahl $\epsilon < \frac{1}{2}$ für hinreichend großes $q \geq q_0(\epsilon)$: betrachtet man einen Approximationsvektor $(x, y_1, \dots, y_D)$, der eine Verbesserung von (mindestens) einem $L_j(q)$, $1 \leq j \leq D + 1$ bewirkt, so gilt stets $|\zeta_t x - y_t| = \|\zeta_t x\|$ für $1 \leq t \leq D$.

Lemma 1.2. Seien eine positive ganze Zahl D und zusammen mit 1 linear unabhängige reelle Zahlen $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_D$ vorgegeben. Sei ζ_{D+1} eine weitere reelle Zahl, sodass $\{1, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_D, \zeta_{D+1}\}$ linear abhängig über $\mathbb{Q}$ ist. Sei jedem Parameter $Q > 1$ eine beliebige Matrix $V(Q) \in \mathbb{Z}^{(D+1) \times (D+2)}$

zugeordnet, deren $(D+1)$ Zeilen aus Approximationsvektoren $(x^{(i)}, y_1^{(i)}, \dots, y_{D+1}^{(i)}) \in \mathbb{Z}^{D+2}$, $1 \leq i \leq D+1$ mit $|x^{(i)}| \leq Q$ bestehen.

Gibt es für jede Konstante $\eta > 0$ einen Wert $Q > 1$, sodass die linken Seiten von (1.6)-(1.8) (mit $k = D$) für alle diese Approximationsvektoren kleiner als η sind, so ist die letzte Spalte von $V(Q)$ eine Linearkombination der ersten $(D+1)$ Spalten von $V(Q)$ für $Q \geq Q(\eta)$.

Beweis: Nach Voraussetzung und weil die linken Seiten von (1.6)-(1.8) monoton fallend in Q sind kann man die zweite bis $(D+1)$ -te Spalte von $V(Q)$, die den linken Seiten von (1.6)-(1.8) mit $k = D+1$ bis auf die fehlende letzte Gleichung entsprechen, gegen Null konvergieren lassen für $Q \rightarrow \infty$. Nach Voraussetzung hat weiters ζ_{D+1} mit $\zeta_0 := 1$ eine Darstellung der Form

$$\zeta_{D+1} = \sum_{j=0}^D \frac{a_j}{b_j} \zeta_j = \frac{\sum_{j=0}^D c_j \zeta_j}{R}, \quad a_j, b_j, c_j, R \in \mathbb{Z}. \quad (1.20)$$

Denn würde der Koeffizient von ζ_{D+1} in einer nichttrivialen Linearkombination welche die Null darstellt (eine solche existiert wegen der linearen Abhängigkeit) gleich Null, so wären widersprüchlich zu den Voraussetzungen bereits $\{1, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_D\}$ linear abhängig über $\mathbb{Q}$. Dies rechtfertigt die Darstellung in (1.20).

Es gilt für festes hinreichend großes $Q(\eta)$ und $1 \leq j \leq D, 1 \leq i \leq D+1$ nach Voraussetzung $y_j^{(i)} = x^{(i)} \zeta_j + \vartheta_{i,j}$ mit $|\vartheta_{i,j}| \leq \eta$. Man berechnet mit (1.20) weiter für jedes $1 \leq i \leq D+1$

$$x^{(i)} \zeta_{D+1} = \sum_{j=0}^D x^{(i)} \zeta_j \frac{c_j}{R} = \sum_{j=0}^D (y_j^{(i)} - \vartheta_{i,j}) \frac{c_j}{R} = \frac{\sum_{j=0}^D y_j^{(i)} c_j}{R} - \frac{\sum_{j=0}^D \vartheta_{i,j} c_j}{R}.$$

Der Ausdruck rechts ist von der Form $\frac{T_{i,j}}{R} + v_{i,j}$ mit ganzzahligem $T_{i,j} = \sum_{j=0}^D y_j^{(i)} c_j$ und $v_{i,j} \rightarrow 0$ wenn $\eta \rightarrow 0$. Beachte dass R fest ist und folglich entweder $\frac{T_{i,j}}{R} \in \mathbb{Z}$ oder $\frac{T_{i,j}}{R}$ hat Abstand mindestens $\frac{1}{R}$ von jeder ganzen Zahl. Wählt man $\eta < \frac{1}{3R}$ so, dass auch alle $v_{i,j} < \frac{1}{3R}$ so kann dies also nur dann Abstand kleiner η von einer ganzen Zahl $y_{D+1}^{(i)}$ haben, wenn $y_{D+1}^{(i)} = \frac{\sum_{j=0}^D c_j}{R} y_j^{(i)}$. Da die Koeffizienten also für alle $1 \leq i \leq D+1$ übereinstimmen folgt die Behauptung. $\square$

Korollar 1.1. Seien eine positive ganze Zahl D und zusammen mit 1 linear unabhängige reelle Zahlen $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_D$ vorgegeben. Seien weiter $\zeta_{D+1}, \zeta_{D+2}, \dots, \zeta_k$ jeweils $\mathbb{Q}$ -Linearkombinationen von 1 und $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_D$. Dann sind die linken Seiten von (1.5)-(1.8) (wobei k in (1.5)-(1.8) hier D entspricht) bezüglich der besten $D+1$ linear unabhängigen Approximationsvektoren für hinreichend großes Q für das eingeschränkte "gestrichene System" $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_D$ nach oben beschränkt durch die linken Seiten der ersten $D+1$ Ungleichungen von (1.5)-(1.8) des erweiterten Systems.

Beweis: Wir fassen die Approximationsvektoren wieder als Zeilen zugeordneter Matrizen $V(Q) \in \mathbb{Z}^{(D+1) \times (D+1)}, V'(Q) \in \mathbb{Z}^{(D+1) \times (k+1)}$ zusammen. Da die Zeilenvektoren des "ungestrichenen Systems" linear unabhängig sind, muss es auch $D+1$ linear unabhängige Spalten von $V(Q)$ geben. Wegen Lemma 1.1 konvergieren die linken Seiten von (1.5)-(1.8) zu den besten $D+1$ linear unabhängigen Approximationsvektoren aber alle gegen Null. Lemma 1.2 sukzessive angewandt auf jede der Zahlen $\zeta_{D+1}, \zeta_{D+2}, \dots, \zeta_{D+k}$ ergibt, dass für hinreichend großes Q die ersten $D+1$ Spalten bereits linear unabhängig sein müssen, da sich der Rang durch Hinzufügen der restlichen Spalten beim Übergang von $V'(Q)$ zu $V(Q)$ nicht mehr vergrößert. Das besagt aber gerade, dass die Einschränkungen der Approximationsvektoren in $V(Q)$ auf die ersten $D+1$ Koordinaten bereits linear unabhängige Approximationsvektoren des zu $V'(Q)$ gehörigen "gestrichenen Systems" liefern. Daraus folgt offensichtlich die Behauptung a fortiori, da das "gestrichene System" weniger Ungleichungen beinhaltet, die erfüllt sein müssen. $\square$

Vorbemerkung: Vorausschickend zum Beweis von Satz 1.10 sei noch bemerkt, dass wir öfter auf folgende Tatsache zurückgreifen werden: Die beiden Funktionen $\log(x) - q$ bzw $\log(y) + \frac{q}{k}$ entsprechen den fallenden respektive steigenden Anteilen der Funktionen $L_{\mathbf{x}}$ aus (1.15) mit x der ersten Komponente von $\mathbf{x}$. Jeder Punkt $(q, L(q)) \in \mathbb{R}^2$ im $(q, L(q))$ -Diagramm entspricht bei festem k einem via $L(q) = \log(x) - q = \log(y) + \frac{q}{k}$ determinierten Paar $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Wir nennen diese Zuordnung

$$\begin{aligned} \varrho_k : \mathbb{R}^2 &\longmapsto \mathbb{R}^2 \\ (q, L(q)) &\longmapsto \left(e^{L(q)+q}, e^{L(q)-\frac{q}{k}} \right) =: (x, y). \end{aligned}$$

Dabei ist eigentlich im Definitionsbereich nur der Winkelraum $\Upsilon \subset \mathbb{R}^2$ im $(q, L(q))$ -Diagramm der durch $q \geq 0$ und $-q \leq L(q) \leq \frac{q}{k}$ gegeben ist von Interesse. Offenbar ist ϱ_k eine bijektive Funktion, die Umkehrabbildung ϱ_k^{-1} ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \varrho_k^{-1} : (0, \infty) \times (0, \infty) &\longmapsto \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto \left(\frac{k}{k+1} [\log(x) - \log(y)], \log(x) - \frac{k}{k+1} [\log(x) - \log(y)] \right). \end{aligned}$$

Wir beschränken uns aufgrund der Korrespondenz zu den Funktionen $L_{\mathbf{x}}$ auf Paare (x, y) entweder mit einer festen *ganzen* Zahl x oder Paaren (x, y) mit festem y von der Form $h(N) := \max_{1 \leq t \leq k} |\zeta_t N - y_t|$ mit einer ganzen Zahl $N \leq x$. Sei die aus Geraden bestehende Menge aller solcher Paare mit Y bezeichnet. Formal bedeutet unsere Restriktion, wir schränken die Menge aller betrachteten $(q, L(q))$ auf $\varrho_k^{-1}(Y)$ ein. Wir betrachten mit dieser Notation den Verlauf von Funktionen $L_j(q)$ zu vorgegebenen $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$. An fallenden Anteilen des Graphen $(q, L_j(q))$ fällt also bei festem ganzzahligen $x = x_a$ die Variable y , wobei genauer y kontinuierlich von $h(x_{a-1})$ bis $h(x_a)$ mit einer ganzen Zahlen x_{a-1} ("dem vorangehenden x "), also fallende Anteile sind von der Form $\varrho^{-1}(\{(x_a \times (h(x_{a-1}), h(x_a)))\})$ mit ganzen Zahlen $x_{a-1} < x_a$. An den darauf folgenden steigenden Anteilen wächst bei festem $y = h(x_a)$ der Wert x kontinuierlich von x_a zu einer größeren ganzen Zahl x_{a+1} , sie sind also von der Form $\varrho^{-1}(\{(x_a, x_{a+1}) \times h(x_a)\})$. Die zu einem L_j gemäß obiger Konstruktion gehörigen Stellen x_a sind dabei genau die ganzen Zahlen, bei denen eine Verbesserung der Approximationsgute von L_j auftritt. Man sieht also insbesondere, dass bei vorgegebenen $\zeta_1, \dots, \zeta_k$ die zu einem L_j gehörige Folge $(x_a)_{a \geq 1}$ den Verlauf von L_j bereits vollständig determiniert.

Weiter ist die Projektion Π_x der Graphen von $\varrho_k(q, L_j(q))$ auf die erste Koordinate monoton steigend und bildet surjektiv auf $(1, \infty)$ ab und weiter ist gemäß Lemma 1.1 die Projektion Π_y von $\varrho_k(q, L_j(q))$ monoton fallend und bildet surjektiv auf $(0, -\infty)$ ab.

Satz 1.10. Sei $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k) \in \mathbb{R}^k$. Falls $\zeta \in \mathbb{Q}^k$ so gilt

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \psi_1(Q) = \underline{\psi}_1 = \overline{\psi}_1 = -1 \quad (1.21)$$

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \psi_j(Q) = \underline{\psi}_j = \overline{\psi}_j = \frac{1}{k}, \quad 2 \leq j \leq k+1. \quad (1.22)$$

Falls $\zeta \notin \mathbb{Q}^k$ sei $\emptyset \neq \mathcal{Z} := \{\zeta_{i_1}, \zeta_{i_2}, \dots, \zeta_{i_D}\} \subset \{\zeta_1, \dots, \zeta_k\}$ eine maximale Teilmenge, sodass $\mathcal{Z} \cup \{1\}$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ ist. Bezeichnet $\Psi_j(Q), 1 \leq j \leq D+1$ die Approximationsfunktionen zum eingeschränkten System $\zeta_{i_1}, \zeta_{i_2}, \dots, \zeta_{i_D}$ und entsprechend $\underline{\Psi}_j := \liminf_{Q \rightarrow \infty} \Psi_j(Q), \overline{\Psi}_j := \limsup_{Q \rightarrow \infty} \Psi_j(Q)$, so gilt

$$\underline{\psi}_j = \frac{D(k+1)}{k(D+1)} \underline{\Psi}_j + \frac{D-k}{k(D+1)}, \quad 1 \leq j \leq D+1, \quad (1.23)$$

$$\overline{\psi}_j = \frac{D(k+1)}{k(D+1)} \overline{\Psi}_j + \frac{D-k}{k(D+1)}, \quad 1 \leq j \leq D+1. \quad (1.24)$$

$$(1.25)$$

Darüber hinaus gilt

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \psi_j(Q) = \underline{\psi}_j = \overline{\psi}_j = \frac{1}{k}, \quad D+2 \leq j \leq k+1. \quad (1.26)$$

Beweis: Für $\zeta \in \mathbb{Q}^k$, setze $\zeta_j = \frac{a_j}{b_j}$ mit gekürzten Brüchen für $1 \leq j \leq k$ und $\nu := \text{kgV}(b_j)$. Der Approximationsvektor $(\nu, -a_1 \frac{\nu}{b_1}, \dots, -a_k \frac{\nu}{b_k}) \in \mathbb{Z}^{k+1}$ annulliert die linken Seiten des Systems (1.6)-(1.8) und das bedeutet, dass ab einer Stelle $q \geq q_0$ gilt: L_1 fällt mit Steigung -1 , genauer gilt $L_1(q) = -q + \log(\nu)$ (denn ν ist offenbar minimal mit der Annulatoreigenschaft) und damit insbesondere (1.21). Aus $L_1(q) = -q + \log(\nu)$ folgt aber wegen (1.17) auch sofort $L_j(q) \geq L_2(q) \geq -\frac{L_1(q) - C(\Delta, K)}{k} = \frac{q}{k} - \frac{\log(\nu) - C(\Delta, K)}{k}$ für $j \geq 2$ und weiter (1.22).

Sei im weiteren also $\zeta \notin \mathbb{Q}^k$ oder äquivalent $\mathcal{X} \neq \emptyset$. Da die Approximationsfunktionen $\psi_j(Q)$ nicht von der Reihenfolge der ζ_j abhängen, seien diese oBdA so geordnet, dass $\{i_1, i_2, \dots, i_D\} = \{1, 2, \dots, D\}$. Wir zerlegen den Beweis in zwei Teile.

1. Beweisteil: Zuerst zeigen wir (1.23)-(1.26) im Spezialfall von Vektoren der Form $\zeta_t = \zeta_1$ für $D+1 \leq t \leq k$.

Beachte, dass in diesem Fall die letzten $(k+1) - (D+1) = k - D$ Gleichungen in (1.5)-(1.8) keine zusätzliche Information mehr liefern, sich also die Exponenten auf den rechten Seite nicht verändern wenn man zum größeren System übergeht. Das bedeutet, dass in beiden Systemen dieselben x -Werte bessere Approximationsvektoren hervorrufen für ψ_j, Ψ_j und $1 \leq j \leq D+1$ (präziser: die Bilder der Projektionen der Matrizen $V(Q), V'(Q)$ auf die erste Spalte über alle $Q \in [1, \infty)$ aus Lemma 1.2 stimmen überein, mit möglicherweise verschiedenen Umschaltpunkten Q). Wir argumentieren mit Hilfe der Funktionen L_j . Betrachte den Graphen $(q^{(1)}, L_j^{(1)}(q))$ des linear unabhängigen Systems (das erweiterte System sei dagegen durchwegs mit $\cdot^{(2)}$ bezeichnet). Zu jedem solchen vorgegebenen Punkt gibt es gemäß der Vorbemerkung ein zugehöriges Paar $(x, y) = \varrho_D(q^{(1)}, L(q^{(1)}))$ reeller Zahlen x, y , sodass

$$L_j^{(1)}(q) = \log(x) - q^{(1)} = \log(y) + \frac{q^{(1)}}{D}.$$

Aufgrund obiger Bemerkungen gilt mit denselben x, y , dass ein Punkt im Graphen des großen Systems liegt dessen $q = q^{(2)}$ -Wert die Beziehung

$$\log(x) - q^{(2)} = \max_{1 \leq t \leq k} \log(y) + \frac{q^{(2)}}{k} = \log(y) + \frac{q^{(2)}}{k}$$

erfüllt. Es stimmen also insbesondere in beiden Systemen die Werte x_a aus der Vorbemerkung überein. Beide Gleichungen zusammen führen auf

$$q^{(2)} = \frac{(D+1)k}{(k+1)D} q^{(1)}. \quad (1.27)$$

Andererseits gilt aber, da die Punkte beiden Graphen angehören, die Beziehung

$$L_j^{(s)}(q^{(s)}) = \log(x) - q^{(s)}, \quad s \in \{1, 2\}$$

und weiter mit $Q^{(s)} := e^{q^{(s)}}$, $s \in \{1, 2\}$

$$\frac{\psi_j(Q^{(2)}) + 1}{\Psi_j(Q^{(1)}) + 1} = \frac{\frac{L_j^{(2)}(q^{(2)})}{q^{(2)}} + 1}{\frac{L_j^{(1)}(q^{(1)})}{q^{(1)}} + 1} = \frac{q^{(1)}}{q^{(2)}}. \quad (1.28)$$

Kombination von (1.27), (1.28) ergibt

$$\psi_j(Q^{(2)}) = \frac{(k+1)D}{(D+1)k} \Psi_j(Q^{(1)}) + \frac{D-k}{(D+1)k}. \quad (1.29)$$

Beachte weiter, dass die Zuordnung $q^{(1)} \mapsto q^{(2)}$ bijektiv und monoton $[0, \infty) \mapsto [0, \infty)$ ist. Denn jedes Paar $(q^{(1)}, L_j^{(1)}(q^{(1)}))$ sowie $(q^{(2)}, L_j^{(2)}(q^{(2)}))$ geht je aus einem eindeutig bestimmten Paar $\varrho_D^{-1}(q^{(s)}, L_j^{(s)}(q^{(s)})) = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ bzw. $\varrho_k^{-1}(q^{(s)}, L_j^{(s)}(q^{(s)})) = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ hervor und die Menge der getroffenen $(x, y) \subset \mathbb{R}^2$ ist in beiden Fällen die gleiche da wir gesehen haben, dass die Folgen der x_a -Werte der Vorbemerkung zum Beweis, welche die Graphen vollständig determinieren, übereinstimmen. Daraus folgt in diesem Fall unmittelbar (1.23), (1.24). Wegen (1.16) ist $\lim_{Q \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{D+1} \Psi_j(Q) = 0$ und mit (1.29) folgt weiter

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{D+1} \psi_j(Q) = (D+1) \frac{D-k}{k(D+1)} = \frac{D-k}{k}.$$

Andererseits liefert (1.16) angewandt auf das große System $\lim_{Q \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k+1} \psi_j(Q) = 0$ und damit weiter

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \sum_{j=D+2}^{k+1} \psi_j(Q) = \frac{k-D}{k} = (k-D) \frac{1}{k}$$

aber $\psi_j(Q) \leq \frac{1}{k}$ und da $\{D+2, D+3, \dots, k, k+1\}$ eine $(k-D)$ -elementige Menge ist folgt insgesamt (1.26). Dies schließt den ersten Beweisteil ab.

Nun wollen wir den allgemeinen linear abhängigen Fall auf den Spezialfall zurückführen, indem wir zeigen, dass die Funktionen $L_j(q)$ sich asymptotisch kaum von denen des Spezialfalls unterscheiden.

2. Beweisteil: Bezeichne von nun an $\psi_j(Q), L_j(q)$ die Approximationsfunktionen zu einem Vektor $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_D, \zeta_1, \zeta_1, \dots, \zeta_1) \in \mathbb{R}^k$ aus dem Spezialfall und $\psi'_j(Q), L'_j(q)$ jene zu $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k)$, gemäß den Voraussetzungen und anfänglichen Konventionen im Beweis von Satz 1.10.

Wir bemerken nun: Da im "ungestrichenen System" (1.5)-(1.8) alle ab der $(D+2)$ -ten Gleichung redundant sind, handelt es sich in Wahrheit um ein Teilsystem des "gestrichenen Systems". Wir können also Korollar 1.1 auf $\zeta_{D+1}, \zeta_{D+2}, \dots, \zeta_k$ anwenden und erhalten insgesamt $\psi'_j(Q) \geq \psi_j(Q), L'_j(q) \geq L_j(q)$ für alle hinreichend großen Q, q und $1 \leq j \leq D+1$. Andererseits kann die Differenz $L'_j(q) - L_j(q), 1 \leq j \leq D+1$, nicht zu groß werden, wie wir nun zeigen. Behauptung A: Es existiert eine Konstante $E > 0$ sodass es für $1 \leq j \leq D+1$ zu jedem Punkt $(q, L_j(q))$ im Graphen von L_j (wobei q von j abhängt) einen Punkt $(\hat{q}, L'_j(\hat{q}))$ im Graphen von L'_j gibt (wobei $\hat{q}$ von j abhängt), sodass $|\hat{q} - q| < E, |L'_j(\hat{q}) - L_j(q)| < E$. Angenommen, das wäre korrekt. Da die Funktionen L'_j, L_j beschränkte Ableitungen (aus $\{-1, \frac{1}{k}\}$) haben folgt daraus, dass $|L'_j(q) - L_j(q)| = |L'_j(q) - L_j(q)|$ gleichmäßig in q beschränkt ist und nach der Definition der Funktion L_j aus ψ_j damit $\lim_{Q \rightarrow \infty} |\psi'_j(Q) - \psi_j(Q)| = 0$ vorerst für $1 \leq j \leq D+1$ wie gewünscht. Damit folgt aber bereits $\lim_{Q \rightarrow \infty} \psi_j(Q) = \frac{1}{k}$ für $D+2 \leq j \leq k+1$ mit einer Argumentation analog zum Ende des ersten Beweisteils. Es bleibt also nur noch Behauptung A zu zeigen.

Dazu konstruieren wir zu jedem Approximationsvektor zum "ungestrichenen" System einen zugehörigen Approximationsvektor des "gestrichenen Systems", dessen erste Koordinaten nicht

wesentlich größer sind und der eine nicht wesentlich schlechtere Approximation liefert und zeigen, dass lineare Unabhängigkeit einer Menge von Vektoren im "ungestrichenen System" unter dieser Konstruktion erhalten bleibt.

Bemerke zunächst, dass für $D+1 \leq j \leq k$ nach Voraussetzung $\zeta_j = \sum_{i=0}^D \frac{a_{i,j}}{b_{i,j}} \zeta_i$ wobei $\zeta_0 := 1$ und mit ganzen Zahlen $a_{i,j}, b_{i,j}$, mit der Argumentation wie im Beweis von Lemma 1.2 nach (1.20). Seien $(x, y) = \varrho_k(q, L_j(q))$ die zugehörigen Werte gemäß der Vorbemerkung zu einem Paar $(q, L_j(q))$ und x_a das maximale Element der Folge $(x_a)_{a \geq 1}$, sodass $x_a \leq x$. Mit dieser Wahl ruft also x_a die beste Approximationsgüte an der Stelle $(q, L_j(q))$ hervor. Weiter sei $\mathbf{x}_a = (x_a, y_{1,a}, \dots, y_{k,a}) = (x_a, y_{1,a}, \dots, y_{D,a}, y_{1,a}, \dots, y_{1,a})$ der zugehörige Approximationsvektor zu x_a . Betrachte mit $\prod_{1 \leq i \leq D, D+1 \leq j \leq k} |b_{i,j}| =: \Delta_1$ den Approximationsvektor

$$\mathbf{X}_a := (X_a, Y_{1,a}, \dots, Y_{k,a}) := \Delta_1 \left(x_a, y_{1,a}, \dots, y_{D,a}, \sum_{i=0}^D a_{i,D+1} \frac{y_{i,a}}{b_{i,D+1}}, \dots, \sum_{i=0}^D a_{i,k} \frac{y_{i,a}}{b_{i,k}} \right).$$

Sei $\Delta_2 := \max_{1 \leq i \leq D, D+1 \leq j \leq k} |a_{i,j}|$ und $\Delta_3 := (k-d)\Delta_1\Delta_2$, dann folgt mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq t \leq D} |\zeta_t X_a - Y_{t,a}| &\leq \Delta_1 \max_{1 \leq t \leq D} |\zeta_t x_a - y_{t,a}| \\ \max_{D+1 \leq t \leq k} |\zeta_t X_a - Y_{t,a}| &\leq \Delta_3 \max_{1 \leq t \leq D} |\zeta_t x_a - y_{t,a}|, \end{aligned}$$

also

$$h(X_a) := \max_{1 \leq t \leq k} |\zeta_t X_a - Y_{t,a}| \leq \Delta_3 \max_{1 \leq t \leq D} |\zeta_t x_a - y_{t,a}| =: \Delta_3 h(x_a). \quad (1.30)$$

Wir behaupten mit diesen Abschätzungen zeigen zu können, dass es einen Punkt $(\hat{q}, L'_j(\hat{q}))$ gibt von der Form

$$(\hat{q}, L'_j(\hat{q})) = \varrho_k^{-1}(x', y') \quad (1.31)$$

$$x \leq x' \leq \Delta_1 x, \quad y \leq y' \leq \Delta_3 y. \quad (1.32)$$

(Dabei ist L'_j hier vorerst eine formale Bezeichnung aber wir werden die lineare Unabhängigkeit der so entstehenden Approximationsvektoren erkennen, sodass es sich tatsächlich um eine Abschätzung von L_j im "gestrichenen" System handelt.) Dazu setzen wir $x' := \max\{X_a, x\}$. Wir erhalten einerseits $x \leq x' \leq \Delta_1 x$ wie gewünscht und andererseits ist die Approximationsgüte zum einen nicht schlechter als $\min\{h(X_a), h(x)\} \leq h(X_a) \leq \Delta_3 h(x_a)$, also $y' := h(X_a) \leq \Delta_3 y$. Zum anderen kann man um $y \leq y'$ zu erhalten im Fall $x' = x$ einfach $y := h(X_a)$ setzen. Im anderen Fall $x' = X_a$ gilt immerhin $h(X_a) < h(x) < h(x_a)$ und in Folge gibt es wegen der Stetigkeit der Funktionen L'_j und der Monotonie der Projektionen Π_x, Π_y aus der Vorbemerkung einen Punkt (x', y') mit abgeändertem (verkleinertem) $x \leq x' < X_a$ und mit $y = y'$. Das zeigt die Behauptung.

Zusammen mit $(q, L_j(q)) = \varrho_k^{-1}(x, y)$ und (1.31), (1.32) ergibt sich über die Formel von ϱ_k^{-1} wegen der linearen Unabhängigkeit einer Menge von Vektoren $\mathbf{X}_a$ (wir führen dies gleich aus) Behauptung A mit $E := \frac{k}{k+1}[\log(\Delta_1) + \log(\Delta_3)] + \log(\Delta_1)$. Die lineare Unabhängigkeit einer Menge von Vektoren $\mathbf{x}_a$, also insbesondere derer, die den Verlauf von L_j (ohne Strich!) bestimmen, impliziert, wie über die Definition von $\mathbf{X}_a$ aus $\mathbf{x}_a$ leicht zu sehen ist, dabei die im Argument eben verwendete lineare Unabhängigkeit der zugeordneten Vektoren $\mathbf{X}_a$. $\square$

Bemerkungen: 1) Im Fall $\zeta \in \mathbb{Q}^k$ kann man leicht einsehen, dass genauer alle L_j mit $j \geq 2$ ab einer Stelle $q = q(j)$ mit konstanter Steigung $\frac{1}{k}$ nach unendlich streben. Da nämlich für beliebiges

$E > 0$ jedes $\zeta_t x - y_t$ im Falle $|\zeta_t x - y_t| < E$ nur endlich viele Werte annehmen kann und diese sich nur verkleinern können bei wachsendem Q , sind sie alle ab einer Stelle Q_0 konstant.

Insbesondere gilt für alle zum (ab einer Stelle Q konstanten) Bestapproximationsvektor linear unabhängigen Vektoren dass sie höchstens von der Approximationsgüte

$\max_{1 \leq t \leq k} |\zeta_t x - y_t| \geq \nu^{-1} > 0$ mit ν wie im Beweis von Satz 1.10 sind.

2) Man kann Satz 1.10 verwenden um die $\mathbb{Q}$ -lineare Unabhängigkeit von vorgegebenen $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ zusammen mit 1 nachzuweisen. Es ist nämlich $\underline{\psi}_{k+1} < \frac{1}{k}$ eine hinreichende Bedingung hierzu.

3) Satz 1.10 erlaubt auf einfache Weise die Konstruktion von $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ die bei vorgegebenem i der Bedingung (1.19) genügen. Wähle zusammen mit 1 $\mathbb{Q}$ -linear unabhängige algebraische Zahlen $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{i-1}$, die nach dem Schmidtschen Teilraumsatz und (1.16) alle $\underline{\psi}_j = \overline{\psi}_j = 0$ für $1 \leq j \leq i$ erfüllen (beachte, dass Lebesgue-fast alle vorgegebenen $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{i-1}$ diese Eigenschaft ebenfalls besitzen). Erweitert man diese durch beliebige $\mathbb{Q}$ -Linearkombinationen zu einer k -elementigen Menge, ergibt Satz 1.10 die Aussage.

4) Der 2. Beweisschritt zeigt im wesentlichen, dass zu festen $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ die Werte $\underline{\psi}_j, \overline{\psi}_j$ nur vom aufgespannten algebraischen Zahlkörper $\mathbb{Q}(\zeta_1, \dots, \zeta_k)$ abhängen.

Ein beispielhafter Plot des $\mathbb{Q}$ -linear abhängigen Falles ist in Abbildung 1.1 zu sehen mit $k = 3$ und den Werten

$$\zeta_1 = \sqrt{5}, \quad \zeta_2 = 3\sqrt{5} + \frac{1}{3}, \quad \zeta_3 = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{7}.$$

Mit der Notation von Satz 1.10 gilt $D = 1$, da alle ζ_j im quadratischen Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ liegen, der bereits von jedem der drei Elemente durch einfache Adjunktion erzeugt wird. Tatsächlich streben wie von Satz 1.10 vorhergesagt die letzten beiden Approximationsfunktionen L_3, L_4 ab einer gewissen Stelle asympmtotisch mit Steigung $\frac{1}{k} = \frac{1}{3}$ nach unendlich, wie man in Abbildung 1.1 erkennen kann.

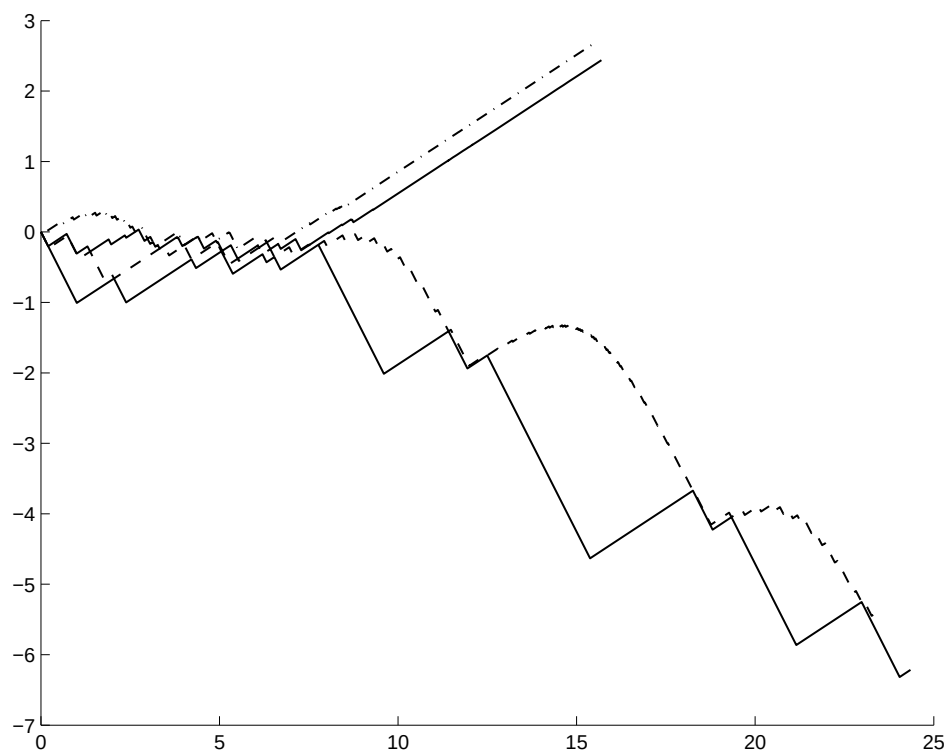


Abbildung 1.1: linear abhaengiger Fall

Für den Rest der Arbeit seien $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ zusammen mit 1 linear unabhängig über $\mathbb{Q}$. Wegen (1.9), (1.10), (1.18) ergeben sich für jede Wahl von $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ die Schranken

$$\begin{aligned} -1 \leq \underline{\psi}_1 \leq \overline{\psi}_1 &\leq 0 \\ \underline{\psi}_2 &\leq 0 \\ \overline{\psi}_j &\leq \frac{1}{k}, \quad 1 \leq j \leq k+1. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Weiter zeigen Summerer/Schmidt mittels (1.10), (1.16) und (1.18) in die Formeln (1.14), (1.16) aus [15], welche sich in unserer Notation übersetzen in

$$\underline{\psi}_j \geq \frac{j-k-1}{kj}, \quad 1 \leq j \leq k+1 \tag{1.34}$$

$$\overline{\psi}_j \geq \frac{j-k}{k(j+1)}, \quad 1 \leq j \leq k. \tag{1.35}$$

1.1.3 Die klassischen Approximationskonstanten $\omega_j, \widehat{\omega}_j$ und der Zusammenhang zu den Funktionen $\psi_j(Q)$

Weitere wichtige Größen zur Beschreibung der Approximationsgüte, die sich durch die Arbeit ziehen werden, sind die von Khinchin und Jarnik eingeführten klassischen Approximationskonstanten $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{k+1}$ und die von Laurent und Bugeaud eingeführten Approximationskonstanten $\widehat{\omega}_1, \widehat{\omega}_2, \dots, \widehat{\omega}_{k+1}$, welche wir nun definieren.

Definition 1.7. Für feste $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ seien die Werte ω_j respektive $\widehat{\omega}_j$ für jedes $1 \leq j \leq k+1$ definiert als das Supremum aller $\nu \in \overline{\mathbb{R}}$, für die das System

$$|x| \leq X, \quad |\zeta_i x - y_i| \leq X^{-\nu} \quad 1 \leq i \leq k \tag{1.36}$$

für beliebig große X respektive für jedes hinreichend große X eine Menge von j linear unabhängigen Lösungen $(x, y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{Z}^{k+1}$ besitzt.

Man beachte, dass die Folge der X -Werte von j abhängig ist. Es ist also potentiell möglich, dass mit einer für ein j passende Folge von X -Werten für ein $i \neq j$ der Wert ω_i nicht durch eine Folge von Approximationsvektoren $(x, y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{Z}^{k+1}$ mit $|x| \leq X$ im Sinne der Definition der ω_i zu erreichen ist.

Aus dieser Definition ersieht man im $\mathbb{Q}$ -linear unabhängigen Fall leicht

$$\infty \geq \omega \geq \omega_2 \dots \geq \omega_{k+1} \geq 0 \tag{1.37}$$

$$\infty \geq \widehat{\omega} \geq \widehat{\omega}_2 \dots \geq \widehat{\omega}_{k+1} \geq 0. \tag{1.38}$$

Um die einzige nicht völlig triviale Ungleichung $\widehat{\omega}_{k+1} \geq 0$ (neben $\omega_{k+1} \geq 0$ was aber trivial daraus folgt) einzusehen, nehme man eine beliebige Menge von $(k+1)$ linear unabhängigen Vektoren $(x^{(j)}, y_1^{(j)}, \dots, y_k^{(j)})$, $1 \leq j \leq k+1$ aus $\mathbb{Z}^{k+1}$ und bilde das Maximum von allen auftretenden Approximationswerten, das heißt $\mathcal{M} := \max_{1 \leq j \leq k+1} \max_{1 \leq i \leq k} |\zeta_i x^{(j)} - y_i^{(j)}|$. Für alle $x \geq \max_{1 \leq j \leq k+1} x^{(j)}$ ist die $(k+1)$ -te Approximation dann per Definition durch $\mathcal{M}$ beschränkt. Aus $\widehat{\omega}_{k+1} < 0$ würde aber folgen, dass sie unbeschränkt ist. In Lemma 1.1 haben wir aber gezeigt, dass sie sogar stets gegen Null konvergiert, sofern $\{1, \zeta_1, \dots, \zeta_k\}$ eine $\mathbb{Q}$ -linear unabhängige Menge ist, was wir im wesentlichen aus (1.18) gefolgert haben. Man könnte $\widehat{\omega}_{k+1} \geq 0$ alternativ

auch aus dem in Kürze folgenden Satz 1.11 und (1.10) folgern.

Man kann auch analog zu den Funktionen ψ_j parameterabhängige Approximationsfunktionen $\omega_j(X), \widehat{\omega}_j(X)$ einführen, über die sich die Approximationskonstanten als $\limsup$ bzw $\liminf$ zurückgewinnen lassen. Es sei zunächst für $\omega, \widehat{\omega}$ beschrieben. Definiere dazu

$$T_X := \{ \mathbf{x} = (x, y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{Z}^{k+1} : |x| \leq X \},$$

und setze weiter

$$D(X) := \min_{\mathbf{x} \in T_X} \max_{1 \leq i \leq k} |x\zeta_i - y_i|. \quad (1.39)$$

Definiert man die Funktion $\omega(X) := \log_X D(X) = \frac{\log D(X)}{\log X}$, so ergibt sich eine dynamische Betrachtung der klassischen Approximationskonstanten. Entsprechend kann man $D_j(X)$ für höhere $2 \leq j \leq k+1$ definieren und so Funktionen $\omega_j(X)$ für $1 \leq j \leq k+1$ erhalten. Eine explizite Formel für die Funktionen $\omega_j(X)$ für $2 \leq j \leq k+1$ ist gegeben durch

$$\omega_j(X) = \max \left\{ \nu \in \mathbb{R} : \dim \left(\text{span} \left\{ (x, y_1, \dots, y_k) : \max_{1 \leq t \leq k} |\zeta_t x - y_t| \leq X^{-\nu} \right\} \right) \geq j \right\}.$$

Es gilt dann für $1 \leq j \leq k+1$ offenbar

$$\omega_j = \limsup_{X \rightarrow \infty} \omega_j(X), \quad \widehat{\omega}_j = \liminf_{X \rightarrow \infty} \omega_j(X).$$

Da sich die Werte $D_j(X)$ nur für $X \in \mathbb{Z}$ verändern können, folgt aus der Stetigkeit und Monotonie der Logarithmusfunktion, dass $\omega_j(X)$ stetig und monoton fallend auf Intervallen der Form $[N, N+1)$ für natürliche Zahlen N sind. Existiert für ein ganzzahliges X_0 ein Approximationsvektor mit $x = X_0$ der eine Verbesserung von $D_j(X)$ hervorruft, springt die Funktion $\omega_j(X)$ nach oben, also $\omega_j(X_0) > \lim_{X \nearrow X_0} \omega_j(X)$. Diese X -Werte lösen ein Fallen der Funktionen $L_j(q)$ bzw $\psi_j(Q)$ auf gewissen Intervallen $q \in [q_0, q_1]$ bzw $Q \in [Q_0, Q_1]$ aus, während Intervalle auf denen $\omega_j(X)$ fällt Intervalle $q \in [q'_0, q'_1]$ induzieren auf denen die Funktionen $L_j(q)$ bzw $\psi_j(Q)$ steigen.

Im weiteren werden die Funktionen $\omega_j(X)$ nur mehr selten explizit benötigt, doch für die kommenden Konstruktionen ist die dynamische Sicht von $\omega_j, \widehat{\omega}_j$ hilfreich.

Man sieht aus der Definition sofort, dass sich gute Approximationen durch große Werte von $\omega, \widehat{\omega}$ auszeichnen. Der Zusammenhang zwischen den Funktionen $\omega_j(X)$ und den Funktionen $\psi_j(Q)$ ist im folgenden Satz festgehalten. Obwohl er nur eine Aussage über die extremalen Werte $\underline{\psi}_j, \overline{\psi}_j, \omega_j, \widehat{\omega}_j$ beinhaltet, wird aus dem Beweis ersichtlich, dass man tatsächlich einen Zusammenhang der beiden dynamischen Funktionen erhält.

Satz 1.11. Sei k eine positive ganze Zahl. Für jede Wahl von $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k) \in \mathbb{R}^k$ bestehen zwischen den Größen $\omega_j, \widehat{\omega}_j$ und $\underline{\psi}_j, \overline{\psi}_j$ die Beziehungen

$$(1 + \omega_j)(1 + \underline{\psi}_j) = (1 + \widehat{\omega}_j)(1 + \overline{\psi}_j) = \frac{k+1}{k}, \quad 1 \leq j \leq k+1. \quad (1.40)$$

Dabei gelte die formale Konvention $0 \cdot \infty = \frac{k+1}{k}$ für den Fall $\omega_j = \infty$ bzw $\underline{\psi}_j = -1$ oder $\widehat{\omega}_j = \infty$ bzw $\overline{\psi}_j = -1$.

Beweis: Wir zeigen nur die Gleichung $(1 + \omega_j)(1 + \underline{\psi}_j) = \frac{k+1}{k}$ für beliebiges, aber im weiteren als fest angenommenes j . Auf ganz ähnliche Weise kann man $(1 + \widehat{\omega}_j)(1 + \overline{\psi}_j) = \frac{k+1}{k}$ einsehen, woraus die Aussage des Satzes folgt.

Ist $\theta > \underline{\psi}_j$, dann hat das System

$$|x| \leq Q^{1+\theta} \quad (1.41)$$

$$|\zeta_i x - y_i| \leq Q^{-\frac{1}{k}+\theta} \quad (1.42)$$

keine Menge von j linear unabhängigen Lösungen für gewisse beliebig große Q -Werte. Setzt man

$$X = Q^{1+\theta}, \quad \eta := -1 + \frac{k+1}{k(1+\underline{\psi}_j)},$$

wird das System (1.41),(1.42) zu

$$|x| \leq X \quad (1.43)$$

$$|\zeta_i x - y_i| \leq X^{-\eta}, \quad 1 \leq i \leq k. \quad (1.44)$$

Nach Definition von ω_j also $\omega_j \geq \eta$, und lässt man θ gegen $\underline{\psi}_j$ streben erhält man

$$\omega_j \geq -1 + \frac{k+1}{k(1+\underline{\psi}_j)}$$

und weiter

$$(1 + \omega_j)(1 + \underline{\psi}_j) \geq \frac{k+1}{k}.$$

Für die andere Ungleichung rollen wir es von der anderen Seite auf. Ist $\eta < \omega_j$, so hat (1.43),(1.44) je eine Menge von j linear unabhängigen Lösungen für eine gegen unendlich strebende Folge von X -Werten. Setzt man

$$Q = X^{\frac{1}{1+\theta}}, \quad \text{wobei} \quad \theta = -1 + \frac{k+1}{k(1+\eta)},$$

so geht das System (1.43),(1.44) in das System (1.41),(1.42) über und daher $\underline{\psi}_j \leq \theta$. Lässt man in dieser Überlegung η gegen ω_j streben, erhält man

$$\underline{\psi}_j \leq -1 + \frac{k+1}{k(1+\omega_j)} \iff (1 + \omega_j)(1 + \underline{\psi}_j) \leq \frac{k+1}{k}.$$

Beide Ungleichungen zusammen liefern die Gleichheit. $\square$

Bemerkung (zur Konvention): Im Fall von zusammen mit 1 $\mathbb{Q}$ -linear unabhängigen $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ kann in Wahrheit nur der Fall $\omega = \infty$ bzw $\underline{\psi}_1 = -1$ auftreten wie wir bald sehen werden.

Man kann also gemäß Satz 1.11 aus der Kenntnis von $\omega_j, \hat{\omega}_j$ die Größen $\underline{\psi}_j, \overline{\psi}_j$ errechnen und umgekehrt, die Approximationskonstanten $\omega_j, \hat{\omega}_j$ sind jedoch häufig die praktikableren Größen für die weitere Vorgehensweise. Gleichung (1.40) hat zur Folge, dass

$$\omega_j > \frac{1}{k} \iff \underline{\psi}_j < 0, \quad (1.45)$$

$$\hat{\omega}_j > \frac{1}{k} \iff \overline{\psi}_j < 0. \quad (1.46)$$

Dabei kann man in beiden Äquivalenzen die Ungleichungszeichen umdrehen.

Beachte, dass nach Definition $\underline{\psi}_j < 0$ bedeutet, dass das j -te sukzessive Minimum $\lambda_j(Q)$ für

$Q \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert während es im Falle $\underline{\psi}_j > 0$ gegen unendlich konvergiert. Deswegen werden (1.45), (1.46) des öfteren von Interesse sein, vor allem in Hinblick auf die Schmidt Vermutung die wir später formulieren werden.

Mittels (1.40) und (1.9), (1.33), (1.34), (1.35) ergibt sich eine Verbesserung des Wertebereichs der Werte $\omega_j, \widehat{\omega}_j$ aus (1.37), (1.38) im zusammen mit 1 $\mathbb{Q}$ -linear unabhängigen Fall zu

$$\frac{1}{k} \leq \omega \leq \infty \quad (1.47)$$

$$\frac{1}{k} \leq \omega_2 \leq 1, \quad (1.48)$$

$$0 \leq \omega_j \leq \frac{1}{j-1}, \quad 3 \leq j \leq k+1 \quad (1.49)$$

$$\frac{1}{k} \leq \widehat{\omega} \leq 1 \quad (1.50)$$

$$0 \leq \widehat{\omega}_j \leq \frac{1}{j}, \quad 2 \leq j \leq k. \quad (1.51)$$

Weiter folgt aus $\widehat{\omega}_{k+1} \leq \widehat{\omega}_k$

$$0 \leq \widehat{\omega}_{k+1} \leq \frac{1}{k}. \quad (1.52)$$

Diese Schranken lassen sich allesamt nicht verbessern, wie wir später in Abschnitt 2.2.2 sehen werden. Wir werden nämlich in Korollar 2.3 zu beliebigem k für jede einzelne Kombination der in (1.47)-(1.52) auftretenden Randwerte $\mathcal{C} \in \{0, 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{k}\}$ samt zugehöriger Approximationskonstante $\mathcal{W} \in \{\omega_j, \widehat{\omega}_j : 1 \leq j \leq k+1\}$ einen Vektor $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k)$ in Abhängigkeit von $\mathcal{C}, \mathcal{W}$ konstruieren, der genau $\mathcal{C}$ für den entsprechenden Wert $\mathcal{W}$ liefert. Dabei werden wir bei festem k mit je drei verschiedenen Vektoren auskommen um alle Schranken nachzuweisen.

Natürlich besteht jedoch große Korrelation zwischen den Werten $\omega_j, \widehat{\omega}_j$ bei einem festen Vektor $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k)$, wie man schon aus (1.16) zusammen mit (1.40) erahnen kann. Die Konstruktionen in der Arbeit zielen unter anderem darauf ab, das Wertespektrum von

$$\Omega(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k) := (\omega, \omega_2, \dots, \omega_{k+1}, \widehat{\omega}, \widehat{\omega}_2, \dots, \widehat{\omega}_{k+1}) \subset \mathbb{R}^{2k+2} \quad (1.53)$$

besser zu verstehen.

1.2 Assoziierte Liouvillezahlen und assoziierte schwache Liouvillezahlen

Ein wesentliches Ziel der Arbeit ist zusammen mit 1 $\mathbb{Q}$ -linear unabhängige k -Tupel reeller Zahlen $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ mit vorgegebenen simultanen Approximationseigenschaften zu konstruieren. Diese Eigenschaften sollen sich in den Funktionen $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{k+1}$ widerspiegeln, oder äquivalent in den Approximationskonstanten ω_j . Um $\mathbb{Q}$ -linear unabhängige Vektoren reeller Zahlen $(1, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k)$ zu konstruieren und Aussagen über ihre Approximationskonstanten $\omega, \widehat{\omega}$ zu treffen, eignet sich die Darstellung der Zahlen in einer festen gemeinsamen Basis $s \geq 2$. Dies trifft insbesondere auf Zahlen zu, die alle gute Approximationseigenschaften bezüglich Potenzen dieser Basis besitzen. Vorbild dafür ist das von Liouville als erstes Beispiel einer transzendenten Zahl angegebene $\zeta = \sum_{n \geq 1} 2^{-n!}$, was eine Wahl aller ζ_i von vergleichbarer Gestalt nahelegt. Wir werden die simultanen Approximationseigenschaften solcher $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ ausführlich untersuchen. Dies legt in Zusammenhang mit den Erkenntnissen aus dem Abschnitt 1.1.1 die folgende Definition nahe.

Definition 1.8. Eine Zahl $\zeta \in \mathbb{R}$, für die es für jedes $\nu > 0$ unendlich viele teilerfremde Lösungen $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ der Gleichung (1.2) gibt, heißt *Liouvillezahl* oder *Zahl vom Liouvilletyp*. Weiter nennen wir Zahlen für die es ein $\epsilon > 0$ gibt, sodass (1.2) unendlich viele teilerfremde Lösungen (p, q) für $\nu = 2 + \epsilon$ besitzt, eine *schwache Liouvillezahl* oder *Zahl vom schwachen Liouvilletyp*. Existiert für eine Liouvillezahl respektive schwache Liouvillezahl eine feste Basis $s \geq 2$, sodass unendlich viele auftretende Nenner von der Form $q = s^\alpha$ mit einer positiven ganzen Zahl α sind, so nennen wir ζ eine *spezielle Liouvillezahl* oder *Zahl vom speziellen Liouvilletyp* respektive *Zahl vom schwachen speziellen Liouvilletyp* oder *spezielle schwache Liouvillezahl* und jede zugehörige Basis s eine *Basis der speziellen Liouvillezahl* respektive *Basis der schwachen speziellen Liouvillezahl*.

Weiter nennen wir eine endliche Menge von speziellen Liouvillezahlen respektive speziellen schwachen Liouvillezahlen *assoziierte Liouvillezahlen* respektive *assoziierte schwache Liouvillezahlen*, wenn sie mindestens eine gemeinsame Basis besitzen.

Bemerkungen: 1) Der Begriff Liouvillezahl ist in der klassischen Literatur in der angegebenen Definition gebräuchlich, die spezialisierten Begriffe sind sprachliche Hilfskonstrukte für die weitere Arbeit.

2) Klarerweise ist jede Liouvillezahl auch eine schwache Liouvillezahl und per definitionem jede spezielle Liouvillezahl respektive spezielle schwache Liouvillezahl eine Liouvillezahl respektive schwache Liouvillezahl. Weiter erkennt man leicht, dass Liouvillezahlen genau diejenigen irrationalen Zahlen sind, deren eindimensionale Approximationskonstante für $\{\zeta\}$ die Beziehung $\omega = \infty$ erfüllt.

Die Bedingung an ζ vom schwachen Liouvilletyp zu sein ist offensichtlich äquivalent dazu, dass ζ irrational ist und die eindimensionale Approximationskonstante zu $\{\zeta\}$ die Bedingung $\omega > 1$ erfüllt.

3) Nach dem Satz von Roth sind alle schwachen Liouvillezahlen transzendent und sie bilden weiters nach dem Satz von Khinchin eine Lebesguenullmenge.

4) Eine (schwache) spezielle Liouvillezahl kann sogar unendlich viele Basen besitzen. Man muss dabei nur Konstruktionen von Bemerkung 2 zur folgenden Proposition 1.2 geringfügig verallgemeinern. Für klassische spezielle Liouvillezahlen von der Form

$$\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} s^{-a_n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty,$$

wie sie künftig untersucht werden, kann man zeigen, dass alle Basen Potenzen von s sein müssen, weil alle sehr guten Approximationsvektoren ausschließlich von der Form $(2^{a_n}, \lfloor 2^{a_n} \zeta \rfloor)$ sind. Genauer handelt es sich bei den Basen um die Menge $\mathcal{B} := \{s^\alpha : \alpha | a_n \text{ für unendlich viele } n\}$. In diesem Zusammenhang bedeutet sehr gut, dass für jede Folge von Approximationsvektoren (mit monoton steigenden ersten Koordinaten) nicht von dieser Form der Exponent in (1.2) einen Limes superior kleiner oder gleich 2 hat (was $\omega = 1$ entspricht). Dies kann man mit einer ähnlichen Nachkommaargumentation wie im Beweis von Schritt 1 im später folgenden Satz 1.12 einsehen, wir gehen an dieser Stelle nicht weiter darauf ein. Vergleiche dazu auch Abbildung 2.11 und die zugehörige Beschreibung.

1.2.1 Die Berechnung von $\omega, \hat{\omega}$

Zunächst beschränken wir uns auf das Studium von $\omega := \omega_1$ und $\hat{\omega} := \hat{\omega}_1$. Wir betrachten wie im vorangehenden Abschnitt motiviert Zahlen vom speziellen Liouvilletyp.

Für $0 < \zeta < 1$ seien mit $a_n^{(s)}$ die nichtverschwindenden Koeffizienten in der s -adischen Entwicklung von ζ bezeichnet, sodass also

$$\zeta = \sum_{n \geq 1} \alpha_n s^{-a_n^{(s)}}, \quad 1 \leq \alpha_n \leq s - 1$$

und die Entwicklung von $1 - \zeta$ sei als *duale Darstellung* bezeichnet und notationell

$$1 - \zeta = \sum_{n \geq 1} \beta_n s^{-a_n^{(s)}}, \quad 1 \leq \beta_n \leq s - 1.$$

Als erstes untersuchen wir den Zusammenhang zwischen diesen klassischen Approximationskonstanten $\omega, \hat{\omega}$ und den in den $\zeta_i, 1 \leq i \leq k$ nicht verschwindenden $a_n^{(s)}$. Genauer werden dabei die Quotienten $\frac{a_{n+1}^{(s)}}{a_n^{(s)}}, \frac{a_{n+1}'^{(s)}}{a_n'^{(s)}}$ Aufschluss über die Güte der Approximation in Basis s , also mit x -Werten von der Form s^α in der Definition von $\omega, \hat{\omega}$, geben.

Sind $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \zeta_i &= \sum_{n \geq 1} \alpha_{n,i}^{(s)} s^{-a_n^{i,(s)}}, & 1 \leq \alpha_n \leq s - 1, 1 \leq i \leq k \\ 1 - \zeta_i &= \sum_{n \geq 1} \beta_{n,i}^{(s)} s^{-a_n^{i,(s)}}, & 1 \leq \beta_n \leq s - 1, 1 \leq i \leq k \end{aligned}$$

so seien die monotonen Folgen $(b_n^{(s)})_{n \geq 1}$ respektive $(b_n'^{(s)})_{n \geq 1}$ als die Totalordnungen von $\cup_{i,n} a_n^{i,(s)}$ respektive $\cup_{i,n} a_n'^{i,(s)}$ definiert. Im Fall $s = 2$ folgt beispielsweise, sofern alle $a_n^{i,(s)}$ verschieden sind für verschiedene Paare (n, i) , dass $\zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_k = \sum_{n \geq 1} 2^{-b_n^{(2)}}$. Für $s \geq 3$ ist die Aussage essentiell die gleiche, es müssen dabei aber noch die Koeffizienten $\alpha_{n,i}$ berücksichtigt werden. Wir vernachlässigen zu jeder festen Basis s die genauen Werte der Koeffizienten $\alpha_{n,i}^{(s)}$ (beachte, dass es zu einem $b_N^{(s)}$ auch mehrere Indizes $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ mit $a_{M(i)}^{i,(s)} = b_N^{(s)}$ für $M(i) \in \mathbb{N}$ und damit mehrere $\alpha_{n,i}^{i,(s)}$ geben kann) und interessieren uns nur noch für die Folgen $(b_n)_{n \geq 1}$ und $(b_n')_{n \geq 1}$ und ihre Aussagekraft über die simultanen Approximationseigenschaften von $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$. Formal kann man auch so vorgehen, dass man alle Koeffizienten $\alpha_{n,i}^{(s)}$ durch 1 ersetzt, zu jedem festen $s \geq 2$ also die Zahl

$$\theta_s = \sum_{n \geq 1} s^{-b_n^{(s)}}$$

betrachtet, und $(b_n'^{(s)})_{n \geq 1}$ als Folge der nichtverschwindenden Nachkommastellen von $1 - \theta_s$ definiert.

Es ist naheliegend, dass diese Vorgehensweise im für uns besonders interessanten Fall von Zahlen ζ_i mit individuell guter Approximation zur Basis s sehr gut geeignet ist. Im Hinblick auf diese Fälle sind die folgenden Ergebnisse zugeschnitten, die jedoch allgemein formuliert werden können und im generischen Fall einfach triviale Aussagen liefern.

Mittels dieser Folgen $(b_n^{(s)})_{n \geq 1}, (b_n'^{(s)})_{n \geq 1}$ lässt sich ein erster Zusammenhang zwischen ω und der Gesamtheit aller s -adischen Entwicklungen formulieren, welcher Inhalt der folgenden Proposition ist.

Proposition 1.1. Mit obiger Notation gilt

$$\omega \geq \max \left\{ \limsup_{\|(s,n)\|_\infty \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}^{(s)} - b_n^{(s)} - 1}{b_n^{(s)}}, \limsup_{\|(s,n)\|_\infty \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}'^{(s)} - b_n'^{(s)} - 1}{b_n'^{(s)}} \right\}, \quad \text{sowie} \quad (1.54)$$

$$\omega \leq \max \left\{ \limsup_{\|(s,n)\|_\infty \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}^{(s)} - b_n^{(s)}}{b_n^{(s)}}, \limsup_{\|(s,n)\|_\infty \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}'^{(s)} - b_n'^{(s)}}{b_n'^{(s)}} \right\}. \quad (1.55)$$

wobei $\|(A, B)\|_\infty := \max\{|A|, |B|\}$ (Wegen der Äquivalenz der Normen in $\mathbb{R}^2$ kann man auch jede andere Norm verwenden und die Abschätzungen bleiben gültig. Siehe dazu auch die dem Beweis anschließenden Bemerkungen.)

Beweis: Wir beweisen zunächst (1.54). Nach Definition von $(b_n^{(s)})_{n \geq 1}$ als gemischter Folge die aus den Einzelfolgen $(a_n)_{n \geq 1}$ entsteht, haben alle Zahlen $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ Nullen an den Nachkommastellen $b_n^{(s)} + 1, b_n^{(s)} + 2, \dots, b_{n+1}^{(s)} - 1$ in der s -adischen Entwicklung für alle $s \geq 2$. Da Multiplikation von ζ_j mit $s^{b_n^{(s)}}$ das Komma um $b_n^{(s)}$ Stellen nach rechts schiebt, bedeutet dies, für $1 \leq j \leq k$ beginnen die Zahlen $s^{b_n^{(s)}} \zeta_j$ mit $b_{n+1} - b_n - 1$ Nullen in Basis s hinter dem Komma. Es erfüllt demnach jedes Paar (s, n) die Beziehung

$$\left| s^{b_n^{(s)}} \zeta_j - \left\lfloor s^{b_n^{(s)}} \zeta_j \right\rfloor \right| \leq s^{-(b_{n+1}^{(s)} - b_n^{(s)} - 1)}, \quad 1 \leq j \leq k.$$

Analog gilt für die Werte $1 - \zeta_j$ und alle Paare (s, n)

$$\left| s^{b_n^{(s)}} \zeta_j \right| = \left| s^{b_n^{(s)}} (1 - \zeta_j) \right| \leq \left| \left\lfloor s^{b_n^{(s)}} \zeta_j \right\rfloor - s^{b_n^{(s)}} \zeta_j \right| \leq s^{-(b_{n+1}^{(s)} - b_n^{(s)} - 1)}.$$

Also gilt für alle Paare (s, n)

$$\max_{1 \leq j \leq k} \|x \zeta_j\| \leq \max \left\{ s^{-(b_{n+1}^{(s)} - b_n^{(s)} - 1)}, s^{-(b_{n+1}^{(s')} - b_n^{(s')} - 1)} \right\}, \quad \text{mit } x = s^{b_n^{(s)}} \text{ oder } x = s^{b_n^{(s')}}. \quad (1.56)$$

Da $s^{b_n} \rightarrow \infty$ bzw. $s^{b'_n} \rightarrow \infty$ gleichbedeutend mit $\|(s, n)\|_\infty \rightarrow \infty$ ist, folgt (1.54) direkt aus der Definition der Approximationsgröße ω . Sei nämlich eine Folge von Paaren mit $\|(s, n)\|_\infty \rightarrow \infty$ gegeben, für welche $\frac{b_{n+1}^{(s)} - b_n^{(s)} - 1}{b_n^{(s)}}$ bzw. $\frac{b_{n+1}^{(s')} - b_n^{(s')} - 1}{b_n^{(s)'}}$ gegen die entsprechenden $\limsup$ -Werte aus der rechten Seite von (1.54) konvergiert. Durch $X_{\sigma(n,s)} := x_{\sigma(n,s)} := s^{b_n^{(s)}}$ bzw. $X'_{\sigma(n,s)} := x_{\sigma(n,s)} := s^{b_n^{(s)'}}$, wobei σ eine beliebige Bijektion $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ ist, erhalten wir eine Folge von X -Werten und x -Werten, welche gemäß (1.56) zu einer Approximationskonstante ω in (1.36) führen, die durch jeden dieser beiden $\limsup$ -Werte nach unten abgeschätzt werden kann.

Um (1.55) einzusehen, zeigen wir zuerst die folgende Behauptung: Es genügt es zu zeigen, dass zu jedem reellen Parameter X ein $s_0 = s_0(X)$ existiert, sodass

$$\frac{b_2^{(s_0)} - b_1^{(s_0)}}{b_1^{(s_0)}} \geq \nu \quad \text{oder} \quad \frac{b_2^{(s_0)} - b_1^{(s_0)'}}{b_1^{(s_0)'}} \geq \nu, \quad (1.57)$$

wobei $\nu = \nu(s)$ gegeben ist als der größte auftretende Exponent

$$\max_{1 \leq j \leq k} \|\zeta_j s\| = s^{-\nu} \quad (1.58)$$

unter allen $s \leq X$.

Für eine Folge $(X_i)_{i \geq 1}$ bezeichne $(\nu_i)_{i \geq 1}$ den größten Exponenten, sodass (1.58) für alle $s \leq X_i$ gilt. Die Existenz eines $s_0 = s_0(X)$ für alle X impliziert die Existenz einer Folge $(\beta_i)_{i \geq 1}$ mit $\beta_i \geq \nu_i$ und β_i von der Form $\frac{b_2^{(s_0)} - b_1^{(s_0)'}}{b_1^{(s_0)'}}$ und damit insbesondere von der Form der Ausdrücke in (1.55) mit $n = 1$. Man kann die Folge $(X_i)_{i \geq 1}$ nach Definition von ω so wählen, dass $\lim_{i \rightarrow \infty} \nu_i = \limsup_i \nu_i = \omega$ ist. Darüber hinaus kann man die Folge $(X_i)_{i \geq 1}$ oBdA so wählen, dass $s_i = X_i$ gilt, da der Exponent von ν in (1.36) für festes x mit steigendem X fällt. Kombination dieser Beobachtungen liefert $\limsup_{i \rightarrow \infty} \beta_i \geq \omega$ wobei β_i einem $\limsup$ -Ausdruck von (1.55) entspricht mit $(s_i, n_i) = (s_i, 1)$, wobei s_i die Rolle von s_0 oben mit $X = X_i$ spielt.

Bleibt für diese Folgen $\lim_{i \rightarrow \infty} \|(s_i, n_i)\|_\infty = \lim_{i \rightarrow \infty} \|(s_i, 1)\|_\infty = \limsup_{i \rightarrow \infty} s_i = \infty$ zu zeigen. Das ist aber einfach zu sehen. Wegen $s_i = X_i$ impliziert die Definition von s_i dass $s_i = s_i(X_i)$ den Ausdruck $\max_{1 \leq j \leq k} \|\zeta_j s_i\|$ minimiert unter allen $s_i \leq X_i$. Andererseits gilt $\liminf_{s \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq k} \|\zeta_j s\| = 0$ für jede zusammen mit 1 $\mathbb{Q}$ -linear unabhängigen $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ und wegen der Definition der $(s_i)_{i \geq 1}$ schließen wir $\lim_{i \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq k} \|\zeta_j s_i\| = 0$. Folglich kann

$(s_i)_{i \geq 1}$ nicht beschränkt sein da in diesem Fall nur endlich viele (strikt positive) Werte $\max_{1 \leq j \leq k} \|\zeta_j s_i\|$ auftreten würden. Daher $\limsup_{i \rightarrow \infty} s_i = \infty$.

Um den Beweis zu vervollständigen weisen wir nun die Existenz eines $s_0 = s_0(X)$ nach, das unserem Kriterium (1.57) genügt. Bemerke zuerst, dass für hinreichend großes s sicher für alle $1 \leq j \leq k$ die Beziehung $a_1^{j,(s)} = a_1'^{j,(s)} = 1$ gilt, denn für $s \geq \frac{1}{\min_i \|\zeta_i\|}$ folgt

$\{s\zeta_j\} \notin \{[0, \frac{1}{s}] \cup [\frac{s-1}{s}, 1)\}$, $1 \leq j \leq k$. Wir können also annehmen, dass X groß genug ist, dass $a_1^{j,(s)} = a_1'^{j,(s)} = 1$ für alle $1 \leq j \leq k$ und damit insbesondere $b_1^{(s)} = 1$. Es ist nun leicht zu sehen, dass $s_0 := s$ ein zulässige Wahl ist, denn (1.58) besagt gerade, dass die Zahlen $s\zeta_j$ allesamt mit $\lfloor \nu \rfloor$ Nullen respektive $(s-1)$ -en in der s -adischen Nachkommaentwicklung beginnen.

Kombination dieser Tatsachen ergibt folglich $\frac{a_2^{j,(s)} - a_1^{j,(s)}}{a_1^{j,(s)}} = a_2^{j,(s)} - 1 \geq \lfloor \nu \rfloor + 1 \geq \nu$, und damit auch $\frac{b_2^{(s)} - b_1^{(s)}}{b_1^{(s)}} = \frac{\min_j a_2^{j,(s)} - a_1^{j,(s)}}{a_1^{j,(s)}} \geq \nu$ respektive selbige Tatsachen mit durchwegs gestrichenen Variablen $a_{\cdot}^{j,(s)}, b_{\cdot}^{(s)}$. $\square$

Bemerkungen: 1) Kann man die rechte Seite von (1.54) für ein festes s abschätzen durch

$$\omega \geq \max \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}^{(s)} - b_n^{(s)}}{b_n^{(s)}}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}'^{(s)} - b_n'^{(s)}}{b_n'^{(s)}} \right\},$$

und gilt $\omega = \infty$ respektive $\omega > 1$, sodass es also eine Abfolge guter Approximationen in dieser Basis s gibt, so handelt es sich bei $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ um assoziierte Liouvillezahlen respektive assoziierte schwache Liouvillezahlen zur Basis s . Umgekehrt bildet aber eine Menge von (schwachen) Liouvillezahlen nicht allgemein (schwache) assoziierte Liouvillezahlen, wie wir im folgenden ausführen werden.

2) Man kann zumindest im Fall $\omega = \infty$ auch leicht Fälle konstruieren, in denen s in der rechten Seite von (1.54) nicht konstant ist. Etwa mit folgender Konstruktion, die vorerst für beliebiges T , das der linken Seite von (1.54) entsprechen soll (es soll also $\omega \geq T$ gelten) vorgeführt sei: Man fängt bei $s = 2$ an und gibt sich eine gewisse endliche Zahl an Nachkommastellen in Basis s vor, sodass eine Zahl von der Form $B = \sum_{i=0}^t \alpha_i 2^{-i}$ mit $\alpha_i \in \{0, 1\}$ und $\alpha_t = 1$ entsteht. Jede Zahl $\zeta \in \mathbb{R}$ mit $B \leq \zeta \leq B + 2^{-t-1}$ hat diese Anfangssequenz in Basis 2. Sei $I_1 := [B, B + 2^{-t-1}]$. Gehe daraufhin zu einer anderen Basis, etwa $s = 3$, über und wähle eine rationale Zahl in I_1 mit endlicher Nachkommaentwicklung in der neuen Basis 3. Dies ist sicher möglich, denn man findet eine solche Zahl von der Form $\sum_{i=0}^z 3^{-\beta_i}$ wenn man z nur so groß wählt, dass 3^{-z} kleiner der Intervalllänge von I_1 ist. Hänge an diese neue Zahl in der neuen Basis $s = 3$ eine beliebige Anzahl an Nullen und danach eine Eins. Diese neue Nachkommaentwicklung definiert wie vorhin ein Intervall I_2 , in dem alle Zahlen mit der vorgegebenen Entwicklung anfangen. Wähle dann wieder eine neue Basis, etwa $s = 5$, und verfare wie vorhin. Indem man diese Prozedur ad infinitum durchführt und in jedem Schritt die Anzahl der Nullen in entsprechendem Verhältnis T (bzw einem gegen T konvergierenden Verhältnis) zur Anzahl der vorgegebenen Stellen wählt (siehe dazu auch den Beweis von Proposition 1.1) erhält man eine Folge von guten Approximationen zu verschiedenen Basen. Um den Fall $\omega = \infty$ zu konstruieren ist dieses Verhältnis einfach gegen unendlich strebend zu wählen wie man via Gleichung (1.54) einseht. Im Fall von endlichem ω erhält man zumindest $\omega \geq T$ (da man a priori nicht ausschließen kann, dass es beliebig oft in anderen Basen als der gerade aktuell in der Konstruktion betrachteten eine bessere Approximation gibt, könnte $\omega > T$ gelten).

3) Man könnte sich in der Argumentation des Beweises auch auf den Fall $r = 1$ beschränken. Fälle gemäß Bemerkung 1) werden im weiteren bei Konstruktionen aber häufig eine Rolle spielen, also mit s fest und Vektoren $(x, y_1, y_2, \dots, y_k)$ mit x -Werten von der Form s^β .

4) Der Fall $b_1^{(s)} = 1$ in einer Basis s ist gewissermaßen ein Spezialfall, da in diesem Fall eine s -adische Anfangssequenz von Nullen nach dem Komma von $\zeta_j s$, die zu einer guten Approxi-

mation durch $x = s$ führt, keine Entsprerung in (1.54), (1.55) haben. Für hinreichend große s (abhängig von den ζ_i , genauer ist $\frac{1}{\min_i \|\zeta_i\|}$ sicher ausreichend wie im Beweis von Proposition 1.1 gezeigt) ist jedoch $b_1^{(s)} = 1$ gesichert, sodass man diese endlich vielen s -Werte nicht zu berücksichtigen braucht.

5) Der generische Fall für $k \geq 2$ ist $\omega = \frac{1}{k} < 1$, und in der Tat liefert Proposition 1.1 für alle s mit $b_1^{(s)} = 1, b_2^{(s)} = 2$ die Schranken 0 bzw 1. Proposition 1.1 zeigt insbesondere weiter, dass im generischen Fall nur endlich viele s mit $b_2^{(s)} > 2$ existieren, da man sonst die falsche untere Schranke $\omega \geq 1$ erhielte. Es existieren also nur endlich viele Basen bezüglich derer alle ζ_i simultan an der zweiten Nachkommstelle (nach Multiplikation mit s also an der ersten) jeweils entweder eine 0 oder $s - 1$ stehen haben. Die Formeln aus Proposition 1.1 dienen also hauptsächlich der Konstruktion von assoziierten (schwachen) Liouvillezahlen und haben im generischen Fall wenig Aussagekraft.

6) Beachte, dass die rechte Seite von (1.55) maximal um 1 größer ist als die rechte Seite von (1.54) sowie, dass die Werte im Falle guter Approximation in einer festen Basis s übereinstimmen.

Korollar 1.2. Mit weitergeführter Notation wie vor/in Proposition 1.1 gilt

$$\omega \geq \max \left\{ \sup_s \limsup_{n \geq 1} \frac{b_{n+1}^{(s)} - b_n^{(s)} - 1}{b_n^{(s)}}, \sup_s \limsup_{n \geq 1} \frac{b'_{n+1}^{(s)} - b'_n{}^{(s)} - 1}{b'_n{}^{(s)}} \right\}. \quad (1.59)$$

Beweis: Wir müssen zeigen, dass die linke Seite von (1.54) größer ist als die rechte Seite von (1.59). Dies ist aber offensichtlich der Fall, denn findet man zu festem s_0 eine Folge von gegen unendlich strebenden n -Werten für die $\max \left\{ \frac{b_{n+1}^{(s_0)} - b_n^{(s_0)} - 1}{b_n^{(s_0)}}, \frac{b'_{n+1}{}^{(s_0)} - b'_n{}^{(s_0)} - 1}{b'_n{}^{(s_0)}} \right\}$ gegen ein $\Omega_{s_0} \in \mathbb{R}$ konvergiert, so kann man selbiger Folge die Folge von Paaren (n, s_0) mit $\|(n, s_0)\|_\infty \rightarrow \infty$ zuordnen und erhält, dass die rechte Seite von (1.54) mindestens Ω_{s_0} sein muss. Da man entsprechende Konstruktion für alle s durchführen kann und sich mit Ω_s durch Variation von s dem Supremum aus (1.59) nach der Supremumsdefinition beliebig nahe annähern kann, folgt das Korollar aus (1.54). $\square$

Ähnliche Überlegungen liefern eine Abschätzung für $\hat{\omega}$ nach unten.

Proposition 1.2. Die Approximationskonstante $\hat{\omega}$ erfüllt

$$\hat{\omega} \geq \max \left\{ \sup_s \liminf_{n \geq 1} \max_{1 \leq j \leq n} \frac{b_{j+1}^{(s)} - b_j^{(s)} - 1}{b_{n+1}^{(s)}}, \sup_s \liminf_{n \geq 1} \max_{1 \leq j \leq n} \frac{b'_{j+1}{}^{(s)} - b'_j{}^{(s)} - 1}{b'_{n+1}{}^{(s)}} \right\}. \quad (1.60)$$

Beweis: Es genügt nach der Supremumsdefinition die Ungleichung

$$\hat{\omega} \geq \mathcal{A}_s := \max \left\{ \liminf_{n \geq 1} \max_{1 \leq j \leq n} \frac{b_{j+1}^{(s)} - b_j^{(s)} - 1}{b_{n+1}^{(s)}}, \liminf_{n \geq 1} \max_{1 \leq j \leq n} \frac{b'_{j+1}{}^{(s)} - b'_j{}^{(s)} - 1}{b'_{n+1}{}^{(s)}} \right\}$$

für jede Basis s separat nachzuweisen. Sei also s fest gewählt und der Index s in der Folge $b_n^{(s)} = b_n$ unterdrückt. Wir müssen wegen der Definition von $\hat{\omega}$ zu beliebigem $\epsilon > 0$ und jedem hinreichend großen $X = X(\epsilon)$ einen Approximationsvektor $(x, y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{Z}^{k+1}$ mit $x \leq X$ und

$$\max_{1 \leq j \leq k} |\zeta_j x - y_j| \leq X^{-\mathcal{A}_s + \epsilon} \quad (1.61)$$

finden. Sei also für $\epsilon > 0$ und großes vorgegebenes X der Index und n_0 durch $s^{b_{n_0}} \leq X < s^{b_{n_0+1}}$ respektive $s^{b'_{n_0}} \leq X < s^{b'_{n_0+1}}$ bestimmt. Wähle $x := s^{b_j}$ respektive $x := s^{b'_j}$ wobei j dadurch bestimmt ist, dass das entsprechende innere Maximum aus der Definition von $\mathcal{A}_s$ für das gegebene n_0 angenommen wird. Aufgrund der Definition von $(b_n)_{n \geq 1}$ als gemischter Folge sind die ersten $b_{j+1} - b_j - 1$ Nachkommastellen eines jeden $\zeta_t s^{b_j}, 1 \leq t \leq k$ respektive $(1 - \zeta_t) s^{b_j}, 1 \leq t \leq k$

Nullen in Basis s . Das heißt aber mit $y_t := \lfloor \zeta_t x \rfloor$ für alle $1 \leq t \leq k$ respektive $y_t := \lceil \zeta_t x \rceil$ für alle $1 \leq t \leq k$

$$\max_{1 \leq t \leq k} \|\zeta_t x\| = \max_{1 \leq t \leq k} |\zeta_t x - y_t| \leq s^{b_j - b_{j+1} + 1} \leq X^{\frac{b_j - b_{j+1} + 1}{b_{n_0} + 1}} \quad (1.62)$$

$$\text{respektive } \max_{1 \leq t \leq k} \|\zeta_t x\| = \max_{1 \leq t \leq k} |(1 - \zeta_t)x - y_t| \leq s^{b'_j - b'_{j+1} + 1} \leq X^{\frac{b'_j - b'_{j+1} + 1}{b'_{n_0} + 1}}. \quad (1.63)$$

Für die linken Ungleichungen vergleiche den Beweis von Proposition 1.1, die rechten folgen aus $X < s^{b_{n_0} + 1}$ respektive $X < s^{b'_{n_0} + 1}$. Also gilt die Ungleichung für alle X und folglich alle hinreichend großen n_0 und daher kann man zum $\liminf_{n \rightarrow \infty}$ übergehen. Somit hat (1.61) für alle X so groß, dass der Exponent auf der rechten Seite von (1.62) respektive (1.63) größer als $\mathcal{A}_s - \epsilon$ ist, eine Lösung. Nach der Definition des $\liminf$ ist aber sichergestellt, dass für alle hinreichend großen n oder gleichbedeutend X diese Bedingung eintritt. Das schließt den Beweis ab. $\square$

Von nun an wird auf die duale Darstellung nicht mehr weiter eingegangen. Alle Konstruktionen werden für Werte von ζ durchgeführt, die viele aufeinanderfolgende Nullen in einer Basis s haben, sodass also $\{\zeta s^{a_n^{i,(s)}}\}$ nahe 0 ist.

Beispiel 1: Seien ζ_1, ζ_2 in Basis $s = 2$ gegeben als

$$\zeta_1 = \sum_{n \geq 0} 2^{-n!} = 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-6} + \dots \quad (1.64)$$

$$\zeta_2 = \sum_{n \geq 0} 2^{-(2n)!} + \sum_{n \geq 1} 2^{-(2n+1)!-1} = 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-7} + 2^{-24} + 2^{-121} + \dots \quad (1.65)$$

Dann gilt: $a_n^{1,(2)} = n!$, $(a_n^{2,(2)})_{n \geq 1} = (1, 2, 7, 24, 121, \dots)$ und daraus resultiert

$$(b_n^{(s)})_{n \geq 1} = (1, 2, 3, 6, 7, 24, 120, 121, \dots).$$

Um ζ_1, ζ_2 durch Zahlen von der Form $s^\beta = 2^\beta$ gut zu approximieren, ist es offensichtlich bestmöglich die Folge der Exponenten β_n als $2^{(2n)!}$ zu wählen, für $X_n = x_n = 2^{-(2n)!}$ gilt damit

$$\min_{y \in \mathbb{N}} |\zeta_i x_n - y| \leq x_n^{-(2n+1)!/(2n)!} = x_n^{-(2n+1)}, \quad i \in 1, 2$$

also $\omega = \infty$ nach Definition. Um $\hat{\omega}$ nach unten abzuschätzen, betrachtet man wie in der Definition von $\hat{\omega}$ eine beliebige große ganze Zahl X . Es gelte $b_n \leq \log_2(X) < b_{n+1}$. Das beste zugehörige $x \leq X$ ist dann $x = 2^{b_j}$ mit $b_j \leq b_n$ so, dass $b_{j+1} - b_j$ maximal ist. Mit dieser Wahl ist offenbar

$$\omega(X) \geq \frac{b_{j+1} - b_j}{\log_2(X)} \geq \frac{b_{j+1} - b_j}{b_{n+1}}.$$

da die Wahl $x = 2^{b_j} \leq X$ gemäß dem Beweis von Proposition 1.1 diesen Wert für ν in (1.58) erzielt und $\omega(X)$ das Supremum aller solchen ν ist. In unserem Fall wird man stets $j = n$ wählen für $n \neq (2k+1)!$ und $j = n-1$ im Fall $n = (2k+1)!$ und erhält je nachdem ob b_n Fakultät einer geraden oder ungeraden Zahl ist (oder einer ungeraden, plus 1) eine Lösung von (1.58) mit $x \leq X$ und $\nu = \nu_i$ wobei

$$\begin{aligned}
\nu_1 &:= \liminf_{n \geq 1} \frac{(2n+1)! - (2n)!}{(2n+1)!} = \liminf_{n \geq 1} \frac{2n}{2n+1} = 1 \\
\nu_2 &:= \liminf_{n \geq 1} \frac{(2n)! - ((2n-1)! + 1)}{(2n-1)! + 1} = 1 \\
\nu_3 &:= \liminf_{n \geq 1} \frac{(2n+1)! - (2n)!}{(2n+1)! + 1} = 1.
\end{aligned}$$

Proposition 1.2 besagt aber gerade $\widehat{\omega} \geq \min\{\nu_1, \nu_2, \nu_3\}$ da hier alle Fälle erschöpft sind. Zusammen mit (1.50) letztlich also $\widehat{\omega} = 1$.

Beispiel 2: Von gesondertem Interesse ist der Fall, dass die Zahlen ζ_i in (1.36) die Potenzen einer Zahl $\zeta \in \mathbb{R}$ sind, also $\zeta_i = \zeta^i, 1 \leq i \leq k$. Dabei verlangt man, dass ζ nicht algebraisch vom Grad $\leq k$ ist, sodass die $\mathbb{Q}$ -lineare Unabhängigkeit gewährleistet ist. Wir setzen wieder $\zeta = \zeta_1$ mit der Liouvillezahl ζ_1 von Beispiel 1. Diese ist transzendent und erfüllt daher die Bedingung. Für Zahlen wie ζ mit großen Lücken in der Entwicklung in einer Basis s kann man die Potenzen sehr einfach wieder einfach in Basis s anschreiben oder zumindest abschätzen, da kein oder kaum Ziffernsturz passiert. Man erkennt durch Ausmultiplizieren

$$\begin{aligned}
\zeta^2 &= \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} 2^{-(i!+j!)}, \quad \text{und allgemeiner} \\
\zeta^d &= \sum_{(i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{N}^d} 2^{-(i_1! + \dots + i_d!)}, \quad 1 \leq d \leq k.
\end{aligned}$$

Sei $H_{d,t} := \{(i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{N}^d : \max_{1 \leq j \leq d} i_j = t\}$ und $S_d(i_1, \dots, i_d) := i_1! + \dots + i_d!$. Sei weiter $F_{d,t} := \sum_{\alpha \in H_{d,t}} 2^{-S_d(\alpha)}$. Die entscheidende Beobachtung, um $\omega = \infty$ einzusehen, ist nun folgende: In einem Summand von ζ^d sei $i_u = \max\{i_1, \dots, i_d\}$. Dann gilt $i_1! + \dots + i_d! \leq di_u! \leq ki_u!$. Also ist jeder Summand von $H_{d,t}$ nach unten beschränkt durch $2^{-kt!}$. Dies ist klarerweise bei festem t auch für $\sum_{T \leq t} F_{d,T}$ zutreffend.

Andererseits besteht $H_{d,t}$ aus $t^d - (t-1)^d < t^d < t^k$ Zahlen sämtlich nicht größer als $2^{-t!}$ und damit für jedes $\epsilon > 0$ für hinreichend großes $t = t(\epsilon)$

$$2^{-t!} \leq F_{d,t} \leq 2^{-t!} t^k \leq 2^{-t!(1-\epsilon)}, \quad 1 \leq d \leq k.$$

Das bedeutet, dass in $F_{d,t}$ an den ersten $t!(1-\epsilon)$ Nachkommastellen in Basis 2 Nullen stehen wenn man t nur groß genug wählt. Es ist wegen des schnellen Wachstums der Fakultät einfach einzusehen, dass dieses Argument auch für den Ausdruck $\sum_{T \geq t} F_{d,T}$ gültig ist. Es gilt zusammenfassend also für t hinreichend groß, dass $\zeta^d = \sum_{T < t} F_{d,T} + \sum_{T \geq t} F_{d,T}$ zwischen der $k(t-1)! + 1$ -ten und der $t!(1-\epsilon)$ -ten Nachkommastelle nur Nullen stehen hat. Wählt man also $K(t)$ maximal, sodass $b_{K(t)} \leq kt!$, dann ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{b_{K(t)+1}}{b_{K(t)}} \geq \frac{(t+1)!(1-\epsilon)}{kt!} = \frac{(t+1)(1-\epsilon)}{k}.$$

Mit Korollar 1.2 schließt man, weil der Ausdruck auf der rechten Seite mit $t \rightarrow \infty$ gegen unendlich konvergiert, auf $\omega = \infty$. Das Vorgehen entspricht dabei der Wahl der Folge der X -Werte als $(X^{(t)})_{t \geq 1} = (x^{(t)})_{t \geq 1} = 2^{kt!}$ sowie $(y_d^{(t)})_{t \geq 1} = \lfloor x^{(t)} \zeta^d \rfloor$ für $1 \leq d \leq k$ in Gleichung (1.36).

Für die Größe $\widehat{\omega}$ ist vorerst auf diese Weise nur die wegen (1.40) triviale Abschätzung nach unten durch $\frac{1}{k}$ möglich. Denn wählt man die Folge der X -Werte als $(X^{(t)})_{t \geq 1} = 2^{kt!-1}$, so nimmt der

maximale Quotient aus Proposition 1.2 nie einen Wert $> \frac{1}{k}$ an, weil die maximale Intervalllänge $b_{n+1} - b_n$ für $b_n \leq kt! - 1$ durch $t! - (t-1)! < t!$ beschränkt ist, und zu jedem $\epsilon > 0$ gilt für hinreichend großes t die Beziehung $t! < \left[\frac{1}{k} + \epsilon\right] (kt! - 1)$. Tatsächlich werden wir in Satz 3.1 in Abschnitt 3.1 exakt beweisen, dass $\widehat{\omega} = \frac{1}{k}$.

Beachte, dass das zu Beispiel 2 duale Problem, also die Linearformenversion, der Approximation von 0 durch $P(\zeta)$ mit Polynomen $P \in \mathbb{Z}[T]$ von beschränkter Höhe- das ist der betragsgrößte Koeffizient- entspricht. Dieses ist in Kapitel 3 untersucht.

Bisher ist nicht klar, ob sich mithilfe obiger Konstruktionen auch tatsächlich wie gefordert $\mathbb{Q}$ -lineare unabhängige Zahlentupel $\{1, \zeta_1, \dots, \zeta_k\}$ finden lassen. Dies lässt sich für Fragestellungen dieser Art mit einem Variationsprinzip einsehen, das hier einmalig exemplarisch vorgeführt sei und mit leichten Adaptionen auf alle späteren Situationen anwendbar ist, sodass man sich um die $\mathbb{Q}$ -lineare Unabhängigkeit nie gesondert Gedanken machen muss und dies daher in Zukunft übergangen wird.

Wir zeigen: Sind Folgen $(a_n^{i,(s)})_{n \geq 1}$, $1 \leq i \leq k$, wobei s im folgenden in der Notation unterdrückt sei, gegeben mit vorgegebenen Quotienten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}^i}{a_n^i} = \kappa_i, \quad 1 \leq i \leq k, \quad (1.66)$$

so können dazu passende $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ - sodass die s -adische Nachkommaentwicklung von ζ_i also nur an den Stellen $(a_{n,i})_{n \geq 1}$ nichtverschwindende Werte annimmt- linear unabhängig mit 1 gewählt werden.

Das lässt sich mit einem Induktionsbeweis einsehen. Für $k = 1$ gilt die Behauptung, denn jede nichtperiodische Folge $(a_{n,1})_{n \geq 1}$ führt zu einer irrationalen Zahl ζ_1 und offensichtlich lassen sich solche Folgen unter jeder Bedingung (1.66) konstruieren. Sind die Folgen

$(a_{n,1})_{n \geq 1}, (a_{n,2})_{n \geq 1}, \dots, (a_{n,k})_{n \geq 1}$ konstruiert, sodass $\{1, \zeta_1, \dots, \zeta_k\}$ $\mathbb{Q}$ -linear unabhängig sind und die Folgen die Bedingungen (1.66) erfüllen, so kann man eine beliebige Folge $(a_{n,k+1})_{n \geq 1}$, welche die Bedingung (1.66) mit $i = k+1$ erfüllt, variieren, indem man etwa für jedes n eine der beiden Zahlen $a_{n,k+1}$ oder $a'_{n,k+1} = a_{n,k+1} + 1$ als n -tes Folgenglied wählt. Jede solche Variation genügt offensichtlich weiterhin der Bedingung (1.66) für $i = k+1$. Auf diese Weise entstehen überabzählbar viele Folgen $(a_{n,k+1})_{n \geq 1}$, die zu festen $(a_{n,1})_{n \geq 1}, (a_{n,2})_{n \geq 1}, \dots, (a_{n,k})_{n \geq 1}$ die Bedingungen (1.66) erfüllen. Da es aber nur abzählbar viele $\mathbb{Q}$ -Linearkombinationen von festen $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ gibt, folgt aus der Induktionsannahme, dass es (sogar überabzählbar viele) Variationen von $(a_{n,k+1})_{n \geq 1}$ gibt, die zu einer Zahl ζ_{k+1} führen, sodass $\{1, \zeta_1, \dots, \zeta_{k+1}\}$ $\mathbb{Q}$ -linear unabhängig sind unter den Randbedingungen (1.66). Damit ist der Induktionsschritt geschafft.

Bemerkung: Da obiges Argument hauptsächlich auf Kardinalitätsüberlegungen basiert und die zu einer vorgegebenen endlichen Menge reeller Zahlen algebraisch abhängigen Zahlen ebenfalls nur abzählbar sind, stellt sogar die Forderung algebraisch unabhängiger Zahlen $\{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k\}$ keine Einschränkung dar. Man kann also in allen folgenden Sätzen "zusammen mit 1 $\mathbb{Q}$ -linear unabhängig" auch durch die stärkere Forderung "algebraisch unabhängig" ersetzen.

Aus (1.59) folgt insbesondere $\omega = \infty$, wenn nur $\limsup \frac{b_{n+1}^{(s)}}{b_n^{(s)}} = \infty$ für irgendeine Basis s . Nun soll das noch mithilfe der Einzelfolgen $a_n^{i,(s)}$ charakterisiert werden.

Lemma 1.3. Es gilt für alle $s \geq 2$:

$$\min_i \liminf_{n \geq 1} \left(\frac{a_{n+1}^{i,(s)}}{a_n^{i,(s)}} \right)^{1/k} \leq \limsup_{n \geq 1} \frac{b_{n+1}^{(s)}}{b_n^{(s)}} \leq \min_i \limsup_{n \geq 1} \frac{a_{n+1}^{i,(s)}}{a_n^{i,(s)}}$$

Beweis: Die rechte Ungleichung ist trivial. Für die linke sei bei festem s die linke Seite gegeben als $C := \min_i \liminf_{n \geq 1} \frac{a_{n+1}^{i,(s)}}{a_n^{i,(s)}}$ und n_0 so groß, dass für alle i und alle $n \geq n_0$ gilt (s sei im folgenden in der Notation weggelassen):

$$\frac{a_{n+1}^i}{a_n^i} \geq C - \epsilon.$$

Zu beliebigem $b_n, n \geq n_0$ gibt es m, i_0 mit $a_m^{i_0} = b_n$. Es liegen dann im Intervall $[a_m, (C - \epsilon)a_m]$ höchstens k Zahlen b_i , denn von jeder Einzelfolge kann nur ein Folgenglied diese Bedingung erfüllen und nach Schubfachschluss muss für zwei Werte b_j, b_{j+1} im Intervall $[a_m^{i_0}, a_{m+1}^{i_0}]$ der Quotient $\frac{b_{j+1}}{b_j}$ mindestens $(C - \epsilon)^{1/k}$ betragen. Mit $\epsilon \rightarrow 0$ folgt die linke Ungleichung. $\square$

Dies ergibt zusammen mit (1.59)

$$\omega \geq \min_i \liminf_{n \geq 1} \left(\frac{a_{n+1}^{i,(s)}}{a_n^{i,(s)}} \right)^{1/k} - 1, \quad \forall s \geq 2.$$

Das zeigt insbesondere, dass bereits

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}^{i,(s)}}{a_n^{i,(s)}} = \infty, \quad 1 \leq i \leq k$$

in irgendeiner Basis s hinreichend für $\omega = \infty$ ist. Weiters ist die Bedingung

$$\min_i \limsup_{n \geq 1} \max \left\{ \frac{a_{n+1}^{i,(s)}}{a_n^{i,(s)}}, \frac{a_{n+1}^{i,(s)}}{a_n^{i,(s)}} \right\} = \infty$$

notwendig, falls man sich auf approximierende Zahlen von der Form $x = s^\beta$ zu beliebigem festem s beschränkt und die duale Darstellung in der Überlegung wieder mitberücksichtigt.

Nun soll untersucht werden, unter welchen Bedingungen $\widehat{\omega} = 1$ gilt. Aus (1.60) folgt wieder, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}^{(s)}}{b_n^{(s)}} = \infty$$

in einer beliebigen Basis s hinreichend ist, wie man mittels $j = n$ im Maximum von (1.60) sieht. Denn diese Wahl liefert

$$\widehat{\omega} \geq \liminf_{n \geq 1} \frac{b_{n+1}^{(s)} - b_n^{(s)}}{b_{n+1}^{(s)}} = 1 - \frac{1}{\liminf_{n \geq 1} \frac{b_{n+1}^{(s)}}{b_n^{(s)}}} = 1$$

So kann man bereits sehr einfach einen Fall mit $\widehat{\omega} = 1$ konstruieren. Dies kann aber nicht wie im Fall von ω durch unabhängige Bedingungen an die Einzelfolgen $a_n^{i,(s)}$ erreicht werden, denn man kann einfach Folgen konstruieren mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}^{i,(s)}}{a_n^{i,(s)}} = \infty, \quad 1 \leq i \leq k, \quad (1.67)$$

für die $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}^{(s)}}{b_n^{(s)}} = 1 < \infty$ gilt, zum Beispiel $a_n^{i,(s)} = n! + i$ in einer beliebig vorgegebenen festen Basis s . Durch geeignete geringfügige Variationen lässt sich wieder sicherstellen, dass zugehörige $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ zusammen mit 1 linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ sind. Wie im folgenden gezeigt wird ist die Bedingung (1.67) auch nicht hinreichend um auf diesem Weg $\widehat{\omega} = 1$ zu erhalten.

Definiere zu beliebig fest gewählter Basis s (sie sei in der Notation im folgenden unterdrückt) a_n^1 als beliebige Folge mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}^1}{a_n^1} = \infty$$

und

$$\begin{aligned} a_n^2 &= a_n^1 + \left\lfloor \frac{1}{k}(a_{n+1}^1 - a_n^1) \right\rfloor \\ a_n^3 &= a_n^1 + \left\lfloor \frac{2}{k}(a_{n+1}^1 - a_n^1) \right\rfloor \\ &\vdots \\ a_n^k &= a_n^1 + \left\lfloor \frac{k-1}{k}(a_{n+1}^1 - a_n^1) \right\rfloor. \end{aligned}$$

Dann gilt offensichtlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}^i}{a_n^i} = \infty, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Definiere nun K_n durch $b_{K_n} = a_n^1$, dh K_n gibt an, wann in der gemischten Folge $(b_i)_{i \geq 1}$ die Folgenglieder von $(a_n^1)_{n \geq 1}$ auftreten. Mit dieser Bezeichnung gilt aufgrund der äquidistanten Abstände

$$b_{m+1} - b_m \leq \frac{a_n^1 - a_{n-1}^1}{k} = \frac{b_{K_n} - b_{K_n-1}}{k} < \frac{b_{K_n}}{k}, \quad m \leq K_n - 1$$

und damit ist $\widehat{\omega}$ selbst in diesem Fall mit (1.60) nicht besser als trivial mit $\frac{1}{k}$ abzuschätzen. Wir werden später sehen, dass in diesem Fall tatsächlich $\widehat{\omega} = \frac{1}{k}$. In Kontext von Lemma 1.5 gilt nämlich $\eta_2 = \eta_3 = \dots = \eta_{k+1} = \frac{1}{k}$ und daraus folgt über (1.89) die Gleichheit.

Fordert man jedoch zusätzlich zu (1.67) noch $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^i}{a_n^1} = 1$, so ist $\widehat{\omega} = 1$ zwingend erfüllt. (Dabei reicht es dann natürlich (1.67) für $i = 1$ zu fordern.) Genauer gilt:

Lemma 1.4. Gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^i}{a_n^1} = 1, 1 \leq i \leq k$, so ist

$$\widehat{\omega} \geq 1 - \frac{1}{\min_i \liminf_{n \geq 1} \frac{a_{n+1}^i}{a_n^i}}.$$

Beweis: Sei die Teilfolge $(b_{L_n})_{n \geq 1}$ von $(b_n)_{n \geq 1}$ definiert wie folgt: zu festem $m \in \mathbb{N}$ sei zunächst n maximal gewählt mit $\min_i a_n^i \leq m$. Der zugehörige von m abhängige Index im Minimum sei i_0 . Es gibt dann also exakt n Folgenglieder von $(a_n^i)_{n \geq 1}$ die $\leq m$ sind für gewisse i (darunter ist i_0) und höchstens $(n-1)$ für alle restlichen Indizes. Dabei sind es für hinreichend große n aufgrund der Voraussetzungen des Lemmas exakt $(n-1)$. Weiter ist $a_n^{i_0}$ das kleinste der Folgenglieder a_n^i für $1 \leq i \leq k$. Weiter sei $b_{L_n} := \min_i a_n^i$, sodass L_n den Index jeden solchen Minimums in der geordneten Folge $(b_n)_{n \geq 1}$ angibt. Beachte, dass mit dieser Wahl nach Voraussetzung des Lemmas $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{L_n}}{a_n^{i_0}} = 1$ für alle $1 \leq i \leq k$, was in der letzten Gleichung des Beweises Verwendung finden wird.

Dann gilt nach (1.60)

$$\widehat{\omega} \geq \liminf_{n \geq 1} \frac{b_{L_n} - b_{L_n-1}}{b_m}. \quad (1.68)$$

Es genügt also, die rechte Seite von (1.68) abzuschätzen. Nach Definition von L_n in Abhängigkeit von m ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{L_n}}{b_m} = 1$ und daher

$$\liminf_{n \geq 1} \frac{b_{L_n} - b_{L_n-1}}{b_m} = \liminf_{n \geq 1} \frac{b_{L_n} - b_{L_n-1}}{b_{L_n}} \cdot \frac{b_{L_n}}{b_m} = \liminf_{n \geq 1} \frac{b_{L_n} - b_{L_n-1}}{b_{L_n}} = 1 - \frac{1}{\liminf_{n \geq 1} \frac{b_{L_n}}{b_{L_n-1}}}.$$

Nach der Definition von L_n und der Voraussetzung an die a_n^i stimmt letzterer Wert aber mit der geforderten Schranke überein, denn

$$\liminf_{n \geq 1} \frac{b_{L_n}}{b_{L_n-1}} = \liminf_{n \geq 1} \frac{a_n^1 \cdot \frac{b_{L_n}}{a_n^1}}{a_{n-1}^1 \cdot \frac{b_{L_n-1}}{a_{n-1}^1}} = \liminf_{n \geq 1} \frac{a_{n+1}^1}{a_n^1}$$

□

Bemerkung: Die erzielten Ungleichungen zur Abschätzung von $\omega, \hat{\omega}$ sind nicht immer scharf, denn in (1.47), (1.50) haben wir gesehen, dass $\frac{1}{k}$ eine untere Schranke für $\omega, \hat{\omega}$ darstellt, hingegen folgt aus den obigen Ungleichungen in den meisten Fällen nur $\omega \geq 0$ und $\hat{\omega} \geq 0$. Dies liegt daran, dass dann keine gute Approximation durch x -Werte durchgehend nur von der Form s^β zu einem festen $s \geq 2$ vorliegt. Die Überlegungen eignen sich hauptsächlich zur Konstruktion vom seltenen Fall von gut approximierbaren Zahlentupeln vom speziellen Liouvilletyp.

1.2.2 Der Fall $\omega = \infty$: Höhere sukzessive Minima für Liouvillezahlen

Wir haben im vorangehenden Abschnitt das erste sukzessive Minimum in Verbindung mit den s -adischen Nachkommaentwicklungen von $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ gebracht. Nun wollen wir Aussagen über den Zusammenhang der höheren sukzessiven Minima zur s -adischen Entwicklung von gewissen $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ gewinnen. In diesem Abschnitt zunächst im Falle von assoziierten Liouvillezahlen, also insbesondere soll $\omega = \infty$ für die Einzelapproximation eines jeden ζ_i gelten. Dabei werden wir uns in den Konstruktionen auf Fälle beschränken, in denen auch die simultane Approximationskonstante durch $\omega = \infty$ gegeben ist. Im nächsten Abschnitt 1.2.3 werden dann mit ähnlichen Methoden Ergebnisse für assoziierte schwache Liouvillezahlen erarbeitet.

Die Kenntnis der Werte $\omega, \hat{\omega}$ erlaubt über (1.40) und Ungleichungen aus vorangehenden Abschnitten, insbesondere (1.18), (1.16), gewisse Abschätzungen für die höheren sukzessiven Minima bzw ihre abgeleiteten Größen $\psi_j(Q)$. Diese sind jedoch wenig zufriedenstellend.

Um stärkere Ergebnisse zu den höheren sukzessiven Minima zu erhalten, benötigt man die Größen $\omega_j, \hat{\omega}_j$ mit $j \geq 2$. Da ein Vorgehen unter den sehr allgemeinen Bedingungen des vorangehenden Abschnitts zu schwierig erscheint, spezialisieren wir die betrachteten $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ weiter. Der Einfachheit halber sei im folgenden $s = 2$ fixiert, die folgenden Konstruktionen lassen sich aber auf ähnlichem Wege für beliebige Basen durchführen. Wir zeigen den folgenden

Satz 1.12. Sei k eine positive ganze Zahl und sei $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{k+1}) \in \overline{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^k$ gegeben, sodass folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\eta_1 = \infty \tag{1.69}$$

$$\eta_1 > \eta_2 \geq \eta_3 \geq \dots \geq \eta_{k+1} > 0 \tag{1.70}$$

$$\eta_2 + \eta_3 + \dots + \eta_{k+1} = 1. \tag{1.71}$$

Dann existieren k monotone Folgen positiver ganzer Zahlen $(a_{n,j})_{n \geq 1}$, $1 \leq j \leq k$, sodass

$$a_{n,1} < a_{n+1,k} < a_{n+1,k-1} < \dots < a_{n+1,1}, \quad n \geq 1. \quad (1.72)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1,k}}{a_{n,1}} = \eta_1 = \infty \quad (1.73)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1,i} - a_{n+1,i+1}}{a_{n+1,1}} = \eta_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq k. \quad (1.74)$$

und sodass

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \sum_{n \geq 1} 2^{-a_{n,1}} \\ \zeta_2 &= \sum_{n \geq 1} 2^{-a_{n,2}} \\ &\vdots \\ \zeta_k &= \sum_{n \geq 1} 2^{-a_{n,k}} \end{aligned}$$

zusammen mit 1 $\mathbb{Q}$ -linear unabhängig sind und deren zugeordnete Approximationskonstanten $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{k+1}$ die Identitäten

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \eta_1 = \infty =: \wp_1(\eta) \\ \omega_2 &= \max \left\{ \frac{\eta_2}{\eta_2 + \eta_3 + \dots + \eta_{k+1}}, \frac{\eta_3}{\eta_3 + \eta_4 + \dots + \eta_{k+1}}, \dots, \frac{\eta_{k+1}}{\eta_{k+1}} \right\} =: \wp_2(\eta) \\ \omega_3 &= \max \left\{ \frac{\eta_3}{\eta_2 + \eta_3 + \dots + \eta_{k+1}}, \frac{\eta_4}{\eta_3 + \eta_4 + \dots + \eta_{k+1}}, \dots, \frac{\eta_{k+1}}{\eta_k + \eta_{k+1}} \right\} =: \wp_3(\eta) \\ &\vdots \\ \omega_{k+1} &= \frac{\eta_{k+1}}{\eta_2 + \eta_3 + \dots + \eta_{k+1}} =: \wp_{k+1}(\eta) \end{aligned}$$

erfüllen.

Bemerkung: Bedingung (1.74) ist für das Repräsentantensystem $\{1, 2, \dots, k\} \bmod k$ zu verstehen, das heißt der Fall $i = k$ ist zu verstehen als

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1,k} - a_{n,1}}{a_{n+1,1}} = \eta_{k+1}.$$

Bedingung (1.72) besagt also, dass zu festem Index n die Zahlen $a_{n,j}$ mit steigendem j kleiner werden, aber alle größer als $a_{n-1,1}$ und kleiner als $a_{n+1,k}$ sind, und die Bedingungen (1.73), (1.74) drücken die Verhältnisse dieses Abfalls bei festem n aus. Eine wesentliche Eigenschaft obiger Konstruktion, die in Zukunft oft verwendet wird, ist, dass die Intervalllängen zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder in der monoton geordneten gemischten Folge $(b_n)_{n \geq 1}$ die aus den Einzelfolgen $(a_{n,j})_{n \geq 1}$ entsteht niemals abnimmt, also $b_{i+1} - b_i$ nichtfallend in i ist.

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass Folgen die (1.72)-(1.74) erfüllen für jede Wahl von η (unter den Rahmenbedingungen (1.69)-(1.71)) existieren. Um die $\mathbb{Q}$ -lineare Unabhängigkeit kümmern wir uns anschließend.

Wähle dazu für $1 \leq j \leq k$ die Zahlen $a_{1,j} = k + 1 - j$ und definiere rekursiv die weiteren Folgenglieder durch

$$a_{n+1,1} = \left\lfloor \frac{1}{\eta_{k+1}} n \cdot a_{n,1} (\eta_{k+1} + \eta_k + \dots + \eta_2) \right\rfloor + (k-1) \quad (1.75)$$

$$a_{n+1,2} = \left\lfloor \frac{1}{\eta_{k+1}} n \cdot a_{n,1} (\eta_{k+1} + \eta_k + \dots + \eta_3) \right\rfloor + (k-2) \quad (1.76)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad (1.77)$$

$$a_{n+1,k} = \left\lfloor \frac{1}{\eta_{k+1}} n \cdot a_{n,1} (\eta_{k+1}) \right\rfloor + (k-k) \quad (1.78)$$

Man erkennt unschwer mithilfe von (1.71), dass das System (1.75)-(1.78) den Bedingungen (1.72), (1.73), (1.74) genügt. Dabei kann man obiges Konstruktionsschema auch geringfügig variieren, um garantieren zu können, dass man ζ_i mit $\mathbb{Q}$ -linear unabhängigen $\{1, \zeta_1, \dots, \zeta_k\}$ erhalten kann, die (1.75)-(1.78) erfüllen, siehe Abschnitt 1.2.1 nach Beispiel 2. Dies sei hier nicht noch einmal ausgeführt.

Um für die durch die Folgen $(a_{n,i})_{n \geq 1}$ definierten Zahlen ζ_i die Aussage des Satzes einzusehen, müssen wir die Ungleichungen $\omega_i \leq \wp_i(\eta)$ und $\omega_i \geq \wp_i(\eta)$ zeigen. Wir beginnen mit dem einfacheren Fall $\omega_i \geq \wp_i(\eta)$.

$\omega_j \geq \wp_j(\eta)$:

Dies erfolgt konstruktiv, indem für die Abschätzung von ω_j eine Menge von X -Werten zusammen mit j Folgen von Approximationsvektoren

$$\left(x^{(1,i)}, y_1^{(1,i)}, \dots, y_k^{(1,i)} \right)_{i \geq 1}, \left(x^{(2,i)}, y_1^{(2,i)}, \dots, y_k^{(2,i)} \right)_{i \geq 1}, \dots, \left(x^{(j,i)}, y_1^{(j,i)}, \dots, y_k^{(j,i)} \right)_{i \geq 1}$$

angegeben wird, wobei die j Approximationen für festes $i \in \mathbb{N}$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^{k+1}$ sind und derart, dass der Wert $\omega_j = \wp_j(\eta)$ erreicht wird. Die Definition von ω_j als Supremum aller wählbaren Zahlen, zu der eine solche Folge von Approximationsvektoren existiert, ergibt die Behauptung. Wir werden uns auf den Fall $\wp_j(\eta) = \eta_j$ beschränken. Die Konstruktion lässt sich mit geringen Adaptionen auf den Fall übertragen, dass $\wp_j(\eta)$ mit einem anderen Wert in seiner Definition als Maximum übereinstimmt, wie sich herausstellen wird.

Dabei werden wir die Folgen von Vektoren der Reihe nach konstruieren und in einem Zuge die geforderten Approximationseigenschaften nachweisen, und am Ende noch durch Auswertung einer Determinante feststellen, dass diese Konstruktion wie gefordert linear unabhängige $(k+1)$ -Tupel liefert.

Zunächst sei die aus den $(a_{n,i})_{n \geq 1}$ entstehende gemischte Folge wieder mit $(b_n)_{n \geq 1}$ bezeichnet wie bisher. Schreibt man eine ganze Zahl M als $M = km + 1 - r$ mit $m \in \mathbb{N}$ und $1 \leq r \leq k$, dann gilt wegen (1.72) die Identität $b_M = b_{mk+1-r} = a_{m,r}$. Wir behaupten nun: aus den Voraussetzungen (1.72), (1.73), (1.74) folgt für $1 \leq j \leq k$ direkt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1,j}}{a_{n,j}} = \infty$ und damit nach Lemma 1.3 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \infty$ und weiter $\omega = \infty$. Dies sieht man ein, indem man die der Folge $(a_{n,1})_{n \geq 1}$ entsprechende Teilfolge $(b_{mk})_{m \geq 1}$ von $(b_n)_{n \geq 1}$ wählt. Man sieht sofort aus (1.73), dass $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{b_{mk+1}}{b_{mk}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_{m+1,k}}{a_{m,1}} = \infty$. Wir haben also mit dieser Konstruktion

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_K}{a_{n,1}} = \infty \quad (1.79)$$

erreicht, wobei K der kleinste Index j ist, für den $b_j > a_{n,1} = b_{j-1}$. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Für die Abschätzungen $\omega_j \geq \eta_j$ mit $j \geq 2$ ist es jedoch zweckmäßig, die in der Definition der

ω_j auftretenden Größen $X, (x, y_1, y_2, \dots, y_k)$, die implizit (insbesondere mittels Lemma 1.3) in obiger Überlegung aufgetreten sind, explizit aufzuschreiben. Die Korrespondenz ist wie folgt gegeben.

Man wählt zunächst für jedes n die Zahlen $X^{(n)} = x^{(1,n)} = 2^{a_{n,1}}$. Die in Bezug auf $1 \leq j \leq k$ feste Wahl der X -Werte $X^{(n)} = 2^{a_{n,1}}$ wird allgemein bei passender Wahl aller $x^{(i,n)}, y_1^{(i,n)}, \dots, y_k^{(i,n)}$ genau die Ungleichungen $\omega_j \geq \eta_j$ ergeben. In der Abschlussbemerkung dieses Beweisteils wird erklärt, welche andere Wahl von $X^{(n)}$ und zugehörigen $x, y_1, y_2, \dots, y_k$ jeweils auf die übrigen Terme im Ausdruck $\wp_j(\eta)$ führt. Setzt man in natürlicher Weise für $1 \leq t \leq k$ die übrigen k Koordinaten des ersten Approximationsvektors durch $y_t^{(1,n)} = \lfloor x^{(1,n)} \zeta_t \rfloor$, so erhält man eine Folge von Approximationsvektoren $(x^{(1,n)}, y_1^{(1,n)}, \dots, y_k^{(1,n)})_{n \geq 1}$, wobei nach der Konstruktion die $y_t^{(1,n)}$ für $1 \leq t \leq k$ entstehen, indem man das Komma von ζ_t um $a_{n,1}$ Stellen nach hinten schiebt und den entstehenden Nachkommaanteil abschneidet. Das ergibt wegen der Schachtelung (1.72) der Nachkommaentwicklungen der $\zeta_i, 1 \leq i \leq k$, die Folge der ersten Approximationsvektoren

$$\left(x^{(1,n)}, y_1^{(1,n)}, \dots, y_k^{(1,n)} \right)_{n \geq 1} = \left(2^{a_{n,1}}, \sum_{j \leq n} 2^{a_{n,1} - a_{j,1}}, \sum_{j \leq n} 2^{a_{n,1} - a_{j,2}}, \dots, \sum_{j \leq n} 2^{a_{n,1} - a_{j,k}} \right)_{n \geq 1}.$$

Die Eigenschaft (1.79) sichert, dass für jedes feste $C > 0$ für hinreichend große n simultan in $1 \leq t \leq k$ gilt:

$$\left| x^{(1,n)} \zeta_t - y_t^{(1,n)} \right| \leq (x^{(1,n)})^{-C} = (X^{(n)})^{-C}.$$

Damit haben wir wie gewünscht nochmals $\omega = \omega_1 = \infty$ mit diesen Wahlen bestätigt.

Die Folge der zweiten Approximationsvektoren sei nun analog mit $x^{(2,n)} = 2^{a_{n,2}}$ und $y_t^{(2,n)} = \lfloor x^{(2,n)} \zeta_t \rfloor$ konstruiert. Beachte, dass wenn $a_{n,1} = b_L$, dann $a_{n,2} = b_{L-1}$ nach der Bedingung (1.72). Entscheidend ist nun die Beobachtung, dass bei Multiplikation mit $2^{a_{n,2}}$ in der Entwicklung von ζ_1 die n -te nichtverschwindende Nachkommastelle $a_{n,1}$ nicht mehr in $y_1^{(n,2)}$ auftaucht. Die Folge der zweiten Approximationsvektoren ergibt sich zu

$$\left(x^{(2,n)}, y_1^{(2,n)}, \dots, y_k^{(2,n)} \right)_{n \geq 1} = \left(2^{a_{n,2}}, \sum_{j \leq n-1} 2^{a_{n,2} - a_{j,1}}, \sum_{j \leq n} 2^{a_{n,2} - a_{j,2}}, \dots, \sum_{j \leq n} 2^{a_{n,2} - a_{j,k}} \right)_{n \geq 1}.$$

Aus Kombination der Beziehungen (1.73), (1.74) folgt, dass für jedes feste $0 < C < \eta_2$ für hinreichend große n simultan in $1 \leq t \leq k$ gilt:

$$\left| \zeta_t x^{(2,n)} - y_t^{(2,n)} \right| \leq (x^{(1,n)})^{-C} = (X^{(n)})^{-C}.$$

Damit wird insbesondere der Wert η_2 mit diesen Wahlen der ersten beiden Vektorfolgen angenommen und damit $\omega_2 \geq \eta_2$.

Nun kann man analog weiter vorgehen, indem man $x^{(p,n)} = 2^{a_{n,p}}, 1 \leq p \leq k$, und $y_t^{(p,n)} = \lfloor \zeta_t x^{(p,n)} \rfloor, 1 \leq t \leq k$, definiert und erhält jeweils

$$\left(x^{(p,n)}, y_1^{(p,n)}, \dots, y_k^{(p,n)} \right)_{n \geq 1} = \left(2^{a_{n,p}}, \sum_{j \leq n-1} 2^{a_{n,p} - a_{j,1}}, \sum_{j \leq n-1} 2^{a_{n,p} - a_{j,2}}, \dots, \sum_{j \leq n-1} 2^{a_{n,p} - a_{j,p-1}}, \sum_{j \leq n} 2^{a_{n,p} - a_{j,p}}, \dots, \sum_{j \leq n} 2^{a_{n,p} - a_{j,k}} \right)_{n \geq 1}$$

und man sieht wieder aus (1.73),(1.74), dass der Wert η_j für diese speziellen Wahlen der ersten j Vektorfolgen erreicht wird und damit $\omega_j \geq \eta_j$ für $1 \leq j \leq k$.

Für den $(k+1)$ -ten Approximationsvektor wähle $x^{(k+1,n)} = 2^{a_{n-1,1}}$ und entsprechend $y_t^{(k+1,n)} = \lfloor x^{(k+1,n)} \zeta_t \rfloor$ für $1 \leq t \leq k$. Man berechnet den Vektor folglich zu

$$\left(x^{(k+1,n)}, y_1^{(k+1,n)}, \dots, y_k^{(k+1,n)} \right)_{n \geq 1} = \left(2^{a_{n-1,1}}, \sum_{j \leq n-1} 2^{a_{n-1,1}-a_{j,1}}, \dots, \sum_{j \leq n-1} 2^{a_{n-1,1}-a_{j,k}} \right)_{n \geq 1}$$

Es ergeben (1.72),(1.73),(1.74) zusammen, dass für diese Wahl der Wert η_{k+1} erreicht wird und damit $\omega_{k+1} \geq \eta_{k+1}$.

Um den Beweis von $\omega_j \geq \eta_j$ zu beenden, muss man noch die lineare Unabhängigkeit der $(k+1)$ entstehenden Approximationsvektoren aus $\mathbb{Z}^{k+1}$ begründen. Es ist also sicherzustellen, dass die $(k+1) \times (k+1)$ -Matrix, in deren j -ter Zeile der j -te Approximationsvektor steht, also

$$B_n = \begin{pmatrix} 2^{a_{n,1}} & \sum_{j \leq n} 2^{a_{n,1}-a_{j,1}} & \sum_{j \leq n} 2^{a_{n,1}-a_{j,2}} & \dots & \sum_{j \leq n} 2^{a_{n,1}-a_{j,k}} \\ 2^{a_{n,2}} & \sum_{j \leq n-1} 2^{a_{n,2}-a_{j,1}} & \sum_{j \leq n-1} 2^{a_{n,2}-a_{j,2}} & \dots & \sum_{j \leq n-1} 2^{a_{n,2}-a_{j,k}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2^{a_{n,k}} & \sum_{j \leq n-1} 2^{a_{n,k}-a_{j,1}} & \sum_{j \leq n-1} 2^{a_{n,k}-a_{j,2}} & \dots & \sum_{j \leq n-1} 2^{a_{n,k}-a_{j,k}} \\ 2^{a_{n-1,1}} & \sum_{j \leq n-1} 2^{a_{n-1,1}-a_{j,1}} & \sum_{j \leq n-1} 2^{a_{n-1,1}-a_{j,2}} & \dots & \sum_{j \leq n-1} 2^{a_{n-1,1}-a_{j,k}} \end{pmatrix}$$

für alle $n \geq 1$ regulär ist.

Multipliziert man die $(p+1)$ -te Zeile von B_n je mit $2^{a_{n,p+1}-a_{n,p}}$ und zieht das Ergebnis von der p -ten Zeile ab, so sind alle Einträge Null bis auf den Nebendiagonaleintrag, der 1 ist. Man beginnt also bei $p=1$ mit diesem Verfahren und führt es der Reihe nach bis $p=k-1$ durch. Zieht man schließlich das $2^{a_{n,k}-a_{n-1,1}}$ -fache der letzten Zeile von der vorletzten ab, so ergibt sich eine Folge von Matrizen C_n , die einerseits nach den Rechenregeln für Determinanten gleiche Determinante wie B_n besitzen und andererseits die folgende Gestalt haben:

$$C_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 2^{a_{n-1,1}} & \sum_{j \leq n-1} 2^{a_{n-1,1}-a_{j,1}} & \sum_{j \leq n-1} 2^{a_{n-1,1}-a_{j,2}} & \dots & \dots & \sum_{j \leq n-1} 2^{a_{n-1,1}-a_{j,k}} \end{pmatrix}$$

Entwickelt man die Determinanten der Matrizen $(C_n)_{n \geq 1}$ nach der ersten Spalte, ergibt sich $|\det(C_n)| = 2^{a_{n-1,1}} \neq 0$. Somit gilt $\omega_j \geq \eta_j$ für $1 \leq j \leq k+1$.

Nun wollen wir noch darauf eingehen, wie obige Konstruktion abzuändern ist, um die übrigen Ungleichungen zu erhalten. Sei $2 \leq j \leq k+1$ fest gewählt. Wir müssen dazu zeigen, dass ω_j auch größer als jeder andere Term in $\wp_j(\eta)$ ist. Dazu wählt man in obiger Konstruktion für jedes feste $1 \leq r \leq k-j+2$ die $X^{(n)} = x^{(1,n)} = 2^{a_{n,r}}$ und alle weiteren $x^{(i,n)}$ mit $1 \leq i \leq j$ der Reihe nach mit den nächstkleineren b_i -Werten. Im Spezialfall, der $\omega_j \geq \eta_j$ geliefert hat, war gerade $r=1$. Es sind die j Stück $x^{(i,n)}, 1 \leq i \leq j$ also bei festem $1 \leq r \leq k-j+1$ gegeben durch

$a_{n,r}, a_{n,r+1}, \dots, a_{n,r+j-1}$ und im Sonderfall $r = k - j + 2$ durch $a_{n,r}, a_{n,r+1}, \dots, a_{n,k}, a_{n-1,1}$. Weiter setzen wir wieder $y_t^{(i,n)} = \lfloor x^{(i,n)} \zeta_t \rfloor$ für $1 \leq i \leq j, 1 \leq t \leq k$. Die Systemmatrix der so erhaltenen Approximationsvektoren im Fall $j = k + 1$ hat eine ganz ähnliche Gestalt wie B_n aus dem Spezialfall $r = 1$. Man rechnet wie im Spezialfall durch Determinantenumformungen nach, dass die Approximationsvektoren für alle $n \in \mathbb{N}$ linear unabhängig sind. Jedes r ergibt darüber hinaus eine der Ungleichungen des Satzes, wie man ebenfalls analog zum Fall $r = 1$ nachprüft indem man für jedes r die Zahl der auf $x^{(j,n)}$ folgenden Nullen bis zum darauf folgenden b_i ($j = i$ in $x^{(i,n)}$) minimiert wegen der Monotonie der Intervalllängen diese Anzahl und ist somit der jeweils beste Wert) in Relation zu den $X^{(n)}$ (oder besser $\log_2(X^{(n)})$) setzt mittels (1.73), (1.74).

Bemerkung: Die nicht auftretenden $r > k - j + 1$ liefern einen kleineren Wert und müssen daher in die Überlegungen nicht miteinbezogen werden.

$\omega_j \leq \wp_j(\eta)$:

Für die Ungleichungen $\omega_j \leq \wp_j(\eta)$ für $1 \leq j \leq k + 1$ muss man zeigen, dass die konstruierten Vektoren $\left(x^{(j,n)}, y_1^{(j,n)}, \dots, y_k^{(j,n)}\right)_{n \geq 1}$ optimal für $(\zeta_i)_{1 \leq i \leq k}$ sind, deren zugeordnete $(a_{n,i})_{n \geq 1}$ durch die Bedingungen (1.75)-(1.78) bestimmt sind. Dabei spielt die geforderte lineare Unabhängigkeit der Approximationsvektoren eine entscheidende Rolle.

Der Beweis gliedert sich in drei Teile.

1. Schritt: Seien die Folgen $(a_{n,i})_{n \geq 1}$ für $1 \leq i \leq k$ mit (1.75)-(1.78) gegeben. Es gelte für einen Approximationsvektor $(x, y_1, \dots, y_k)$, dass der zugehörige x -Wert in Basis 2 die Darstellung $x = 2^{r_1} + 2^{r_2} + \dots + 2^{r_b}$ mit $r_1 > r_2 > \dots > r_b$ hat. Seien die Indizes g, h bestimmt durch $b_h \leq r_1 < b_{h+1}$ und $b_{g-1} \leq r_b < b_g$. Dann gilt

$$\max_{1 \leq t \leq k} |x \zeta_t - y_t| \geq 2^{-(b_g - b_{g-1}) - o(-(b_g - b_{g-1}))}, \quad g > h + 1 - k \quad (1.80)$$

$$\max_{1 \leq t \leq k} |x \zeta_t - y_t| \geq 2^{-b_{h+2-k} - o(-b_{h+2-k})}, \quad g \leq h + 1 - k. \quad (1.81)$$

Darüber hinaus widerspricht im Falle $g \leq h + 1 - k$ (dh der Voraussetzung von (1.81)) die Bedingung $x < 2^{b_{h+1} - b_{h+1-k} - 1}$ der Ungleichung

$$\max_{1 \leq t \leq k} |x \zeta_t - y_t| < 2^{-b_{h+1-k} - 1 - o(-b_{h+1-k})} \quad (1.82)$$

für $h \rightarrow \infty$.

2. Schritt: Sei ein Parameter X aus der Definition der ω_i fest gewählt, für welchen ein Index m existiert mit $2^{b_m} \leq X < 2^{b_{m+1}-2}$. Dann können j Vektoren $\left(x^{(i)}, y_1^{(i)}, \dots, y_k^{(i)}\right)_{1 \leq i \leq j}$ mit

$$x^{(i)} \leq X \quad 1 \leq i \leq j \quad (1.83)$$

$$\max_{1 \leq t \leq k} \left| x^{(i)} \zeta_t - y_t^{(i)} \right| \leq \frac{1}{2}, \quad 1 \leq i \leq j, \quad (1.84)$$

nur dann linear unabhängig sein, wenn (mindestens) eines der r_v in der Darstellung in Basis 2 von $x^{(i)}$ für (mindestens) ein $1 \leq i \leq j$ kleiner als $2^{b_{m+2-j}}$ ist. Natürlich sind nur solche Approximationsvektoren interessant, da die Approximation sonst schlecht ist. Siehe auch Lemma 1.1 und beachte, dass die dortige Voraussetzung $\mathbb{Q}$ -linearen Unabhängigkeit in unserem Fall erfüllt ist.

3. Schritt: Aus den ersten beiden Schritten folgert man, dass die Wahl der Approximationsvektoren für beliebiges hinreichend großes X in der Konstruktion zum Beweis von $\omega_j \geq \wp_j(\eta)$ optimal ist. Aufgrund der Voraussetzung $\eta_{k+1} > 0$ sind alle Ausdrücke $\wp_j(\eta)$ wohldefiniert.

Allgemeine Bemerkungen zum Beweis der drei Schritte:

1) Im Beweis vor allem des 1. Schritts wird gelegentlich implizit verwendet, dass für $1 \leq i \leq k$ die Beziehung $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1,i}}{a_{n,i}} = \infty$ gilt. Multipliziert man ζ_i mit einer ganzen Zahl 2^α , so hängt demnach der Nachkommaanteil im wesentlichen nur von der Nachkommastelle $a_{n_0,i}$ ab, wobei $n_0 \in \mathbb{N}$ minimal gewählt ist mit $n_0 > \alpha$, denn alle weiteren Einsen stehen viel weiter hinten. Im Beweis des 1. Schrittes wird diese Tatsache ohne exakte Abschätzungen etwas salopp verwendet, wobei α den r_i entsprechen wird, die in der Entwicklung der x -Komponente von Approximationsvektoren in Basis 2 auftreten. Den vernachlässigten Termen wird durch den $o(1)$ -Term in der Gleichung von Schritt 1 Rechnung getragen.

2) Weiters wird der Einfachheit halber nicht mehr explizit von Folgen von Approximationsvektoren gesprochen, sondern von einer festen Approximation zu großem X ausgegangen. Für dieses X werden die entsprechenden Eigenschaften nachgewiesen. Man kann eine Folge X_i von solchen X -Werten bilden und so eine Folge von Approximationsvektoren erhalten.

3) Es werden folgende elementare Eigenschaften des Rechnens in Basis 2 ausgenutzt werden:

Eigenschaft 1: Sei $\alpha := 2^{-u}$ und $w \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$w < 2^u \implies \|\alpha w\| \geq 2^{-u}.$$

Eigenschaft 1a: Sei $A := 2^{-u_1} + 2^{-u_2} + \dots + 2^{-u_r}$ mit $0 < u_r < u_{r-1} \dots < u_1$ und die ganze Zahl $w \in \mathbb{N}$ in Basis 2 gegeben durch $w = 2^{r_1} + 2^{r_2} + \dots + 2^{r_s}$ mit $0 \leq r_s < r_{s-1} < \dots < r_1$. Dann gilt

$$r_1 < u_1 \implies \|Aw\| \geq 2^{-u_1}.$$

Eigenschaft 1b: Sei $\alpha := 2^{-u}$ und die ganze Zahl $w \in \mathbb{N}$ in Basis 2 gegeben durch $w = 2^{r_1} + 2^{r_2} + \dots + 2^{r_s}$ mit $0 \leq r_s < r_{s-1} < \dots < r_1$. Dann gilt:

$$r_1 < u \implies \|\alpha w\| \geq 2^{r_s - u - 1}.$$

Eigenschaft 1 ist ein Spezialfall sowohl von Eigenschaft 1a als auch Eigenschaft 1b. Eigenschaft 1a erkennt man dadurch, dass man die Summanden in A auf gleichen Nenner 2^{u_1} bringt, von den entstehenden Summanden im Zähler ist nur genau einer ungerade (Eins), sodass die 2-adische Bewertung von A genau $-u_1$ ist. Die 2-adische Bewertung von w ist aber wie man leicht sieht genau $r_s < u_1$. Daher kann bei der Multiplikation keine ganze Zahl entstehen und da der Hauptnenner von Aw von der Form 2^{-u_1} ist, folgt die Behauptung. Ähnliche Argumentation mithilfe der 2-adischen Bewertung zeigt Eigenschaft 1b.

4) Die Konstruktion (1.75)-(1.78) lässt sich vielleicht auf ähnliche Weise auf Fälle mit verschwindenden η_i verallgemeinern, siehe dazu Bemerkung 3 nach dem Beweis.

Beweis Schritt 1: Sei mit der Notation aus der Formulierung von Schritt 1 oBdA b_{h+1} zur Folge $(a_{n,1})_{n \geq 1}$ gehörig, also $b_{h+1} = a_{n_1,1}$ für ein $n_1 \in \mathbb{N}$. Dann ist nach (17) weiter $b_h = a_{n_1,2}$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: Die Zahlen r_i sind alle größer als $a_{n_1-1,1}$, dh $r_b > a_{n_1-1,1}$. Dann gilt nach (1.72) offenbar $b_{g-1} = a_{n_1,f+1} \leq r_b < a_{n_1,f} = b_g$ für ein $1 \leq f \leq k-1$ oder $b_{g-1} = a_{n_1-1,1} \leq r_b < a_{n_1,k} = b_g$. Zweiteren Fall bezeichnen wir im folgenden formal mit $a_{n_1,f+1} \leq r_b < a_{n_1,f}$ mit $f = k$, also formal $a_{n_1-1,1} = a_{n_1,k+1}$, um nicht immer notationell unterscheiden zu müssen. Wir partitionieren nun $\{1, 2, \dots, b\}$ in disjunkte Mengen $I := \{i : r_i < a_{n_1,f}\} \neq \emptyset$ und

$J = \{i : r_i \geq a_{n_1,g}\}$. Offenbar gilt $\zeta_f x = \sum_{i \in I} 2^{r_i} \zeta_f + \sum_{i \in J} 2^{r_i} \zeta_f$. Wir schätzen die Nachkommaanteile der ersten Summe nach unten und die der zweiten nach oben ab. Es gilt, dass

in $\zeta_f x = \sum_{i \in I} 2^{r_i} \zeta_f$ alle Komponenten $2^{r_i} \zeta_f$ maximal bis zur $(a_{n_1, f} - r_b)$ -ten Nachkommastelle Einsen stehen haben können, bevor zahlreiche Nullen (nämlich $a_{n_1+1, f} - a_{n_1, f}$ viele) vor weiteren Einsen stehen, die für die Größenordnung unerheblich sind wie in Vorbemerkung 1 festgehalten. Der Nachkommaanteil der entstehenden Zahl ist daher mindestens um $2^{-(a_{n_1, f} - r_b)}$ von einer ganzen Zahl entfernt nach *Eigenschaft 1b*, also

$$\left\| \sum_{i \in I} 2^{r_i} \zeta_f \right\| \geq 2^{-(a_{n_1, f} - r_b)}.$$

Bei der Summe über $i \in J$ erscheint wegen $r_i < a_{n_1, 1}$ für alle i in jedem r_i frühestens an der $(a_{n_1+1, k} - a_{n_1, 1})$ -ten Nachkommastelle eine Eins. Man kann also mittels geometrischer Summe abschätzen zu

$$\left\| \sum_{i \in J} 2^{r_i} \zeta_f \right\| \leq 2^{-(a_{n_1+1, k} - a_{n_1, 1} - 1)}.$$

Weil $a_{n_1+1, k} - a_{n_1, 1} - 1$ gemäß (1.73) viel größer ist als $a_{n_1, f} - r_b$ ergibt die Dreiecksungleichung

$$\|\zeta_f x\| = \left\| \sum_{i \in I \cup J} 2^{r_i} \zeta_f \right\| \geq 2^{-(a_{n_1, f} - r_b + 1)}.$$

Aus $a_{n_1, f} - r_b + 1 < a_{n_1, f} - a_{n_1, f+1} = b_g - b_{g-1}$ folgt (1.80).

Bemerkung: Man sieht, dass unter Vernachlässigung der Terme kleinerer Ordnung der Gleichheitsfall angenommen wird, wenn $f = 1$ und die Zahl x entweder von der Form $2^{a_{n-1, 2}}$ ist, was der Konstruktion aus $\omega_j \geq \eta_j$ entspricht ist, oder von der Form $2^{a_{n-1, 2}} + 2^{a_{n-1, 2}+1} + \dots + 2^{a_{n, 1}-1}$. Ist b_{h+1} in einer anderen Folge $a_{n_1, i}$ für ein $2 \leq i \leq k$, so kann man wegen der Monotonie der Intervalllängen $b_{j+1} - b_j$ in j die analoge Argumentation mittels der Intervalle $(a_{n_1-1, i}, a_{n_1-1, i-1}), \dots, (a_{n_1, i+1}, a_{n_1, i})$ führen. Die Annahme $b_{h+1} \in (a_{n, 1})_{n \geq 1}$ stellt also in der Tat in Fall 1 keine Einschränkung dar.

Fall 2: $r_b \leq a_{n_1-1, 1}$. In diesem Fall führen wir die Argumentation über ζ_k . Bildet man über alle Indizes i mit $r_i \leq a_{n_1, k}$ (beachte $a_{n_1, k}$ ist das auf $a_{n_1-1, 1}$ folgende b_i) die Summe der Terme $2^{r_i} \zeta_k$, so ist die entstehende Zahl mindestens um $2^{-a_{n_1, k}}$ von einer ganzen Zahl entfernt nach *Eigenschaft 1a*, wenn man wieder gemäß Vorbemerkung 1 entsprechend kleine Terme vernachlässigt. Bezeichnet man obige Indexmenge mit I erhält man also

$$\left\| \sum_{i \in I} 2^{r_i} \zeta_k \right\| \geq 2^{-a_{n_1, k}}.$$

Sei J die zu I komplementäre Indexmenge in der Entwicklung von x . Für die fehlenden Indizes in J mit $r_i > a_{n_1, k}$ hat aber jedes $2^{r_i} \zeta_k$ frühestens nach $b_{h+2} - b_{h+1}$ Stellen (was $a_{n_1+1, k} - a_{n_1, 1}$ entspricht) eine Eins in der Nachkommaentwicklung. Summation über diese i führt wieder mit der geometrischen Reihe auf die gleiche Größenordnung (Verschiebung um maximal 1 Stelle) und die nachfolgenden Einsen in den Entwicklungen sind wieder von viel kleinerer Ordnung und können nach Vorbemerkung 1 vernachlässigt werden. Man hat für die Summe der Indizes aus J also

$$\left\| \sum_{i \in J} 2^{r_i} \zeta_k \right\| \leq 2^{-(a_{n_1+1, k} - a_{n_1, 1} + 1)}.$$

Die Summe über alle Indizes ist nun also die Summe aus den Indizes in I also mit $r_i \leq a_{n_1-1, 1}$ und jener aus den Indizes in J also mit $r_i > a_{n_1-1, 1}$ und führt nach der Dreiecksungleichung und weil $b_{h+2} - b_{h+1} = a_{n_1+1, k} - a_{n_1, 1}$ nach (1.72), (1.73) (viel) größer als $a_{n_1, k}$ ist dazu, dass $x \zeta_k$

im wesentlichen mindestens Abstand $2^{-a_{n_1,k}}$ von einer ganzen Zahl haben muss (mit $2^{-a_{n_1,k}+1}$ sicher zutreffend). Es gilt also zusammengefasst

$$\|x\zeta_k\| = \left\| \sum_{i \in I \cup J} 2^{r_i} \zeta_k \right\| \geq 2^{-a_{n_1,k}+1}.$$

Der Exponent $a_{n_1,k} - 1$ ist aber gerade $b_{h+2-k} - 1$, was (1.81) zeigt. Dabei tritt der asymptotische Gleichheitsfall nur bei $\eta_2 = \eta_3 = \dots = \eta_{k+1} = \frac{1}{k}$ auf. Dieser Fall bildet dadurch gewissermaßen eine Ausnahme wie wir gleich sehen werden. Eine Verbesserung lässt sich demnach auch auf diese Weise in jedem Fall nicht erzielen.

Ist b_{h+1} in einer anderen Folge $a_{n_1,i}$ für ein $2 \leq i \leq k$ so läuft obige Argumentation analog über ζ_{i-1} und man benützt letztlich $a_{n_1-1,i-1} < a_{n_1,i} - a_{n_1,i+1}$, was wieder für n_1 hinreichend groß durch (1.72), (1.73) gerechtfertigt ist. Dabei kann der Gleichheitsfall nicht auftreten, es gilt nach (1.73) offenbar sogar stets $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n_1,i} - a_{n_1,i+1}}{a_{n_1-1,i-1}} = \infty$. Dies rechtfertigt die Annahme $b_{h+1} \in (a_{n_1})_{n \geq 1}$ auch in diesem Fall.

Gelte nun zusätzlich $x < 2^{b_{h+1}-b_{h+1-k}-1}$ (und weiterhin zunächst $b_{h+1} \in \{(a_{n_1})_{n \geq 1}\}$). Sei $I \neq \emptyset$ die Menge der Indizes i mit $r_i < a_{n-1,1} = b_{h+2-k}$. Man sieht analog zum Beweis von Schritt 1, dass $\|\sum_{i \in I} 2^{r_i} \zeta_1\| \geq 2^{-a_{n-1,1}}$. Wäre $b_h \leq r_1 < a_{n,1} - a_{n-1,1} - 1$, so folgte $0 \leq \sum_{i \notin I} 2^{r_i} \zeta_1 \leq 2^{a_{n-1,1}-1}$ und wegen der Dreiecksungleichung ist die Approximation wieder im wesentlichen nur von der Güte $a_{n-1,1}^{-1}$, also $\|\zeta_1 x\| \geq 2^{-a_{n-1,1}-1} - o(2^{-a_{n-1,1}-1})$. Dies zeigt also, dass $x < 2^{b_{h+1}-b_{h+1-k}-1}$ der Beziehung (1.82) für h hinreichend groß widerspricht.

Beweis Schritt 2: Angenommen die Behauptung wäre falsch für ein j . Schreibt man für $1 \leq i \leq j$ die $x^{(i)}$ in Basis 2 als

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= 2^{r_{1,(1)}} + 2^{r_{2,(1)}} + \dots + 2^{r_{g_1,(1)}} \\ x^{(2)} &= 2^{r_{1,(2)}} + 2^{r_{2,(2)}} + \dots + 2^{r_{g_2,(2)}} \\ &\vdots \\ x^{(j)} &= 2^{r_{1,(j)}} + 2^{r_{2,(j)}} + \dots + 2^{r_{g_j,(j)}}, \end{aligned}$$

sodass also $g_u \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Einsen von $x^{(u)}$ in der Entwicklung zur Basis 2 bezeichnet, so folgte, dass alle auftretenden $r_{z,(u)}$ die Beziehung

$$2^{b_{m+2-j}} \leq 2^{r_{z,(u)}} < 2^{b_{m+1}-2} \iff b_{m+2-j} \leq r_{z,(u)} \leq b_{m+1} - 2 \quad (1.85)$$

erfüllen (aus der nicht Erfüllbarkeit von (1.85) im Fall $j = 1$ erkennt man wieder, dass die Aussage für $j = 1$ trivial ist). Sei T maximal gewählt, sodass $b_T \leq r_{z,(u)}$ für alle auftretenden $r_{z,(u)}$. Dann besagt (1.85) gerade $m + 2 - j \leq T < m + 1$. Es handelt sich bei den Zahlen $b_T, b_{T+1}, \dots, b_m$ also um maximal $(j - 1)$ Stück. Es gibt also mindestens $d = k - (j - 1)$ Folgen $(a_{n,i_1})_{n \geq 1}, \dots, (a_{n,i_d})_{n \geq 1}$, aus denen keines der $b_T, b_{T+1}, \dots, b_m$ stammt. Nach der Schachtelung (1.72) besteht $I_d := \{i_1, i_2, \dots, i_d\}$ aus d modulo k aufeinanderfolgenden Zahlen. Wir können oBdA annehmen, diese Folgen seien $(a_{n,1})_{n \geq 1}, \dots, (a_{n,d})_{n \geq 1}$ (was $I_d = \{1, 2, \dots, d\}$ entspricht). Es haben also $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_d$ in der Nachkommaentwicklung in Basis 2 keine 1 an einer Stelle zwischen $\min_{\{z,u\}} r_{z,(u)}$ und $\max_{\{z,u\}} r_{z,(u)}$. Weiters können wir oBdA annehmen, dass b_T in $(a_{n,d+1})_{n \geq 1}$ sodass $\{b_{T+1}, \dots, b_m\}$ auch mit $(a_{n,d+1})_{n \geq 1}$ leeren Durchschnitt hat. Wir werden für die kommende Argumentation nur noch diese Folgen $(a_{n,s})_{n \geq 1}$ mit $1 \leq s \leq d + 1$ verwenden. Wenn (1.83), (1.84) eine Lösung haben soll, so muss offenbar für alle i, t entweder $\lfloor x^{(i)} \zeta_t \rfloor = y_t^{(i)}$ oder $\lceil x^{(i)} \zeta_t \rceil = y_t^{(i)}$ gelten. Allerdings muss noch mehr gelten. Darüber hinaus muss $y_s^{(i)} = \lfloor x^{(i)} \zeta_s \rfloor$ für alle $1 \leq s \leq d + 1$ gelten, und demzufolge:

$$\frac{x^{(a)}}{x^{(b)}} = \frac{\lfloor \zeta_s x^{(a)} \rfloor}{\lfloor \zeta_s x^{(b)} \rfloor} = \frac{y_s^{(a)}}{y_s^{(b)}}, \quad 1 \leq s \leq d+1, 1 \leq a, b \leq j. \quad (1.86)$$

Dies sieht man folgendermaßen: sei $S \in \{1, 2, \dots, d+1\}$ derjenige Index, sodass $b_{m+1} \in (a_{n,S})_{n \geq 1}$. Im Fall $j \neq S$ argumentieren wir wie folgt: Dadurch, dass alle $b_T < r_{z,(u)} < b_{m+1}$ sind, aber für die angegebenen $(d+1)$ Folgen $(a_{n,s})_{n \geq 1}$ für $1 \leq s \leq d+1$ keines der Elemente $b_{T+1}, \dots, b_m$ diesen Folgen liegt, steht die erste nichtverschwindende Nachkommastelle eines jeden $2^{r_{i,(u)}} \zeta_s$, $1 \leq u \leq j$ für beliebiges $1 \leq i \leq g_u$ frühestens an Stelle $b_{m+1} - b_m$ nach dem Komma. Damit ist bei festem u aber auch die Summe $x^{(u)} \zeta_s = \sum_{i=1}^{g_u} 2^{r_{i,(u)}} \zeta_s$ im wesentlichen durch das doppelte des Wertes $2^{-(b_{m+1}-b_m)}$ beschränkt (geometrische Reihe, wenn man alle weiteren Einsen, die an viel späteren Stellen stehen, gemäß *Eigenschaft 1* ignoriert), also sehr viel kleiner als 1, sicherlich $< \frac{1}{2}$. Um (1.84) zu erfüllen, muss damit für diese $1 \leq s \leq d+1$ stets abgerundet werden. Das war der erste Punkt der Behauptung. Die Tatsache, dass sich für diese $1 \leq s \leq d+1$ die Nachkommaanteile von $x^{(u)} \zeta_s$ für alle $1 \leq u \leq j$ zu einer Zahl < 1 aufaddieren, zeigt aber auch sofort (1.86). Denn da sich bei Multiplikation mit einem beliebigen $x^{(u)}$ nur Nullen vor das Komma schieben und es keinen Ziffernsturz gibt, folgt nämlich

$$\frac{\lfloor \zeta_s x^{(a)} \rfloor}{\lfloor \zeta_s x^{(b)} \rfloor} = \frac{x^{(a)} \lfloor \zeta_s \rfloor}{x^{(b)} \lfloor \zeta_s \rfloor}, \quad 1 \leq s \leq d+1,$$

also (1.86). Im ausständigen Fall $j = S$ bemerke, dass sich obiges Argument dennoch auf die Folge $(a_{n,S})_{n \geq 1}$ anwenden lässt, weil wegen der Forderung $X < 2^{b_{m+1}-2}$

$$\lceil x \zeta_S \rceil - x \zeta_S > \frac{1}{2},$$

es also keine gute Approximation von unten gemäß (1.84) existieren kann, bei der also der Nachkommaanteil von $\zeta_S x$ nahe an Eins liegen würde.

Dies zeigt weiter, dass in der Systemmatrix, in deren l -ter Zeile der l -te Approximationsvektor steht, also

$$B_n = \begin{pmatrix} x^{(1)} & \lfloor \zeta_1 x^{(1)} \rfloor & \lfloor \zeta_2 x^{(1)} \rfloor & \dots & \lfloor \zeta_d x^{(1)} \rfloor & \lfloor \zeta_{d+1} x^{(1)} \rfloor & \dots & \lfloor \zeta_k x^{(1)} \rfloor \\ x^{(2)} & \lfloor \zeta_1 x^{(2)} \rfloor & \lfloor \zeta_2 x^{(2)} \rfloor & \dots & \lfloor \zeta_d x^{(2)} \rfloor & \lfloor \zeta_{d+1} x^{(2)} \rfloor & \dots & \lfloor \zeta_k x^{(2)} \rfloor \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x^{(j)} & \lfloor \zeta_1 x^{(j)} \rfloor & \lfloor \zeta_2 x^{(j)} \rfloor & \dots & \lfloor \zeta_d x^{(j)} \rfloor & \lfloor \zeta_{d+1} x^{(j)} \rfloor & \dots & \lfloor \zeta_k x^{(j)} \rfloor \end{pmatrix}$$

wobei $\lfloor \cdot \rfloor$ für wahlweises entweder aufrunden oder abrunden steht, die ersten

$1 + (d+1) = k - j + 3$ Spalten zusammen Rang 1 haben, und der Gesamtrang der Matrix daher höchstens $1 + (k - (d+1)) = j - 1 < j$ ist. Dies zeigt Schritt 2.

Beweis Schritt 3: Wir zeigen, dass für festes j die Approximationskonstante $\omega_j(X)$ durch einen der Ausdrücke aus der Definition von $\wp_j(\eta)$ (abhängig von $\log_2(X)$) nach oben beschränkt ist. Dazu sei X beliebig vorgegeben und h der durch $2^{b_h} \leq X < 2^{b_{h+1}}$ festgelegte Index. Man kann oBdA annehmen, dass X sogar in einem Intervall der Form $[2^{b_h}, 2^{b_{h+1}-2})$ liegt, da es asymptotisch keinen Unterschied macht, ob man für $X = 2^{b_{h+1}-2}$ und einen beliebigen Approximationsvektor $\mathbf{x} := (x, y_1, \dots, y_k)$, $x \leq X$, den Logarithmus von $D_{\mathbf{x}} := \max_{1 \leq t \leq k} |\zeta_t x - y_t|$, zur Basis $X = 2^{b_{h+1}-2}$, was gerade $\omega_j(X)$ entspricht, oder zur Basis c_{h+1} betrachtet. Tatsächlich berechnet man

$$\log_{2^{b_{h+1}}}(D_{\mathbf{x}}) = \frac{\log(D_{\mathbf{x}})}{\log(2^{b_{h+1}})}, \quad \log_{2^{b_{h+1}-2}}(D_{\mathbf{x}}) = \frac{\log(D_{\mathbf{x}})}{\log(2^{b_{h+1}-2})}$$

und $\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\log(2^{b_{h+1}})}{\log(2^{b_{h+1}-2})} = \lim_{b_h \rightarrow \infty} \frac{\log(2^{b_{h+1}})}{\log(2^{b_{h+1}-2})} = \lim_{b_h \rightarrow \infty} \frac{b_{h+1}}{b_{h+1}-2} = 1$

sodass also insgesamt

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\log_{2^{b_{h+1}}}(D_{\mathbf{x}})}{\log_{2^{b_{h+1}-2}}(D_{\mathbf{x}})} = 1. \quad (1.87)$$

Für hinreichend großes h sind, weil man sich bei $\mathbf{x}$ auf Vektoren zu ω_j mit $j \geq 2$ (für $j = 1$ ist nichts zu zeigen) beschränken kann aber alle Ausdrücke $\log_{c_{h+1}}(D_{\mathbf{x}})$ durch $2\omega_2 \leq 2$ (siehe 1.48)) nach oben beschränkt. Zusammen mit (1.87) und da dies für alle X zutrifft, ergibt die Definition der Größen ω_j sofort, dass obige Änderung der Basis diese unverändert lässt.

Sei also $h = h(X)$ der durch $c_h \leq X < 2^{b_{h+1}-2}$ bestimmte Index. Nach Schritt 2 muss mindestens einer der j linear unabhängigen Approximationsvektoren $(x, y_1, y_2, \dots, y_k) \in \mathbb{Z}^{k+1}$ die Bedingung $b_{h-j+2} > r_b$ erfüllen, also $g \geq h + 2 - j$. Betrachte einen solchen Approximationsvektor. Sei g der größte Index bezeichnet, für den $b_{g-1} < r_b$, was $c_l < r_b$ für $l \leq g - 1$ und $c_l > r_b$ für $l \geq g$ bedeutet wegen (1.113). Speziell gilt $c_g > r_b$. Die Feststellung eben bedeutet gerade $g \geq h + 2 - j$. Sei weiter i der Index, für welchen $b_h = a_{N,i}$ in der Folge $(a_{n,i})_{n \geq 1}$ ist. Im folgenden werden wir wiederholt die Abschätzungen aus Schritt 1 unter Vernachlässigung der o -Terme in (1.80), (1.81), (1.82) verwenden, da diese offenbar keinen Effekt auf die folgenden asymptotischen Abschätzungen haben.

Zuerst behandeln wir den Fall $b_g \geq a_{N-1,i}$ (Fall 1 Schritt 1). Beachte zunächst, dass $-(b_m - b_{m-1})$ mit steigendem m monoton fallend ist. Deshalb folgt aus $g \leq h + 2 - j$ und (1.80)

$$\max_{1 \leq t \leq k} |x\zeta_t - y_t| \leq 2^{b_{h-j+1} - b_{h-j+2}} - o(2^{b_{h-j+1} - b_{h-j+2}}), \quad h \rightarrow \infty. \quad (1.88)$$

Zusammen mit $X \geq 2^{b_h}$ folgt

$$-\log_X \max_{1 \leq t \leq k} |x\zeta_t - y_t| \leq -\frac{(b_{h-j+1} - b_{h-j+2}) \log(2)}{b_h \log(2)} = -\frac{b_{h-j+1} - b_{h-j+2}}{b_h}.$$

Man sieht nun leicht mit (1.72)-(1.74), dass wenn h durch das Repräsentantensystem $\{1, 2, \dots, k\} \bmod k$ läuft die Ausdrücke auf der rechten Seite asymptotisch genau die Werte $\wp_j(\eta)$ oder Null liefern wenn $c. \rightarrow \infty$ bzw $X \rightarrow \infty$. Nach der Definition der Größen ω_j ist dieser Fall erledigt.

Im verbleibenden Fall $b_g < a_{N-1,i}$ (Fall 2 Schritt 1) folgt aus (1.81) und weil b_{h+1} in (1.81) dem Wert $a_{N,i}$ entspricht, dass $\max_{1 \leq t \leq k} |x\zeta_t - y_t|$ im wesentlichen nach unten durch $\frac{1}{2^{a_{N-1,i}+1}}$ beschränkt ist (wenn man die Terme geringer Ordnung vernachlässigt und i im Repräsentantensystem $\{1, 2, \dots, k\} \bmod k$ zu verstehen). Wir unterscheiden nun 3 Fälle.

Falls $i \notin \{k-1, k\}$, ist die Approximation relativ zur Basis X schlecht, denn in diesem Fall haben wir einerseits $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_{N-1,i+1}}{a_{N,i}} = 0$ wegen (1.73)-(1.74), und andererseits wieder mit $X \geq 2^{b_h} = 2^{a_{N,i}}$

$$-\log_X \max_{1 \leq t \leq k} |x\zeta_t - y_t| \leq -\log_{2^{b_h}} \max_{1 \leq t \leq k} |x\zeta_t - y_t| \leq \frac{a_{N-1,i+1}}{b_h} = \frac{a_{N-1,i+1}}{a_{N,i}}$$

was also gegen 0 strebt für $X \rightarrow \infty$, also wieder keine Verbesserung liefert.

Im Fall $i = k$, oder äquivalent $2^{a_{N,k}} \leq X < 2^{a_{N+1,1}}$, liefern $2^{b_g} < 2^{a_{N-1,i}} = 2^{a_{N-1,k}}$ zusammen mit (1.81) $\max_{1 \leq t \leq k} |x\zeta_t - y_t| \leq \frac{1}{2^{a_{N,1}}}$ und wegen $X \geq 2^{a_{N,k}}$

$$-\log_X \max_{1 \leq t \leq k} |x\zeta_t - y_t| \leq -\log_{2^{a_{N,k}}} \max_{1 \leq t \leq k} |x\zeta_t - y_t| \leq \frac{a_{N,1} \log(2)}{a_{N,k} \log(2)} = \frac{a_{N,1}}{a_{N,k}}$$

und wegen (1.73)-(1.74) gilt für $h \rightarrow \infty$ die Asymptotik

$$\frac{a_{N,1}}{a_{N,k}} \sim \frac{a_{N,1} - a_{N-1,k}}{a_{N,k}}.$$

Die rechte Seite konvergiert aber gegen $\eta_{k+1} = \wp_{k+1}(\eta)$ für $N \rightarrow \infty$ wegen (1.73)-(1.74). Daraus schließen wir in diesem Fall weiter $\omega_j \leq \wp_{k+1}(\eta)$ für $1 \leq j \leq k+1$ und weil auch $\wp_{k+1}(\eta) \leq \wp_j(\eta)$ für $1 \leq j \leq k+1$ gilt insgesamt $\omega_j \leq \wp_j(\eta)$ wie gefordert.

Wir unterteilen den übrig gebliebenen Fall $i = k-1$, also $2^{a_{N,k-1}} \leq X < 2^{a_{N,k}}$, in 2 Fälle. Falls $x < 2^{a_{N,k} - a_{N-1,k} - 1}$, ergibt (1.82) dass $\max_{1 \leq t \leq k} |x\zeta_t - y_t|$ im wesentlichen durch $2^{-a_{N-1,k-1}}$ nach unten beschränkt ist. Man folgert daraus die Asymptotik

$$-\log_X \max_{1 \leq t \leq k} |x\zeta_t - y_t| \leq \frac{(a_{N-1,k} - 1) \log(2)}{a_{N,k-1} \log(2)} = \frac{a_{N-1,k} - 1}{a_{N,k-1}},$$

was für $X \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert wegen (1.73)-(1.74).

Andernfalls $x \geq 2^{a_{N,k} - a_{N-1,k} - 1}$, woraus wegen (1.73)-(1.74) $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log_2(x)}{a_{N,k}} = 1$ folgt. Beachte $X \geq x$ und dass $X \rightarrow \infty$ äquivalent zu $N \rightarrow \infty$ ist. Kombination dieser Tatsachen und weil wieder wegen (1.81) $\max_{1 \leq t \leq k} |x\zeta_t - y_t|$ im wesentlichen durch $2^{-a_{N,1}}$ nach unten beschränkt ist liefern die Asymptotik

$$-\log_X \max_{1 \leq t \leq k} |x\zeta_t - y_t| \leq \frac{a_{N,1} \log(2) + o(a_{N,1} \log(2))}{a_{N,k} \log(2)(1 + \epsilon)}$$

was wieder für $\epsilon \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$ von der Form $\frac{a_{N,1}}{a_{N,k}} + o(\frac{a_{N,1}}{a_{N,k}})$ ist, was gegen $\eta_{k+1} = \wp_{k+1}(\eta)$ konvergiert wie im Fall $i = k$. Das zeigt Schritt 3. □

Bemerkungen: 1) Es gilt in jedem Fall $\omega_2 = \frac{\eta_{k+1}}{\eta_{k+1}} = 1$, denn alle anderen auftretenden Terme in $\wp_2(\eta)$ (sowie in allen anderen $\wp_j(\eta)$) sind offensichtlich durch 1 beschränkt. Tatsächlich stellt wegen (1.50) der Wert 1 ganz allgemein die obere Schranke für ω_2 dar.

2) Rechnet man gemäß (1.40) von $\wp_i(\eta)$ auf die $\underline{\psi}_i$ zurück, erhält man entsprechend Informationen über die Funktionen ψ_i .

3) Satz 1.12 hat den kleinen Schönheitsfehler, dass Fälle mit mindestens einem $\omega_j = 0$ oder gleichbedeutend $\underline{\psi}_j = \liminf_{q \rightarrow \infty} \psi_j(q) = \lim_{q \rightarrow \infty} \psi_j(q) = \frac{1}{k}$ nicht durch das Vorgehen im Beweis des Satzes konstruierbar sind. Möglicherweise lässt sich dies mit einer (1.75)-(1.78) ähnlichen Konstruktion erzielen, wenn man zulässt, dass manche η_i auch den Wert Null annehmen können. Es lässt sich der Beweis im wesentlichen übernehmen, wobei in $\wp_j(\eta)$ auftretende Quotienten der Form $\frac{0}{0}$ aber eine gesonderte Rolle spielen. Man kann das System (1.75)-(1.78) etwa verallgemeinern zu

$$\begin{aligned}
a_{n+1,k} &= n \cdot a_{n,1} \\
a_{n+1,k-1} &= 2n \cdot a_{n,1} \\
&\vdots \\
a_{n+1,l-1} &= (k-l)n \cdot a_{n,1} \\
a_{n+1,l-2} &= \left\lfloor \frac{1}{\eta_{l-1}} n^2 \cdot a_{n,1} \eta_{l-1} \right\rfloor \\
a_{n+1,l-3} &= \left\lfloor \frac{1}{\eta_{l-1}} n^2 \cdot a_{n,1} (\eta_{l-1} + \eta_{l-2}) \right\rfloor + 1 \\
&\vdots \\
a_{n+1,1} &= \left\lfloor \frac{1}{\eta_{l-1}} n^2 \cdot a_{n,1} (\eta_{l-1} + \eta_{l-2} + \dots + \eta_2) \right\rfloor + (l-3),
\end{aligned}$$

womit alle formalen Quotienten als Limes berechenbar sind. Darauf sei im weiteren aber nicht eingegangen.

4) Der Beweis zeigt, dass für die Folgen, die (1.75)-(1.78) erfüllen, in allen Approximationen, die eine wesentliche Verbesserung der ψ_j bewirken (also ein längeres Abfallen) bzw die sich auf die ω_j auswirken, die x -Werte der Approximationsvektoren aus $\mathbb{Z}^{k+1}$ von der Form $2^{b_n-2} < x < 2^{b_n}$ mit der aus den Einzelfolgen $(a_{n,j})_{n \geq 1}$ entstehenden gemischten Folge $(b_n)_{n \geq 1}$ sind.

5) Schritt 1 besagt gerade, dass für die angegebenen $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$, deren Basis 2 Entwicklungen (1.75)-(1.78) erfüllen, in Korollar 1.2 sogar Gleichheit gilt. Das Supremum über s wird als Maximum bei $s = 2$ angenommen.

6) Man kann für jede andere Basis als $s = 2$ im Prinzip analog verfahren, der Beweis bleibt essenziell der selbe. In Satz 1.15 werden wir sogar eine noch größere Klasse an Zahlen $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ betrachten und Satz 1.12 somit noch weiter verallgemeinern.

7) Da $\omega_{k+1} > 0$ oder wegen (1.40) gleichbedeutend $\underline{\psi}_{k+1} < \frac{1}{k}$ sind gemäß Bemerkung 2 zu Satz 1.10 alle $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ die den Voraussetzungen des Satzes genügen zusammen mit 1 linear unabhängig über $\mathbb{Q}$. Das Variationsprinzip, das die schwächere Aussage der Existenz von gewissen zusammen mit 1 linear unabhängigen Zahlen geliefert hat, ist also entbehrlich.

Wir kehren nochmals zur Situation des Satzes und (1.75)-(1.78) zurück. Nun wollen wir noch Aussagen über die Werte $\hat{\omega}_j$ für $1 \leq j \leq k+1$ treffen. Die Fälle $j \neq 1$ sind in unserem speziellen Fall mit $\eta_1 = \infty$ dabei ganz einfach abzuhandeln, wobei nur sehr wenig von der Konstruktion eingeht. Dies ist in folgender Proposition festgehalten.

Proposition 1.3. Seien für die Basis 2 Entwicklungen von zu $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ gehörigen Folgen $(a_{n,1})_{n \geq 1}, (a_{n,2})_{n \geq 1}, \dots, (a_{n,k})_{n \geq 1}$ die Bedingungen (1.75)-(1.78) erfüllt. Dann gilt $\hat{\omega}_j = 0$ für $j = 2, 3, \dots, k+1$.

Beweis: Wir haben im Beweis des Satzes aus (1.75)-(1.78) die Beziehung $\omega = \infty$ gefolgert. Daraus folgt mit (1.40) unmittelbar $\underline{\psi}_1 = -1$. Wegen (1.17) und der oberen Abschätzung der ψ_j durch $\frac{1}{k}$ für $2 \leq j \leq k+1$ aus (1.10) muss offenbar $\overline{\psi}_j = \frac{1}{k}$ für $j = 2, 3, \dots, k+1$ gelten. Andernfalls würde nämlich $\overline{\psi}_2 \leq \frac{1}{k} - \epsilon$ gelten. Insbesondere gilt dann für alle hinreichend großen q die Beziehung $\psi_2(q) \leq \frac{1}{k} - \epsilon + \frac{\epsilon}{3}$, was an genügend großen Stellen q mit $\psi_1(q) < -1 + \frac{\epsilon}{3}$ wegen $\sum_{j=1}^{k+1} \psi_j(q) = \psi_1(q) + \psi_2(q) + \sum_{j=3}^{k+1} \psi_j(q) \leq (-1 + \frac{\epsilon}{3}) + (\frac{1}{k} - \epsilon + \frac{\epsilon}{3}) + (k-1)\frac{1}{k} < -\frac{\epsilon}{3}$ einen Widerspruch zur Beschränktheit (1.17) ergäbe. Abermals (1.40) liefert das Gewünschte. $\square$

Es bleibt $\hat{\omega}$ für $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ aus Satz 1.12 zu ermitteln.

Lemma 1.5. Seien $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ wie in Proposition 1.3 und die Voraussetzungen von Satz 1.12 erfüllt. Dann gilt:

$$\widehat{\omega} = \min \left\{ \frac{\eta_{k+1}}{\eta_{k+1}}, \frac{\eta_k}{\eta_{k+1} + \eta_k}, \frac{\eta_{k-1}}{\eta_{k+1} + \eta_k + \eta_{k-1}}, \dots, \frac{\eta_2}{\eta_{k+1} + \eta_k + \dots + \eta_2} \right\} =: \widehat{\wp}(\eta) \quad (1.89)$$

Beweis: Wir zeigen zunächst $\widehat{\omega} \geq \widehat{\wp}(\eta)$. Dazu bemühen wir Proposition 1.2, wobei wie üblich die duale Darstellung außer Acht gelassen wird. Die rechte Seite von (1.60) mit $s = 2$ statt dem Supremum stimmt unter Benutzung von (1.69), (1.70), (1.71) aber genau mit der rechten Seite von (1.89) überein, da die η_j genau die in (1.60) auftretenden Zähler darstellen und die Partialsummen der Nenner in (1.89) die Nenner von (1.60), wobei bei zweitem entscheidend (1.73) eingeht. Man verwendet dabei genauer die geltende Asyptotik

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1,1} - a_{n,1}}{a_{n,1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1,1}}{a_{n,1}} (= \infty).$$

Für die andere Ungleichung sei mit der Notation von Satz 1.12 X eine reelle Zahl der Form $X = 2^{b_{h+1}-2} - 1$, insbesondere gilt dann also $2^{b_h} \leq X < 2^{b_{h+1}}$. Sei weiter wieder i der Index sodass $b_h = q_{N,i}$ in der Folge $(q_{n,i})_{n \geq 1}$ ist. Setzt man $j = 1$ in (1.88) und bemerkt

$$X = 2^{b_{h+1}} - 2 - 1 \geq \frac{2^{b_{h+1}}}{5}, \text{ ergibt sich im Falle } g \geq h + 2 - k$$

$$-\log_X \max_{1 \leq t \leq k} |x\zeta_t - y_t| \leq -\log_{\frac{2^{b_{h+1}}}{5}} \max_{1 \leq t \leq k} |x\zeta_t - y_t| \leq \frac{b_{h+1} - b_h}{b_{h+1} - \log_2(5)}. \quad (1.90)$$

Man erkennt leicht, dass die rechte Seite genau die Ausdrücke von $\widehat{\wp}(\eta)$ durchläuft wenn h das Repräsentantensystem $\{1, 2, \dots, k\} \bmod k$ durchläuft und $h \rightarrow \infty$. Genauer liefert

$$\bar{h} \mapsto \lim_{h \in \bar{h}, h \rightarrow \infty} \frac{b_{h+1} - b_h}{b_{h+1} - \log_2(5)}$$

eine Bijektion zwischen dem Repräsentantensystem $\{1, 2, \dots, k\} \bmod k$ und den Ausdrücken in $\widehat{\wp}$.

Im anderen Fall $g \leq h + 1 - k$ ist $\max_{1 \leq t \leq k} |x\zeta_t - y_t|$ im wesentlichen nach unten durch $\frac{1}{2^{a_{N-1,i+1}}}$ beschränkt, was auf

$$-\log_X \max_{1 \leq t \leq k} |x\zeta_t - y_t| \leq -\log_{\frac{2^{b_{h+1}}}{5}} \max_{1 \leq t \leq k} |x\zeta_t - y_t| \leq \frac{a_{N,h}}{a_{N+1,h+1} - \log_2(5)}.$$

führt. Die rechte Seite ist aber für alle h kleiner als (1.90) für selbiges h , also erzielt der Fall $g \leq h + 1 - k$ niemals eine Verbesserung.

Insgesamt kann $\widehat{\omega}$ durch jeden der Ausdrücke von $\widehat{\wp}(\eta)$ nach oben abgeschätzt werden, also durch $\widehat{\wp}(\eta)$. $\square$

Bemerkungen: 1) Man erkennt, dass in (1.89) und $\wp_2(\eta)$ die selben Ausdrücke stehen, wobei im Fall $\widehat{\omega}$ das Minimum und im Fall $\omega_2 = \wp_2(\eta)$ das Maximum gebildet wird, was mit $\widehat{\omega} \leq \omega_2$ in Einklang steht. Zurückrechnen mit (1.40) auf die Funktionen ψ_j bestätigt die stets geltende Beziehung $\underline{\psi}_1 \geq \underline{\psi}_2$ gemäß (1.18) in unserem speziellen Fall.

2) Im Spezialfall $k = 2$ berechnen sich mittels Satz 1.12, Proposition 1.3 und Lemma 1.5 die Approximationskonstanten einfach zu

$$\begin{aligned} \omega &= \infty, & \omega_2 &= 1, & \omega_3 &= \eta_3 \\ \widehat{\omega} &= \eta_2, & \widehat{\omega}_2 &= 0, & \widehat{\omega}_3 &= 0. \end{aligned}$$

In diesem Fall lässt sich Jarniks Identität einfach verifizieren. Diese ist nach Theorem 1.5 in [14] äquivalent zu $\overline{\psi}_1 + 2\overline{\psi}_1\underline{\psi}_3 + \underline{\psi}_3 = 0$. Rechnet man mittels (1.40) die ψ -Werte in ω -Werte

um, erkennt man, dass dies wiederum zu $\widehat{\omega} + \omega_3 = 1$ äquivalent ist. In unserem Fall ist aber $\widehat{\omega} + \omega_3 = \eta_2 + \eta_3 = 1$ wegen Bedingung (1.71).

Wir wollen nun Satz 1.12 noch für den Fall $k = 2$ in einer Form verallgemeinern, in der er vielfältigere Konstruktionen erlaubt. Wir haben in Bemerkung 1 zu Satz 1.12 gesehen, dass die Konstruktionen aus Satz 1.12 stets $\omega_2 = 1$ liefern. Andererseits zeigt Bemerkung 2 zu Lemma 1.5 (die Einschränkungen für das Verhalten der extremalen Werte $\widehat{\omega}, \omega_3$ aufzeigt die auf der Jarnik-Identität basieren) kombiniert mit der Tatsache, dass η_2, η_3 unter der Randbedingung (1.71) frei wählbar sind, dass im Fall $k = 2$ sonst jede mögliche Konstellation der Werte $\omega_j, \widehat{\omega}_j$ durch eine Konstruktion gemäß Satz 1.12 erreicht werden kann.

Wir zielen nun also darauf ab, noch weitere Freiheiten für den Wert ω_2 zu erhalten. Dazu drehen wir die Größenordnungen von η_2 und η_3 um und vollziehen sinngemäß noch einmal den Beweis von Satz 1.12 unter dieser Adaption nach. Der Beweis sei aufgrund der Ähnlichkeit zum Beweis von Satz 1.12 nur skizziert.

Lemma 1.6. Sei $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \overline{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^2$ unter den Bedingungen (1.69), (1.71) und

$$\eta_2 < \eta_3$$

gegeben. Seien weiter Folgen $(a_{n,i})_{n \geq 1}$ gegeben, die (1.72)-(1.74) erfüllen. Dann bestimmen diese Folgen ζ_1, ζ_2 , sodass $\{1, \zeta_1, \zeta_2\}$ eine $\mathbb{Q}$ -linear unabhängige Menge ist, und deren zugeordnete Approximationskonstanten durch

$$\begin{aligned} \omega &= \eta_1 = \infty, & \widehat{\omega} &= \eta_3 \\ \omega_2 &= \max \left\{ \eta_3, \frac{\eta_2}{\eta_3} \right\}, & \widehat{\omega}_2 &= 0 \\ \omega_3 &= \eta_2, & \widehat{\omega}_3 &= 0. \end{aligned}$$

gegeben sind.

Beweis:[Skizze] Proposition 1.3 lässt sich hier klarerweise sinngemäß anwenden und liefert die Werte $\widehat{\omega}_2, \widehat{\omega}_3$. Nennt man die rechten Seiten wieder $\wp_j$ bzw $\widehat{\wp}$, so sieht man genauso wie im Beweis von Satz 1.12 die Ungleichungen $\omega_j \geq \wp_j$ bzw wie im Beweis von Lemma 1.5 $\widehat{\omega} \geq \widehat{\wp}$. Schritt 1 und Schritt 2 vom Beweis der Rückrichtung lässt sich ebenfalls aus Satz 1.12 übernehmen. Nun muss man nur noch die richtigen Intervalllängen zueinander in Beziehung setzen wie dies in Schritt 3 passiert ist. Dies sei nur skizziert, der Beweis ist de facto der selbe wie früher.

Ist ein Approximationsvektor mit einem x -Wert von der Form $x \in [2^{a_{n,1}}, 2^{a_{n,2}})$ gegeben, so ist das größte Intervall, das sich mit einem Approximationsvektor mit einem nicht größeren x erzielen lässt, offenbar von der Länge $a_{n,2} - a_{n,1}$, was sofort $\omega = \infty$ liefert, und das zweitbeste (von dazu linear unabhängigen Approximationsvektor induzierte) ist durch die Wahl $x = 2^{a_{n-1,2}}$ gegeben und von der Länge $a_{n,1} - a_{n-1,2}$. Der Quotient

$$\frac{a_{n,1} - a_{n-1,2}}{a_{n,1}}$$

liefert asymptotisch den Wert η_3 .

Ist andernfalls $x \in [2^{a_{n,2}}, 2^{a_{n+1,1}})$, so ist das größte Intervall gegeben durch die Wahl $x = 2^{a_{n,1}}$ und von der Länge $a_{n,2} - a_{n,1}$, wogegen das zweitgrößte durch $x = 2^{a_{n,2}}$ gegeben ist und von der Länge $a_{n+1,1} - a_{n,2}$ ist. Dies liefert asymptotisch also den Wert $\frac{\eta_2}{\eta_3}$. Der größere der beiden Werte bestimmt somit ω_2 .

Analog verfährt man, um asymptotisch die Approximationskonstanten zu

$$\omega_3 = \max \left\{ \frac{0}{\eta_3}, \frac{\eta_2}{\eta_2 + \eta_3} \right\} = \eta_2,$$

sowie

$$\widehat{\omega} = \min \left\{ \frac{\eta_3}{\eta_2 + \eta_3}, \frac{\eta_3}{\eta_3} \right\} = \eta_3$$

zu bestimmen.

□

Man erhält also im Falle, dass alle anderen Approximationskonstanten vorgegeben sind, die explizite Konstruktion eines Vektors $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ mit einem zweiten Wert für ω_2 neben 1 wie in Satz 1.12. Insbesondere ist damit zumindest im Falle $k = 2$ durch die Kenntnis von $(2k + 1)$ Approximationskonstanten von $\Omega \in \mathbb{R}^{2k+2}$ aus (1.53) die letzte in der Regel noch nicht bestimmt.

Bemerkungen: 1) Beachte, dass in Lemma 1.6 $\widehat{\omega} = \omega_2$ genau dann gilt, wenn $\eta_3 \geq \frac{\eta_2}{\eta_3}$. Dies ist wegen (1.71) wiederum gleichbedeutend mit $\eta_3 \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

2) Man kann die Bedingung (1.70) auch im Falle $k \geq 3$ durch eine beliebige Ordnung der η_i ersetzen und erhält andere Beschreibung der ω_j respektive $\widehat{\omega}$ durch Maximaausdrücke respektive einen Minimumausdruck in den η_i . Die entstehenden Ausdrücke sind jedoch schwer überschaubar und für unsere Zwecke wenig relevant und wir gehen daher nicht weiter darauf ein.

3) Im Fall $\eta_2 = \eta_3 = \frac{1}{2}$ geht Lemma 1.6 in Satz 1.12 bzw genauer in Korollar 1.3 des nachfolgenden Abschnitts 1.2.3 über.

1.2.3 Konstruktion des Falles in dem alle $\psi_j(Q)$ simultan ihr maximales Wertespektrum ausfüllen

Nun haben wir also im Kontext von Satz 1.12 alle Größen $\omega_j, \widehat{\omega}_j$ in Abhängigkeit der η_i bestimmt. Dabei wirkt die Darstellung als Maximum bzw Minimum auf den ersten Blick noch etwas ineffektiv, dennoch ermöglicht sie einige interessante Konstruktionen: als erste Anwendung werden $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ konstruiert, deren zugehörige Funktionen ψ_j alle simultan auf jedem Intervall (q_0, ∞) ihr mögliches Wertespektrum ausschöpfen, welches durch Gleichheit in den Ungleichungen (1.34), (1.35) sowie $\widehat{\omega}_{k+1} = 0$ gegeben ist. Dass alle extremalen Werte gleichzeitig angenommen werden können, wird nun gezeigt. Insbesondere wird simultan die maximale Differenz von $\overline{\psi}_j - \underline{\psi}_j$ angenommen, salopp formuliert scheren also die Graphen der Funktionen $L_j(q)$ weitestmöglich aus. Der Wert von $\overline{\psi}_j - \underline{\psi}_j$ ist gegeben durch 1 für $j = 1$ und durch $\frac{1}{k} - \frac{j-k-1}{kj} = \frac{k+1}{jk}$ für $2 \leq j \leq k+1$.

Korollar 1.3. Es existieren $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$, sodass $\{1, \zeta_1, \dots, \zeta_k\}$ eine $\mathbb{Q}$ -linear unabhängige Menge ist und deren Approximationskonstanten $\underline{\psi}_j, \overline{\psi}_j$ durch

$$\begin{aligned} \underline{\psi}_j &= \frac{j-k-1}{jk}, & 1 \leq j \leq k+1 \\ \overline{\psi}_1 &= 0 \\ \overline{\psi}_j &= \frac{1}{k}, & 2 \leq j \leq k+1 \end{aligned}$$

gegeben sind.

Beweis: Wir verwenden die $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$, die sich aus der Konstruktion aus Satz 1.12 mit der speziellen Wahl

$$\eta_2 = \eta_3 = \dots = \eta_{k+1} = \frac{1}{k}$$

ergeben. Selbiger Satz ergibt für $1 \leq j \leq k+1$ unmittelbar $\omega_j = \frac{1}{j-1}$, wenn man im Fall $j = 1$ formal $\frac{1}{0} = \infty$ setzt. Mit (1.40) ergibt dies die geforderten Ungleichungen für die Werte $\underline{\psi}_j$. Mit Lemma 1.5 überzeugt man sich im Falle der Gleichheit aller η_i weiter leicht von $\widehat{\omega} = \frac{1}{k}$ und Proposition 1.3 liefert schließlich $\widehat{\omega}_j = 0$ für $2 \leq j \leq k+1$. Umrechnen mittels (1.40) ergibt die Aussagen des Korollars bezüglich der Werte $\overline{\psi}_j$. (Anmerkung: in umgekehrter Richtung haben wir die Abschätzungen (1.47)-(1.51) früher aus (1.9),(1.34),(1.35) abgeleitet.) $\square$

Bemerkungen: 1) Die Ungleichungen $\omega_j \leq \frac{1}{j-1}$ und in Folge $\underline{\psi}_j \geq \frac{j-k-1}{jk}$ kann man für Konstruktionen aus Satz 1.12 auch sofort anhand der $\wp_j$ ablesen, indem man für ein festes j jeden in $\wp_j(\eta)$ vorkommenden Ausdruck mittels (1.70) abschätzt durch

$$\frac{\eta_i}{\eta_{i-j+2} + \eta_{i-j+3} + \dots + \eta_{k+1}} \leq \frac{\eta_i}{\eta_i + \eta_i + \dots + \eta_i + \eta_{i+1} + \dots + \eta_{k+1}} \leq \frac{\eta_i}{(j-1)\eta_i} = \frac{1}{j-1}.$$

2) Wir werden später in Satz 3.1 bzw Korollar 3.1 sehen, dass für gewisse speziellen Liouvillezahlen ζ simultan für alle $k \in \mathbb{N}$ die ersten k Potenzen, also $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k) = (\zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^k)$, Korollar 1.3 erfüllen.

1.2.4 Eine konstruktive Verallgemeinerung des Spezialfalls $i = 1$ der bewiesenen Vermutung von W.M. Schmidt

Es soll nun als einfaches Korollar zu Satz 1.12 auf konstruktivem Weg ein Spezialfall des Resultats Theorem 1 auf Seite 2 in [9] von Moshchevitin zunächst nachvollzogen und anschließend verallgemeinert werden. Dieses besagt in der Originalformulierung, dass es zu festem k und $1 \leq h \leq k-1$ stets $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ gibt, sodass $\{1, \zeta_1, \dots, \zeta_k\}$ $\mathbb{Q}$ -linear unabhängig sind, deren h -tes sukzessives Minimum gegen 0 und deren $(h+2)$ -tes sukzessives Minimum gegen ∞ konvergiert. In der Sprache der Funktionen ψ_j , die ja im wesentlichen die Logarithmen der sukzessiven Minima darstellen, übersetzt sich diese Aussage in leicht verschärfter Form im Fall $h = 1$ in:

Korollar 1.4. Sei $k \geq 2$ beliebig. Dann existieren $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$, sodass die Menge $\{1, \zeta_1, \dots, \zeta_k\}$ $\mathbb{Q}$ -linear unabhängig ist und deren Approximationsfunktionen ψ_j

$$\overline{\psi}_1 < 0 \quad \text{und} \quad \underline{\psi}_3 > 0$$

erfüllen.

Beweis: Nach (1.40) ist die Aussage äquivalent zu $\widehat{\omega} > \frac{1}{k}$ und $\omega_3 = \wp_3(\eta) < \frac{1}{k}$. Um dies zu konstruieren setzen wir

$$\frac{\eta_{j+1}}{\eta_j} = \alpha, \quad 2 \leq j \leq k,$$

für zunächst beliebiges $0 < \alpha \leq 1$. Damit ist Bedingung (1.70) erfüllt. Um die Randbedingung (1.71) zu gewährleisten, setze zudem $\eta_{k+1} := \frac{\alpha^{k-1}}{1+\alpha+\dots+\alpha^{k-1}}$. Die übrigen η_i sind dann durch obige Bedingung bestimmt. Es berechnet sich mit dieser Wahl $\omega_3 = \wp_3(\eta)$ zu

$$\begin{aligned} \omega_3 &= \max \left\{ \frac{\alpha}{1+\alpha+\dots+\alpha^{k-1}}, \frac{\alpha}{1+\alpha+\dots+\alpha^{k-2}}, \dots, \frac{\alpha}{1+\alpha} \right\} = \frac{\alpha}{1+\alpha} < \alpha \\ \widehat{\omega} &= \min \left\{ 1, \frac{1}{1+\alpha}, \dots, \frac{1}{1+\alpha+\dots+\alpha^{k-1}} \right\} = \frac{1-\alpha}{1-\alpha^k} > 1-\alpha. \end{aligned}$$

Jedes $0 < \alpha < \frac{1}{k}$ liefert wegen $1-\alpha > 1-\frac{1}{k} \geq \frac{1}{k}$ für $k \geq 2$ Zahlen $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$, die den Anforderungen der Korollars genügen. $\square$

Bemerkungen: 1) Die im Vorfeld erwähnte Verschärfung besteht darin, dass aus $\lim_{q \rightarrow \infty} \lambda_h(q) = \infty$ respektive $\lim_{q \rightarrow \infty} \lambda_{h+2}(Q) = 0$ noch nicht zwingend die *strikte* Ungleichung $\overline{\psi}_h < 0$ respektive $\underline{\psi}_{h+2} > 0$ folgt. Denn falls $\lambda_h(Q)$ respektive $\lambda_{h+2}(Q)$ schwächer als jede positive respektive negative Q -Potenz Q^f gegen unendlich respektive 0 konvergiert, gelten für die Funktionen L_h respektive L_{h+2} die Beziehungen $\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{L_h(q)}{q} = \lim_{Q \rightarrow \infty} \psi_h(Q) = 0$ respektive $\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{L_{h+2}(q)}{q} = \lim_{Q \rightarrow \infty} \psi_{h+2}(Q) = 0$ und damit insbesondere $\overline{\psi}_h = 0$ respektive $\underline{\psi}_{h+2} = 0$. Vergleiche auch die Bemerkungen über die Funktionen $\psi_j(Q), L_j(q)$ in der Einleitung.

2) Lässt man im Beweis $\alpha \rightarrow 0$ streben, so folgt $\omega_3 \rightarrow 0$ und $\widehat{\omega} \rightarrow 1$ und folglich kann man den extremalen Werten $\overline{\psi}_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2k}$ und $\underline{\psi}_3 = \frac{1}{k}$ ($= \lim_{Q \rightarrow \infty} \psi_3(Q)$ in diesem Fall) beliebig nahe kommen, siehe auch (1.35). In Satz 2.3 werden wir sehen, dass auch der Fall der extremen Werte selbst konstruierbar ist.

Man kann ähnlich wie im Beweis von Korollar 1.4 durch passende Wahl von α erreichen, dass für vorgegebenes $3 \leq r \leq k+1$ genau die Funktionen $\psi_r, \psi_{r+1}, \dots, \psi_{k+1}$ die Bedingung $\underline{\psi} > 0$ erfüllen, während $\psi_2, \psi_3, \dots, \psi_{r-1}$ beide Vorzeichen für beliebig große Q (unendlich oft) annehmen und $\overline{\psi}_1 < 0$ gilt. Dies ist die eingangs erwähnte Verallgemeinerung und Inhalt des folgenden Korollars zu Satz 1.12.

Korollar 1.5. Sei $k \geq 2$ beliebig. Dann existieren $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$, sodass die Menge $\{1, \zeta_1, \dots, \zeta_k\}$ $\mathbb{Q}$ -linear unabhängig ist und sodass die zugehörigen Approximationsfunktionen ψ_j

$$\begin{aligned} \overline{\psi}_1 &< 0 \\ \underline{\psi}_i &< 0 < \overline{\psi}_i, \quad 2 \leq i \leq r-1 \\ \underline{\psi}_r &> 0. \end{aligned}$$

erfüllen.

Beweis: Um dies einzusehen sei oBdA $k \geq 3$. Denn im Fall $k = 2$ besteht die Aussage nur aus dem Fall $\overline{\psi}_1 < 0$ und $\underline{\psi}_3 > 0$, dessen Konstruierbarkeit schon in Korollar 1.4 abgehandelt ist. Man muss dazu lediglich die Größe α , definiert wie im Beweis von Korollar 1.4, so wählen, dass

$$\frac{\alpha^{r-2}}{1 + \alpha + \dots + \alpha^{r-2}} < \frac{1}{k} < \frac{\alpha^{r-3}}{1 + \alpha + \dots + \alpha^{r-3}}. \quad (1.91)$$

Die Bedingung $\widehat{\omega} > \frac{1}{k}$ und damit $\overline{\psi}_1 < 0$ ist für $\alpha < 1$ stets erfüllt. Die linke Seite von (1.91) stimmt aber genau mit $\wp_r(\eta)$ überein, wie man sich ähnlich wie im Fall $r = 3$ überzeugt. Umrechnen mittels (1.40) liefert also $\underline{\psi}_i < 0$ für $1 \leq i \leq r-1$ und $\underline{\psi}_i > 0$ für $r \leq i \leq k+1$. Zweiteres ist die gewünschte Aussage über ψ_1 bis ψ_{r-1} und ersteres impliziert wegen $\overline{\psi}_j = \frac{1}{k} > 0$ für $2 \leq j \leq k+1$, dass von $\psi_2(Q)$ bis $\psi_{r-1}(Q)$ beide Vorzeichen jeweils für beliebig große Q angenommen werden.

Zum Abschluss müssen wir noch zeigen, dass (1.91) für alle $3 \leq r \leq k+1$ eine Lösung $\alpha \in (0, 1)$ besitzt. Definiere dazu die durch $u = 0, 1, \dots, k-2$ parametrisierten Funktionen

$$\Phi_u : \quad \alpha \mapsto \frac{\alpha^u}{1 + \alpha + \dots + \alpha^u}$$

Damit ist (1.91) gleichwertig mit der Lösbarkeit von $\Phi_{u+1}(\alpha) < \frac{1}{k} < \Phi_u(\alpha)$ für jedes $0 \leq u \leq k-2$. Der Fall $u = 0$ bzw $r = 3$ ist Inhalt von Korollar 1.3, sei also ab jetzt $u \geq 1$. Einfach nachzuprüfende Eigenschaften der Funktionen Φ_u sind: Φ_u sind stetig, $\Phi_u(\alpha) > \Phi_{u+1}(\alpha)$ für alle $0 < \alpha \leq 1, 1 \leq u \leq k-1$ sowie $\Phi_u(0) = 0, \Phi_u(1) = \frac{1}{u+1} > \frac{1}{k}$ für alle $1 \leq u \leq k-2$. Durch Differenzieren erhält man weiter

$$\begin{aligned}
\Phi'_u(\alpha) &= \frac{u\alpha^{u-1}(1 + \alpha + \cdots + \alpha^u) - \alpha^u(1 + 2\alpha + \cdots + u\alpha^{u-1})}{(1 + \alpha + \cdots + \alpha^u)^2} \\
&= \frac{\alpha^{2u-2} + 2\alpha^{2u-3} + \cdots + (u-1)\alpha^u + u\alpha^{u-1}}{(1 + \alpha + \cdots + \alpha^u)^2} > 0
\end{aligned}$$

also sind die Funktionen Φ_u streng monoton steigend im Argument α . Der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen liefert für festes $1 \leq u \leq k-2$ eine Stelle t mit $\Phi_u(t) = \frac{1}{k}$. Nach obigen Feststellungen gilt einerseits $\Phi_u(\alpha) > \frac{1}{k}$ für alle $\alpha > t$ und andererseits $\Phi_{u+1}(\alpha) < \frac{1}{k}$ in einer Umgebung $\alpha \in (t_0, t_1)$ mit $t_0 < t < t_1$ von t . Indem man t_1 gegebenenfalls verkleinert, ergibt jede Wahl von $\alpha \in (t, t_1)$ die gewünschte Ungleichungskette $\Phi_{u+1}(\alpha) < \frac{1}{k} < \Phi_u(\alpha)$. $\square$

Wir wollen die abschließend noch auf die sukzessiven Minima $\lambda_i(Q)$ rückübersetzen. Beachte, dass durch Korollar 1.5 im Fall $\omega = \infty$ in einem gewissen Sinn für fast alle simultanen möglichen asymptotischen Verhaltensweisen der sukzessiven Minimafunktionen $\lambda_i(Q)$ explizite Konstruktionen gegeben sind. Denn wie schon öfter verwendet folgt aus $\omega = \infty$ sofort $\bar{\psi}_j = \frac{1}{k} > 0$ und damit $\lim_{Q \rightarrow \infty} \lambda_j(Q) = \infty$ für alle $j \geq 2$. Betrachtet man für jedes $1 \leq i \leq k+1$ die asymptotischen Fälle

- $\liminf_{Q \rightarrow \infty} \lambda_i(Q) = 0 = \limsup_{Q \rightarrow \infty} \lambda_i(Q)$
- $\liminf_{Q \rightarrow \infty} \lambda_i(Q) = 0, \limsup_{Q \rightarrow \infty} \lambda_i(Q) = \infty$
- $\liminf_{Q \rightarrow \infty} \lambda_i(Q) = \infty = \limsup_{Q \rightarrow \infty} \lambda_i(Q)$

so sind alle möglichen Konstellationen in Korollar 1.5 explizit konstruiert. Lediglich im Falle eines (oder mehrerer) $\liminf_{Q \rightarrow \infty} \lambda_i(Q) \notin \{0, \infty\}$ oder $\limsup_{Q \rightarrow \infty} \lambda_i(Q) \notin \{0, \infty\}$ ist die Konstruktion nicht gesichert. Eine genauere Analyse des Beweises von Satz 1.12 könnte sich hierbei bei solchen Konstruktionen als nützlich erweisen, wir gehen aber nicht weiter darauf ein.

1.2.5 Der Fall $\omega < \infty$: Höhere sukzessive Minima für schwache Liouvillezahlen

Wir haben im vorangehenden Abschnitt explizit Liouvillezahlen $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ konstruiert, deren zugehörige Approximationsfunktionen $\psi_j, 1 \leq j \leq k+1$ einem vorgegebenen asymptotischen Verhalten folgen. Dabei erfüllte stets auch die *simultane* Approximationskonstante ω die Beziehung $\omega = \infty$, was äquivalent zu $\underline{\psi}_1 = -1$ ist.

Nun wollen wir ähnliche Resultate für schwache Liouvillezahlen- was also insbesondere $\omega < \infty$ für die *simultane* Approximationskonstante ω nach sich zieht- herleiten. Dazu zeigen wir nun einen Satz 1.12 sehr ähnlichen Satz mit ähnlichen Beweisideen, der hauptsächlich zur Beschreibung der simultanen Approximation spezieller schwacher Liouvillezahlen dient. Wir werden jedoch in Satz 2.3 den Fall $C = \infty$ von Korollar 1.7 aufgreifen, der sich wieder mit speziellen Liouvillezahlen befasst.

In Worten formuliert war eine Annahme von Satz 1.12, dass in der dortigen Notation die Lücke immer zwischen $a_{n-1,1}$ und $a_{n,k}$ viel größer als alle vorangehenden Lücken $b_{n+1} - b_n$ war, wogegen darauffolgende Lücken nur bis zur Lücke zwischen $a_{n,1}$ und $a_{n+1,k}$ lediglich mindestens gleich groß wie die zwischen $a_{n-1,1}$ und $a_{n,k}$ sein mussten. Damit war die Folge $(a_{n,1})_{n \geq 1}$ bzw. $(a_{n,k})_{n \geq 1}$ gewissermaßen ausgezeichnet. Im Beweis von Schritt 3 der Ungleichungen $\omega_j \leq \wp_j(\eta)$ ist dabei jedoch an vielen Stellen entscheidend Bedingung (1.69) eingegangen. Um die Werte $\omega_j, \hat{\omega}_j$ explizit bestimmen zu können, erweist sich im allgemeinen Fall $\omega \leq \infty$ als zweckmäßiger,

Konstruktionen zu verwenden, in denen keine Folge ausgezeichnet ist. Wir beweisen zunächst einen Satz, in dem die ersten $(k-1)$ Approximationskonstanten gewissermaßen explizit berechnet werden. Wir werden das Prinzip des Beweises danach nochmals verallgemeinern.

Satz 1.13. Sei $k \geq 2$ und Zahlen $\zeta_i = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-a_{n,i}}$ für $1 \leq i \leq k$ gegeben, sodass die Bedingung (1.72) erfüllt ist. Sei weiter die gemischte Folge wieder mit $(b_n)_{n \geq 1}$ bezeichnet. Gilt die Beziehung

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} > 2, \quad n \geq n_0,$$

dann sind die ersten $(k-1)$ Approximationskonstanten gegeben durch

$$\begin{aligned} \omega &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{b_n}, & \hat{\omega} &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - b_{n-1}}{b_n} \\ \omega_2 &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - b_{n-1}}{b_n}, & \hat{\omega}_2 &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-1} - b_{n-2}}{b_n} \\ \omega_3 &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-1} - b_{n-2}}{b_n}, & \hat{\omega}_3 &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-2} - b_{n-3}}{b_n} \\ &\vdots & &\vdots \\ \omega_{k-1} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-k+3} - b_{n-k+2}}{b_n}, & \hat{\omega}_{k-1} &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-k+2} - b_{n-k+1}}{b_n}. \end{aligned}$$

Weiter gelten für die letzten beiden Approximationskonstanten die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \omega_k &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-k+2} - b_{n-k+1}}{b_n}, & \hat{\omega}_k &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-k+1} - b_{n-k}}{b_n} \\ \omega_{k+1} &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-k+1} - b_{n-k}}{b_n}, & \hat{\omega}_{k+1} &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-k} - b_{n-k-1}}{b_n} \end{aligned}$$

Beweis: Bezeichne die rechten Seiten in Satz 1.13 mit $\wp_j$ bzw $\hat{\wp}_j$. Wir können oBdA annehmen, dass $n_0 = 1$ gilt, da Weglassen von Anfangstermen in ζ_j definierenden Summen jeweils rationalen Transformation $\zeta_j \mapsto \zeta_j + a, a \in \mathbb{Q}$ entsprechen, welche die Approximationskonstanten nicht ändern, siehe etwa Bemerkung 4 zu Satz 1.10.

Wir zeigen wie in Satz 1.12 beide Ungleichungen, wobei die Richtung $\omega_j \leq \wp_j$ und $\hat{\omega}_j \leq \hat{\wp}_j$ nur für $j \leq k-1$ zutreffend ist. Dies liefert offenbar genau die Aussage des Satzes. Setze zur Vereinfachung der Notation $c_h := 2^{b_h}$.

Bezeichne im Beweis durchgehend zu beliebigem X die ganze Zahl h bestimmt als den Index für den $c_h \leq X < c_{h+1}$ gilt. Offenbar ist $h \rightarrow \infty$ gleichwertig mit $X \rightarrow \infty$, was wir oft implizit gebrauchen werden. Wir zeigen zuerst die Ungleichungen $\omega_j \geq \wp_j$.

Sei dazu j beliebig aber fest vorgegeben. Sei weiter h zunächst beliebig vorgegeben und setze $x^{(i)} = c_{h+1-i}$ und $y_t^{(i)} = \lfloor \zeta_t x \rfloor$ für $1 \leq t \leq k, 1 \leq i \leq j$. Wir erhalten

$$\max_{1 \leq i \leq j} \max_{1 \leq t \leq k} \|\zeta_t x^{(j)}\| = \|\zeta_{t_0} x^{(j)}\| = \frac{c_{h+1-j}}{c_{h+2-j}} + o\left(\frac{c_{h+1-j}}{c_{h+2-j}}\right) \quad (1.92)$$

mit $t_0 := h+2-j$, ganz ähnlich zum Beweis 1.12. Wir wählen speziell eine Folge

$(X_r)_{r \geq 1} = (x_r)_{r \geq 1} = (c_{h_r})_{r \geq 1}$ mit $(m_r)_{r \geq 1}$ sodass

$$\lim_{r \rightarrow \infty} -\log_{X_r} \frac{c_{h_r+1-j}}{c_{h_r+2-j}} = \limsup_{h \rightarrow \infty} -\log_{c_h} \frac{c_{h+1-j}}{c_{h+2-j}} = \limsup_{h \rightarrow \infty} \frac{\log(c_{h+2-j}) - \log(c_{h+1-j})}{\log(c_h)} \quad (1.93)$$

erfüllt ist, welche gemäß der Definition des $\limsup$ existiert. Auf diese Art erhält man die Ausdrücke aus $\wp_j$ als untere Schranken für ω_j , wenn man die lineare Unabhängigkeit der Approximationsvektoren $(x^{(j)}, y_1^{(j)}, \dots, y_k^{(j)})$, $1 \leq i \leq j$, voraussetzt. Der Nachweis der linearen Unabhängigkeit ist jedoch essentiell der selbe wie in Satz 1.12.

Um als nächstes $\hat{\omega}_j \geq \hat{\wp}_j$ nachzuweisen, beachte dass für jede Folge $(h_r)_{r \geq 1}$ und Approximationsvektoren definiert wie im Beweis von $\omega_j \geq \wp_j$ eben logarithmieren zur Basis $c_{h+1} > X$ anstatt c_h eine untere Abschätzung für $\omega_j(X)$ zu $X \in [c_{h_r}, c_{h_r+1})$ ergibt. Da dies auf jede Folge $(h_r)_{r \geq 1}$ anwendbar ist erhalten wir $\hat{\wp}_j = \liminf_{X \rightarrow \infty} \omega_j(X)$ als untere Schranken für $\hat{\omega}_j$ nach Definition des $\liminf$, wie behauptet. Bisher haben wir also die unteren Schranken $\wp_j$ respektive $\hat{\wp}_j$ für ω_j respektive $\hat{\omega}_j$ für $1 \leq j \leq k+1$ gezeigt.

Für die oberen Schranken bemerke zuerst, dass wir uns mit der essentiell gleichen Argumentation von Schritt 3 in Satz 1.12 auf den Fall $c_h \leq X \leq \frac{1}{4}c_{h+1}$ beschränken können. Weiter bleiben die Schritte 1 und 2 von $\wp_j(\eta) \leq \omega_j$ aus dem Beweis von Satz 1.12 gültig in der vorliegenden Situation. Tatsächlich gelten die Abschätzungen (1.80), (1.81) offensichtlich schon unter der Bedingung $\frac{b_{n+1}}{b_n} > 2$, welche schwächer als (1.116) ist, mit der in Satz 1.12 argumentiert wurde. Der Beweis von Schritt 2 verläuft völlig analog.

Wir unterteilen nun zu jedem festen X alle Approximationsvektoren $(x, y_1, \dots, y_k)$ mit $x \leq X$ in zwei Kategorien. Sei g die größte ganze Zahl, sodass $c_{g-1} | x$ für einen Approximationsvektor $(x, y_1, \dots, y_k)$ wie in Schritt 1 von Satz 1.12. Bei festem X führt die Unterscheidung von Approximationsvektoren mit $g > h+1-k$, welche wir Vektoren der Kategorie 1 nennen, und den übrigen mit $g \leq h+1-k$, welche wir Vektoren der Kategorie 2 nennen, auf 2 mögliche Fälle.

Fall 1: Wenn für festes X mit $c_h \leq X < \frac{1}{4}c_{h+1}$ die Beziehung $g > h+1-k$ für einen Approximationsvektor mit $x \leq X$ gilt (dh der Vektor gehört zur Kategorie 1), liefert (1.80)

$$\omega_j(X) \leq -\log_{c_h} \frac{c_{h+1-j}}{c_{h+2-j}} = \frac{\log(c_{h+2-j}) - \log(c_{h+1-j})}{\log(c_h)}, \quad 1 \leq j \leq k+1. \quad (1.94)$$

Folglich ist für jedes X der Wert $\wp_j$ obere Schranke für $\omega_j^1(X)$, worunter wir zu festem X den maximalen Wert ν verstehen, sodass (1.36) eine Menge von j linear unabhängigen Lösungsvektoren sämtlich von Kategorie 1 besitzt. Definiert man $\omega_j^1 := \limsup_{X \rightarrow \infty} \omega_j^1(X)$, gilt also

$$\omega_j^1 \leq \wp_j, \quad 1 \leq j \leq k+1. \quad (1.95)$$

Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen den Approximationskonstanten $\hat{\omega}_j$ und Approximationsvektoren von Fall 1 herstellen. Wir definieren $\hat{\omega}_j^1 := \liminf_{X \rightarrow \infty} \omega_j^1(X)$. Wir starten mit einer beliebigen Folge $(X_r)_{r \geq 1}$ mit zugehöriger Teilfolge $(c_{h_r})_{r \geq 1}$ von $(c_h)_{h \geq 1}$ und definieren $(X'_r)_{r \geq 1}$ durch $X'_r := \frac{1}{5}c_{h_r+1}$ für alle r . Es ergeben (1.80) und die Tatsache, dass $\frac{c_m}{c_{m+1}}$ monoton fallen wegen unserer Voraussetzung $\frac{b_{n+1}}{b_n} > 2$, dass die Approximationskonstanten $\omega_j^1(X'_r)$ nach oben beschränkt sind durch

$$\omega_j^1(X'_r) \leq -\log_{\frac{1}{5}X_{r+1}} \left(\frac{c_{h_r+2-j}}{c_{h_r+1-j}} \right) = \frac{\log(c_{h_r+2-j}) - \log(c_{h_r+1-j})}{\log(c_{h_r+1}) - \log(5)} \quad (1.96)$$

für $1 \leq j \leq k+1$. Wählt man die Folge $(X_r)_{r \geq 1}$ so, dass die korrespondierende Folge $(h_r)_{r \geq 1}$ die Eigenschaft

$$\lim_{r \rightarrow \infty} -\log_{h_r} \frac{c_{h_r+1-j}}{c_{h_r+2-j}} = \liminf_{h \rightarrow \infty} -\log_{c_h} \frac{c_{h+1-j}}{c_{h+2-j}} = \liminf_{h \rightarrow \infty} \frac{\log(c_{h+2-j}) - \log(c_{h+1-j})}{\log(c_h)}, \quad (1.97)$$

besitzt, was nach Definition des $\liminf$ erreicht werden kann, und setzt man $n = h+1$ in der Definition von $\hat{\wp}_j$, sieht man, dass die rechte Seite von (1.96) gegen $\hat{\wp}_j$ konvergiert mit $r \rightarrow \infty$.

Deswegen existiert $\lim_{r \rightarrow \infty} \omega_j^1(X_r)$ und ist nach oben beschränkt durch $\widehat{\wp}_j$ und insbesondere erkennt man

$$\widehat{\omega}_j^1 \leq \widehat{\wp}_j, \quad 1 \leq j \leq k+1. \quad (1.98)$$

Fall 2: Im verbleibenden Fall $g \leq h+1-k$ (dh der Vektor gehört zu Kategorie 2), betrachte wieder eine zunächst beliebige Folge $(X_r)_{r \geq 1}$ mit korrespondierender Teilfolge $(c_{h_r})_{r \geq 1}$ von $(c_h)_{h \geq 1}$ die sich durch $c_{h_r} \leq X_r < c_{h_r+1}$ ergibt. Wir können uns erneut auf den Fall $c_{h_r} \leq X_r < \frac{1}{4}c_{h_r+1}$ beschränken, da dies die Approximationskonstanten nicht beeinflusst. Aus (1.81) folgern wir

$$\max_{1 \leq t \leq k} |\zeta_t x - y_t| \geq \frac{1}{c_{h_r+2-k}} - o\left(\frac{1}{c_{h_r+2-k}}\right). \quad (1.99)$$

Wir definieren nun $\omega_j^2(X), \omega_j^2$ als Supremum aller ν sodass (1.36) eine Menge von j linear unabhängigen Lösungsvektoren besitzt, von denen mindestens einer von Kategorie 2 ist. Aus (1.99) und der Voraussetzung $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\log(c_{n+1})}{\log(c_n)} > 2$ erkennen wir, dass man durch logarithmieren zur Basis $c_{h_r} < X_r$ für $r \rightarrow \infty$ für $\omega_j^2(X_r)$ die oberen Schranken

$$-\log_{X_r} \left(\frac{c_{h_r+2-k}}{c_{h_r+3-k}} \right) \leq -\log_{c_{h_r}} \left(\frac{c_{h_r+2-k}}{c_{h_r+3-k}} \right) = \frac{\log(c_{h_r+3-k}) - \log(c_{h_r+2-k})}{\log(c_{h_r})} \quad (1.100)$$

für $1 \leq j \leq k+1$ erhält. Beachte, dass die Schranken aus (1.100) für jede Folge $(X_r)_{r \geq 1}$ mit korrespondierender Folge $(c_{h_r})_{r \geq 1}$ gelten. Daraus ergibt sich

$$\mathcal{A} := \limsup_{h \rightarrow \infty} \frac{\log(c_{h+3-k}) - \log(c_{h+2-k})}{\log(c_h)} \geq \limsup_{X \rightarrow \infty} \omega_j^2(X) = \omega_j^2 \quad (1.101)$$

nach der Definition des $\limsup$. Nun gilt aber $\mathcal{A} = \wp_{k-1}$ (wobei n in der Definition von $\wp_{k-1}$ genau h in der Definition von $\mathcal{A}$ entspricht). Daher

$$\omega_j^2 \leq \wp_{k-1}, \quad 1 \leq j \leq k+1. \quad (1.102)$$

Andererseits gilt für jede Folge $(X_r)_{r \geq 1}$ wegen (1.99) und der Voraussetzung $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\log(c_{n+1})}{\log(c_n)} > 2$ für r hinreichend groß und $1 \leq j \leq k-1$

$$\omega_j^2(X_r) \leq -\log_{X_r} \left(\frac{1}{c_{h_r+2-k}} - o\left(\frac{1}{c_{h_r+2-k}}\right) \right) < -\log_{X_r} \left(\frac{c_{h_r+2-k}}{c_{h_r+3-k}} \right) \leq \omega_{k-1}^1(X_r), \quad (1.103)$$

wobei sich die Ungleichung ganz rechts aus den Konstruktionen der Ungleichungen $\omega_j \geq \wp_j, \widehat{\omega}_j \geq \widehat{\wp}_j$ im Fall $j = k-1$ ergeben (siehe (1.92), (1.93)). Da dies erneut auf jede Folge $(X_r)_{r \geq 1}$ zutrifft, sieht man

$$\widehat{\omega}_j^2 := \liminf_{X \rightarrow \infty} \omega_j^2(X) \leq \liminf_{X \rightarrow \infty} \omega_{k-1}^1(X) = \widehat{\omega}_{k-1}^1 \leq \widehat{\omega}_j^1, \quad 1 \leq j \leq k-1. \quad (1.104)$$

Wir kombinieren nun die erarbeiteten Resultate für $\omega_j^s, \widehat{\omega}_j^s, s \in \{1, 2\}$ um die geforderten oberen Schranken zu erhalten. Da jeder Approximationsvektor bei festem X entweder zu Fall 1 oder Fall 2 gehört besteht die Gleichheit

$$\omega_j(X) = \max\{\omega_j^1(X), \omega_j^2(X)\}, \quad \text{für alle } X > 0. \quad (1.105)$$

Für beliebige Funktionen $f, g : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ gilt offensichtlich

$$\max \left\{ \limsup_{X \rightarrow \infty} f(X), \limsup_{X \rightarrow \infty} g(X) \right\} = \limsup_{X \rightarrow \infty} \max \{f(X), g(X)\}.$$

Wendet man dies auf $f(X) = \omega_j^1(X)$, $g(X) = \omega_j^2(X)$ an ergibt sich, dass $\omega_j = \limsup_{X \rightarrow \infty} \omega_j(X)$ mit dem Maximum von $\omega_j^1 = \limsup_{X \rightarrow \infty} \omega_j^1(X)$ und $\omega_j^2 = \limsup_{X \rightarrow \infty} \omega_j^2(X)$ übereinstimmt. Wegen (1.95), (1.102) ist für $1 \leq j \leq k-1$ dieses Maximum gegeben durch $\max\{\wp_j, \wp_{k-1}\} = \wp_j$, was die oberen Schranken für ω_j , $1 \leq j \leq k-1$ beweist.

Wir müssen noch die oberen Schranken für $\hat{\omega}_j$ nachweisen. Wir kombinieren (1.105), (1.98) und (1.104) zu

$$\hat{\omega}_j = \liminf_{X \rightarrow \infty} \max_{s=1,2} \{\omega_j^s(X)\} = \liminf_{X \rightarrow \infty} \omega_j^1(X) = \hat{\omega}_j^1 \leq \hat{\wp}_j$$

für $1 \leq j \leq k-1$. Dies zeigt die Ungleichungen $\hat{\omega}_j \leq \hat{\wp}_j$ für $1 \leq j \leq k-1$. □

Bemerkungen: 1) Der Beweis der Ungleichungen $\omega_j \geq \wp_j$, $\hat{\omega}_j \geq \hat{\wp}_j$ für $1 \leq j \leq k+1$ benötigt nur Bedingung (1.72), wie der Beweis gezeigt hat. Die Wachstumsbedingung ist nur in den Ungleichungen $\omega_j \leq \wp_j$, $\hat{\omega}_j \leq \hat{\wp}_j$ für $1 \leq j \leq k-1$ eingegangen.

2) Es gelten in der Tat im allgemeinen keine Gleichheiten in den Ungleichungen. Siehe dazu Satz 2.1 und die Plots im späteren Abschnitt 2.1.2.

3) Man erkennt unter minimalen Adaptionen aus dem Beweis, dass die $\limsup$, $\liminf$ Werte aus Satz 1.13 auch den Wert ∞ annehmen dürfen. Dies gilt durchwegs auch für die folgenden Sätze und Korollare und wir werden davon später in Satz 2.3 Gebrauch machen.

4) Es gilt im Fall $C' := \wp_1 + 1 = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} < \infty$ wegen $C'' := \frac{1}{1-\wp_1} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} > 2$ stets $\omega_{k+1} \geq \frac{C''-1}{C''-1} \geq \frac{1}{C''-1} > 0$ die analoge Feststellung zu Bemerkung 7 zu Satz 1.12, dass die in Satz 1.13 involvierten $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ stets zusammen mit 1 linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ sind. Im Fall $C' = \infty$ kann man auf das Variationsprinzip zurückgreifen um zumindest eine überabzählbare Menge zusammen mit 1 $\mathbb{Q}$ -linear unabhängiger $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ zu finden.

Korollar 1.6. Gelten die Voraussetzungen von Satz 1.13 und existiert zusätzlich der Grenzwert von $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ für n gegen unendlich, also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} =: C \geq 2,$$

dann sind die ersten $(k-1)$ Approximationskonstanten gegeben durch

$$\begin{aligned} \omega &= C-1 \\ \omega_2 &= \frac{C-1}{C} = \hat{\omega} \\ \omega_3 &= \frac{C-1}{C^2} = \hat{\omega}_2 \\ &\vdots \\ \omega_{k-1} &= \frac{C-1}{C^{k-2}} = \hat{\omega}_{k-2} \\ &\quad \frac{C-1}{C^{k-1}} = \hat{\omega}_{k-1}. \end{aligned}$$

Weiter erfüllen die letzten beiden Approximationskonstanten die Beziehungen

$$\begin{aligned} \omega_k &\geq \frac{C-1}{C^{k-1}} \\ \omega_{k+1} &\geq \hat{\omega}_k \geq \frac{C-1}{C^k} \\ \hat{\omega}_{k+1} &\geq \frac{C-1}{C^{k+1}}. \end{aligned}$$

Zu gegebenem C kann man eine Folge $(b_n)_{n \geq 1}$ mit den geforderten Eigenschaften so wählen, dass zusätzlich $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ zusammen mit 1 $\mathbb{Q}$ -linear unabhängig sind.

Beweis: Aus der Zusatzvoraussetzung folgt man durch elementare Rechenregeln für Grenzwerte für jedes $h \in \mathbb{N}$ die Beziehung $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+h}}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+h}}{b_{n+h-1}} \frac{b_{n+h-1}}{b_{n+h-2}} \dots \frac{b_{n+1}}{b_n} = C^h$. Damit gilt also für alle g, h

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+h} - b_{n+g}}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+h}}{b_n} - \frac{b_{n+g}}{b_n} = C^h - C^g \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+h} - b_{n+g}}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+h}}{b_n} - \frac{b_{n+g}}{b_n} = C^h - C^g \end{aligned}$$

Wählt man g, h wie sie sich aus den Formeln in Satz 1.13 ergeben, ergeben sich durch leichte Rechnung und unter Verwendung von $\omega_{k+1} \geq \hat{\omega}_k$ in den Ungleichungen dadurch die angeführten Terme.

Die Existenz der Folge $(b_n)_{n \geq 1}$ mit den geforderten Eigenschaften ist im Fall $C < \infty$ durch die Wahl von beliebigem b_1 und der Rekursionsvorschrift $b_{n+1} = \lceil Cb_n \rceil$ wegen $C \geq 2 > 1$ bzw $b_n = n!$ im Fall $C = \infty$ gewährleistet. Satz 1.10 im Fall $C < \infty$ bzw das übliche Variationsprinzip im allgemeinen Fall ermöglichen die Wahl einer Folge, sodass zusätzlich $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ zusammen mit 1 $\mathbb{Q}$ -linear unabhängig sind. □

Bemerkung: Gemäß der Bemerkung 1 zu Satz 1.13 ist $C > 1$ ausreichend um die Ungleichungen aus Korollar 1.6 zu erhalten.

Nun wollen wir mithilfe dieses Ergebnisses weitere Spezialfälle der bisher nicht konstruktiv bewiesenen Schmidt Vermutung konstruieren. Es sei aber darauf hingewiesen, dass wir im folgenden Abschnitt ein- zumindest für hinreichend große Werte von k - besseres Ergebnis angeben werden.

Korollar 1.7. Sei $k \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Dann existiert ein $i_0 = i_0(k) \in \mathbb{N}$, sodass für alle ganzzahligen $i \leq i_0$ reelle Zahlen $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ existieren, sodass $\{1, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k\}$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ sind und deren zugeordnete Approximationsfunktionen die Bedingungen

$$\overline{\psi}_i < 0 \quad \text{und} \quad \underline{\psi}_{i+2} > 0$$

erfüllen. Dabei kann man die untere Schranke $i_0(k) \geq \log_2(k)$ angeben.

Beweis: Die Korrektheit für beliebiges $k \geq 2$ und $i_0(k) = 1$ ist Aussage von Korollar 1.4. Sei also von nun an $2 \leq i \leq k-3$, um Satz 1.13 anwenden zu können. Nach (1.40) müssen wir $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ finden, sodass $\hat{\omega}_i > \frac{1}{k}$ und $\omega_{i+2} < \frac{1}{k}$. Mit den Konstruktionen aus der Bemerkung zu Korollar 1.6 und den daraus resultierenden Formeln von Korollar 1.6 wird dies zu

$$\frac{C-1}{C^{i+1}} < \frac{1}{k} < \frac{C-1}{C^i}. \quad (1.106)$$

Man erkennt leicht, dass für $h \geq 2$ die Funktionen $\Psi_h(x) = \frac{x-1}{x^h}$ stetig und streng monoton fallend auf $(2, \infty)$ mit $\lim_{x \rightarrow \infty} \Psi_h(x) = 0$ sind. Weiter gilt $\Psi_{h+1}(x) < \Psi_h(x)$ auf $(1, \infty)$. Für $i < \log_2(k)$ hat die Gleichung $\frac{1}{k} = \frac{x-1}{x^i} = \Psi_i(x)$ wegen $\Psi_i(2) = \frac{1}{2^i} > \frac{1}{k}$ nach dem Zwischenwertsatz eine Lösung $x = C_0 > 2$. Es gilt offenbar $\Psi_{i+1}(C_0) < \frac{1}{k}$. Wegen der Stetigkeit von Ψ_{i+1} und der Monotonie von Ψ_i gilt auf einem Intervall $(C_0 - \epsilon, C_0)$ die gewünschte Ungleichungskette (1.106). Man kann also jedes $C \in (\max\{2, C_0 - \epsilon\}, C_0)$ wählen und erfüllt auch die Voraussetzungen von Satz 1.13. Man erhält also durch obiges Vorgehen die untere Schranke $i_0(k) \geq \lfloor \log_2(k) \rfloor$. □

Als nächstes wollen wir die Beweismethode von Satz 1.13 verwenden, um unter schwächeren Voraussetzungen als den dortigen Aussagen über die das Verhalten der ersten Approximationskonstanten zu bekommen. Dabei werden in dem Maß weniger Konstanten bestimmt werden können, in dem die Bedingungen schwächer werden, wie sich zeigen wird. Satz 1.13 wird als Spezialfall im folgenden Satz enthalten sein. Wir nennen im folgenden die Voraussetzungen von Satz 1.13 ohne die Beziehung $\frac{b_{n+1}}{b_n} > 2$ die *Basisvoraussetzungen* von Satz 1.13.

Satz 1.14. Es seien die Basisvoraussetzungen von Satz 1.13 erfüllt, und für fixiertes $1 \leq d \leq k-1$ und sei κ_d die positive reelle Nullstelle von $P_d(x) := x^d - x^{d-1} - 1$. Weiter gelten

1. $\frac{b_{n+1}}{b_n} > \kappa_d$, $n \geq n_0$
2. die Folge $d_n := b_{n+1} - b_n$ sei ab einem Index $n \geq n_1$ monoton steigend.

Dann sind die ersten $(k-d)$ Approximationskonstanten gegeben durch

$$\begin{aligned}
 \omega &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{b_n}, & \hat{\omega} &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - b_{n-1}}{b_n} \\
 \omega_2 &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - b_{n-1}}{b_n}, & \hat{\omega}_2 &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-1} - b_{n-2}}{b_n} \\
 \omega_3 &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-1} - b_{n-2}}{b_n}, & \hat{\omega}_3 &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-2} - b_{n-3}}{b_n} \\
 &\vdots & &\vdots \\
 \omega_{k-d} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-k+d+2} - b_{n-k+d+1}}{b_n}, & \hat{\omega}_{k-d} &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-k+d+1} - b_{n-k+d}}{b_n}
 \end{aligned}$$

Weiter gelten für die übrigen Approximationskonstanten die Ungleichungen

$$\begin{aligned}
 \omega_{k-d+1} &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-k+d+1} - b_{n-k+d}}{b_n}, & \hat{\omega}_{k-d+1} &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-k+d+1} - b_{n-k+d}}{b_n} \\
 &\vdots & &\vdots \\
 \omega_{k+1} &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-k+1} - b_{n-k}}{b_n}, & \hat{\omega}_{k+1} &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-k} - b_{n-k-1}}{b_n}.
 \end{aligned}$$

Beweis: Wir können wieder mit demselben Argument wie im Beweis von Satz 1.13 oBdA $n_0 = n_1 = 1$ setzen. Wir verfahren im wesentlichen weiter analog zum Beweis von Satz 1.13 und verwenden Voraussetzung 2 an der Stelle, wo wir dort die dazu äquivalente aus $C \geq 2$ folgende Monotonie von $\frac{c_m}{c_{m+1}}$ verwendet haben. Weiter verfahren wir wieder weitgehend analog zum bis zur Ungleichung (1.100), anstatt derer unsere schwächere Voraussetzung $\frac{b_{n+1}}{b_n} > \kappa_d$ statt $\frac{b_{n+1}}{b_n} > 2 > \kappa_d$ die obere Abschätzung

$$-\log_{X_r} \left(\frac{1}{c_{h_r+d+1-k}} \right) < -\log_{X_r} \left(\frac{c_{h_r+d+1-k}}{c_{h_r+d+2-k}} \right) \leq \omega_{k-d}^1(X_r)$$

liefert. Dann folgen wir wieder dem Beweis von Satz 1.13 bis (1.103), wo abermals $\frac{b_{n+1}}{b_n} > \kappa_d$ statt $\frac{b_{n+1}}{b_n} > 2 > \kappa_d$ die Abschätzung

$$\omega_j^2(X_r) \leq -\log_{X_r} \left(\frac{1}{c_{h_r+d+1-k}} \right) < -\log_{X_r} \left(\frac{c_{h_r+d+1-k}}{c_{h_r+d+2-k}} \right) \leq \omega_{k-d}^1(X_r).$$

erlaubt. Der Rest des Beweises ist wieder essentiell derselbe. $\square$

Bemerkungen: 1) Es gelten ähnlich wie in Bemerkung 1 zu Satz 1.13 auch ohne die Bedingungen $\frac{b_{n+1}}{b_n} > \kappa_d$ und der Voraussetzung 2) alle Ungleichungen $\omega_j \geq \wp_j$. Lässt man nur Voraussetzung 2) weg, kann man leicht sehen, dass im allgemeinen die umgekehrten Ungleichungen falsch sind. Durch Variation der Intervalllängen kann man hierzu Gegenbeispiele konstruieren. Wir skizzieren den Beweis eines einfachen Gegenbeispiels. Sei dazu $k \geq 3, d \geq 2$ und eine Folge $(b_n)_{n \geq 1}$ mit

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{2n+1}}{b_{2n}} =: C''$ mit beliebigem $C'' \in (\kappa_d, 2)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{2n}}{b_{2n-1}} =: C' > \frac{1}{2-G}$ gegeben. In diesem Fall sieht man leicht, dass C', C'' mit den gleich bezeichneten Werten aus Bemerkung 4 zu Satz 1.13 übereinstimmen. Wir weisen die Beziehung $\hat{\omega} > \hat{\phi}$ nach. Diese Voraussetzungen an $(b_n)_{n \geq 1}$ besagen, dass kurze mit langen Intervallen $(b_{n+1} - b_n)$ abwechseln. Es gilt dann einerseits $\hat{\phi}_1 = \frac{C''-1}{C''}$ wie man leicht aus der Definition von $\hat{\phi}_1$ folgert, sowie andererseits aber $\hat{\omega} = \frac{C'-1}{C'C''}$ wie wir nun skizzieren, was nach unserer Voraussetzung an C' die gewünschte Ungleichung $\hat{\omega} > \hat{\phi}$ liefert. Indem man die Folge $(X_n)_{n \geq 1}$ von X -Werten aus der Definition der Approximationskonstanten wählt als $X_n := 2^{b_{2n+1}} - 1$ ist die beste Approximation mit $x \leq X_n$ dann gegeben mit der Wahl $x = x_n := 2^{b_{2n-1}}$ (wie man sich mit den im wesentlichen gleichen Argumenten wie in Satz 1.13 unter Berücksichtigung von $k \geq 3$ überlegt) und führt zu $\max_{1 \leq t \leq k} |\zeta_t x - y| = 2^{-(b_{2n} - b_{2n-1})}$. Dies führt auf

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\log_{X_n} \left(\max_{1 \leq t \leq k} |\zeta_t x_n - y_{n,t}| \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{2n} - b_{2n-1}}{b_{2n+1}} = \frac{C' - 1}{C'C''}.$$

Es ist aber leicht zu sehen, dass es keine Folge $(X_i)_{i \geq 1}$ von X -Werten die asymptotisch einen kleineren Wert als $\frac{C'-1}{C'C''}$ liefert. Um dies einzusehen definieren wir zu einer beliebigen solchen Folge zu X_i den Approximationsvektor $(x^{(i)}, y_1^{(i)}, \dots, y_k^{(i)})$ durch $x_i = 2^{b_{n(i)}}$ und $y_t^{(i)} = \lfloor x^{(i)} \zeta_t \rfloor$ für $1 \leq t \leq k$ mit $n(i)$ dem größten ungeraden Index, sodass $2^{b_{n(i)}} \leq X_i$. Wir erhalten mit diesen Wahlen

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} -\log_{X_i} \left(\max_{1 \leq t \leq k} |\zeta_t x^{(i)} - y_t^{(i)}| \right) \geq \frac{C' - 1}{C'C''}.$$

Die Argumentation ist dabei im wesentlichen analog zu den Beweisen von Satz 1.12 bzw Satz 1.13 und wir führen es daher nicht exakt aus.

2) Eine hinreichende Bedingung für die Gültigkeit der Voraussetzung 2) ist $C'' \leq \frac{\kappa_d}{\kappa_d - 1}$ mit C'' wieder aus Bemerkung 4 zu Satz 1.13.

Korollar 1.8. Es seien die Basisvoraussetzungen von Satz 1.13 und Voraussetzung 1) aus Satz 1.14 für festes $1 \leq d \leq k - 1$ erfüllt. Weiter existiere der Grenzwert $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ für n gegen unendlich, es gelte also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} =: C \geq \kappa_d.$$

Dann sind die ersten $(k - d)$ Approximationskonstanten gegeben durch

$$\begin{aligned} \omega &= C - 1 \\ \omega_2 &= \frac{C-1}{C} = \hat{\omega} \\ \omega_3 &= \frac{C-1}{C^2} = \hat{\omega}_2 \\ &\vdots \\ \omega_{k-d} &= \frac{C-1}{C^{k-d-1}} = \hat{\omega}_{k-d-1} \\ &\quad \frac{C-1}{C^{k-d}} = \hat{\omega}_{k-d}. \end{aligned}$$

Überdies erfüllen die übrigen Approximationskonstanten die Beziehungen

$$\begin{array}{ccccc}
& \omega_{k-d+1} & \geq & \frac{C-1}{C^{k-d}} \\
\omega_{k-d+2} & \geq & \hat{\omega}_{k-d+1} & \geq & \frac{C-1}{C^{k-d+1}} \\
& \vdots & & \vdots & \\
\omega_{k+1} & \geq & \hat{\omega}_k & \geq & \frac{C-1}{C^k} \\
& & \hat{\omega}_{k+1} & \geq & \frac{C-1}{C^{k+1}}.
\end{array}$$

Zu gegebenem C kann man eine Folge $(b_n)_{n \geq 1}$ mit den geforderten Eigenschaften angeben, sodass zusätzlich $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ zusammen mit 1 $\mathbb{Q}$ -linear unabhängig sind.

Beweis: Analog zum Beweis von Korollar 1.6 unter Beachtung der Tatsache, dass wegen der Existenz des Grenzwerts C größer als 1 Voraussetzung 2) aus Satz 1.14 automatisch gewährleistet ist.

Die Existenz der Folge $(b_n)_{n \geq 1}$ mit den geforderten Eigenschaften ergibt sich aus $C \geq \kappa_d > 1$ wie in Korollar 1.6. $\square$

Wesentliche Eigenschaften von κ_d sind in der folgenden Proposition festgehalten.

Proposition 1.4. Es gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{d} &< \kappa_d < 2 \\
\lim_{d \rightarrow \infty} \kappa_d &= 1.
\end{aligned}$$

Beweis: Zunächst ist $1 < \kappa_d < 2$ wohldefiniert wegen $P_d(1) = -1 < 0$ und $P_d(2) = 2^{d-1} - 1 \geq 0$ sowie

$$P'_d(x) = dx^{d-1} - (d-1)x^{d-2} > 0, \quad x \geq 1.$$

Für $d = 1, 2$ rechnet man den ersten Punkt direkt nach. Sei ab jetzt also $d \geq 3$. Weil $(1 + \frac{1}{d})^d$ monoton gegen die Eulersche Zahl e strebt und damit auch $(1 + \frac{1}{d})^{d-1} = (1 - \frac{1}{d+1})(1 + \frac{1}{d})^d$ monoton steigt, folgt

$$P_d\left(1 + \frac{1}{d}\right) < e - \left(1 + \frac{1}{3}\right)^{3-1} - 1 \approx -0.0595 < 0.$$

Damit ist der erste Punkt gezeigt.

Wäre der zweite Punkt falsch, gäbe es ein $\epsilon > 0$, sodass für beliebig große d

$$(1 + \epsilon)^d < (1 + \epsilon)^{d-1} + 1.$$

Dies ist aber offensichtlich für alle $d > \frac{\log(\frac{1}{\epsilon})}{\log(1+\epsilon)} + 1$ falsch. $\square$

Man erhält also in der Tat schwächere Voraussetzungen als in Korollar 1.6, was größere Freiheiten bei der Konstruktion der Approximationskonstanten mit sich bringt. Dafür sind bei festem k weniger Approximationskonstanten bekannt.

1.2.6 Explizite Konstruktion von Spezialfällen der bewiesenen Vermutung von W.M.Schmidt

Die Ergebnisse des vorangehenden Abschnitts, insbesondere Korollar 1.8, ermöglichen nun, für weitere Spezialfälle von Schmidts Vermutung eine explizite Konstruktion von Beispielen. Wir werden in den folgenden Beweis redundante Zusatzinformationen einbauen, wodurch er etwas länger als notwendig ausfällt, unter anderem, da wir später in Abschnitt 2.2.6 in Korollar 2.6 und den auf jenes Korollar 2.6 folgenden Ausführungen nochmals darauf zurückkommen.

Korollar 1.9. Für beliebiges aber festes $k \geq 2$ gibt es eine Konstante $R(k)$ mit

- $R(k) > \frac{k}{\log(k)}$ für hinreichend großes k ,
- Für festes $3 \leq T \leq R(k)$ existiert $C_0 = C_0(T)$, sodass wir eine Folge positiver ganzer Zahlen $(b_n)_{n \geq 1}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = C_0$ wählen können, sodass die via Korollar 1.8 mit $C = C_0$ konstruierten $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ zusammen mit 1 $\mathbb{Q}$ -linear unabhängig sind und ihre Approximationskonstanten

$$\bar{\psi}_{T-2} < 0 \quad \text{und} \quad \underline{\psi}_T > 0 \quad (1.107)$$

erfüllen.

Es kann $R(k) := k - 1 + (k - 2) \frac{\log\left(k^{\frac{1}{k-2}} - 1\right)}{\log(k)}$ gewählt werden.

Beweis: Sei k beliebig aber fest vorgegeben. Wegen (1.40) müssen wir für vorgegebenes $3 \leq T \leq R(k)$ ein $C_0 = C_0(T)$ finden, sodass die zu den via Korollar 1.8 konstruierten $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ gehörigen Approximationskonstanten $\hat{\omega}_{T-2} > \frac{1}{k} > \omega_T$ erfüllen, um (1.107) zu erhalten. Wir identifizieren im weiteren ein vorgegebenes C mit den in Korollar 1.8 dazu konstruierten Zahlen $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ (zusammen mit 1 linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ gewählt), da die Approximationskonstanten gemäß Korollar 1.8 nur von C abhängen und nicht von der genauen Wahl von $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$. Weiter ist in Korollar 1.8 die Existenz von zusammen mit 1 $\mathbb{Q}$ -linear unabhängigen $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ gezeigt worden.

Wir verwenden die Notation von Satz 1.14 und zeigen zunächst, dass wir (1.107) erreichen können für Werte T , welche folgende Bedingung erfüllen:

$$\exists \quad y \geq \kappa_{k-T} : \quad \Psi_{T-1}(y) > \frac{1}{k}, \quad (1.108)$$

wobei die Funktionen $\Psi_\cdot$ wie in Korollar 1.7 definiert sind. Wir erinnern an dieser Stelle an die dort erwähnten Eigenschaften der Funktionen $\Psi_\cdot$ und eine einfache Kurvendiskussion zeigt allgemeiner als dort benötigt, dass jedes Ψ_u genau ein lokales Extremum (ein Maximum) bei $\frac{u}{u-1}$ hat, also auf $[1, \frac{u}{u-1}]$ steigt und auf $[\frac{u}{u-1}, \infty)$ fällt.

Sei also obige Bedingung für ein y erfüllt. Wegen der Eigenschaft $\lim_{x \rightarrow \infty} \psi_u(x) = 0$ für jedes u gibt es mit $u = T - 1$ dann auch eine Stelle $x > y$ die $\Psi_{T-1}(x) = \frac{1}{k}$ und $x \geq \frac{T-1}{T-2}$ erfüllt, sodass insbesondere Ψ_{T-1} bei x bereits fällt.

Wir erhalten also $\Psi_{T-1}(x) = \frac{1}{k}$, $\Psi_{T-2}(x) = C\Psi_{T-1}(x) = C\frac{1}{k} > \frac{1}{k}$. Wegen der Stetigkeit der $\Psi_\cdot$ und unserer Wahl von x im Intervall in dem Ψ_{T-1} fällt gibt es ein Intervall $C_0 \in (x, x + \delta)$ in dem $\Psi_{T-1}(C_0) < \frac{1}{k} < \Psi_{T-2}(C_0)$. Wir können folglich mit $C := C_0$ wegen $C_0 > x > \kappa_{k-T}$ Korollar 1.8 mit $d := k - T$ anwenden und erkennen, dass die gewünschte Ungleichungskette $\omega_T = \Psi_{T-1}(C_0) < \frac{1}{k} < \hat{\omega}_{T-2} = \Psi_{T-2}(C_0)$ gilt. Das zeigt die Behauptung.

Offenbar ist wegen des oben beschriebenen Monotonieverhaltens der $\Psi_\cdot$ Bedingung (1.108) für vorgegebenes T äquivalent zur Gültigkeit genau einer der beiden folgenden Bedingungen:

$$\kappa_{k-T} \leq \frac{T-1}{T-2} \quad \text{und} \quad \Psi_{T-1}\left(\frac{T-1}{T-2}\right) > \frac{1}{k} \quad (1.109)$$

$$\kappa_{k-T} > \frac{T-1}{T-2} \quad \text{und} \quad \Psi_{T-1}(\kappa_{k-T}) > \frac{1}{k}. \quad (1.110)$$

Betrachten wir zuerst die (hinreichende) Bedingung (1.109). Die rechte Ungleichung bedeutet ausgeschrieben

$$\frac{\frac{T-1}{T-2} - 1}{\left(\frac{T-1}{T-2}\right)^{T-1}} > \frac{1}{k}.$$

Der Nenner der linken Seite konvergiert aber gegen die Eulersche Zahl e und man überzeugt sich weiter durch elementares Umformen, dass $T \geq (1 + \epsilon_k) \frac{k}{e}$ mit einer Folge $\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_k = 0$ eine hinreichende Bedingung liefert, also $T \sim \frac{k}{e}$.

Die linke Ungleichung von (1.109) lässt sich mithilfe der Polynome P_d aus Satz 1.14 ausdrücken. Weil P_d , deren größte Nullstellen nach Definition gerade κ_d sind, offenbar $\lim_{z \rightarrow \infty} P_d(z) = +\infty$ erfüllen, ergeben sich nämlich als äquivalente Bedingungen

$$P_{k-T}\left(\frac{T-1}{T-2}\right) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{T-1}{T-2}\right)^{k-T} - \left(\frac{T-1}{T-2}\right)^{k-T-1} - 1 > 0.$$

Multiplikation mit $(T-2)^{k-T-1}$ und vereinfachen ergibt die erneut äquivalente Bedingung

$$\left(\frac{T-1}{T-2}\right)^{k-T-1} > T-2 \quad \Longleftrightarrow \quad k > \frac{\log(T-2)}{\log(T-1) - \log(T-2)} + T + 1.$$

Aber $\log(T-1) - \log(T-2) = \int_{T-2}^{T-1} \frac{1}{t} dt \geq \frac{1}{T-2}$, also ist weiter $k > T(\log(T-2) + 1) - 2\log(T-2) + 1 \sim T\log(T)$ hinreichende untere Schranke von k bei festem T und daraus sieht man leicht, dass umgekehrt bei festem k eine hinreichende Schranke für T durch $T \leq \frac{k}{\log(k)}$ gegeben ist. Für hinreichend großes k ist mit dieser Asymptotik nach den obigen Erkenntnissen aber auch die andere Ungleichung von (1.109) erfüllt.

Eine schärfere Schranke ergibt sich im Fall von Bedingung (1.110). Angenommen es wäre bei festem k und für beliebiges, aber festes $1 \leq T \leq k+1$ mit $C := \kappa_{k-T}$ die Ungleichung

$$\frac{C-1}{C^{k-1} - C^{k-2}} > \frac{1}{k} \quad (1.111)$$

erfüllt. Es folgt aus der Definition von $C = \kappa_{k-T}$ dass $C^{T-1} = C^{k-1} - C^{k-2}$ und mit (1.111) weiter

$$\psi_{T-1}(C) = \frac{C-1}{C^{T-1}} = \frac{C-1}{C^{k-1} - C^{k-2}} > \frac{1}{k}$$

für dieses T , also die rechte Ungleichung von (1.110). Um die linke Ungleichung von (1.110) müssen wir uns aber nicht kümmern, wie folgendes Argument zeigt: weil $\frac{T-1}{T-2}$ globales Maximum von Ψ_{T-1} auf $[1, \infty)$ ist, impliziert die rechte Ungleichung von (1.110) bereits die rechte Ungleichung von (1.109), also erfüllen wir unter Voraussetzung der rechten Ungleichung von (1.110) in jedem Fall entweder das System (1.109) oder das System (1.110) wie gewünscht.

Die Ungleichung (1.111) ist aber wegen $C > 1$ äquivalent zu $\kappa_{k-T} = C \leq k^{\frac{1}{k-2}}$. Weil P_{k-T} , dessen größte Nullstelle $\kappa_{k-T} > 1$ ist, auf $[1, \infty)$ steigt, ist dies wiederum gleichbedeutend mit $P_{k-T}\left(k^{\frac{1}{k-2}}\right) \geq 0$, also

$$k^{\frac{k-T}{k-2}} - k^{\frac{k-T-1}{k-2}} - 1 > 0.$$

Dies lässt sich umformen zu

$$T \leq k - 1 + (k - 2) \frac{\log\left(k^{\frac{1}{k-2}} - 1\right)}{\log(k)} =: R(k).$$

Um den Beweis abzuschließen müssen wir noch $R(k) \geq \frac{k}{\log(k)}$ für hinreichend großes k nachweisen. Es gilt aber für hinreichend großes k

$$R(k) > \frac{k}{2} \left[1 + \frac{\log(k^{\frac{1}{k-2}} - 1)}{\log(k)} \right] > \frac{k}{2} \left[1 + \frac{\log(k^{\frac{1}{k}} - 1)}{\log(k)} \right] > \frac{k}{\log(k)},$$

denn die (für $k \geq 4$ einzig nichttriviale) rechte Ungleichung ist gleichwertig mit $k \cdot (k^{\frac{1}{k}} - 1) > e^2$, aber $k^{\frac{1}{k}} > 1 + \frac{M}{k}$ für alle M und alle $k \geq k(M) := e^M$ wegen des monotonen $\lim_{k \rightarrow \infty} (1 + \frac{M}{k})^k = e^M < k$. Also $k \cdot (k^{\frac{1}{k}} - 1) > M$ für $k \geq k(M)$ und mit $M := e^2 + 1 > e^2$ folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkungen: 1) Es gilt zwar $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{R(k)}{k} = 0$, die Folge konvergiert jedoch sehr langsam.

2) Beachte, dass $\log\left(k^{\frac{1}{k-2}} - 1\right) \leq 0$ und in Folge $R(k) \leq k - 1$ für $k \geq 4$ mit strikten Ungleichungen für $k \geq 5$. Matlab berechnet die exakten Werte $\lfloor R(100) \rfloor = 34$, $\lfloor R(1000) \rfloor = 281$, $\lfloor R(10000) \rfloor = 2411$, $\lfloor R(100000) \rfloor = 21224$. Beachte auch, dass notationstechnisch $R(k)$ dem Wert $i_0(k) + 2$ aus Korollar 1.7 entspricht.

3) Man kann in obigem Beweis (1.109), (1.110) durch die Beziehung $\kappa_{k-T} > \frac{1}{k}$ ersetzen und den Beweisteil zu (1.109) ignorieren, siehe auch dem Beweis vorangehende Ausführungen.

4) Falls $\widehat{\omega}_{u-2} > \omega_u$ für ein beliebiges u unter den Voraussetzungen von Korollar 1.8 (mit beliebigem festem d) gilt, so kann man den Beweis von Korollar 1.9 adaptieren um (1.107) für $T = u - 1$ zu erhalten. Man muss mit der größeren Funktion ω_{u-1} anstatt ω_u argumentieren, für die man wegen der geltenden Ungleichungen von Korollar 1.8 wieder ein Intervall findet auf dem sie größer als $\frac{1}{k}$ ist und unter der Zusatzvoraussetzung $\widehat{\omega}_{u-2} > \omega_u$ verläuft der Beweis dann im wesentlichen analog zu jedem von Korollar 1.9 weiter. Im Beweis von Korollar 1.9 wurde ausgenutzt, dass man die Zusatzvoraussetzung für die dortigen Indizes aufgrund der Identitäten aus Korollar 1.8 als wahr erkennt.

5) Man kann die Voraussetzungen von Satz 1.12 und Korollar 1.6 bzw 1.8 derart mischen, dass man den Grenzwert der Quotienten $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ für jede Restklasse von n im Repräsentantensystem $\{1, 2, \dots, k\} \bmod k$ unter gewissen Randbedingungen vorschreibt. Dabei kann man eventuell Ergebnisse vergleichbar mit jenen zu Bemerkung 3 nach Korollar 1.4 erzielen. Die entstehenden Randbedingungen sind jedoch sehr artifiziell und wir gehen hier nicht näher darauf ein.

Die Sätze dieses Kapitels mit ihren recht konstruktiven Beweisen erlauben eine über die Kenntnis der extremalen Werte $\overline{\psi}_j, \underline{\psi}_j$ hinausgehendes Verständnis der Funktionen $\psi_j(Q)$. Für jene j , für die man Gleichungen der $\omega_j, \widehat{\omega}_j$ in Satz 1.14 erhält, kann man das qualitative Verhalten der Funktionen $\psi_j(Q)$ bzw $L_j(q)$ auf Basis der Beweise vollständig beschreiben. Das Verhalten der übrigen ist komplizierter. Wir werden im Abschnitt 2.2.5 darauf zurückkommen.

1.3 Verallgemeinerung auf eine größere Klasse von Liouvillezahlen

Eine Analyse der wesentlichen Argumente der Beweise aus den letzten beiden Abschnitten, insbesondere von Satz 1.12 und Satz 1.13, legt Verallgemeinerungen nahe, die für sich interessant sind

ohne eine s -adische Interpretation in einer festen Basis $s \geq 2$ zu besitzen, also keine *speziellen* (schwachen) Liouvillezahlen gemäß unserer Definition sind. Wir beweisen zunächst ausführlich eine Verallgemeinerung von Satz 1.12, analog lassen sich alle weiteren Ergebnisse verallgemeinern. Weiter lassen sich diese Verallgemeinerungen auch auf Satz 3.1 in Kapitel 3 anwenden.

Satz 1.15. Sei k eine positive ganze Zahl und für $1 \leq j \leq k$ sei $\zeta_j = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_{n,j}}$, wobei

$$q_{1,k} < q_{1,k-1} \dots < q_{1,1} < q_{2,k} < q_{2,k-1} \dots < q_{2,1} < q_{3,k} < \dots \quad (1.112)$$

natürliche Zahlen sind und jede Zahl ein Teiler der darauffolgenden ist, das bedeutet

$$q_{n,j+1} | q_{n,j}, \quad 1 \leq j \leq k-1 \quad \text{und} \quad q_{n,1} | q_{n+1,k} \quad (1.113)$$

für alle $n \geq 1$. Weiters gelte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(q_{n+1,i-1}) - \log(q_{n+1,i})}{\log(q_{n+1,k})} = \eta_i, \quad 2 \leq i \leq k, \quad (1.114)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(q_{n+1,k}) - \log(q_{n,1})}{\log(q_{n+1,k})} = \eta_{k+1}, \quad (1.115)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(q_{n+1,k})}{\log(q_{n,1})} = \eta_1 = \infty, \quad (1.116)$$

wobei $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{k+1})$ derart gegeben sind, sodass (1.69), (1.70), (1.71) erfüllt sind. Dann sind die simultanen Approximationskonstanten von $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \eta_1 = \infty =: \wp_1(\eta) \\ \omega_2 &= \max \left\{ \frac{\eta_2}{\eta_2 + \eta_3 + \dots + \eta_{k+1}}, \frac{\eta_3}{\eta_3 + \eta_4 + \dots + \eta_{k+1}}, \dots, \frac{\eta_{k+1}}{\eta_{k+1}} \right\} =: \wp_2(\eta) \\ \omega_3 &= \max \left\{ \frac{\eta_3}{\eta_2 + \eta_3 + \dots + \eta_{k+1}}, \frac{\eta_4}{\eta_3 + \eta_4 + \dots + \eta_{k+1}}, \dots, \frac{\eta_{k+1}}{\eta_k + \eta_{k+1}} \right\} =: \wp_3(\eta) \\ &\vdots \\ \omega_{k+1} &= \frac{\eta_{k+1}}{\eta_2 + \eta_3 + \dots + \eta_{k+1}} =: \wp_{k+1}(\eta). \end{aligned}$$

Beweis: Wir folgen im wesentlichen dem Beweis von Satz 1.12. Wir zeigen wieder beide Ungleichungen $\omega_j \geq \wp_j(\eta)$ und $\omega_j \leq \wp_j(\eta)$.

$\omega_j \geq \wp_j(\eta)$:

Wir zeigen nur $\omega_j \geq \wp_{j,1} = \eta_j$ mit $\wp_{j,1}$ dem ersten Ausdruck in $\wp_j$. Für die übrigen Ungleichungen kann man wieder analog zum Beweis von Satz 1.12 argumentieren. Wir wählen unsere Folge von Bestapproximationsvektoren als

$$\left(x^{(1,n)}, y_1^{(1,n)}, \dots, y_k^{(1,n)} \right)_{n \geq 1} = \left(q_{n,1}, q_{n,1} \sum_{j \leq n} q_{j,1}^{-1}, q_{n,1} \sum_{j \leq n} q_{j,2}^{-1}, \dots, q_{n,1} \sum_{j \leq n} q_{j,k}^{-1} \right)_{n \geq 1}.$$

und danach alle weiteren $\left(x^{(p,n)}, y_1^{(p,n)}, \dots, y_k^{(p,n)} \right)_{n \geq 1}$ für $1 \leq p \leq k$ analog zum Beweis von Satz 1.12 als

$$\left(q_{n,p}, q_{n,p} \sum_{j \leq n-1} q_{j,1}^{-1}, q_{n,p} \sum_{j \leq n-1} q_{j,2}^{-1}, \dots, q_{n,p} \sum_{j \leq n-1} q_{j,p-1}^{-1}, q_{n,p} \sum_{j \leq n} q_{j,p}^{-1}, \dots, q_{n,p} \sum_{j \leq n} q_{j,k}^{-1} \right)_{n \geq 1}.$$

Definiere schließlich den $(k+1)$ -ten Approximationsvektor mittels $x^{(k+1,n)} = q_{n-1,1}$ und $y_t^{(k+1,n)} = \lfloor \zeta_t q_{n-1,1} \rfloor$ für $1 \leq t \leq k$, also

$$\left(x^{(k+1,n)}, y_1^{(k+1,n)}, \dots, y_k^{(k+1,n)} \right) = \left(q_{n-1,1}, q_{n-1,1} \sum_{j \leq n-1} q_{j,1}^{-1}, \dots, q_{n-1,1} \sum_{j \leq n-1} q_{j,k}^{-1} \right)_{n \geq 1}.$$

Man überzeugt sich mittels (1.113), dass diese Approximationsvektoren alle aus $\mathbb{Z}^{k+1}$ sind. Weiters sieht man wie im Beweis von Satz 1.12, dass wegen (1.113) zusammen mit (1.116), (1.114) für jedes $1 \leq j \leq k$ und $\epsilon > 0$ die Approximationen für $1 \leq i \leq j$ und hinreichend großes $n = n(\epsilon)$ jeweils den geforderten Abschätzungen

$$\left| x^{(i,n)} - \zeta_i y^{(i,n)} \right| \leq \left(x^{(1,n)} \right)^{-\wp_{j,1} + \epsilon} = \left(X^{(n)} \right)^{-\wp_{j,1} + \epsilon}$$

genügen. Der Nachweis der linearen Unabhängigkeit lässt sich ebenso mit unseren Adaptionen übernehmen. Bezeichnet $\mathbf{B}_n$ wieder die Matrixfolge in welcher in der j -ten Zeile der j -te Approximationsvektor steht, so zieht man wieder mit $p = 1$ beginnend jeweils das $\frac{q_{n,p}}{q_{n,p+1}}$ -fache der $(p+1)$ -ten Zeile von der p -ten Zeile ab, so erhält man eine Matrix von der Gestalt

$$\mathbf{C}_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ q_{n-1,1} & q_{n-1,1} \sum_{j \leq n-1} q_{j-1,1}^{-1} & q_{n-1,1} \sum_{j \leq n-1} q_{j-1,2}^{-1} & \dots & \dots & q_{n-1,1} \sum_{j \leq n-1} q_{j-1,k}^{-1} \end{pmatrix}$$

und es gilt $|\det(\mathbf{B}_n)| = |\det(\mathbf{C}_n)| = q_{n-1,1} \neq 0$ für alle $n \geq 1$.

$\omega_j \leq \wp_j(\eta)$:

Wir verallgemeinern jeden der drei Schritte aus dem Beweis von Satz 1.12.

1. Schritt: Sei $(c_n)_{n \geq 1}$ die monoton geordnete gemischte Folge $(q_{k,1}, q_{k-1,1}, \dots)$. Für einen Approximationsvektor $(x, y_1, \dots, y_k)$ sei h der Index, für den $c_h \leq x < c_{h+1}$ (das ist die Verallgemeinerung der 2-adischen Bedingung an r_1 aus Satz 1.12) und g die größte ganze Zahl mit $c_{g-1} | x$ (das ist die Verallgemeinerung von r_b aus Satz 1.12). Wegen $x < c_{h+1}$ und folglich $c_{h+1} \nmid x$ sieht man unmittelbar $g \leq h+1$. Wenn $X \rightarrow \infty$ dann auch $h \rightarrow \infty$ und wir behaupten für $h \rightarrow \infty$ gelten die Abschätzungen

$$\max_{1 \leq t \leq k} |\zeta_t x - y_t| \geq \frac{c_{g-1}}{c_g} - o\left(\frac{c_{g-1}}{c_g}\right), \quad g > h+1-k \quad (1.117)$$

$$\max_{1 \leq t \leq k} |\zeta_t x - y_t| \geq \frac{1}{c_{h+2-k}} - o\left(\frac{1}{c_{h+2-k}}\right), \quad g \leq h+1-k. \quad (1.118)$$

Darüber hinaus widerspricht im Falle $g \leq h+1-k$ (d.h. der Voraussetzung in (1.118)) die Zusatzvoraussetzung $x < \frac{1}{2}c_{h+1}c_{h+1-k}^{-1}$ der Beziehung

$$\max_{1 \leq t \leq k} |\zeta_t x - y_t| < \frac{1}{2} \frac{1}{c_{h+1-k}} - o\left(\frac{1}{c_{h+1-k}}\right) \quad (1.119)$$

für $X \rightarrow \infty$ oder gleichbedeutend $h \rightarrow \infty$.

Beweis: Wir nehmen der Einfachheit halber zuerst an, dass $c_{h+1} \in (q_{n,1})_{n \geq 1}$ gilt. Wir werden später darauf eingehen, wie diese Einschränkung auf den allgemeinen Fall, dass c_{h+1} in einer beliebigen Folge ist, zu verallgemeinern ist. Diese Bedingung bedeutet gerade $c_{h+1} = q_{n_1,1}$ für ein $n_1 \in \mathbb{N}$ und es folgt weiter $c_h = q_{n_1,2}$. Wegen (1.113) haben wir $c_l | x$ für alle $l \leq g-1$ und $c_l \nmid x$ für alle $l \geq g$, insbesondere $c_g \nmid x$. Wir machen nochmals auf $g \leq h+1$ aufmerksam. Um die Behauptungen aus Schritt 1 zu zeigen betrachten wir die 2 zugehörigen Fälle separat:

Fall 1: $c_g > q_{n_1-1,k}$. Beachte, dass dies wegen $q_{n_1-1,1} = c_{h+1-k}$ äquivalent zu $g \geq h+2-k$ bzw. $c_g \geq c_{h+2-k}$ ist. Wir können $x = x_1 + x_2$ schreiben mit $0 < x_1 < c_g$ und $c_g | x_2$, denn unsere Voraussetzung an g stellt $x_1 \neq 0$ sicher. Bezeichne $\bar{g}$ die Restklasse von g im Repräsentantensystem $\{1, 2, \dots, k\} \bmod k$, was einfach $(\bar{1}, \bar{2}, \dots) = (k, k-1, \dots, 1, k, k-1, \dots)$ bedeutet. Beachte weiter, dass $c_{\bar{g}}$ der kleinste Wert c_g ist mit g in der Klasse $\bar{g}$, oder anders ausgedrückt $\zeta_{\bar{g}} = \sum_{l \geq 0} c_{\bar{g}+kl}^{-1}$, wovon wir im folgenden implizit Gebrauch machen werden. Wir behaupten

$$\|x_1 \zeta_{\bar{g}}\| \geq c_g^{-1} c_{g-1} - \sum_{l \geq 1} c_{g+lk}^{-1} c_{g-1} \geq c_g^{-1} c_{g-1} - 2c_{h+1} c_{h+2}^{-1} \quad (1.120)$$

$$\{x_2 \zeta_{\bar{g}}\} = \|x_2 \zeta_{\bar{g}}\| = \left\| x_2 \sum_{l \geq 1} c_{g+lk}^{-1} \right\| \leq 2c_{h+1} c_{h+2}^{-1}. \quad (1.121)$$

Ungleichung (1.120) erhält man mittels $0 < \frac{x_1}{c_g} < 1$ und $c_{g-1} | x_1$, was man wegen $c_{g-1} | x$, $c_{g-1} | c_g$ und $c_g | x_2$ per Definition einsieht, zusammen also $c_{g-1} | x - x_2$, aber $x - x_2 = x_1$. Kombination dieser beiden Tatsachen und weil $g+k, g+2k, \dots$ gerade die Indizes g in der Klasse $\bar{g}$ sind zeigt, dass $x_1 \zeta_{\bar{g}}$ von der Form

$$x_1 \zeta_{\bar{g}} = \frac{x_1}{c_g} + x_1 \sum_{l \geq 1} c_{g+lk}^{-1} = \frac{K c_{g-1}}{c_g} + x_1 \sum_{l \geq 1} c_{g+lk}^{-1} \geq K \frac{c_{g-1}}{c_g} + x_1 \sum_{l \geq 1} c_{g+lk}^{-1}$$

mit $K \in \{1, 2, \dots, \frac{c_g}{c_{g-1}} - 1\}$ ist (beachte $c_{g-1} | c_g$). Die Behauptung folgt nun aus $x_1 < c_g \leq c_{h+1}$,

$$\sum_{l \geq 1} c_{g+lk}^{-1} < c_{g+k}^{-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) = 2c_{g+k}^{-1}, \quad (1.122)$$

und $c_{g+k}^{-1} \leq c_{h+2}^{-1}$, was wegen der Voraussetzung von Fall 1 zutrifft.

Um (1.121) einzusehen, bemerke zunächst dass für alle $s \leq g$ wegen (1.113) $c_s | x_2$ gilt, insbesondere für jene c_s mit s in der Klasse $\bar{g}$. Also sind alle $x_2 c_s^{-1}$ mit $s \leq g$ ganze Zahlen. Das heißt aber die Ausdrücke von Ordnung nicht größer als $x_2 c_{g+k}^{-1}$ von $x_2 \zeta_{\bar{g}} = \sum_{l \geq 0} x_2 c_{\bar{g}+kl}^{-1}$, das ist genau $x_2 \sum_{l \geq 1} c_{g+kl}^{-1}$, hat den selben Nachkommaanteil wie die Gesamtsumme. Wir haben nun einerseits $x_2 \leq x \leq c_{h+1}$, und andererseits $c_{g+k} \geq c_{h+2}$ nach Voraussetzung von Fall 1. Zusammen mit (1.122) ergibt sich (1.121).

Addiert man (1.120) zu (1.121) und bemerkt, dass wegen (1.116) $c_{h+1} c_{h+2}^{-1} = o(c_g^{-1} c_{g-1})$ gilt, sodass man also die Dreiecksungleichung auf die Nachkommaanteile anwenden kann, folgert man weiter

$$||x\zeta_{\bar{g}}|| \geq c_g^{-1}c_{g-1} - 4c_{h+1}c_{h+2}^{-1}.$$

Wegen (1.70),(1.69) ist jedoch $c_m^{-1}c_{m-1}$ monoton fallend in m und der Fehlerterm $4c_{h+1}c_{h+2}^{-1}$ ist offenbar $o(c_h c_{h+1}^{-1})$ wegen (1.116), und insgesamt

$$\frac{c_{g-1}}{c_g} - o\left(\frac{c_h}{c_{h+1}}\right) \leq ||\zeta_{\bar{g}}x|| \leq \max_{1 \leq t \leq k} ||\zeta_t x||.$$

und weiter (1.117) denn $\frac{c_h}{c_{h+1}} \leq \frac{c_{g-1}}{c_g}$ wegen (1.70) und (1.115)-(1.116).

Falls c_{h+1} in einer anderen Folge $(q_{n,i})_{n \geq 1}$ liegt, dh $c_{h+1} = q_{n_1,i}$ mit $i \neq 1$, betrachten wir $c_g \geq q_{n_1-1,i}$ und erhalten wieder

$$\begin{aligned} ||x_1 \zeta_{\bar{g}}|| &\geq c_g^{-1}c_{g-1} - \sum_{l \geq 1} c_{g+lk}^{-1}c_{g-1} \geq c_g^{-1}c_{g-1} - 2c_{h+1}c_{g+k}^{-1} \\ \{x_2 \zeta_{\bar{g}}\} &= ||x_2 \zeta_{\bar{g}}|| = \left\| x_2 \sum_{l \geq 1} c_{g+kl}^{-1} \right\| \leq 2c_{h+1}c_{g+k}^{-1}, \end{aligned}$$

wie im Beweis des Spezialfalls (ohne die Abschätzung $c_{h+2} \leq c_{g+k}$ von oben). Wegen (1.115)-(1.116) gilt wiederum $c_{h+1}c_{g+k}^{-1} = o(c_g^{-1})$ mit $h \rightarrow \infty$ (oder äquivalent $g \rightarrow \infty$ weil $g \geq h+2-k$) und die verbleibende Argumentation ist nahezu gleich. Daher gilt (1.117) in jedem Fall.

Fall 2: $c_g \leq q_{n_1-1,1}$. In diesem Fall ist es angenehmer direkt mit den Ausdrücken $q_{..}$ anstatt $c_{..}$ zu arbeiten. Ähnlich wie in Fall 1 sei $x = x_1 + x_2$ mit $0 < x_1 < q_{n_1,k}$ und $q_{n_1,k}|x_2$. Wieder wegen $q_{n_1-1,1}|q_{n_1,k}$ und der Definition von g ist $x_1 \neq 0$ gewährleistet. Analog zum Beweis von (1.120),(1.121) aus Fall 1 folgern wir

$$\begin{aligned} ||x_1 \zeta_k|| &\geq \frac{1}{q_{n_1,k}} - 2q_{n_1,1}q_{n_1+1,k}^{-1} \\ 0 \leq x_2 \zeta_k &\leq 2q_{n_1,1}q_{n_1+1,k}^{-1}. \end{aligned}$$

Wiederum Dreiecksungleichung und (1.69) ergeben

$$||x \zeta_k|| \geq \frac{1}{q_{n_1,k}} - 4 \frac{q_{n_1,1}}{q_{n_1+1,k}} = \frac{1}{q_{n_1,k}} - 4 \frac{c_{h+1}}{c_{h+2}}.$$

Jedoch gilt wegen (1.115)-(1.116) wieder $\frac{c_{h+1}}{c_{h+2}} = o(c_{h+2-k}^{-1}) = o(c_{n_1,k}^{-1})$ und letztlich

$$\frac{1}{q_{n_1,1}} - o(c_{h+2-k}^{-1}) \leq ||\zeta_k x|| \leq \max_{1 \leq t \leq k} ||\zeta_t x||.$$

Aus $q_{n_1,k} = c_{h+2-k}$ folgt (1.118) in diesem Fall. Falls c_{h+1} in einer anderen Folge $(q_{n,i})_{n \geq 1}$, $i \neq k$ liegt, können wir ganz analoge Abschätzungen auf $\zeta_{i+1} = \zeta_{i+1}$ anstatt ζ_k anwenden. Damit ist unsere Voraussetzung auch hier keine Einschränkung. Folglich stimmt (1.118) in jedem Fall.

Wir müssen noch (1.119) nachweisen. Vorerst gelte wieder $c_{h+1} \in (q_{n,1})_{n \geq 1}$. Wir schreiben wieder $x = x_1 + x_2$ mit $0 < x_1 < q_{n_1-1,1}$ und $q_{n_1-1,1}|x_2$. Beachte, dass wieder $x_1 \neq 0$ aus der Voraussetzung $g \leq h+1-k$, also $c_g \leq c_{h+1-k} = q_{n_1-1,1}$, und der Definition von g folgt. Sei $x < \frac{1}{2}c_{h+1}c_{h+1-k}^{-1} = \frac{1}{2}q_{n_1,1}q_{n_1-1,1}^{-1}$. Spalten wir den Nachkommanteil von $x_2 \zeta_k$, welcher gerade $\sum_{l \leq 0} x_2 c_{h+1+lk}^{-1}$ ist weil die anderen Summanden ganze Zahlen sind wegen der Definition von x_2 , in der Art $\{x_2 \zeta_k\} = ||x_2 \zeta_k|| = \sum_{l \geq 0} x_2 c_{h+1+kl}^{-1} = x_2 c_{h+1}^{-1} + \sum_{l \geq 1} x_2 c_{h+1+kl}^{-1}$ auf und verwenden $x_2 \leq x$, folgern wir

$$\|x_2 \zeta_1\| \leq \frac{1}{2} c_{h+1-k}^{-1} + \sum_{l \geq 1} c_{h+1} c_{h+1-k}^{-1} c_{h+1+k}^{-1} l. \quad (1.123)$$

Die rechte Seite ist offenbar $\frac{1}{2} c_{h+1-k}^{-1} + o(c_{h+1-k}^{-1})$ wegen (1.116).

Andererseits liefern die Definition von x_1 und $c_{h+1-k} = q_{n_1-1,1} \nmid x_1$ wegen $g \leq h+1-k$ nach Voraussetzung, sowie ein zu Fall 1 sehr ähnliches Argument

$$\left\| x_1 \left(\frac{1}{q_{1,1}} + \frac{1}{q_{2,1}} + \cdots + \frac{1}{q_{n_1-1,1}} \right) \right\| \geq \frac{1}{q_{n_1-1,1}}.$$

Wegen $x_1 < q_{n_1-1,1}$ ist die Summe der fehlenden Terme von $\zeta_1 x_1$, also $x_1 \sum_{l \geq 0} \frac{1}{q_{n_1+l,1}}$, nach oben durch $2 \frac{q_{n_1-1,1}}{q_{n_1,1}}$ beschränkt mit Abschätzungen wie in (1.122). Insgesamt

$$\|x_1 \zeta_1\| \geq \frac{1}{q_{n_1-1,1}} - 2 \frac{q_{n_1-1,1}}{q_{n_1,1}} = \frac{1}{q_{n_1-1,1}} - o\left(\frac{1}{q_{n_1-1,1}}\right) = c_{h+1-k}^{-1} - o(c_{h+1-k}^{-1}) \quad (1.124)$$

mit analoger Argumentation wie in Fall 1. Dreiecksungleichung angewandt auf (1.123), (1.124) liefert

$$\max_{1 \leq t \leq k} \|\zeta_t x\| \geq \|\zeta_1 x\| \geq \frac{1}{2} c_{h+1-k}^{-1} - o(c_{h+1-k}^{-1}).$$

Damit ist also gezeigt, dass $x < \frac{1}{2} c_{h+1} c_{h+1-k}^{-1}$ der Abschätzung (1.119) widerspricht und die Voraussetzung $c_h \in (q_{n,1})_{n \geq 1}$ kann stellt offenbar keine Einschränkung dar.

2. Schritt: Sei ein Parameter X aus der Definition der ω_j fest gewählt, und dazu m mit $c_m \leq X < \frac{c_{m+1}}{4}$. Dann können für $1 \leq j \leq k+1$ eine Menge von j Vektoren $(x^{(i)}, y_1^{(i)}, \dots, y_k^{(i)})_{1 \leq i \leq j}$ die den Bedingungen (1.83), (1.84) genügen nur dann linear unabhängig sein, wenn c_{m+2-j} (mindestens) einen der Ausdrücke $x^{(i)}$ nicht teilt. Natürlich sind nur Vektoren interessant, welche (1.84) erfüllen, da die Approximation sonst schlecht ist. Siehe auch Lemma 1.1 und beachte, dass die dortige Voraussetzung $\mathbb{Q}$ -linearen Unabhängigkeit in unserem Fall erfüllt ist.

Beweis: Sei oBdA $c_m \in (q_{n,1})_{n \geq 1}$, also $c_m = q_{m_1,1}$ für ein $m_1 \in \mathbb{N}$ und folglich $c_{m+1} = q_{m_1+1,k}$. Der Beweis für c_m in einer anderen Folge verläuft ganz analog. Angenommen c_{m-j+2} wäre für alle $1 \leq i \leq j$ Teiler von $x^{(i)}$. Nach unserer Voraussetzung sind die $(j-1)$ Zahlen $c_{m-j+2}, c_{m-j+3}, \dots, c_m$ einerseits zu den Folgen $q_{n,1}, q_{n,2}, \dots, q_{n,j-1}$ gehörig. Bemerke nun andererseits, dass Voraussetzung $c_u | c_{u+1}$ für alle $u \geq 1$ zusammen mit $c_{m-j+2} | x^{(i)}$ für alle $1 \leq i \leq j$ impliziert, dass für alle $s \leq m-j+2$ die Zahl c_s Teiler von $x^{(i)}$ ist. Weiter folgt aus diesen beiden Feststellungen, dass für $g \notin \{1, 2, \dots, j-2\}$, also $g \in G := \{j-1, j, \dots, k\}$, die Teilsumme $x^{(i)} \sum_{r=1}^{m_1} \frac{1}{q_{r,g}}$ von $\zeta_g x^{(i)}$ eine ganze Zahl ist, weil dies auf jeden einzelnen Summanden $\frac{x^{(i)}}{q_{r,g}}$ zutrifft. Weil sich weiters die fehlenden Terme höherer als m_1 -ter Ordnung in $\zeta_g x^{(i)}$ für $g \in G \setminus \{k\}$ offensichtlich zu einer Zahl kleiner als $\frac{1}{2}$ aufsummieren bedeutet dies für alle $i \leq j$ und $g \in G \setminus \{k\}$ folglich gerade

$$\left\| \zeta_g x^{(i)} \right\| = \zeta_g x^{(i)} - \left\lfloor \zeta_g x^{(i)} \right\rfloor = \sum_{r=m_1+1}^{\infty} \frac{1}{q_{r,g}} < \frac{1}{2}, \quad (1.125)$$

und zusammen mit (1.84) folgt weiter

$$y_g^{(i)} = \left\lfloor \zeta_g x^{(i)} \right\rfloor = x^{(i)} \sum_{r=1}^{m_1} \frac{1}{q_{r,g}}. \quad (1.126)$$

Wegen unserer Voraussetzung $X < \frac{c_{m+1}}{4} = \frac{q_{m+1+1,k}}{4}$ folgen obige Resultate (1.125),(1.126) aber in gleicher Weise auch für $g = k$. Für alle $g \in G$ gilt also sicher (1.126). Daraus sieht man nun leicht

$$\frac{x^{(a)}}{x^{(b)}} = \frac{y_g^{(a)}}{y_g^{(b)}}, \quad g \in G, \quad 1 \leq a, b \leq j.$$

Damit haben in der Systemmatrix, in deren i -ter Zeile der i -te Approximationsvektor $(x^{(i)}, y_1^{(i)}, \dots, y_k^{(i)}) \in \mathbb{Z}^{k+1}$ steht ($1 \leq i \leq j$), die erste zusammen mit den letzten $|G| = k - j + 2$ Spalten zusammen Rang 1. Damit kann der Gesamtrang der Matrix höchstens $1 + [(k+1) - 1 - (k-j+2)] = j - 1 < j$ sein. Demnach sind die j Zeilen linear abhängig, ein Widerspruch. Es kann demnach c_{m-j+2} nicht alle $x^{(i)}$ teilen, wie behauptet.

3.Schritt: Wir zeigen, dass für festes j die Approximationskonstante $\omega_j(X)$ durch einen der Ausdrücke aus der Definition von $\wp_j(\eta)$ (abhängig von $\log(X)$) nach oben beschränkt ist. Dazu sei X beliebig vorgegeben und h der durch $c_h \leq X < c_{h+1}$ festgelegte Index. Man kann oBdA annehmen, dass X sogar in einem Intervall der Form $[c_h, \frac{c_{h+1}}{4})$ liegt, da es asymptotisch keinen Unterschied macht, ob man für $X = \frac{c_{h+1}}{4}$ und einen beliebigen Approximationsvektor $\mathbf{x} := (x, y_1, \dots, y_k)$ den Logarithmus von $D_{\mathbf{x}} := \max_{1 \leq t \leq k} |\zeta_t x - y_t|$, $x \leq X$, zur Basis $X = \frac{c_{h+1}}{4}$, was gerade $\omega_j(X)$ entspricht, oder zur Basis c_{h+1} betrachtet. Tatsächlich berechnet man

$$\begin{aligned} \log_{c_{h+1}}(D_{\mathbf{x}}) &= \frac{\log(D_{\mathbf{x}})}{\log(c_{h+1})}, \quad \log_{\frac{c_{h+1}}{4}}(D_{\mathbf{x}}) = \frac{\log(D_{\mathbf{x}})}{\log(\frac{c_{h+1}}{4})} \\ \text{und} \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\log(c_{h+1})}{\log(\frac{c_{h+1}}{4})} &= \lim_{c_{h+1} \rightarrow \infty} \frac{\log(c_{h+1})}{\log(\frac{c_{h+1}}{4})} = \lim_{c_{h+1} \rightarrow \infty} \frac{c_{h+1}}{c_{h+1} - \log(4)} = 1 \end{aligned}$$

sodass also

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\log_{c_{h+1}}(D_{\mathbf{x}})}{\log_{\frac{c_{h+1}}{4}}(D_{\mathbf{x}})} = 1. \quad (1.127)$$

Schließlich sind, weil man sich bei $\mathbf{x}$ auf Vektoren zu ω_j mit $j \geq 2$ (für $j = 1$ ist nichts zu zeigen) beschränken kann alle Ausdrücke $\log_{c_{h+1}}(D_{\mathbf{x}})$ für h hinreichend groß durch $2\omega_2 \leq 2$ (siehe (1.48)) beschränkt. Zusammen mit (1.127) und da dies für alle X zutrifft, ergibt die Definition der Größen ω_j sofort, dass obige Änderung der Basis diese unverändert lässt.

Sei also $h = h(X)$ der durch $c_h \leq X < \frac{c_{h+1}}{4}$ bestimmte Index. Nach Schritt 2 muss mindestens einer der j linear unabhängigen Approximationsvektoren $(x, y_1, y_2, \dots, y_k) \in \mathbb{Z}^{k+1}$ die Bedingung $c_{h-j+2} \nmid x$ erfüllen. Betrachte einen solchen Approximationsvektor. Sei g der größte Index, für den $c_{g-1} \mid x$, was $c_l \mid x$ für $l \leq g-1$ und $c_l \nmid x$ für $l \geq g$ bedeutet wegen (1.113). Speziell gilt $c_g \nmid x$. Die Feststellung eben bedeutet gerade $g \geq h+2-j$. Sei weiter i der Index, für welchen $c_h = q_{N,i}$ in der Folge $(q_{n,i})_{n \geq 1}$ ist. Im folgenden werden wir wiederholt die Abschätzungen aus Schritt 1 unter Vernachlässigung der o -Terme in (1.117),(1.118),(1.119) verwenden, da diese offenbar keinen Effekt auf die folgenden asymptotischen Abschätzungen haben.

Zuerst behandeln wir den Fall $c_g \geq q_{N-1,i}$ (Fall 1 Schritt 1). Beachte zunächst, dass $\frac{c_{m-1}}{c_m}$ mit steigendem m monoton fallend ist. Deshalb folgt aus $g \leq h+2-j$ und (1.117)

$$\max_{1 \leq t \leq k} |x\zeta_t - y_t| \leq \frac{c_{h-j+1}}{c_{h-j+2}} - o\left(\frac{c_{h-j+1}}{c_{h-j+2}}\right), \quad h \rightarrow \infty.$$

Zusammen mit $X \geq c_h$ folgt

$$-\log_X \max_{1 \leq t \leq k} |x\zeta_t - y_t| \leq -\frac{\log(\frac{c_{h-j+1}}{c_{h-j+2}})}{\log(c_h)} = -\frac{\log(c_{h-j+1}) - \log(c_{h-j+2})}{\log(c_h)}.$$

Man sieht nun leicht mit (1.115)-(1.116), dass wenn man h aus einer festen Klasse $\bar{h}$ des Repräsentantensystems $\{1, 2, \dots, k\} \bmod k$ wählt, der Ausdruck auf der rechten Seite asymptotisch einen Wert aus der Definition der Ausdrücke $\wp_j(\eta)$ oder Null konvergiert wenn $h \rightarrow \infty$ bzw $X \rightarrow \infty$. Klarerweise ist auch jeder Ausdruck in $\wp_j(\eta)$ auf diese Weise von einer Klasse $\bar{h}$ induziert. Nach der Definition der Größen ω_j ist dieser Fall damit erledigt.

Im verbleibenden Fall $c_g < q_{N-1,i}$ (Fall 2 Schritt 1) folgt aus (1.118) und weil c_{h+1} in (1.118) dem Wert $q_{N,i}$ entspricht, dass $\max_{1 \leq t \leq k} |x\zeta_t - y_t|$ im wesentlichen nach unten durch $\frac{1}{q_{N-1,i+1}}$ beschränkt ist (wenn man die Terme geringer Ordnung vernachlässigt und i im Repräsentantensystem $\{1, 2, \dots, k\} \bmod k$ zu verstehen). Wir unterscheiden nun 3 Fälle.

Falls $i \notin \{k-1, k\}$, ist die Approximation relativ zur Basis X schlecht, denn in diesem Fall haben wir einerseits $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{q_{N-1,i+1}}{q_{N,i}} = 0$ wegen (1.116), und andererseits wieder mit $X \geq c_h = q_{N,i}$

$$-\log_X \max_{1 \leq t \leq k} |x\zeta_t - y_t| \leq -\log_{c_h} \max_{1 \leq t \leq k} |x\zeta_t - y_t| \leq \frac{q_{N-1,i+1}}{\log(c_h)} = \frac{\log(q_{N-1,i+1})}{\log(q_{N,i})}$$

was also gegen 0 strebt für $X \rightarrow \infty$, also wieder keine Verbesserung liefert.

Im Fall $i = k$, oder äquivalent $q_{N,k} \leq X < q_{N+1,1}$, liefern $c_g < q_{N-1,i} = q_{N-1,k}$ zusammen mit (1.118) $\max_{1 \leq t \leq k} |x\zeta_t - y_t| \leq \frac{1}{q_{N,1}}$ und wegen $X \geq q_{N,k}$

$$-\log_X \max_{1 \leq t \leq k} |x\zeta_t - y_t| \leq -\log_{q_{N,k}} \max_{1 \leq t \leq k} |x\zeta_t - y_t| \leq \frac{\log(q_{N,1})}{\log(q_{N,k})}$$

und wegen (1.116) gilt für $h \rightarrow \infty$ die Asymptotik

$$\frac{\log(q_{N,1})}{\log(q_{N,k})} \sim \frac{\log(q_{N,1}) - \log(q_{N-1,k})}{\log(q_{N,k})} + o\left(\frac{\log(q_{N,1})}{\log(q_{N,k})}\right).$$

Die rechte Seite konvergiert aber gegen $\eta_{k+1} = \wp_{k+1}(\eta)$ für $N \rightarrow \infty$ wegen (1.115). Daraus schließen wir in diesem Fall weiter $\omega_j \leq \wp_{k+1}(\eta)$ für $1 \leq j \leq k+1$ und weil auch $\wp_{k+1}(\eta) \leq \wp_j(\eta)$ für $1 \leq j \leq k+1$ gilt insgesamt $\omega_j(\eta) \leq \wp_j(\eta)$ wie gefordert.

Wir unterteilen den übrig gebliebenen Fall $i = k-1$, also $q_{N,k-1} \leq X < q_{N,k}$, in 2 Fälle. Falls $x < \frac{1}{2} \frac{q_{N,k}}{q_{N-1,k}}$, ergibt (1.119) dass $\max_{1 \leq t \leq k} |x\zeta_t - y_t|$ im wesentlichen durch $\frac{1}{2} \frac{1}{q_{N-1,k}}$ nach unten beschränkt ist. Man folgert daraus die Asymptotik

$$-\log_X \max_{1 \leq t \leq k} |x\zeta_t - y_t| \leq \frac{\log(\frac{1}{2} q_{N-1,k})}{\log(q_{N,k-1})} \leq \frac{\log(q_{N-1,k}) - \log(2)}{\log(q_{N,1})},$$

was für $X \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert wegen (1.116).

Andernfalls $x \geq \frac{1}{2} \frac{q_{N,k}}{q_{N-1,k}}$, woraus wegen (1.116) $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log(x)}{\log(q_{N,k})} = 1$ folgt. Es gilt also für beliebiges $\epsilon > 0$ und N hinreichend groß $\log(x) > (1 + \epsilon) \log(q_{N,k})$. Beachte $X \geq x$ und dass $X \rightarrow \infty$ äquivalent zu $N \rightarrow \infty$ ist. Kombination dieser Tatsachen und weil wieder wegen (1.118) $\max_{1 \leq t \leq k} |x\zeta_t - y_t|$ im wesentlichen durch $\frac{1}{q_{N,1}}$ nach unten beschränkt ist liefern

$$-\log_X \max_{1 \leq t \leq k} |x\zeta_t - y_t| \leq \frac{\log(q_{N,1} + o(\log(q_{N,1})))}{\log(q_{N,k}(1 + \epsilon))}.$$

was wieder für $\epsilon \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$ gegen $\eta_{k+1} = \wp_{k+1}(\eta)$ konvergiert wie im Fall $i = k$. Das zeigt Schritt 3. □

Bemerkungen: 1) Man kann die Bedingungen des Satzes abschwächen durch eine der folgenden Bedingungen

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 \quad \exists \quad r_0(\epsilon) : \quad \text{kgV}(c_1, c_2, \dots, c_r) \leq c_r^{1+\epsilon} \quad \forall r \geq r_0 \in \mathbb{N} \\ \text{bzw} \quad \exists \quad C > 0 : \quad \text{kgV}(c_1, c_2, \dots, c_r) \leq C c_r \quad \forall r \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

wobei $(c_n)_{n \geq 1}$ wie im Beweis von Satz 1.15 die monoton geordnete gemischte Folge, die aus allen $q_{i,n}$ entsteht, darstellt. Die Folge $(d_n)_{n \geq 1}$ mit $d_n := \text{kgV}(c_1, c_2, \dots, c_n)$ stellt in diesem Fall die Folge der x -Koordinaten von guten Approximationsvektoren dar die im Spezialfall $d_n = c_n$ aus Satz 1.15 einfach $(c_n)_{n \geq 1}$ entsprochen hat. Bei der Rückrichtung $\omega_j \leq \wp_j(\eta)$ kann man die Argumentation von Schritt 1 bis 3 wörtlich übernehmen und bemerken, dass es asymptotisch keinen Unterschied macht, ob man Logarithmen zur Basis c_i oder d_i betrachtet. Vergleiche dazu den Beweis von Schritt 3, wo ein ganz ähnliches Argument am Anfang verwendet wurde.

2) Die teilweise einfacheren Beweisschritte zeigen, dass die Teilbarkeitsbedingung die natürlichere Forderung ist, um die Resultate von Satz 1.12 zu erhalten.

3) Wählt man die natürlicher wirkende Notation

$$q_{1,1} < q_{1,2} \dots < q_{1,k} < q_{2,1} < \dots < q_{2,k} < q_{3,1}$$

so muss man bei entsprechender Definition der η_i via

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(q_{n+1,1})}{\log(q_{n,k})} = \eta_{k+1} &= \infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(q_{n,i+1}) - \log(q_{n,i})}{\log(q_{n,k})} &= \eta_i, \quad 1 \leq i \leq k \end{aligned}$$

jeweils in den Formeln für ω_j die Ersetzung $\eta_i \leftrightarrow \eta_{k+2-i}$ für $i \leq i \leq k+1$ vorgenommen werden und es würden die Ungleichungszeichen von (1.70) in die umgekehrte Richtung zeigen.

Ganz analog kann man andere Sätze aus früheren Abschnitten verallgemeinern, es seien noch ein paar Beispiele ohne Beweise angegeben.

Satz 1.16. Es seien $(q_{n,1})_{n \geq 1}, (q_{n,2})_{n \geq 1}, \dots, (q_{n,k})_{n \geq 1}$ eine Menge von k Folgen natürlicher Zahlen, die (1.112), (1.113) genügen und wieder

$$\zeta_j = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_{n,j}}, \quad 1 \leq j \leq k.$$

Die Folge der Logarithmen der geordneten gemischten Folge sei mit $(b_n)_{n \geq 1}$ bezeichnet, also $(b_n)_{n \geq 1} = (\log(q_{k,1}), \log(q_{k-1,1}), \dots)$ und es gelte

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} > 2.$$

Dann sind die ersten $(k-1)$ Approximationskonstanten von $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \omega &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{b_n}, & \hat{\omega} &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - b_{n-1}}{b_n} \\ \omega_2 &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - b_{n-1}}{b_n}, & \hat{\omega}_2 &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-1} - b_{n-2}}{b_n} \\ \omega_3 &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-1} - b_{n-2}}{b_n}, & \hat{\omega}_3 &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-2} - b_{n-3}}{b_n} \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ \omega_{k-1} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-k+3} - b_{n-k+2}}{b_n}, & \hat{\omega}_{k-1} &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-k+2} - b_{n-k+1}}{b_n}. \end{aligned}$$

Weiter gelten für die letzten beiden Approximationskonstanten die Ungleichungen

$$\begin{aligned}\omega_k &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-k+2} - b_{n-k+1}}{b_n}, & \hat{\omega}_k &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-k+1} - b_{n-k}}{b_n} \\ \omega_{k+1} &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-k+1} - b_{n-k}}{b_n}, & \hat{\omega}_{k+1} &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n-k} - b_{n-k-1}}{b_n}.\end{aligned}$$

Beweis: Vergleiche Beweis Satz 1.13. □

Korollar 1.10. Gelte unter den Voraussetzungen des letzten Satzes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = C > 2.$$

Dann sind die ersten $(k-1)$ Approximationskonstanten gegeben durch

$$\begin{aligned}\omega &= C - 1 \\ \omega_2 &= \frac{C-1}{C} = \hat{\omega} \\ \omega_3 &= \frac{C-1}{C^2} = \hat{\omega}_2 \\ &\vdots \\ \omega_{k-1} &= \frac{C-1}{C^{k-2}} = \hat{\omega}_{k-2} \\ &\quad \frac{C-1}{C^{k-1}} = \hat{\omega}_{k-1}.\end{aligned}$$

Weiter erfüllen die letzten beiden Approximationskonstanten die Beziehungen

$$\begin{aligned}\omega_k &\geq \frac{C-1}{C^{k-1}} \\ \omega_{k+1} &\geq \hat{\omega}_k \geq \frac{C-1}{C^k} \\ \hat{\omega}_{k+1} &\geq \frac{C-1}{C^{k+1}}\end{aligned}$$

Beweis: Analog zum Beweis von Korollar 1.6. □

Eine Veranschaulichung von Korollar 1.10 im Fall $k=2, C=2.3$ ist in Abbildung 1.2 zu sehen. Wir wollen hier schon auf die Ähnlichkeit zu den später folgenden Abbildungen 2.2, 2.4, welche je einen Spezialfall aus Satz 1.14 darstellen werden, hinweisen.

Dabei sind ζ_1, ζ_2 nach dem Schema

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= \frac{1}{q(1)} + \frac{1}{q(3)} + \frac{1}{q(5)} + \frac{1}{q(7)} \\ \zeta_2 &= \frac{1}{q(2)} + \frac{1}{q(4)} + \frac{1}{q(6)} + \frac{1}{q(8)}\end{aligned}$$

konstruiert, wobei $q(1) = 2$ und $q(j+1) = q(j) \lceil q(j)^{1.3} \rceil$ für $1 \leq j \leq 7$, was man sich ad infinitum fortgesetzt denken muss. Es sind nach dieser Konstruktion offensichtlich die Bedingungen (1.112), (1.113) mit $q_{n,1} = q(2n-1), q_{n,2} = q(2n)$ erfüllt sowie $C = 2.3$ in Kontext von Korollar 1.10.

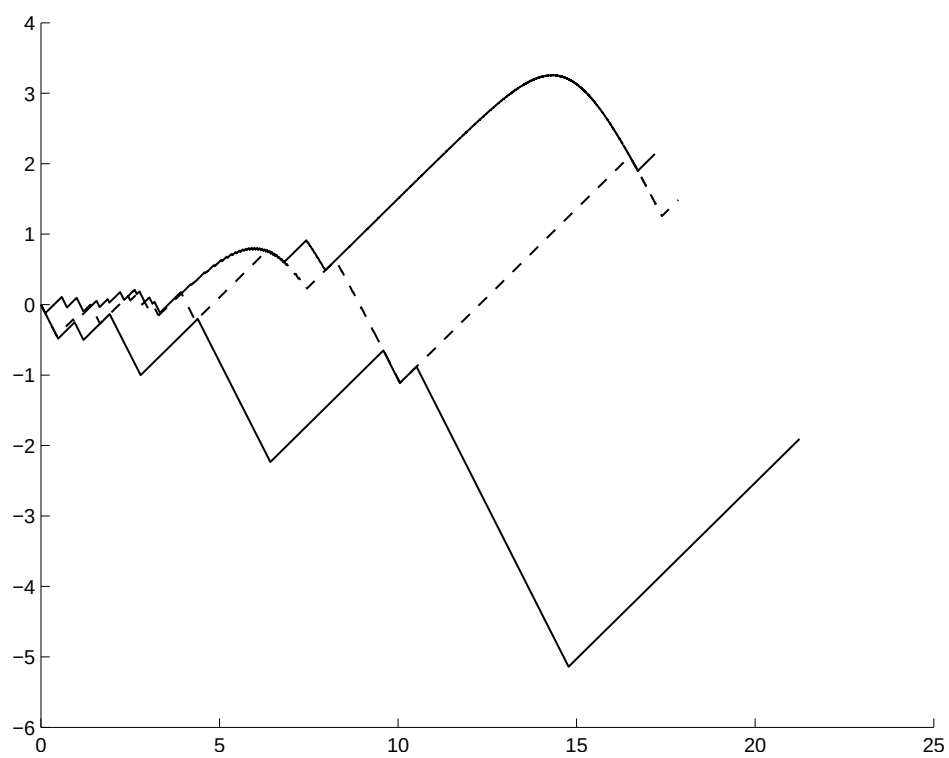


Abbildung 1.2: allgemeinere Liouvillezahlen

Kapitel 2

Das dynamische Verhalten der sukzessiven Minima

2.1 $\psi_j(Q)$ als Funktionen

Bisher haben wir uns beim Studium der Funktionen $\psi_j(Q)$ auf Aussagen über die Werte $\underline{\psi}_j, \bar{\psi}_j$ beschränkt. Dies ist ausreichend, um das asymptotische Verhalten von $\psi_j(Q)$ zu beschreiben. Nun wollen wir auf das lokale Verhalten der $\psi_j(Q)$ im Spezialfall von Vektoren, deren Komponenten vom Liouvilletyp sind, näher eingehen. Wir betrachten die aus ψ_j mittels

$$L_j(q) = q\psi_j(e^q), \quad \text{mit } q := \log(Q)$$

gewonnenen Funktionen $L_j(q)$. Grundlage der Analyse ist die Darstellung

$$L_i(q) = \min \left\{ L_{\mathbf{x}_i}(q) : \exists (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i) : \dim(\text{span}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i\}) = i, L_{\mathbf{x}_i}(q) = \max_{1 \leq j \leq i} L_{\mathbf{x}_j}(q) \right\}$$

wobei $\mathbf{x} = (x, y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{Z}^{k+1}$ und

$$L_{\mathbf{x}}(q) = \max \left\{ \log |x| - q, \max_{1 \leq j \leq k} \log (|\zeta_j x - y_j|) + \frac{q}{k} \right\} \quad (2.1)$$

auf welcher auch das Matlab-Programm, das die L_i zeichnet, basiert. In Worten besagt die Formel, dass man an allen $\mathbf{x}$ -Stellen die Funktion $L_{\mathbf{x}}(q)$ auswertet, der Größe nach ordnet und den kleinsten Wert $L_{\mathbf{x}_i}(q)$ nimmt, zu dem es $(i-1)$ kleinere (genauer: nicht größere) Werte $L_{\mathbf{x}_j}(q)$, $1 \leq j \leq i-1$ gibt, sodass die Vektoren $\mathbf{x}_j \in \mathbb{Z}^{k+1}$, $1 \leq j \leq i$, linear unabhängig sind. Die Funktion L_i kann stückweise mit $L_{\mathbf{x}_i}$ identifiziert werden.

Da L_i stückweise linear mit Anstiegen -1 oder $\frac{1}{k}$ ist, muss man nur die Knickstellen der Funktionen $L_i(q)$ kennen. Dazu muss man die Vektoren $(x, y_1, \dots, y_k)$ kennen, bei denen eine Änderung der Monotonie von mindestens einem L_i eintritt. Beachte, dass eine Änderung der Monotonie von L_j von steigend auf fallend wegen der Forderung der linearen Unabhängigkeit nicht zwangsläufig eine solche für alle L_j mit größeren Indizes $j > i$ impliziert. In speziell konstruierten Fällen kann man nun hoffen, die x -Werte bei denen eine Monotonieänderung auftritt, einfach ablesen zu können. Die Werte y_j ergeben sich dann einfach als $\lfloor \zeta_j x \rfloor$ (allgemein könnte es auch $\lceil \zeta_j x \rceil$ sein, wir werden aber nur Vektoren $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ betrachten, in denen stets abgerundet wird). Dadurch können lokale Maxima und Minima einfach berechnet werden.

2.1.1 Ein konkretes Beispiel

Zuerst wollen wir zu Beispiel 1 aus Abschnitt 1.2.1 zurückkehren, betrachten also ζ_1, ζ_2 aus (1.64), (1.65). Wir werden der Einfachheit halber nur anhand dieses Beispiels exakt ausführen, wie man das Verhalten der Funktionen ψ_j bestimmen kann. Alle folgenden Abschätzungen lassen sich jedoch leicht auf allgemeinere Fälle, ähnlich denen vorangehender Abschnitte, übertragen. Für unser Vorgehen in diesem Abschnitt ist konkret lediglich die Forderung, dass in der gemischten Folge $(b_n)_{n \geq 1}$, die sich aus den ζ_i in Basis 2 (oder einer anderen) ergibt, alle b_n nahe an Fakultäten liegen und es damit große Lücken von Nullen der Form $[n!(1+\epsilon), (n+1)!(1-\epsilon)]$ gibt, notwendig um im wesentlichen analoge Ergebnisse zu erhalten. Darauf gehen wir später etwas genauer ein, siehe (2.12).

Wir untersuchen zuerst $L_1(q)$ zu Beispiel 1. In Basis 2 ist in der gemischten Folge $(b_n)_{n \geq 1}$ immer ein großer Abstand zwischen einem $b_n = (2m+1)! + 1$ und $b_{n+1} = (2m+2)!$ sowie zwischen $b_n = (2m)!$ und $b_{n+1} = (2m+1)!$. Es bilden also x -Koordinaten von Approximationsvektoren von der Gestalt

$x = 2^{(2m+1)!+1}$ oder $x = 2^{(2m)!}$ zusammen mit $y_i = \lfloor x\zeta_i \rfloor, i = 1, 2$, gute Approximationen. Solche x -Werte scheinen also Kandidaten für das Generieren von lokalen Extrema der Funktion L_1 zu sein. Tatsächlich zeigen wir, dass auch wenn nicht jedes neue Paar von Maxima und Minima von solchen x -Werten hervorgerufen werden muss, das Verhalten der Funktionen L_1 qualitativ fast darauf hinausläuft. Wir geben im folgenden eine Abschätzung für die lokalen Extrema von $L_1(q)$ an.

Dazu untersuchen wir nun genauer, wie gut die Approximation mit x -Werten der Form $x = 2^{(2m+1)!+1}$ oder $x = 2^{(2m)!}$ ist. Nach obiger Feststellung zur gemischten Folge $(b_n)_{n \geq 1}$ gilt für diese x : die Anzahl der Nachkommennulln im Dualsystem bis zur ersten Eins in jedem der beiden Ausdrücke $x\zeta_i, i = 1, 2$, ist $(2m+2)! - ((2m+1)! + 1)$ bzw. $(2m+1)! - (2m)!$. Anders ausgedrückt

$$\begin{aligned} 2^{(2m+1)!+1-(2m+2)!} &\leq \min_{i=1,2} \left[2^{(2m+1)!+1} \zeta_i \right] \leq 2 \cdot 2^{(2m+1)!+1-(2m+2)!}, \quad x = 2^{(2m)!} \quad (2.2) \\ 2^{(2m)!-(2m+1)!} &\leq \min_{i=1,2} \left[2^{(2m)!} \zeta_i \right] \leq 2 \cdot 2^{(2m)!-(2m+1)!}, \quad x = 2^{(2m+1)!+1}. \end{aligned}$$

Dabei sind für uns die rechten Ungleichungen die relevanten. Die Behauptung ist nun, dass alle lokalen Extrema von L_1 durch x -Werte entstehen, die sich der Größe nach wenig von diesen speziellen x -Werten unterscheiden. Sei zuerst $x = 2^{(2m)!}$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Wir behaupten nun konkret:

Das kleinste x_0 , das eine Verbesserung zu (2.2) erzielt, erfüllt

$$2^{(2m+1)!-(2m)!-1} \leq x_0 \leq 2^{(2m+1)!+1}. \quad (2.3)$$

Die rechte Ungleichung gilt, weil für die Wahl $x_0 = 2^{(2m+1)!+1}$ tatsächlich die Verbesserung des Wertes $\min_{i=1,2} \left[2^{(2m+1)!+1} \zeta_i \right]$ von $2^{(2m)!-(2m+1)!}$ auf $2^{(2m+1)!+1-(2m+2)!}$ erreicht wird. Für die linke sei x_0 in Basis 2 dargestellt als $x_0 = \sum_{i=1}^u 2^{a_i}$, wobei $a_1 < a_2 < \dots < a_u$. Die Behauptung (2.3) ist dann äquivalent zu $a_u \geq (2m+1)! - (2m)! - 1$. Angenommen dies wäre falsch. Dann gilt also $a_u \leq (2m+1)! - (2m)! - 2$. Wir unterteilen die a_i in die disjunkten Mengen $A := \{a_i : a_i < (2m)!\}$, $B := \{a_i : a_i \geq (2m)!\}$. Dann gibt es einen Index i_0 , sodass $a_i \in A \iff i \leq i_0$. Es gilt nun $x_0 \zeta_i = S_1(i) + S_2(i)$ wobei

$$\begin{aligned} S_1(i) &:= \sum_{j \leq i_0} 2^{a_j} \zeta_j, & i = 1, 2 \\ S_2(i) &:= \sum_{j > i_0} 2^{a_j} \zeta_j, & i = 1, 2. \end{aligned}$$

Wir schätzen die Abstände der beiden Summen S_1, S_2 , zur nächsten ganzen Zahl einzeln ab, wobei wir die Abhängigkeit von i in der Notation unterdrücken, denn die Rechnung ist für $i = 1, 2$ faktisch die selbe. Dabei werden wir wie beim Beweis von Satz 1.12 hinreichend kleine Terme negativer Zweierpotenzen vernachlässigen, die auf die folgenden Abschätzungen keine quantitativen Auswirkungen haben. Wir zeigen nun folgende *Behauptung A*: die Summen S_1, S_2 erfüllen genau eine der beiden folgenden Bedingungen:

$$\|S_1\| \geq 2^{-(2m)!} \quad \wedge \quad 0 \leq S_2 \leq 2^{-(2m)!-1} \quad (2.4)$$

$$\text{oder} \quad S_1 = 0 \quad \wedge \quad 2^{-(2m+1)!+(2m)!} \leq \|S_2\|. \quad (2.5)$$

Die Mengen A, B können nicht beide leer sein. Ist $A = \emptyset$, so wird bei S_1 offenbar der Wert 0 angenommen. Dann ist aber $B \neq \emptyset$ und damit S_2 nicht die leere Summe. Jeder Summand von S_2 ist nach Definition von B bzw S_2 (und weil in ζ_1 der Term $2^{-(2m+1)!}$ auftritt) $\geq 2^{-(2m+1)!+(2m)!}$. Damit ist die Summe, also S_2 , ebenfalls durch diesen Wert nach unten beschränkt. Andererseits ist nach Voraussetzung an a_u die Beziehung $S_2 \leq 2 \cdot 2^{-(2m+1)!+(2m)!+2} < \frac{1}{2}$ erfüllt. Damit ist 0 die nächste ganze Zahl an S_2 und zusammen mit dem bereits gezeigten folgt also (2.5).

Im Falle $A \neq \emptyset$ beobachten wir, dass für jeden einzelnen Term der nichtleeren Summe S_1 die Ungleichung $2^{a_j \zeta_i} \geq 2^{-(2m)!}$ gilt. Indem man alle Summanden auf gemeinsamen Nenner $2^{-(2m)!+a_1} \geq 2^{-(2m)!}$ bringt und erkennt, dass der Zähler ungerade ist, weil a_1 echt kleiner als alle anderen a_i ist, während im Nenner höchstens $2^{(2m)!}$ steht, ergibt sich die linke Ungleichung aus (2.4). (Dieses Argument beruht auf der 2-adischen Bewertung und ist in ähnlicher Form schon in anderen Beweisen aufgetreten). Nach der getroffenen Voraussetzung $a_u \leq (2m+1)! - (2m)! - 2$ ist jeder Summand von S_2 nach oben durch $2^{-(2m)!-2}$ unter Vernachlässigung von Termen niedriger Ordnung als $2^{-(2m+1)!}$ in $\zeta_i, i = 1, 2$, abzuschätzen. Mittels geometrischer Reihe lässt sich also S_2 durch das doppelte dieses Wertes nach oben abschätzen, was schließlich exakt die rechte Seite von (2.4) liefert. Damit ist *Behauptung A* gezeigt.

Aus der Korrektheit der *Behauptung A* folgern wir nun weiter: Ist Bedingung (2.4) erfüllt, so gilt $\min_{i=1,2} \|x_0 \zeta_i\| = \|S_1 + S_2\| \geq 2^{-(2m)!} - 2^{-(2m)!-1} = 2^{-(2m)!-1}$. Wegen $(2m)! + 1 < (2m+1)! - (2m)!$ haben wir wie gefordert keine Verbesserung zu $x = 2^{(2m)!}$ erzielt. Andererseits führt der Fall (42) ebenfalls bestenfalls zur gleichen Approximationsgüte, die von x induziert wird. Damit ist (2.3) bewiesen.

Indem man analog im Falle $x = 2^{(2m+1)!+1}$ verfährt, erhält man das entsprechende Ergebnis, dass

$$2^{(2m+2)!-(2m+1)!-2} \leq x_0 \leq 2^{(2m+2)!} \quad (2.6)$$

gelten muss, um eine bessere simultane Approximation als die von x zu erhalten.

Nun wollen wir die Güte der Approximationen von *allen Vektoren* x_0 abschätzen, die wiederum (2.3) respektive (2.6) für ein festes aber beliebiges m erfüllen und eine Verbesserung zu der von $x = 2^{(2m)!}$ respektive $x = 2^{(2m+1)!+1}$ darstellen. Sei zuerst $x = 2^{(2m)!}$. Wir behaupten: Im Fall $x = 2^{(2m)!}$ sind die Approximation aller x_0 , die unter Bedingung (2.3) eine Verbesserung hervorrufen, von der Güte

$$2^{-(2m+2)!+(2m+1)!-(2m)!} \leq \min_{i=1,2} \|\zeta_i x_0\| \leq 2^{-(2m+2)!+(2m+1)!+2} \quad (2.7)$$

$$\text{oder} \quad 2^{-(2m+1)!-1} \leq \min_{i=1,2} \|\zeta_i x_0\| \leq 2^{-(2m+1)!+(2m)!}. \quad (2.8)$$

Dies beweisen wir nun. Die linke Ungleichung von (2.8) gilt nach Voraussetzung, da es sich um

eine Verbesserung handeln soll. Die linke Ungleichung von (2.7) gilt wegen $x_0 \geq 2^{(2m+1)!-(2m)!}$. Für die wesentlicheren rechten Ungleichungen spalten wir ζ_1, ζ_2 auf in

$$\zeta_i = Z_{1,i} + Z_{2,i} := \sum_{a_j \leq (2m+1)!+1} 2^{-a_j} + \sum_{a_j > (2m+1)!+1} 2^{-a_j}, \quad i = 1, 2$$

wobei a_j die Einsen in der Nachkommaentwicklung zur Basis 2 von ζ_i sind. Man erkennt mit der 2-adischen Bewertung, dass $\|Z_{1,i}x_0\| = 0$ oder $\|Z_{1,i}x_0\| \geq 2^{-(2m+1)!}$ ist. Andererseits ist wegen $x_0 \leq 2^{(2m+1)!+1}$ durch die geometrische Reihe die Abschätzung $Z_{2,i}x_0 \leq 2^{-2 \cdot [(2m+2)!-(2m+1)!-1]}$ möglich. Also mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \|\zeta_i x_0\| &= \|Z_{1,i}x_0 + Z_{2,i}x_0\| \leq 2^{-2 \cdot [(2m+2)!-(2m+1)!-1]}, \\ \text{respektive } \|\zeta_i x_0\| &= \|Z_{1,i}x_0 + Z_{2,i}x_0\| \geq 2^{-(2m+1)!-1} \end{aligned}$$

im Fall $Z_{1,i}x_0 = 0$, respektive $Z_{1,i}x_0 \geq 2^{-(2m+1)!}$ ist. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Die Ungleichungen (2.7) sagen aus, dass eine Verbesserung der aus x gewonnenen alten Approximation $2^{-(2m+1)!+(2m)!}$ sehr gut ist, hingegen tritt im Fall von (2.8) eine sehr schwache Verbesserung auf. Die Wahl $x_0 = 2^{(2m+1)!}$ liefert jedoch eine gute Approximation gemäß (2.7), es wird genau der Wert $\min_{i=1,2} \|\zeta_i x_0\| = 2^{-(2m+2)!+(2m+1)!}$ angenommen. Es gibt also ein x_1 im Intervall $[2^{(2m+1)!-(2m)!-1}, 2^{(2m+1)!}]$, bei dem eine Verbesserung der Approximation von $\min_{i=1,2} \|\zeta_i x_1\| \in [2^{-(2m+1)!-1}, 2^{-(2m+1)!+(2m)!}]$ auf einen Wert $\min_{i=1,2} \|\zeta_i x_1\| \in [2^{-(2m+2)!+(2m+1)!-(2m)!}, 2^{-(2m+2)!+(2m+1)!+2}]$ auftritt.

Indem man im wesentlichen analog verfährt, sieht man im Fall $x = 2^{(2m+1)!+1}$, dass es ein x_2 im Intervall aus (2.6) gibt, bei dem eine Verbesserung des Wertes $\min_{i=1,2} \|\zeta_i x_1\|$ von einem Wert in $[2^{-(2m+2)!-C}, 2^{-(2m+2)!+(2m+1)!+C}]$ auf einen Wert in $[2^{-(2m+3)!+(2m+2)!-(2m+1)!-C}, 2^{-(2m+3)!+(2m+2)!+1+C}]$ mit einem kleinen C - $C = 3$ ist sicher hinreichend- auftritt.

Wir wollen nun mithilfe dieser Charakterisierungen die Funktion $L_1(q)$ näherungsweise beschreiben. Aufgrund von (2.3), (2.6) treten für alle $\epsilon > 0$ Monotonieänderungen von L_1 von steigend auf fallend für $h \geq h_0(\epsilon)$ nur in Bereichen der Form $x_0 \in A_h := [h!(1-\epsilon), h!(1+\epsilon)]$ auf und wie oben gesehen existiert in jedem Intervall A_h ein Wert $x_1(h)$ oder $x_2(h)$, der die neue optimale Bestapproximation zumindest bis zum Intervallanfang vom folgenden A_{h+1} festlegt und diese ist von der Güte $\min_{i=1,2} \|x_{1/2}(h)\zeta_i\| \in [2^{-(h+1)!(1+\epsilon)}, 2^{-(h+1)!(1-\epsilon)}]$. (Man erkennt, dass dies eine starke Abschwächung obiger Ergebnisse ist, was problemlos die Adaption auf die allgemeineren Fälle (2.11), (2.12) zulässt.) Dabei soll $x_{1/2}(h)$ andeuten, dass es sich entweder $x_1(h)$ oder $x_2(h)$ handelt, je nachdem ob h gerade oder ungerade ist.

Nun können wir dieses Wissen auf (2.1) anwenden, um die durch $x_{1/2}(h)$ hervorgerufenen Knickpunkte $(q_h, L_1(q_h))$ von L_1 näherungsweise zu berechnen. Sei h hinreichend groß fest gewählt. Sei $\mathbf{x}_{1/2}(\mathbf{h}) \in \mathbb{Z}^3$ der zu $x_{1/2}(h)$ gehörige Approximationsvektor. Das Minimum $\underline{q}_h$ der Funktion $L_{\mathbf{x}_{1/2}(\mathbf{h})}$ berechnet sich durch Gleichsetzen der beiden Ausdrücke im Maximum von (2.1), was zunächst auf

$$\frac{2}{3} \log(2)[h!(1-\epsilon) + (h+1)!(1-\epsilon)] \leq \underline{q}_h \leq \frac{2}{3} \log(2)[h!(1+\epsilon) + (h+1)!(1+\epsilon)]$$

führt und mit $\epsilon_0 = 2\epsilon$

$$\frac{2}{3} \log(2)(h+1)!(1-\epsilon_0) \leq \underline{q}_h \leq \frac{2}{3} \log(2)(h+1)!(1+\epsilon_0).$$

Anders ausgedrückt haben wir die Asymptotik

$$\underline{q}_h \sim \frac{2}{3} \log(2)(h+1)!. \quad (2.9)$$

Der zugehörige Funktionswert $L_1(\underline{q}_h) = \log(|x_{1/2}(h)|) - \underline{q}_h$ genügt den Beziehungen

$$\log(2)h!(1-\epsilon) - \frac{2}{3} \log(2)(h+1)!(1+\epsilon_0) \leq L_1(\underline{q}_h) \leq \log(2)h!(1+\epsilon) - \frac{2}{3} \log(2)(h+1)!(1-\epsilon_0).$$

Man sieht für $h \rightarrow \infty$ das asymptotische Verhalten $L_1(\underline{q}_h) \sim -\frac{2}{3} \log(2)(h+1)! \sim -\underline{q}_h$, das $\underline{\psi}_1 = -1$ bestätigt.

Die lokalen Maxima von L_1 ergeben sich durch schneiden des steigenden Teils eines $L_{x_{1/2}(h)}$ mit dem fallenden Anteil von $L_{x_{1/2}(h+1)}$. Mit $x_{1/2}(h+1) \sim \log(2)(h+1)!$ und $\min_{i=1,2} \|x_{1,2}(h)\zeta_i\| \sim \log(2)(h+1)!$ ergibt sich $\bar{q}_h$ näherungsweise als Lösung von

$$\log(2)(h+1)! - \bar{q}_h = \frac{\bar{q}_h}{2} - \log(2)(h+1)!$$

und damit

$$\bar{q}_h \sim \frac{2}{3} 2(h+1)! \log(2) = \frac{4}{3} \log(2)(h+1)!. \quad (2.10)$$

Der zugehörige Funktionswert berechnet sich zu mit $x_{1,2}(h+1) \sim \log(2)(h+1)!$ zu

$$L_1(\bar{q}_h) \sim -\bar{q}_h + (h+1)! \log(2) = -\frac{1}{3} \log(2)(h+1)!.$$

Man bestätigt an diesen lokalen Maxima $\frac{L_1(\bar{q}_h)}{\bar{q}_h} \sim -\frac{1}{4}$. Tatsächlich gilt $\bar{\psi}_1 = -\frac{1}{4}$, was man mithilfe von (1.40) aus $\hat{\omega} = 1$ folgert, was wir in unserem Beispiel nachgewiesen haben. Wir haben also die Stellen mit den extremen Werten von ψ_1 asymptotisch bestimmt.

Zusammenfassend haben wir also die folgende Beschreibung von $L_1(q)$ gefunden: $L_1(q)$ ist bis auf kürzere Ausnahmebereiche in der Nähe von Punkten der Form $q = \frac{2}{3} \log(2)h!$ bzw

$q = \frac{4}{3} \log(2)h!$, die im Vergleich zu den Intervalllängen gegen 0 konvergieren, auf Intervallen der Form $[\frac{2}{3} \log(2)h!, \frac{4}{3} \log(2)h!]$ monoton steigend mit Steigung $\frac{1}{2}$ und auf den verbleibenden Intervallen $[\frac{4}{3} \log(2)h!, \frac{2}{3} \log(2)(h+1)!]$ monoton fallend mit Steigung -1 . Abbildung 2.1 illustriert schematisch dieses Verhalten von $L_1(q)$. Beachte, dass Abbildung 2.1 *kein Programplot* ist.

Bevor wir zu den höheren ψ_j kommen noch ein paar Verallgemeinerungen der Resultate zu ψ_1 . Beachte, dass wir von der genauen Struktur von ζ_1, ζ_2 keinen Gebrauch gemacht haben. Es ist lediglich eingegangen, dass beide in der Nachkommaentwicklung an Stellen eine 1 stehen haben, die asymptotisch gegen die Fakultäten konvergieren. Weiter ist die Basis $s = 2$ willkürlich gewählt, man muss nur $\log(2)$ durchgehend durch $\log(s)$ ersetzen im allgemeinen Fall. Man kann also die asymptotischen Formeln (2.9), (2.10) mit dieser Korrektur für die wesentlichen Umschaltunkte und die Monotonieintervalle allgemein für ζ_1, ζ_2 von der Form

$$\zeta_i = \sum_{j=1}^{\infty} s^{-a_j^i}, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{a_j^i}{j!} = 1, \quad i = 1, 2 \quad (2.11)$$

verwenden. Allgemeiner ist sogar die Bedingung, dass die gemischte Folge $(b_n)_{n \geq 1}$ nahe an Fakultäten liegt, hinreichend. Genauer reicht die Bedingung

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists K_0 : \forall K \geq K_0, \quad \{(b_n)_{n \geq 1}\} \cap [K!(1+\epsilon), (K+1)!(1-\epsilon)] = \emptyset. \quad (2.12)$$

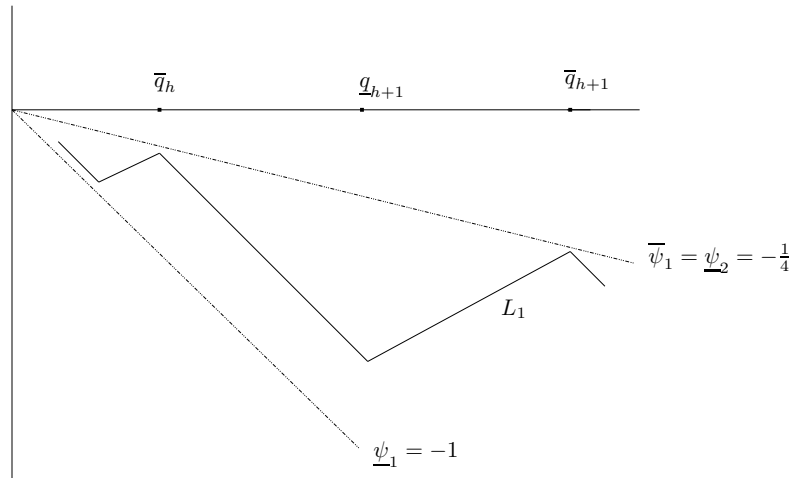


Abbildung 2.1: Skizze zu Beispiel 1 aus Abschnitt 1.2.1

Die Herleitung zeigt auch, dass man dies noch leicht auf den Fall von mehr als $k = 2$ Variablen erweitern kann. Indem man in (2.1) die Variable k als beliebig ansetzt, bekommt man mit analoger Argumentation wie oben allgemein für $\zeta_1, \dots, \zeta_k$, die Bedingung (2.11) oder (2.12) genügen, Intervalle, in denen L_1 im wesentlichen steigend mit Steigung $\frac{1}{k}$ respektive fallend mit Steigung -1 ist, von der Form $\left[\frac{k}{k+1} \log(s)h!, \frac{2k}{k+1} \log(s)h!\right]$ respektive $\left[\frac{2k}{k+1} \log(s)h!, \frac{k}{k+1} \log(s)(h+1)!\right]$.

Nun wollen wir noch Aussagen über ψ_2, ψ_3 ableiten. Zuerst halten wir fest, dass wegen $\underline{\psi}_2 \leq \bar{\psi}_1 = -\frac{1}{4}$ und (1.34), was in unserer Situation $k = j = 2$ genau $\underline{\psi}_2 \geq -\frac{1}{4}$ liefert, die Beziehung $\underline{\psi}_2 = -\frac{1}{4}$ folgt. Das bedeutet, dass die Graphen von ψ_1 und ψ_2 sich unendlich oft in der Nähe von Stellen der Form $q = \frac{4}{3} \log(2)h!$ treffen, denn wie gezeigt kommt nur dort ψ_1 nahe an den Wert $-\frac{1}{4}$ heran. Wegen der Jarnik Identität in der Form $\bar{\psi}_1 + \underline{\psi}_3 + 2\bar{\psi}_1\underline{\psi}_3 = 0$, siehe Theorem 1.5 in [14], folgt aus $\bar{\psi}_1 = -\frac{1}{4}$ weiter $\underline{\psi}_3 = \frac{1}{2}$. Es gilt also $\lim_{Q \rightarrow \infty} \psi_3(Q) = \frac{1}{2}$. Damit kann L_3 also nie über einen längeren Zeitraum hinweg fallen und muss bis auf kurze Ausnahmeintervalle stets mit Steigung $\frac{1}{2}$ steigen. Weiter müssen wegen der Beschränktheit von $L_1 + L_2 + L_3$ in den langen Intervallen, in denen L_1 fällt, einerseits L_2, L_3 beide bis auf kleine Ausnahmebereiche beide steigen, andererseits muss in den langen Intervallen in denen L_1 steigt fast überall L_2 oder L_3 fallen. Da es wie gerade festgestellt nicht L_3 sein kann, muss L_2 beinahe überall auf diesen Intervallen fallen. Damit ist das grobe Verhalten der Funktionen L_1, L_2, L_3 also das folgende: in den Intervallen $\left[\frac{k}{k+1} \log(s)h!, \frac{2k}{k+1} \log(s)h!\right]$ steigen L_1, L_3 fast überall mit Steigung $\frac{1}{2}$ und L_2 fällt mit Steigung -1 , und auf Intervallen der Form $\left[\frac{2k}{k+1} \log(s)h!, \frac{k}{k+1} \log(s)(h+1)!\right]$ steigen L_2, L_3 mit Steigung $\frac{1}{2}$ während L_1 mit Steigung -1 fällt. Dabei bedeutet fast überall in diesem Kontext, dass die Ausnahmeintervalllänge geteilt durch die Gesamtintervalllänge für $h \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert. Damit ist das Verhalten der Funktionen ψ_i in diesem Beispiel weitestgehend verstanden. Tatsächlich zeigt Matlab, dass es viele kleinere Umschaltunkte von L_2, L_3 gibt, deren zugehörige x -Werte in den Approximationsvektoren keinem Muster zu folgen scheinen. Lokale strukturelle Aussagen scheinen also schwer zu erhalten zu sein.

Nun wollen wir noch konsequenterweise diskutieren, welche im Fall $k = 2$ hergeleiteten Eigenschaften der höheren sukzessiven Minimafunktionen $L_j, j \geq 2$, sich auf den allgemeinen Fall (2.11) bzw (2.12) mit beliebigem k ausweiten lassen. Da für alle Aussagen über das Verhalten von $L_1(q)$ die Bedingungen (2.11), (2.12) hinreichend waren, dürfen wir also wieder davon ausge-

hen, dass L_1 auf Intervallen der Form $B_h := \left[\frac{2k}{k+1} \log(s)h!, \frac{k}{k+1} \log(s)(h+1)! \right]$ fast überall mit Steigung -1 fällt und auf den verbleibenden Intervallen $\left[\frac{k}{k+1} \log(s)h!, \frac{2k}{k+1} \log(s)h! \right]$ fast überall mit Steigung $\frac{1}{k}$ steigt. Ebenso müssen wegen der Beschränktheit von $\sum_{i=1}^k L_i$ die Funktionen $L_2, L_3, \dots, L_{k+1}$ auch in diesem allgemeineren Fall fast überall mit Steigung $\frac{1}{k}$ auf Intervallen steigen, auf denen L_1 mit Steigung -1 fällt. Damit kennt man also auf diesen Intervallen das wesentliche Verhalten aller L_j . Insbesondere bestätigt man, da die Länge dieser Intervalle $B_h := \left[\frac{2k}{k+1} \log(s)h!, \frac{k}{k+1} \log(s)(h+1)! \right]$ im Verhältnis zu den vorangehenden Anfangsabschnitten $\left[0, \frac{2k}{k+1} \log(s)h! \right]$ gegen unendlich streben, die Beziehung $\bar{\psi}_j = \frac{1}{k}, 2 \leq j \leq k+1$, die schon aus $\underline{\psi}_1 = -1$ folgt. Genauer erkennt man, dass an den Stellen $\frac{k}{k+1} \log(s)(h+1)!$ mit $h \rightarrow \infty$ die Asymptotik $\frac{L_j(q)}{q} \sim \frac{1}{k}, 2 \leq j \leq k+1$ gilt.

Bleibt also noch das Verhalten von $\psi_2, \dots, \psi_{k+1}$ auf Intervallen $\left[\frac{k}{k+1} \log(s)h!, \frac{2k}{k+1} \log(s)h! \right]$ zu untersuchen. Dies ist jedoch mit weit größerem technischen Aufwand verbunden. Auf diesen Intervallen muss wegen der Bedingung (1.17) wieder an jeder Stelle im Mittel eine Funktion mit Steigung -1 fallen während alle anderen mit Steigung $\frac{1}{k}$ steigen. Es ist anzunehmen, dass unter (2.11), (2.12) ganz allgemein über weite Strecken nur L_2 fallen kann, sodass man die Asymptotiken $\underline{\psi}_2 = \bar{\psi}_1 = \frac{1-k}{2k}$ und $\bar{\psi}_2 = \underline{\psi}_3 = \frac{1}{k}$ gelten wie im Fall $k=2$ und alle höheren sukzessiven Minima $\psi_j(Q), 3 \leq j \leq k+1$ dann natürlich ebenfalls für $Q \rightarrow \infty$ gegen $\frac{1}{k}$ konvergieren müssen. Aufgrund der Allgemeinheit von (2.11), (2.12) ist es jedoch schwer, eine ähnliche Argumentation wie in Beweis von Schritt 1 von Satz 1.12 aufzubauen um scheinbar pathologische Approximationsvektoren auszuschließen, die beispielsweise $\underline{\psi}_3 < \frac{1}{k}$ bewirken könnten. Wir gehen hier nicht näher darauf ein.

2.1.2 Abschätzungen für die letzten beiden sukzessiven Minima aus Kapitel 1.2.5

Nun wollen wir auf die Graphen der Funktionen L_j aus Korollar 1.6 zurückkommen. Genauere Betrachtung des Beweis von Satz 1.12 wird eine Beschreibung des qualitativen Verhaltens der Funktionen $L_1(Q), L_2(Q), \dots, L_{k-1}(Q)$ ermöglichen. Die beiden fehlenden Funktionen $L_k(Q), L_{k+1}(Q)$ verhalten sich komplexer. Wir beschreiben zunächst die ersten $(k-1)$ Approximationsfunktionen.

Betrachten wir zunächst das Zusammenspiel von L_1, L_2 . Der Beweis von Satz 1.13 bzw Korollar 1.6 zeigt, dass Approximationsvektoren $\mathbf{x}_1 = (x, y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{Z}^{k+1}$ mit x -Komponente der Form $x = x_{1,t} = 2^{b_n}$ zu Stellen $q_t = q_{(1,2),t}$ im Sinne des letzten Unterkapitels, also mit $L_1(q_t) = L_2(q_t)$, führen. Das bedeutet also $L_1(q_t) = L_2(q_t) = \log(x) - q_t$ mit x Werten der Form $x = 2^{b_n}$. Dabei handelt es sich um eine reine Approximation von oben, das bedeutet der Approximationsvektor ist von der Form

$$\mathbf{x}_1 := (x_1, \lfloor \zeta_1 x_1 \rfloor, \lfloor \zeta_2 x_1 \rfloor, \dots, \lfloor \zeta_k x_1 \rfloor).$$

(Dabei ist der Index t unterdrückt worden.)

Der Beweis von Schritt 2 des Falls $\omega_j \leq \wp_j(\eta)$ von Satz 1.12 zeigt, dass nach dem auf q_t folgenden Knickpunkt r_t bis zu $x_t = 2^{b_{n+1}-2}$ keine Veränderung am steigenden Verlauf von $L_1(q)$ auftreten kann. Tatsächlich sieht man leicht, dass genauer die Approximationsgüte $\max_{1 \leq r \leq k} |\zeta_r x - y_r| \approx 2^{-(b_{n+1}-b_n)}$ durch $x = x_1$ hervorgerufen erst durch einen Approximationsvektor mit x -Koordinate $x_{2,t} = 2^{b_{n+1}} - 2^{b_n}$ verbessert wird. Die Verbesserung tritt dabei durch die Terme geringerer Ordnung in den 2-adischen Entwicklungen von ζ_S gehören, sofern S den Index bezeichnet mit $b_{n+1} \in (a_{n,S})_{n \geq 1}$. Beachte $x_{2,t} \sim 2^{b_{n+1}}$ für $t \rightarrow \infty$ bzw gleichbedeutend $n \rightarrow \infty$, es tritt also erst kurz vor der starken Verbesserung hervorgerufen durch $x = 2^{b_{n+1}}$ (auf

die Approximationsgüte $\max_{1 \leq r \leq k} |\zeta_r x - y_r| \approx 2^{-(b_{n+2}-b_{n+1})}$ eine kleine Verbesserung zur von $\mathbf{x}_1$ induzierten Approximationsgüte von auf. Die zugehörige Stelle des lokalen Maximums von L_1 sei c_{t+1} . Der Approximationsvektor, der diese kleine Verbesserung hervorruft, ist von der Form

$$\mathbf{x}_2 := (x_2, \lfloor \zeta_1 x_2 \rfloor, \lfloor \zeta_2 x_2 \rfloor, \dots, \lfloor \zeta_{S-1} x_2 \rfloor, \lceil \zeta_S x_2 \rceil, \lfloor \zeta_{S+1} x_2 \rfloor, \dots, \lfloor \zeta_k x_2 \rfloor).$$

(Dabei ist wieder der Index t unterdrückt worden.)

Der Verlauf von L_1 ist damit also im wesentlichen vollständig bestimmt.

Als nächstes beschreiben wir den groben Verlauf von $L_2, L_3, \dots, L_{k-1}$ mittels Korollar 1.6. Da $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ linear unabhängig sind, rufen $x_{1,t}, x_{2,t}$ beide Stellen mit $L_1(q) = L_2(q)$ hervor, $q \in \{q_t, c_t\}$. Auf die bisherigen Erkenntnisse werden wir im Beweis von Satz 2.1 zurückgreifen. Der Beweis von Satz 1.13 bzw Korollar 1.6 zeigt, dass im Falle $k \geq 3$ die Funktion L_2 im wesentlichen von q_t bis zum Abfallen verursacht durch $x_{2,t}$ mit Steigung $\frac{1}{2}$ steigen muss und es ein lokales Maximum $q_{(2,3),t}$ gibt, welches die Asymptotik $\bar{\omega}_2 = \frac{C-1}{C^2}$ bzw mit (1.40) äquivalent $\bar{\psi}_2 = \frac{C^2-kC+k}{k(C^2+C-1)}$ liefert. An dieser Stelle $q_{(2,3),t}$ ist auch $L_2(q_{(2,3),t}) = L_3(q_{(2,3),t})$. Die Funktion L_3 steigt nach Korollar 1.6 von $q_{(2,3),t}$ asymptotisch mit Steigung $\frac{1}{2}$ bis es durch ein $x_{3,t} \sim 2^{b_{n+1}}$ verursacht zu fallen beginnt, bis zu einer Stelle $q_{(3,4),t}$, wobei $L_3(q_{(3,4),t}) = L_4(q_{(3,4),t})$. Dieser Verlauf setzt sich analog bei den höheren L_i fort.

Jedes L_i steigt also im wesentlichen von $q_{(i-1,i),t}$, wo es mit L_{i-1} zusammentrifft, bis $q_{(i,i+1),t}$, wo es mit L_{i+1} zusammentrifft, mit asymptotischer Steigung $\frac{1}{2}$ und beginnt dann durch ein $x_{i,t} \sim 2^{b_{n+1}}$ bedingt mit asymptotischer Steigung -1 bis $q_{(i-1,i),t+1}$ zu fallen. Für jedes feste t gilt dabei zwangsläufig $x_{1,t} > x_{2,t} > \dots > x_{k-1,t}$. Damit ist das grobe Verhalten von $L_2, L_3, \dots, L_{k-1}$ beschrieben. Abbildung 2.6 illustriert dies sehr gut im Falle $k = 3$, siehe auch die Bemerkungen zu Abbildung 2.2.

Der Fall $k = 2$

Nun kommen wir zum Studium von $L_k(Q), L_{k+1}(Q)$. Zunächst widmen wir uns dem Fall $k = 2$. Folgender Satz 2.1 zeigt ansatzweise die Problematik beim Verständnis des Verlaufs von $L_2(Q), L_3(Q)$ auf. Der Beweis wird implizit Informationen über deren qualitativen Verlauf geben, die allerdings nicht vollständig sind.

Vorbemerkung zum Beweis: Wir werden $\omega_j(q)$ schreiben für die mittels (1.40) aus einem Punkt $(q, L_j(q))$ umgerechneten Werte $\psi_j(e^q) = \frac{L_j(q)}{q}$. Dies entspricht also dem Wert $\omega_j(X)$ aus Abschnitt 1.1.3 mit X dermaßen, dass $\log(X) - q = \frac{q}{k} + L_j(q)$, das heißt $X = e^{\frac{k+1}{k}q + L_j(q)}$. Diese vom Parameter q und zugehörigen Funktionswert $L_j(q)$ abhängigen Funktionen sind also von den Funktionen $\omega_j(X)$ aus Abschnitt 1.1.3 zu unterscheiden.

In diesem Kontext werden wir dabei öfter implizit verwenden, dass wenn an einer Stelle $(q, L_j(q))$ die Approximation durch 2^{-A} und die x -Komponente des Approximationsvektors aus $\mathbb{Z}^3$ durch $x = 2^B$ gegeben sind, der entsprechende Wert $\omega_j(q) = \frac{A}{B}$ ist, was direkt aus der Definition von $\omega_j(q)$ folgt. Insbesondere gilt im Falle, dass der Schnittpunkt der durch die Approximationsgüte 2^{-A} bestimmten Gerade $g(q) = \frac{q}{2} - \log(2)A$ mit der durch $x = 2^B$ bestimmten Gerade $h(q) = -q + \log(2)B$ im Graph von L_j enthalten ist, die Identität $\omega_j(q) = \frac{A}{B}$.

Wir greifen im Beweis auf die eben gewonnenen Erkenntnisse über den Graph von L_1 zurück.

Satz 2.1. Sei $k = 2$ und die Voraussetzungen von Korollar 1.6 erfüllt. Dann gilt

$$\frac{C-1}{C} \leq \omega_2 \leq \max \left\{ \frac{C}{C^2-1}, \frac{C-1}{C} \right\} \quad (2.13)$$

$$\hat{\omega}_2 = \frac{1}{C+1} \quad (2.14)$$

$$\omega_3 = \frac{1}{C} \quad (2.15)$$

$$\min \left\{ \frac{C-1}{C^2}, \frac{1}{C^2-1} \right\} \leq \hat{\omega}_3 \leq \frac{1}{C^2-1} \quad (2.16)$$

Im Falle $C < \infty$ ist insbesondere $\hat{\omega}_2 < \omega_3$.

Beweis: Wegen Korollar 1.6 gilt $\hat{\omega} = \frac{C-1}{C}$ und weiter folgt aus der Jarnik-Identität in der Version $\hat{\omega} + \omega_3 = 1$ (siehe Bemerkung 2 zu Lemma 1.5) unmittelbar (2.15).

Um die übrigen Werte zu bestimmen führen wir die Argumentation hauptsächlich über die Funktionen ψ_i und nutzen die gleichmäßige Beschränktheit (1.17) aus.

Sei $(q_t)_{t \geq 1}$ die Folge von Stellen mit $L_1(q_t) = L_2(q_t)$ mit einem x -Wert im Approximationsvektor von der Form 2^{b_N} gemäß den Ausführungen zuvor (die Folge besteht also aus jedem zweiten lokalen Maximum von L_1). Sei weiter $(r_t)_{t \geq 1}$ die Folge der zugehörigen Knickpunkte von L_1 , die auf die lokalen Maxima q_t folgen. Es gilt dann also $q_t < r_t < q_{t+1}$ für alle $t \geq 1$. Wir haben gesehen, dass dann die Asymptotiken

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L_1(q_t)}{q_t} &= \overline{\psi}_1 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L_1(r_t)}{r_t} &= \underline{\psi}_1 \end{aligned}$$

gelten. Sei also zu zunächst beliebigem $\epsilon > 0$ der Index t_0 so groß gewählt, dass

$$\begin{aligned} \left| \frac{L_1(q_{t_0})}{q_{t_0}} - \overline{\psi}_1 \right| &< \epsilon \\ \left| \frac{L_1(r_{t_0})}{r_{t_0}} - \underline{\psi}_1 \right| &< \epsilon. \end{aligned}$$

Weiter können wir wegen $\lim_{t \rightarrow \infty} (r_t - q_t) = \infty$ den Index t_1 so groß wählen, dass die Bedingung

$$r_{t_1} - q_{t_1} > \frac{2C(\Lambda, K)}{\epsilon} \quad (2.17)$$

erfüllt ist. Setze $t := \max\{t_0, t_1\}$, dann sind für dieses t alle drei Bedingungen erfüllt. Wir behaupten nun, dass L_2 im Intervall (q_t, r_t) im wesentlichen mit Steigung $\frac{1}{2}$ steigt. Genauer

$$\frac{L_2(r_t) - L_2(q_t)}{r_t - q_t} \geq \frac{1}{2} - \epsilon. \quad (2.18)$$

Wegen $\left| \sum_{i=1}^3 L_i(q_t) \right| \leq C(\Lambda, K)$ und $\left| \sum_{i=1}^3 L_i(r_t) \right| \leq C(\Lambda, K)$ folgt

$$\left| \sum_{i=1}^3 (L_i(q_t) - L_i(r_t)) \right| = \left| \sum_{i=1}^3 L_i(q_t) - \sum_{i=1}^3 L_i(r_t) \right| \leq 2C(\Lambda, K).$$

Andererseits $L_1(q_t) - L_1(r_t) = r_t - q_t$ sowie $L_i(q_t) - L_i(r_t) \geq -\frac{r_t - q_t}{2}$ für $i = 2, 3$. Wäre die Bedingung (2.18) verletzt, wäre also

$$\left| \sum_{i=1}^3 (L_i(q_t) - L_i(r_t)) \right| \geq (r_t - q_t)\epsilon,$$

im Widerspruch zu (2.17). Damit ist die Behauptung gezeigt. Man erhält mit $\epsilon \rightarrow 0$ also wegen $L_1(q_t) = L_2(q_t)$

$$\psi_2(r_t) = \frac{L_2(r_t)}{r_t} \sim \frac{L_1(q_t) + \frac{1}{2}(r_t - q_t)}{r_t}. \quad (2.19)$$

Als nächstes wollen wir mit $R_t := e^{r_t}$ die Werte $\psi_1(R_t), \psi_3(R_t)$ bestimmen. Dazu berechnen wir den asymptotischen Quotienten $\frac{r_t}{q_t}$. Um r_t (asymptotisch) aus q_t zu berechnen, muss man offenbar die beiden Geraden g_1 durch den Punkt $(q_t, \bar{\psi}_1 q_t)$ mit Steigung -1 und g_2 durch den Nullpunkt mit Steigung $\underline{\psi}_1$ schneiden. Die Werte $\underline{\psi}_1, \bar{\psi}_1$ lassen sich aus der Kenntnis von $\omega, \hat{\omega}$ durch Korollar 1.6 und (1.40) berechnen zu

$$\underline{\psi}_1 = \frac{-2C + 3}{2C}, \quad \bar{\psi}_1 = \frac{2 - C}{4C - 2}.$$

Es ergibt sich weiter

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{r_t}{q_t} = \frac{C^2}{2C - 1}.$$

Wir haben also wegen (2.19) die asymptotischen Beziehungen

$$\begin{aligned} \psi_1(R_t) &\sim \underline{\psi}_1 = \frac{-2C + 3}{2C} \\ \psi_2(R_t) &\sim \left(\bar{\psi}_1 - \frac{1}{2} \right) \frac{2C - 1}{C^2} + \frac{1}{2} = \frac{C^2 - 3C + 3}{2C^2}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich wegen $\lim_{t \rightarrow \infty} r_t = \infty$ und $\lim_{q \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^3 \psi_i(q) = 0$

$$\psi_3(R_t) \sim -\psi_1(R_t) - \psi_2(R_t) = \frac{C^2 - 3}{2C^2}. \quad (2.20)$$

Wegen $\bar{\psi}_3 \geq \limsup_{t \rightarrow \infty} \psi_3(R_t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi_3(R_t)$ ergibt umrechnen von (2.20) mit (1.40) die rechte Ungleichung in (2.16).

Wir haben oben gesehen, dass $L_2(q)$ auf Intervallen der Form (q_t, r_t) im wesentlichen mit Steigung $\frac{1}{2}$ steigt. Eine analoge Argumentation liefert im übrigen, dass auch $L_3(q)$ auf (q_t, r_t) im wesentlichen mit Steigung $\frac{1}{2}$ steigt.

Um (2.14) einzusehen, müssen wir den Verlauf von $L_2(q)$ noch etwas weiter, also im Anfangsabschnitt von Intervallen der Form (r_t, q_{t+1}) , verstehen. Tatsächlich steigt $L_2(q)$ noch weiter bis an eine Stelle s_t mit Asymptotik $\frac{s_t}{r_t} > 1$. Um dies einzusehen, kehren wir zur Notation aus Satz 1.13 zurück. Wir zeigen folgende *Behauptung 1*, die im wesentlichen (1.82) in Kontext von Satz 1.13 darstellt:

Die auf ein b_n folgende *wesentliche Verbesserung* von $L_2(q)$ wird von einem Approximationsvektor mit x -Komponente größer als $2^{b_{n+1} - b_{n-1} - 1}$ hervorgerufen. Dabei ist eine *wesentliche Verbesserung* eine solche, die nicht nur auf einer Verbesserung der Terme kleinerer Ordnung basiert. Jede nicht wesentliche Verbesserung ist insbesondere eine Verbesserung von

$$\max\{|\zeta_1 x - y_1|, |\zeta_2 x - y_2|\} \quad (2.21)$$

um eine Größenordnung $o(2^{-b_{n+1}})$ und hat damit keinen wesentlichen Einfluss auf das Verhalten von $L_2(q)$.

Beweis von Behauptung 1: Sei wegen der Symmetrie in den Bedingungen von Satz 1.13 oBdA $b_n = a_{m,2}$ für ein $m \in \mathbb{N}$, also b_n in der Folge $(a_{n,2})_{n \geq 1}$. Dann ist $b_{n-1} = a_{m-1,1}$ und $b_{n+1} = a_{m,1}$. Der Beweis von Satz 1.13 bzw Korollar 1.6 hat gezeigt, dass $x = 2^{b_n}$ eine Verbesserung von (2.21) in L_2 auf den Wert $2^{-(b_n - b_{n-1})}$ hervorruft, da ein neuer Approximationsvektor (x, y) entsteht mit Approximationsgüte $2^{-(b_{n+1} - b_n)}$ in (2.21), der linear unabhängig zum alten Bestapproximationsvektor ist. Sei nun entgegen unserer Behauptung 1 von einem Approximationsvektor (x_1, y_1) mit $x_1 \in (2^{b_n}, 2^{b_{n+1} - b_{n-1}})$ eine Verbesserung dieses Wertes $2^{-(b_n - b_{n-1})}$ erzielt. Sei x_1 in Basis 2 gegeben durch

$$x_1 = 2^{r_1} + 2^{r_2} + \dots + 2^{r_b}, \quad r_1 < r_2 < \dots < r_b < b_{n+1}.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle. 1. Fall: $r_b \geq b_{n-1} = a_{m-1,1}$. Falls sogar $r_b \geq b_n$, so ist (x_1, y_1) im interessanten Fall $\max\{|\zeta_1 x - y_1|, |\zeta_2 x - y_2|\} < \frac{1}{2}$ linear abhängig zum durch x hervorgerufenen Bestapproximationsvektor (x, y) , vergleiche den Beweisteil $\omega_j \geq \wp_j(\eta)$ von Satz 1.12.

Also $b_{n-1} \leq r_b < b_n$. Dann ist aber

$$|\zeta_2 x_1 - y_1| \geq 2^{-(b_n - b_{n-1})} - o(2^{-b_{n+2}}),$$

also tritt keine wesentliche Verbesserung auf.

2. Fall: $r_b < b_{n-1} = a_{m-1,1}$. Sei $I := \{i : r_i < b_{n-1}\} \neq \emptyset$. Indem man die Summanden auf gleichen Nenner bringt sieht man unter Vernachlässigung der Terme kleinerer Ordnung

$$\left\| \sum_{i \in I} 2^{r_i} \zeta_1 \right\| \geq 2^{-b_{n-1}}.$$

Nach der Voraussetzung der Behauptung $r_b < b_{n+1} - b_{n-1} - 1$ ist aber andererseits wieder unter Vernachlässigung der Terme kleinerer Ordnung

$$\left\| \sum_{i \notin I} 2^{r_i} \zeta_1 \right\| \leq 2^{-b_{n-1}-1}.$$

Die Dreiecksungleichung liefert

$$\left\| \sum_{i=1}^b 2^{r_i} \zeta_1 \right\| = \left\| \sum_{i \in I} 2^{r_i} \zeta_1 + \sum_{i \notin I} 2^{r_i} \zeta_1 \right\| \geq 2^{-b_{n-1}-1}.$$

Wegen den Voraussetzungen von Korollar 1.6 gilt aber $b_{n-1} < b_n - b_{n-1}$, demnach $2^{-b_{n-1}-1} > 2^{-(b_n - b_{n-1})}$. Also tritt auch hier keine wesentliche Verbesserung ein, was Behauptung 1 beweist.

Sei im weiteren $n = n(t)$ so bestimmt, dass $x = 2^{b_n}$ die Extrema q_t, r_t von L_1 hervorruft. Dann bewirkt in Folge $x = 2^{b_{n+1}}$ die Extrema q_{t+1}, r_{t+1} usw sowie $x = 2^{b_{n-1}}$ die Extrema q_{t-1}, r_{t-1} usw bei L_1 .

Die Behauptung 1 zeigt also, dass die Approximationsgüte $2^{-(b_n - b_{n-1})}$ mindestens bis zu einem Approximationsvektor aus $\mathbb{Z}^3$ mit $x \sim 2^{b_{n+1} - b_{n-1}}$ im wesentlichen beibehalten wird. Daher also mittels der Definition von $\hat{\omega}_2$

$$\hat{\omega}_2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(2)(b_n - b_{n-1})}{\log(2)(b_{n+1} - b_n)} = \frac{C-1}{C^2-1} = \frac{1}{C+1}.$$

Beachte, dass die Betrachtung von $\psi_2(R_t) \leq \bar{\psi}_2$ mittels (1.40) nur auf $\hat{\omega}_2 \leq \frac{C-1}{C^2-1}$ geführt hätte, was wegen $C \geq 2$ schlechter als die Abschätzung durch $\frac{1}{C+1}$ ist (mit Gleichheit im Fall $C = 2$). Also muss die Funktion $L_2(q)$ von r_t an weiter ansteigen. Sei g die Gerade durch $(q_t, L_1(q_t))$ mit Steigung $\frac{1}{2}$, der L_2 , wie wir gerade gesehen haben, im wesentlichen folgt bis

mindestens an eine Stelle $(s_t, u_t) = (s_t, L_2(s_t))$, die sich durch $x = 2^{b_{n+1}-b_n-1}$ und die Approximationsgüte von $\max\{|\zeta_1 x - y_1|, |\zeta_2 x - y_2|\} = 2^{-(b_n-b_{n-1})}$ definiert (wir rechnen sie in Kürze aus). Wir zeigen als nächstes, dass L_3 asymptotisch von $(r_t, L_3(r_t))$ bis zur Stelle (s_t, u_t) mit Steigung -1 fällt. Klarerweise $L_3(s) - L_3(r_t) > r_t - s_t$, weil die L_i maximales Gefälle -1 haben. Andererseits ergibt (2.1), dass der Knickpunkt r_t asymptotisch gegeben ist als Lösung $r_t = q$ von

$$\frac{q}{2} - \log(2)(b_{n+1} - b_n) = -q + \log(2)b_n,$$

also durch

$$r_t \sim \frac{2}{3} \log(2)b_{n+1} \sim \frac{2}{3} \log(2)C^2 b_{n-1}. \quad (2.22)$$

Ebenso berechnet man mittels (2.1)

$$s_t \sim \frac{2}{3} \log(2)(b_{n+1} + b_n - 2b_{n-1}) \sim \frac{2}{3} \log(2)(C^2 + C - 2)b_{n-1}. \quad (2.23)$$

Man berechnet nun mittels (1.40) und $S_t := e^{s_t}$ aus $\omega_2(s_t) = \frac{1}{C+1}$ den Wert $\psi_2(S_t) \sim \frac{C-1}{2C+4}$ und zusammen mit (2.20), (2.22), (2.23) in der Tat den asymptotischen Quotienten

$$\frac{s_t - r_t}{u_t - L_2(r_t)} = \frac{s_t - r_t}{\frac{C^2-3}{2C^2}s_t - \frac{C-1}{2C+4}r_t} = -1. \quad (2.24)$$

Da L_1 und L_2 beide auf (r_t, s_t) im wesentlichen mit Steigung $\frac{1}{2}$ steigen, muss also L_3 tatsächlich auf ebendiesem Intervall im wesentlichen mit Steigung -1 fallen, wie man ganz ähnlich dem Beweis, dass L_2 auf (q_t, r_t) steigen muss, einsieht. Folglich gilt wegen (2.24) die Beziehung $L_2(s_t) \sim L_3(s_t)$. Wir verstehen nun also die Funktionen L_i auf Intervallen (q_t, s_t) ziemlich genau.

Um die fehlende Ungleichung von (2.14)

$$\widehat{\omega}_2 \geq \frac{1}{C+1} \quad (2.25)$$

zu zeigen, bemerken wir zuerst, dass im Falle $\overline{\psi}_2 \geq \frac{C-1}{2C+4}$ die Stellen q mit größerem $\psi_2(q)$ im $(q, L_i(q))$ -Diagramm in Intervallen der Form (s_t, q_{t+1}) liegen müssen, da L_2 auf den verbleibenden Intervallen (q_t, s_t) mit Steigung $\frac{1}{2}$ steigt und daraus sieht man wegen der stets erfüllten Ungleichung $\overline{\psi}_2 \leq \frac{1}{2}$ leicht, dass ψ_2 an der Stelle S_t das Maximum im Intervall (Q_t, S_t) annimmt. Das ist gleichbedeutend damit, dass im $(q, L_i(q))$ -Diagramm die Stelle $q = s_t$ den größten Wert $\psi_2(q)$ liefert. Weiter bemerken wir, dass einerseits $L_2(s_t) \sim L_3(s_t)$ wie gerade gesehen, und andererseits L_1 auf (s_t, q_{t+1}) steigt. Daher muss $L_2 + L_3$ auf (s_t, q_{t+1}) asymptotisch mit Steigung $-\frac{1}{2}$ fallen. Dies lässt sich ebenfalls exakt nachprüfen wie im Beweis der Steigung $\frac{1}{2}$ von L_2 auf (q_t, r_t) . Wegen $\overline{\psi}_2 \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \psi_2(s_t) = \frac{C-1}{2C+4} > 0$ und demnach $L_2(s_t) > 0$ müsste an einer Stelle $T \in (s_t, q_{t+1})$, die einen größeren L_2 -Wert liefert, die Ungleichung $L_2(T) > L_2(s_t)$ gelten, und wegen $L_3(T) \geq L_2(T)$ auch $L_3(T) > L_2(s_t) = L_3(s_t)$. Also $(L_2 + L_3)(T) > (L_2 + L_3)(s_t)$. Dies widerspricht aber offenbar der erwähnten Asymptotik von $L_2 + L_3$ auf (s_t, q_{t+1}) . Also $\overline{\psi}_2 \leq \frac{C-1}{2C+4}$ und mittels (1.40) folgt (2.25).

Als nächstes zeigen wir (2.13). Wegen dem Beweis von Korollar 1.6 führt $\psi_2(r_t) = \frac{2-C}{4C-2}$ mittels (1.40) auf $\omega_2(r_t) = \frac{C-1}{C}$. Da L_2 auf (q_t, s_t) steigt, kann eine Verbesserung nur auf Intervallen (s_t, q_{t+1}) passieren. Wir untersuchen nun, wie gut eine Verbesserung in solchen Intervallen höchstens sein kann. Wir zeigen folgende *Behauptung 2*: Mit der Notation aus Behauptung 1 gibt es keine zwei linear unabhängigen Approximationsvektoren mit x -Werten $\leq 2^{b_{n+1}-1}$, für die jeweils (2.21) einen Wert $\geq 2^{-b_n}$ annimmt. Ist dies gezeigt, folgt (2.13) unmittelbar, da diese

maximale Verbesserung an einer Stelle mit x -Wert $\geq 2^{b_{n+1}-b_{n-1}}$ angenommen wird (weil L_2 auf (q_t, s_t) steigt und die Stelle $(s_t, L_2(s_t))$ entspricht $x \sim 2^{b_{n+1}-b_{n-1}}$), also auf diesen Intervallen der Quotient abgeschätzt werden kann durch

$$\omega_2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{b_{n+1} - b_{n-1}} = \frac{C}{C^2 - 1}.$$

Der Beweis von Behauptung 2 basiert wieder auf einem Argument der Basis 2 Arithmetik. Sei durch (x_0, y_0) eine Verbesserung von (2.21) auf einen kleineren Wert als 2^{-b_n} hervorgerufen und $x_0 = 2^{r_1} + 2^{r_2} + \dots + 2^{r_b}$ mit $r_1 < r_2 < \dots < r_b$.

1. Fall: $r_1 < b_n = a_{m,2}$. Sei I die Menge der Indizes j mit $r_j < b_n$. Auf gleichen Nenner bringen liefert

$$\left\| \sum_{i \in I} 2^{r_i} \zeta_2 \right\| \geq 2^{-b_n}.$$

Weil alle $r_i < b_{n+1} = a_{m+1,1}$ und damit für $i \notin I$ die Ungleichung $2^{r_i} \zeta_2 \leq 2^{-(b_{n+2}-b_{n+1})+1}$ zutreffend ist und dies auch für ihre Summe gilt, haben wir

$$\|x_0 \zeta_2\| = \left\| \sum_{i \in I} 2^{r_i} \zeta_2 + \sum_{i \notin I} 2^{r_i} \zeta_2 \right\| \geq 2^{-b_n} - 2^{-(b_{n+2}-b_{n+1})+2} \sim 2^{-b_n},$$

wie gefordert.

2. Fall: $r_1 \geq b_n$. Dann ist jede gute Approximation linear abhängig zur Bestapproximation hervorgerufen durch einen Approximationsvektor mit $x = 2^{b_n}$, siehe wieder Beweis von Schritt 2 der Richtung $\omega_j \leq \wp_j(\eta)$ von Satz 1.12. Es kann sich ω_2 also auch in diesem Fall nicht verbessern. Dies zeigt Behauptung 2 und damit (2.13).

Damit haben wir also gewisse Einschränkungen für den Verlauf von L_2 in Intervallen (s_t, q_{t+1}) gefunden.

Um die linke Ungleichung aus (2.16) einzusehen, bemerken wir zuerst, dass wir bereits $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_3(R_t) = \frac{C^2-3}{2C^2}$ gesehen haben. Wir müssen also nur auf Intervallen der Form (s_t, q_{t+1}) suchen. Wir führen nun eine weitere Stelle $s_t < v_t < q_{t+1}$ ein. Dabei sei (v_t, w_t) im $(q, L_i(q))$ -Diagramm der Schnittpunkt der Gerade g_1 definiert durch die Approximationsgüte 2^{-b_n} , also $g_1(q) = \frac{q}{2} - \log(2)b_{n-1}$, und g_2 bestimmt durch $x = 2^{b_{n+1}}$ via $g_2(q) = \log(x) - q$. Wir wissen von oben, dass in $(0, q_{t+1})$ der Graph von L_2 oberhalb von g_1 liegt, also $L_2(q) \geq g_1(q)$ auf $q \in (0, q_{t+1})$ und insbesondere $L_2(v_t) \geq g_1(v_t)$. Dies ergibt einen asymptotischen Wert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega_2(v_t) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{1}{C} = \omega_3$$

wegen (2.15). Umrechnen mit (1.40) ergibt mit $V_t := e^{v_t}$ die Beziehung $\psi_2(V_t) \geq \frac{C-2}{2C+2}$. Wir zeigen, dass asymptotisch sogar die Gleichheit $\psi_2(V_t) \sim \psi_3(V_t) \sim \frac{C-2}{2C+2}$ gilt.

Wegen $L_1(v_t) \sim -(L_2(v_t) + L_3(v_t)) \geq (-2) \cdot L_2(v_t) = \frac{C-2}{C+1} v_t$ mit Gleichheit nur im Falle $L_2(v_t) \sim L_3(v_t)$ ist dies äquivalent zu $L_1(v_t) \sim \frac{2-C}{C+1} v_t$ bzw

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_1(V_t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L_1(v_t)}{v_t} = \frac{2-C}{C+1}. \quad (2.26)$$

Man muss also $L_1(v_t)$ berechnen. Weil r_t die Minima von L_1 sind und weil L_1 auf $(r_t, v_t) \subset (r_t, q_{t+1})$ mit Steigung $\frac{1}{2}$ steigt ergibt sich

$$L_1(v_t) \sim L_1(r_t) + \frac{1}{2}(v_t - r_t) = r_t \left(\frac{1}{-1} + \frac{1}{2} \frac{v_t}{r_t} - \frac{1}{2} \right). \quad (2.27)$$

Man berechnet weiters mit (2.1)

$$\frac{v_t}{2} - \log(2)b_n \sim \log(2)b_{n+1} - v_t,$$

das weiter führt zu

$$v_t \sim \frac{2}{3} \log(2) (b_{n+1} + b_n) \sim \frac{2}{3} \log(2) (C^2 + C) b_{n-1}.$$

Zusammen mit (2.22) führt dies zu

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{v_t}{r_t} = \frac{C+1}{C}.$$

Setzt man diesen Wert in (2.27) ein bestätigt man (2.26).

Wir haben insbesondere die Stellen als v_t identifiziert, an denen die kleinsten Werte von ψ_3 , bzw an denen der Wert ω_3 asymptotisch angenommen werden. (Es gilt außerdem: weil L_1 (respektive L_2) auf (v_t, q_{t+1}) (respektive (q_{t+1}, r_{t+1})) mit Steigung -1 fallen muss wegen der Beschränktheit der Summe, muss L_3 auf dem Intervall (v_t, r_{t+1}) asymptotisch mit Steigung $\frac{1}{2}$ steigen.)

Aus dieser Erkenntnis folgt nun, dass L_3 auf dem Intervall (s_t, q_{t+1}) (oder (s_t, v_t)) ein Maximum besitzt, das höchstens dem Schnitt der Geraden g_3 durch $(q_t, L_1(q_t))$ mit Steigung $\frac{1}{2}$ und der Geraden g_4 durch $(q_{t+1}, L_1(q_{t+1}))$ mit Steigung -1 ist (beachte, dass $(v_t, w_t) \in g_4$). Da g_3 durch die Approximationsgüte $2^{-(b_n - b_{n-1})}$ und g_4 durch $x = 2^{b_{n+1}}$ gegeben ist berechnet man mithilfe der Vorbemerkung zum Beweis damit asymptotisch für $q \in (s_t, q_{t+1})$

$$\omega_3(q) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - b_{n-1}}{b_{n+1}} = \frac{C-1}{C^2},$$

und zusammen mit unserem Wissen über L_3 in den Intervallen (q_t, s_t) schließlich die linke Seite von (2.16).

Der letzte Punkt folgt aus dem bereits bewiesenen für $C < \infty$ via

$$\omega_3 = \frac{1}{C} > \frac{1}{C+1} = \hat{\omega}_2.$$

□

Bemerkungen: 1) Im Fall $C = 2$ fallen r_t und s_t gemäß (2.22), (2.23) asymptotisch zusammen.
2) Der Beweis zeigt qualitativ das Verhalten von L_1, L_2, L_3 in Intervallen (q_t, s_t) sowie in Intervallen (v_t, q_{t+1}) sehr genau. Wir fassen es nochmals zusammen:

- L_1 : steigt auf (r_t, q_{t+1}) , fällt auf (q_t, r_t)
- L_2 : steigt auf (q_t, s_t) , fällt auf (v_t, q_{t+1})
- L_3 : steigt auf (v_t, r_{t+1}) , fällt auf (r_t, s_t)

Die Steigungen betragen dabei asymptotisch jeweils aus $\{-1, \frac{1}{2}\}$.

In Intervallen (s_t, v_t) wurde dagegen grob abgeschätzt und Funktionsplots legen nahe, dass das genaue Verständnis dieser Intervalle schwierig ist. In Abbildung 2.2 erkennt man nämlich das unterschiedliche Verhalten von L_2, L_3 nach lokalen Minima r_i von L_1 . Dabei ist Abbildung 2.2 der $(q, L_j(q))$ -Plot von

$$\zeta_1 = 2^{-1} + 2^{-7} + 2^{-31}, \quad \zeta_2 = 2^{-3} + 2^{-15}$$

bis zur Schranke, wo $L_3(q_0) > 20.5$ ist für ein lokales Minimum q_0 von L_3 . Es soll also der Fall $\zeta_1 = \sum_{n \geq 0} 2^{-2^{2n+1}+1}, \zeta_2 = \sum_{n \geq 1} 2^{-2^{2n}+1}$ simuliert werden, für den die gemischte Folge $(b_n)_{n \geq 1}$

durch $b_n = 2^n - 1$ gegeben ist und in Folge $C := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = 2$. Beachte, dass wir wegen der Forderung der strikten Ungleichung $\frac{b_{n+1}}{b_n} > 2$ in Korollar 1.6 nicht den naheliegenden Fall von Zweierpotenzen im Exponenten betrachten.

Man sieht, dass beim vorletzten r_t in Abbildung 2.2 L_2 annähernd mit Steigung -1 fällt bis etwa zur entsprechenden Stelle v_t , während beim letzten r_t zuerst ein kleinerer Knick erfolgt bevor L_2 längere Zeit fällt. Dabei folgt L_3 nach letzterem dem Verlauf von L_2 annähernd bis zur Phase des langen Fallens von L_2 . Dann passiert in letzterem Fall noch ein Knick in L_2 bevor die Stelle v_t erreicht wird.

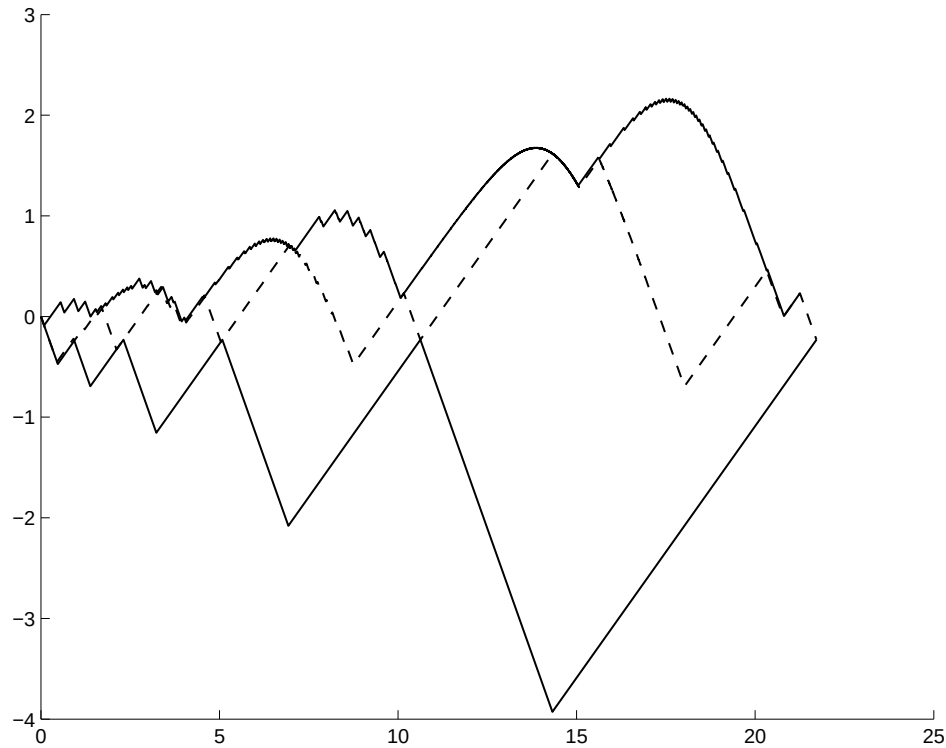


Abbildung 2.2: k=2, C=2 Fall

Ein Intervall (s_t, p_{t+1}) ist in der folgenden Abbildung 2.3 nochmal vergrößert dargestellt und die Stellen s_t, v_t, p_{t+1} in dieser Reihenfolge nach wachsendem q mit Datenpunkten markiert. Weiter lässt sich die Zeichnung aus numerischen Gründen nicht zeichnen, da die Bestapproximation bei der Stelle p_{t+1} als 0 erkannt wird. Man kann aus Abbildung 2.2 nämlich

$$p_{t+1} \approx 21.72, \quad L_1(p_{t+1}) = L_2(p_{t+1}) \approx -0.2311$$

ablesen, und $e^{21.72-0.2311} \approx 2^{31}$ und Terme geringerer Ordnung als 2^{-31} fehlen.

Man erkennt hier noch besser als in Abbildung 2.2, dass im Gegensatz zum vorangehenden Knick aus Abbildung 2.2 zwei weitere wesentliche lokale Minima und Maxima von L_2 im Intervall (s_t, v_t) dazukommen. Es ist zu erwarten, dass das erkennbare unregelmäßige Verhalten der Intervalle (s_t, v_t) mit wachsendem t immer stärker wird.

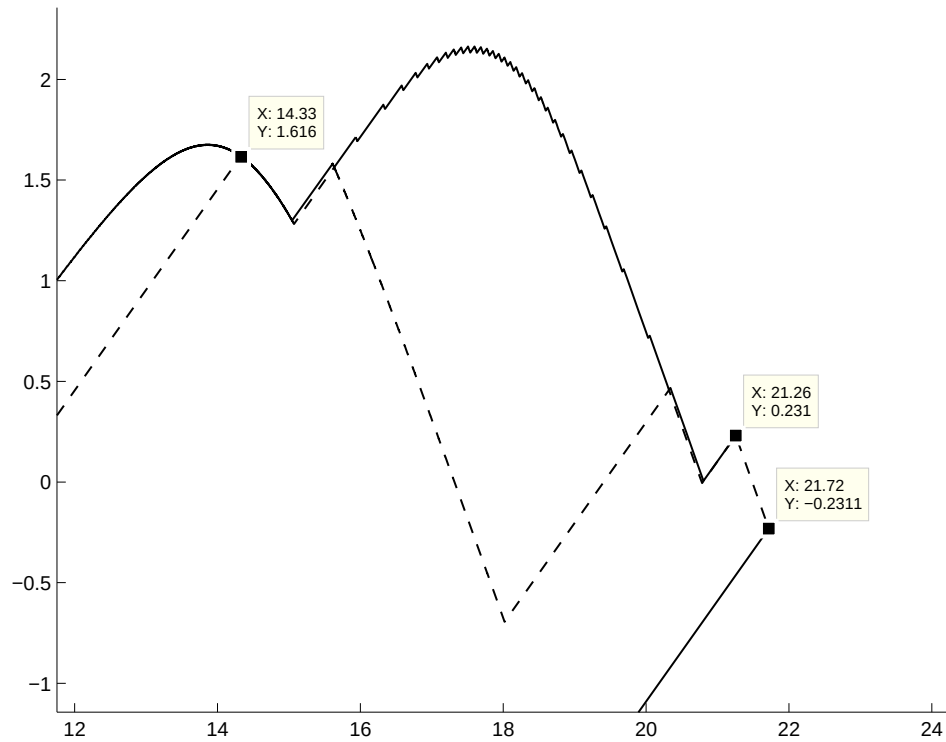


Abbildung 2.3: Detailvergrößerung von Abbildung 2.2

Die wesentlichen Ergebnisse im Laufe des Beweises von Satz 2.1 werden in Abbildung 2.4 sehr gut visualisiert. Dabei ist

$$\zeta_1 = 2^{-1} + 2^{-9}, \quad \zeta_2 = 2^{-3} + 2^{-27}.$$

Es soll also der Fall $\zeta_1 = \sum_{n \geq 0} 2^{-3^{2n}}$, $\zeta_2 = \sum_{n \geq 0} 2^{-3^{2n+1}}$ simuliert werden. Aufgrund des exakten Faktors $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 3$ lassen sich hier die berechneten Werte aus Satz 2.1 im Fall $C = 3$ ablesen. Beachte, dass $\tilde{L}_1$ nur aus numerischen Gründen nach dem letzten Maximum nicht weitergezeichnet wird, da die Approximation als 0 erkannt wird weil höhere Terme fehlen, die nicht mehr erkannt werden würden (am schwerwiegendsten ist dabei der fehlende Term 2^{-81} in ζ_1 , der im wesentlichen das folgende lokale Minimum von L_1 bestimmen würde).

Man liest aus dem Matlabplot die Werte

$$\begin{aligned} q_t &\approx 6.921, & L_1(q_t) = L_2(q_t) &\approx -0.6984 \\ r_t &\approx 12.48, & L_1(r_t) &\approx -6.238 \\ s_t &\approx 13.78, & L_2(s_t) = L_3(s_t) &\approx 2.724 \\ v_t &\approx 16.63, & L_2(v_t) = L_3(v_t) &\approx 2.079 \end{aligned}$$

ab. Damit berechnet man beispielsweise

$$\begin{aligned}\frac{r_t}{q_t} &\approx 1.8032 \approx 1.8 = \frac{C^2}{2C-1} \\ \frac{v_t}{r_t} &\approx 1.3325 \approx \frac{4}{3} = \frac{C+1}{C}\end{aligned}$$

vergleiche Resultate im Laufe des Beweises von Satz 2.1, und es könnten weitere Beispiele guter Übereinstimmung angeführt werden. Nicht ganz so gut wird wegen dem etwas vor r_t einsetzenden schleichenden Knick von L_3 die Vorhersage $\psi_3(R_t) \sim \frac{1}{3}$ aus (2.20) getroffen, L_3 hat bei etwa $q \approx 12.48$ einen Knick mit $L_3(12.48) \approx 3.466$, was auf

$$\psi_3(R_t) \approx \frac{3.466}{12.48} \approx 0.2777 < \frac{1}{3}$$

führt. Diese Abweichung ist letztlich auf den Fehler $C(\Lambda, K)$ aus (1.17) zurückzuführen.

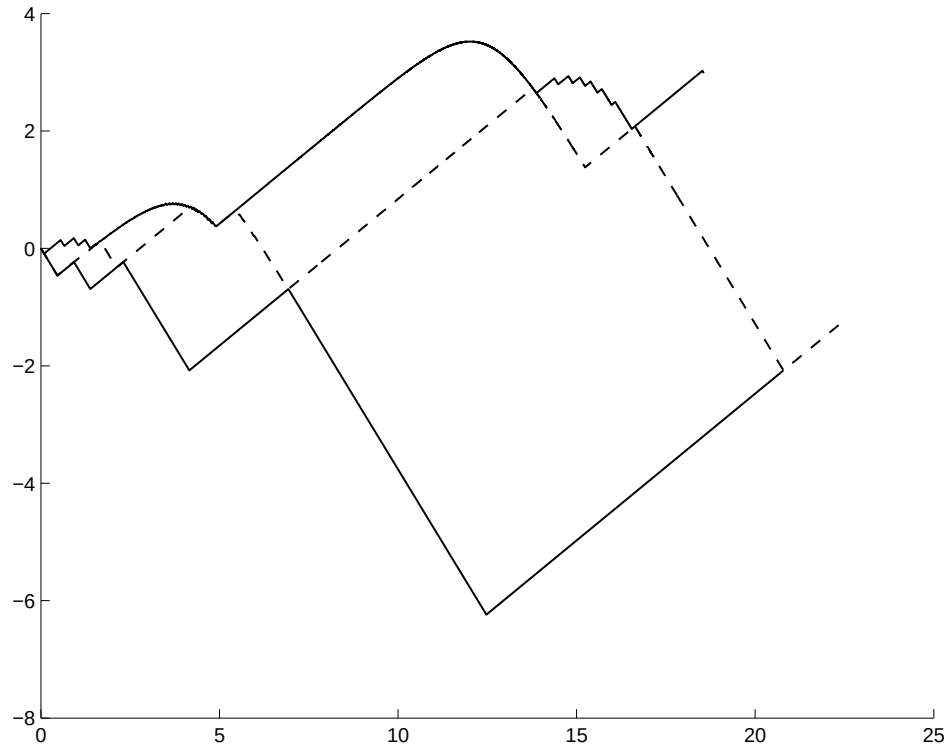


Abbildung 2.4: $k=2$, $C=3$ Fall

Ein Stellenpaar s_t, v_t ist in Form von Datenpunkten in der folgenden Abbildung 2.5 nochmals im Zoom hervorgehoben, wobei $s_t < v_t$. Man kann links von s_t auch etwa die Stelle r_t erahnen, wo L_3 idealisierterweise zu fallen beginnen sollte (und das im Bild nicht aufscheinende L_1 zu steigen beginnt, besser erkenntlich in Abbildung 2.4).

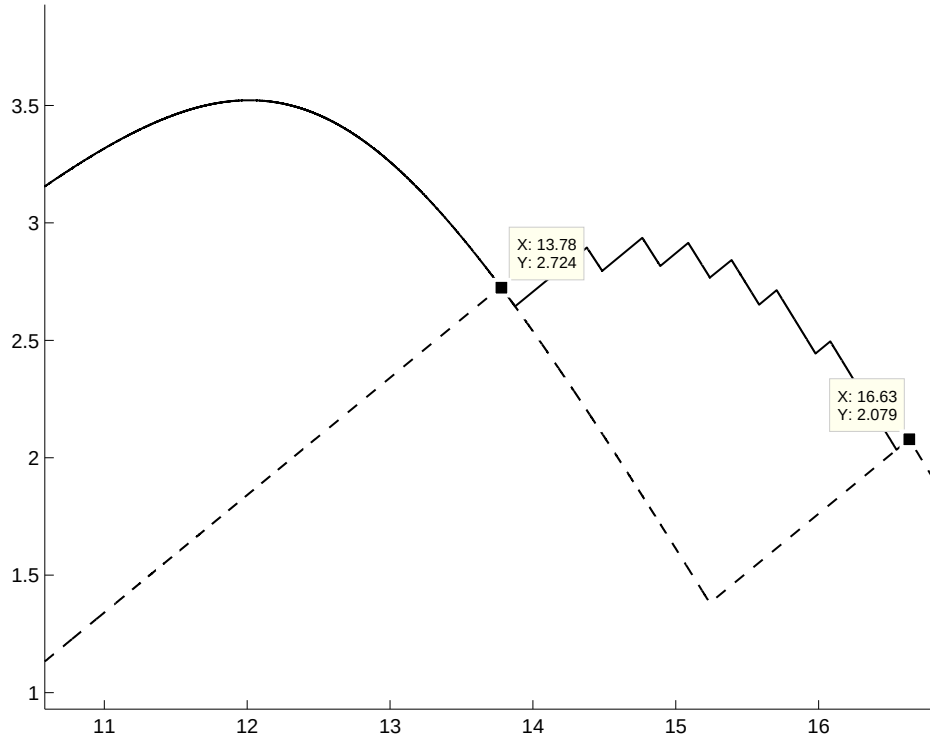


Abbildung 2.5: Detailvergrößerung von Abbildung 2.4

Das folgende Korollar zeigt, dass man aus Satz 2.1 unter einer schwachen Forderung an C aus Korollar 1.6 alle Approximationskonstanten explizit bestimmen kann.

Korollar 2.1. Sei β die größte Nullstelle von $x^3 - 2x^2 - x + 1$. Mit den Voraussetzungen von Korollar 1.6 im Fall $k = 2$ und unter der Bedingung $C \geq \beta \approx 2.2470$ gilt

$$\begin{aligned}\omega &= C - 1 \\ \hat{\omega} &= \frac{C - 1}{C} = \omega_2 \\ \hat{\omega}_2 &= \frac{1}{C + 1} \\ \omega_3 &= \frac{1}{C} \\ \hat{\omega}_3 &= \frac{1}{C^2 - 1}\end{aligned}$$

Beweis: Die Bedingung an C ist gleichbedeutend mit

$$\frac{C - 1}{C^2} \geq \frac{1}{C^2 - 1}, \quad \frac{C - 1}{C} \geq \frac{C}{C^2 - 1}.$$

Damit folgen alle Aussagen unmittelbar aus Satz 2.1. $\square$

Beachte aber, dass der Beweis von Satz 2.1 noch genauere Informationen über das dynamische Verhalten der Funktionen $\psi_j(Q)$ enthält.

Der allgemeine Fall

Nun kommen wir zum allgemeinen Fall $k \geq 3$. Wir zeigen einen Satz, der Satz 2.1 verallgemeinert. Dabei werden wir auf die Notation des Beweises von Satz 2.1 und den vorangehenden Diskussionen über $L_1, \dots, L_{k-1}$ zurückgreifen und nicht alles so detailliert ausführen wie dort, da die Argumentation sehr ähnlich ist.

Anzumerken ist, dass wir im allgemeinen Fall $k \geq 3$ für die Berechnung von ω_{k+1} die Jarnik-Identität nicht zur Verfügung haben, weshalb wir hier zur Berechnung die Argumentation über (1.17) führen werden. Bezüglich der im Beweis verwendeten Notation vergleiche die Vorbemerkung zu Satz 2.1.

Satz 2.2. Seien die Voraussetzungen von Korollar 1.6 erfüllt. Dann gilt

$$\frac{C-1}{C^{k-1}} \leq \omega_k \leq \max \left\{ \frac{C}{C^k-1}, \frac{C-1}{C^{k-1}} \right\} \quad (2.28)$$

$$\widehat{\omega}_k = \frac{C-1}{C^k-1} \quad (2.29)$$

$$\omega_{k+1} = \frac{1}{C^{k-1}} \quad (2.30)$$

$$\min \left\{ \frac{1}{C^k-1}, \frac{C-1}{C^k} \right\} \leq \widehat{\omega}_{k+1} \leq \frac{1}{C^k-1} \quad (2.31)$$

Im Falle $C < \infty$ ist insbesondere $\widehat{\omega}_k < \omega_{k+1}$.

Beweis: Man berechnet asymptotisch den zu b_n gehörigen Tiefpunkt r_t von L_1 durch schneiden der Geraden g_1 definiert durch die Approximationsgüte $2^{-(b_{n+1}-b_n)}$ und g_2 definiert durch $x = 2^{b_n}$, demnach also als Lösung $r_t = q$ von

$$\frac{q}{k} - \log(2)(b_{n+1} - b_n) = \log(2)b_n - q,$$

was auf

$$r_t \sim \frac{k}{k+1} \log(2)b_{n+1} \quad (2.32)$$

führt. Ganz ähnlich ergeben sich im Falle $j \neq k+1$ allgemein die Stellen $q_{(j,j+1),t}$ mit $q_{(0,1),t} := r_t$ zu

$$q_{(j,j+1),t} \sim \frac{k}{k+1} \log(2)(b_n + b_{n-j+1} - b_{n-j}), \quad 0 \leq j \leq k-1. \quad (2.33)$$

Da jede Funktion L_j für $1 \leq j \leq k+1$ im Intervall $(q_{(j,j+1),t}, r_t)$ asymptotisch mit Steigung $\frac{1}{k}$ steigt weil L_1 in jedem dieser Intervalle mit Steigung -1 fällt, gilt außerdem

$$L_{j+1}(r_t) \sim L_{j+1}(q_{(j,j+1),t}) + \frac{1}{k}(r_t - q_{(j,j+1),t}), \quad 0 \leq j \leq k-1. \quad (2.34)$$

(Bemerkung: $L_j(q_{(j,j+1),t}) = L_{j+1}(q_{(j,j+1),t})$ für $j \geq 2$, aber für $j = 0$ muss in obiger Formel L_{j+1} stehen weil L_0 nicht definiert ist). Man berechnet des weiteren

$$L_{j+1}(q_{(j,j+1),t}) \sim \psi_{j+1}(q_{(j,j+1),t})q_{(j,j+1),t}$$

wobei wegen $\omega_{j+1}(q_{(j,j+1),t}) = \frac{C-1}{C^j}$ mittels (1.40)

$$\psi_{j+1}(q_{(j,j+1),t}) = \frac{C^j - kC + k}{k(C^j + C - 1)}, \quad 0 \leq j \leq k-1$$

gilt. (Bemerkung: Im Fall $j \leq k-2$ ist $\omega_{j+1}(q_{(j,j+1),t}) = \omega_{j+1}$.) Zusammen mit $\frac{b_{M+1}}{b_M} \sim C$ für große M ergibt dies mit (2.33) zunächst

$$L_{j+1}(q_{(j,j+1),t}) \sim \frac{\log(2)}{k+1} b_n \frac{C^j - kC + k}{C^j}, \quad 0 \leq j \leq k-1 \quad (2.35)$$

und dies wiederum eingesetzt in (2.34) nach einer Indexverschiebung

$$L_j(r_t) \sim \frac{\log(2)}{k+1} b_n [C - (k+1)C^{2-j} + (k+1)C^{1-j}], \quad 1 \leq j \leq k.$$

Wegen der (1.17) also

$$L_{k+1}(r_t) \sim -\sum_{j=1}^k L_j(r_t) \sim -\frac{\log(2)}{k+1} b_n [-C + (k+1)C^{1-k}]. \quad (2.36)$$

Andererseits sieht man analog zu Behauptung 1 im Beweis von Satz 2.1, dass eine wesentliche Verbesserung von L_k erst durch einen Approximationsvektor mit x -Komponente mindestens $2^{b_{n+1}-b_{n+1-k}-1}$ hervorgerufen wird. Das liefert, dass L_k bis an eine Stelle $s_t > r_t$ weitersteigen muss, welche die asymptotische Beziehung

$$s_t \sim \frac{k}{k+1} \log(2) b_{n-k+1} (C^k + C - 2) \sim \frac{k}{k+1} \log(2) b_n (C + C^{2-k} - 2C^{1-k}) \quad (2.37)$$

erfüllt. An der Stelle s_t ist der Wert $\omega_k(s_t)$ asymptotisch gegeben durch $\omega_k(s_t) = \frac{C-1}{C^k-1}$, was mittels (1.40) auf

$$L_k(s_t) \sim s_t \left(-1 + \frac{k+1}{k} \frac{1}{1 + \frac{C-1}{C^k-1}} \right) \sim \frac{\log(2)}{k+1} b_n (C - kC^{2-k} + (k-1)C^{1-k}) \quad (2.38)$$

führt. Mithilfe von (2.36), (2.37) und (2.38) berechnet man weiter

$$L_k(s_t) - L_{k+1}(r_t) \sim \frac{k}{k+1} \log(2) b_n [C^{2-k} - 2C^{1-k}] \sim -(s_t - r_t).$$

Da L_{k+1} im Intervall (r_t, s_t) asymptotisch mit Steigung -1 fallen muss weil alle übrigen L_j steigen, bedeutet dies aber weiter

$$L_k(s_t) \sim L_{k+1}(s_t).$$

Daraus ergibt sich nun (2.29) mit einer analogen Argumentation zum Beweis von (2.14). Da die Funktionen $L_1, L_2, \dots, L_{k-1}$ im Intervall $(s_t, q_{(k-1,k),t})$ mit Steigung $\frac{1}{k}$ steigen, muss dort $L_k + L_{k+1}$ asymptotisch mit Steigung $-1 + (k-1)\frac{1}{k} = -\frac{1}{k} < 0$ fallen, weshalb in solchen Intervallen insbesondere L_k fallen muss und folglich kein größerer Wert von $\bar{\psi}_k$ angenommen werden kann und damit kein kleinerer für $\hat{\omega}_k$. In Intervallen $(q_{(k-1,k),t}, s_{t+1})$ haben wir aber gerade gesehen, dass an den Stellen s_t das Maximum von L_k angenommen wird. Die Approximationsgüte von asymptotisch $2^{-(b_{n+1}-b_n)}$ und der Wert $x \sim 2^{b_{n+1}-b_{n+1-k}}$ an diesem Punkt $(s_t, L_k(s_t))$ ergeben nach Definition von $\hat{\omega}_k$ aber (2.29).

(2.28) ergibt sich durch einen zu Behauptung 2 von Satz 2.1 analogen Sachverhalt. Die Verallgemeinerung von jener Behauptung 2 mit analogem Beweis ist: Es gibt keine k linear unabhängigen Approximationsvektoren mit x -Werten $\leq 2^{b_{n+1}-1}$, sodass die Approximationsgüte

$$\max_{1 \leq i \leq k} |\zeta_i x - y_i| \leq 2^{-b_{n+2-k}}$$

erfüllt. Daraus folgt (2.28) mit analoger weiterer Argumentation wie im Beweis von (2.13) von Satz 2.1 (man verwendet wieder, dass $x \geq 2^{b_{n+1}-b_{n+1-k}}$ in einem Approximationsvektor weil L_k

bis s_t steigt).

Als nächstes zeigen wir (2.31). Beachte zuerst, dass L_{k+1} auf Intervallen $(q_{(k-1,k),t}, r_{t+1})$ steigt und damit das Maximum von L_k in diesen Intervallen bei $q = r_{t+1}$ angenommen wird. Mittels (2.36), (2.32) berechnet man mit $R_t := e^{r_t}$

$$\bar{\psi}_{k+1} \geq \psi_k(R_t) \sim \frac{L_{k+1}(r_t)}{r_t} \sim \frac{1 - (k+1)C^{-k}}{k},$$

was mittels (1.40) die rechte Seite von (2.31) ergibt.

Danach fällt L_{k+1} bis s_t und kann die dortige Approximationsgüte $2^{-(b_{n-k+2}-b_{n-k+1})}$ maximal bis zu $x = 2^{b_{n+1}}$ beibehalten (für genaueres vergleiche den Beweis von (2.16) Satz 2.1) was gerade auf den ω -Wert $\frac{C-1}{C^k}$ führt. Da L_{k+1} in einem der beiden Intervalltypen $(q_{(k-1,k),t}, s_{t+1})$ oder $(s_t, q_{(k-1,k),t})$ seine lokalen Maxima annehmen muss, folgt (2.31) zusammen mit der Ungleichung für $\hat{\omega}_{k+1}$ aus Korollar 1.6.

Um schließlich (2.30) einzusehen, verwenden wir wieder die Hilfsstelle v_t definiert als 1. Koordinate im $(q, L_j(q))$ -Diagramm des Schnittpunkts (v_t, w_t) der Geraden g_1 definiert durch die Approximationsgüte $2^{-b_{n-k+2}}$, also $g_1(q) = \frac{q}{k} - \log(2)(b_{n+1} - b_n)$ und der Geraden g_2 definiert durch $x = 2^{b_{n+1}}$, also $g_2(q) = -q + \log(x)$. Damit berechnet man

$$v_t \sim \frac{k}{k+1} \log(2)(b_{n+1} + b_{n-k+2}) \sim \frac{k}{k+1} \log(2)b_n (C + C^{2-k}). \quad (2.39)$$

Offenbar gilt

$$\omega_k(v_t) = \frac{1}{C^{k-1}}. \quad (2.40)$$

Der Beweis von (2.28) zeigt, dass mit $V_t := e^{v_t}$ die Beziehung $\psi_k(V_t) \geq \frac{C^{k-1}-k}{k(C^{k-1}+1)}$ gilt und damit

$$\psi_{k+1}(V_t) \geq \psi_k(V_t) \geq \frac{C^{k-1} - k}{k(C^{k-1} + 1)}, \quad (2.41)$$

wobei $\frac{C^{k-1}-k}{k(C^{k-1}+1)}$ aus $\omega_k(v_t) = \frac{1}{C^{k-1}}$ durch Umrechnen mittels (1.40) entsteht. Wir zeigen nun, dass sogar die asymptotische Gleichheit

$$\psi_k(V_t) \sim \psi_{k+1}(V_t) \sim \frac{C^{k-1} - k}{k(C^{k-1} + 1)} \quad (2.42)$$

gilt. Wegen (2.41) und (1.17) ist die Bedingung (2.42) äquivalent dazu, dass im Falle von (2.42) der Gleichheitsfall $\sum_{j=1}^{k+1} L_j(v_t) = 0$ eintritt. Wir setzen also (2.42) voraus und rechnen die Bedingung $\sum_{j=1}^{k+1} L_j(v_t) \sim 0$ nach. Wegen (2.39) gilt unter der Voraussetzung (2.42)

$$L_k(v_t) \sim L_{k+1}(v_t) \sim v_t \frac{C^{k-1} - k}{k(C^{k-1} + 1)} \sim \frac{C^{k-1} - k}{C^{k-1} + 1} \frac{\log(2)}{k+1} b_n (C + C^{2-k}). \quad (2.43)$$

Die Funktionen $L_j, 1 \leq j \leq k-1$ steigen jeweils asymptotisch auf den Intervallen der Form $(q_{(j-1,j),t}, v_t) \subset (q_{(j-1,j),t}, q_{(j,j+1),t+1})$ (zur Erinnerung: $q_{(0,1),t} = r_t$ also $(r_t, v_t) \subset (r_t, q_{(1,2),t+1})$ im Fall $j = 1$) mit Steigung $\frac{1}{k}$. Also

$$L_j(v_t) \sim L_j(q_{(j-1,j),t}) + \frac{1}{k} (v_t - q_{(j-1,j),t}), \quad 1 \leq j \leq k-1. \quad (2.44)$$

Setzt man (2.35), (2.33) und (2.39) in (2.44) ein ergeben sich die ersten $(k-1)$ Werte $L_j(v_t)$ zu

$$\begin{aligned}
L_j(v_t) &\sim \frac{\log(2)}{k+1} b_n \left[\frac{C^{j-1} - kC + k}{C^{j-1}} + C - 1 - C^{2-j} + C^{1-j} + C^{2-k} \right] \\
&= \frac{\log(2)}{k+1} b_n [C + C^{2-k} + (k+1)C^{1-j} - (k+1)C^{2-j}], \quad 1 \leq j \leq k-1.
\end{aligned}$$

Zusammen mit (2.43) ergibt sich

$$\sum_{j=1}^{k+1} L_j(v_t) = 2L_k(v_t) + \sum_{j=1}^{k-1} L_j(v_t) = \frac{\log(2)}{k+1} b_n \cdot \mathbf{T}$$

wobei

$$\mathbf{T} := \left[\sum_{j=1}^{k-1} (C + C^{2-k} + (k+1)C^{1-j} - (k+1)C^{2-j}) \right] + 2 \frac{C^{k-1} - k}{C^{k-1} + 1} (C + C^{2-k}),$$

und man bestätigt durch eine etwas längliche, aber völlig elementare Rechnung schließlich $\mathbf{T} = 0$. Damit ist also (2.42) bewiesen.

Weil L_{k+1} im Intervall (v_t, r_t) steigt und dann bis s_t fällt und $L_{k+1}(s_t) > L_{k+1}(v_t)$ kann ein kleinerer Wert von $\underline{\psi}_{k+1}$ nur in Intervallen (s_t, v_t) auftreten. Wäre jedoch $L_{k+1}(T) < L_{k+1}(v_t)$ für ein T , das asymptotisch kleiner als v_t ist, müssten im Intervall (T, v_t) alle L_j steigen, ein Widerspruch zu (1.17). Dies zeigt letztendlich zusammen mit (2.40) Gleichung (2.30).

Der letzte Punkt folgt aus

$$\widehat{\omega}_k = \frac{C-1}{C^k-1} = \frac{1}{1+C+\dots+C^{k-1}} < \frac{1}{C^{k-1}} = \omega_{k+1}$$

für $k \geq 2$ und $C < \infty$. □

Das wesentliche Verhalten der Funktionen L_j ist also:

- L_j steigt auf $(q_{(j-1,j),t}, q_{(j,j+1),t})$, fällt auf $(q_{(j,j+1),t}, q_{(j-1,j),t+1})$, $1 \leq j \leq k-1$
- L_k steigt auf $(q_{(k-1,k),t}, s_t)$, fällt auf $(v_t, q_{(k-1,k),t})$
- L_{k+1} steigt auf (v_t, r_t) , fällt auf (r_t, s_t)

Über das genauere Verhalten von L_k, L_{k+1} auf Intervallen der Form (s_t, v_t) sagt Satz 2.2 wieder wenig aus. Abbildung 2.6 zeigt im Fall $k=3$ den Anfangsabschnitt von

$$\zeta_1 = 2^{-1} + 2^{-15}, \quad \zeta_2 = 2^{-3} + 2^{-31}, \quad \zeta_3 = 2^{-7}$$

bis zur Schranke, wo $L_4(q_0) > 19.5$ ist für ein lokales Minimum q_0 von L_3 . Dabei soll also der Fall $C=2$ simuliert werden, vergleiche die Bemerkungen zu Abbildung 2.2. (Für größere Werte von C ist die Rechenzeit bis an markante Stellen sehr lang).

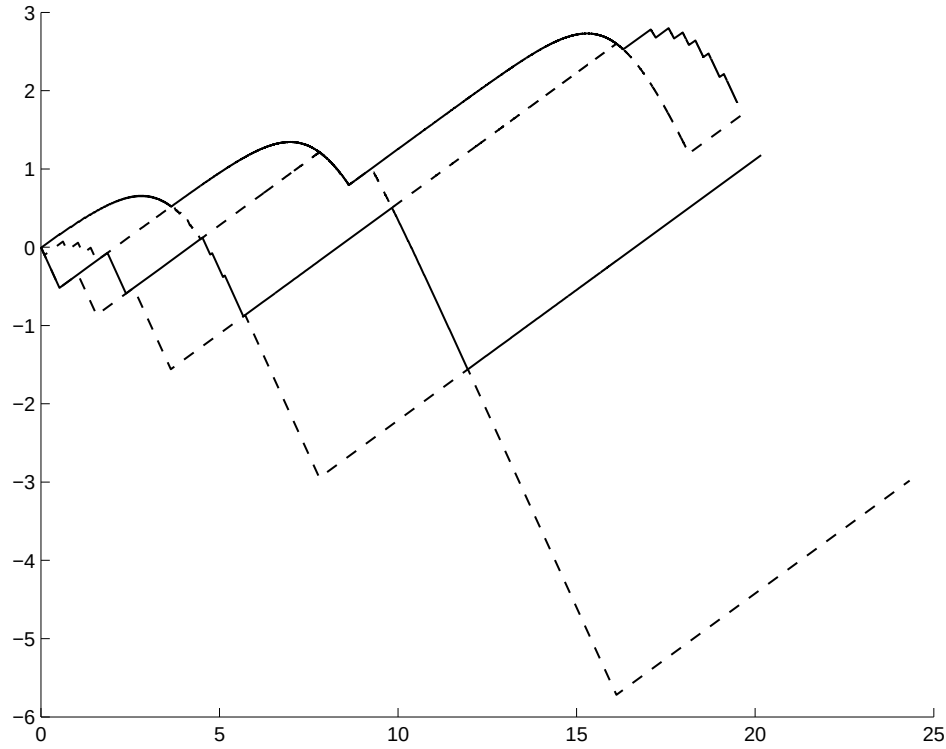


Abbildung 2.6: k=3, C=2 Fall

Korollar 2.2. Sei β_d die größte reelle Nullstelle von $P_d(x) = x^{d+1} - 2x^d - x + 1$. Unter den Voraussetzungen von Korollar 1.6 gilt im Falle $C \geq \beta_k$

$$\begin{aligned}\omega_k &= \frac{C-1}{C^{k-1}} \\ \widehat{\omega}_k &= \frac{C-1}{C^k-1} \\ \omega_{k+1} &= \frac{1}{C^{k-1}} \\ \widehat{\omega}_{k+1} &= \frac{1}{C^k-1}.\end{aligned}$$

Beweis: Die Bedingung an C liefert

$$\frac{C}{C^k-1} \leq \frac{C-1}{C^{k-1}}, \quad \frac{1}{C^k-1} \leq \frac{C-1}{C^k}.$$

Damit folgen alle Aussagen unmittelbar aus Satz 2.2. □

Bemerkung: Korollar 2.2 gilt auch im Falle $k = 1$. In diesem Fall berechnet man mit Korollar 2.2

$$\omega = C - 1 \tag{2.45}$$

$$\widehat{\omega} = 1 = \omega_2 \tag{2.46}$$

$$\widehat{\omega}_2 = \frac{1}{C-1}. \tag{2.47}$$

Im Fall $k = 1$ gilt wegen $|L_1 + L_2| < C(\Lambda, K)$ stets $\overline{\psi}_1 = \underline{\psi}_2 = 0$, was mittels (1.40) auf (2.46) führt. Weiter sieht man mit einer typischen Basis 2 Argumentation im $k = 1$ Fall, also $\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-a_n}$ mit

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &> \beta_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad n \geq 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= C \geq \beta_1, \end{aligned}$$

in der Tat leicht (2.45). Weiter gilt im Fall $k = 1$ wieder wegen $|L_1 + L_2| < C(\Lambda, K)$ stets $\underline{\psi}_1 + \overline{\psi}_2 = 0$, umrechnen dieser Beziehung mittels (1.40) führt zu $\omega\widehat{\omega}_2 = 1$ und zusammen mit (2.45) ergibt sich (2.47).

Die durch β_k gegebene untere Schranke für C wird mit wachsendem k besser. Das ist Inhalt der folgenden

Proposition 2.1. Es gelten für β_d aus Korollar 2.2 die Beziehungen

$$\begin{aligned} \lim_{d \rightarrow \infty} \beta_d &= 2 \\ \beta_d &= 2 + 2^{-d} - o(2^{-d}). \end{aligned}$$

Beweis: Man berechnet einerseits für $d \geq 2$ direkt $P_d(2) = -1 < 0$, andererseits ist mit $\eta_d := 2 + \frac{1}{d}$ für $d \geq 3$

$$\eta_d^{d+1} + 1 > \eta_d^{d+1} = \eta_d^d \left(2 + \frac{1}{d}\right) > 2\eta_d^d + \frac{\eta_d^d}{d} > 2\eta_d^d + \eta_d, \quad (2.48)$$

wobei letzte Ungleichung äquivalent zur Ungleichung $\eta_d \geq d^{\frac{1}{d-1}}$ ist, die wegen $d^{\frac{1}{d-1}} < 2 < \eta_d$ gilt, wie eine einfache Kurvendiskussion der Funktion $x \mapsto x^{\frac{1}{x-1}}$ im Intervall $(3, \infty)$ zeigt. Wegen (2.48) also $P_d(\eta_d) > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert also im Intervall $(2, \eta_d)$ eine Nullstelle. Wegen

$$P'_d(x) = (d+1)x^d - 2dx^{d-1} - 1 \geq x^d - 1 > 0, \quad x \geq 2$$

erfüllt weiter aber auch höchstens eine reelle Nullstelle $\kappa =: \beta_d$ von P_d die Bedingung $\kappa > 2$. Wegen $\lim_{d \rightarrow \infty} \eta_d = 2$ folgt der erste Punkt.

Man berechnet für den zweiten Punkt

$$\begin{aligned} P_d(2 + 2^{-d}) &= \left(2 + \frac{1}{2^d}\right)^d \left(2 + \frac{1}{2^d} - 2\right) - (2 + 2^{-d}) + 1 = \\ \left(1 + \frac{1}{2^{d+1}}\right)^d - 1 - \frac{1}{2^d} &> \left(1 + \frac{d}{2^{d+1}}\right) - 1 - \frac{1}{2^d} = \frac{d-2}{2^{d+1}} > 0 \end{aligned}$$

wobei in der vorletzten Ungleichung der binomische Lehrsatz angewandt wurde. Wegen $P'_d(x) > 0$ auf $x \in (2, \infty)$ also weiter $\beta_d < 2 + 2^{-d}$. Im Falle $x_d = 2 + \epsilon 2^{-d}$ mit $0 < \epsilon < 1$ berechnet man

$$P_d(x_d) = \epsilon \left[\left(\frac{2 + \frac{\epsilon}{2^d}}{2} \right)^d - \frac{1}{2^d} \right] - 1 < \epsilon \left[\left(\frac{2 + \frac{1}{2^d}}{2} \right)^d - \frac{1}{2^d} \right] - 1, \quad (2.49)$$

und weil der Ausdruck in der rechten eckigen Klammer wegen

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \left(\frac{2 + \frac{1}{2^d}}{2} \right)^d - \frac{1}{2^d} = \lim_{d \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2^{d+1}} \right)^{2^{d+1} \frac{d}{2^{d+1}}} - \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{1}{2^d} = \lim_{d \rightarrow \infty} e^{\frac{d}{2^{d+1}}} = 1$$

gegen 1 konvergiert, ist die rechte Seite von (2.49) gegen $\epsilon - 1 < 0$ konvergent. Das bedeutet für jedes feste $0 < \epsilon < 1$ ist für d hinreichend groß die Beziehung $\beta_d > 2 + \epsilon 2^{-d}$ gültig. Aus beiden Abschätzungen für β_d zusammen folgt die Behauptung. $\square$

Der Vollständigkeit halber sei an dieser Stelle noch ein Plot mit Quotienten $\frac{b_{n+1}}{b_n} < 2$ angeführt, der Korollar 1.8 visualisieren soll. Es ist in Abbildung 2.7

$$\zeta_1 = 2^{-2} + 2^{-9}, \quad \zeta_2 = 2^{-3} + 2^{-17}, \quad \zeta_3 = 2^{-5} + 2^{-33}.$$

Es soll also wieder der Fall $C = 2$ simuliert werden, aber ohne die für Korollar 1.6 notwendige Voraussetzung $\frac{b_{n+1}}{b_n} > 2$. Wegen $\frac{b_{n+1}}{b_n} > \kappa_2 \approx 1.6180$ ab $n \geq 2$ ist aber die Voraussetzung für Korollar 1.8 erfüllt mit $d = 2$. Die Eigenschaft, dass lokale Maxima von L_2 durch Approximationsvektoren mit x -Werten nahe 2^{b_n} auftreten, ist hier also nicht mehr zwingend erfüllt, hingegen ist sie für L_1 noch erfüllt. In der Tat erkennt man, dass sich die Funktion L_2 qualitativ sehr von der Funktion L_2 in Abbildung 2.6 unterscheidet, L_1 hingegen nicht bis auf die vor allem anfangs raschere Abfolge lokaler Extrema bedingt durch die kleineren Quotienten $\frac{b_{n+1}}{b_n}$.

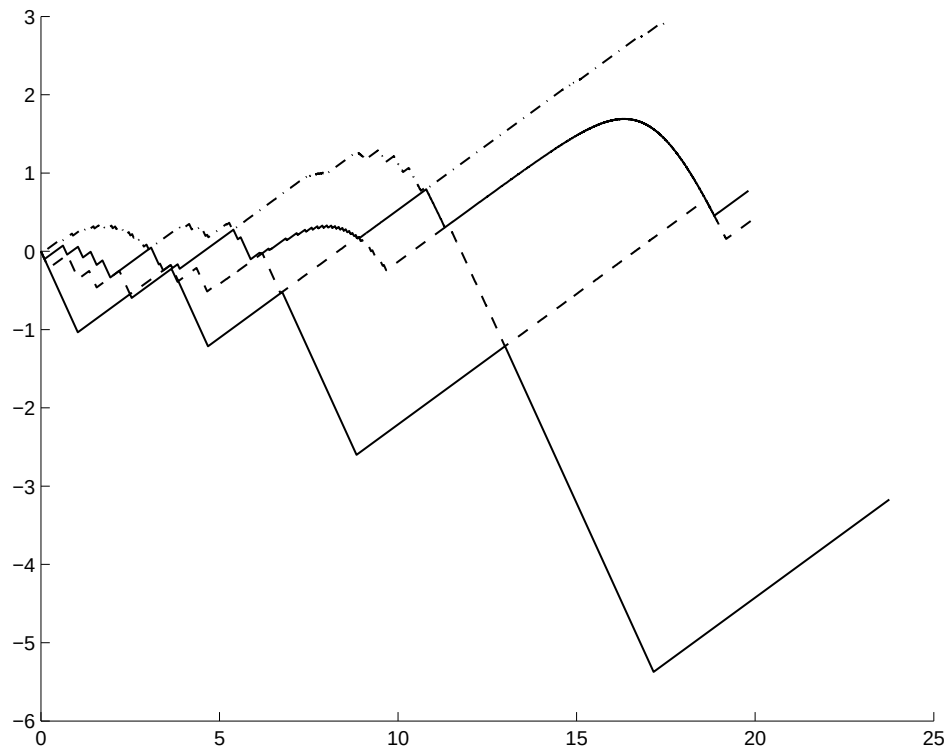


Abbildung 2.7: k=3, C=2 Fall Nr 2

2.2 Der aufgefächerte Fall

Ziel dieses Abschnitts ist, den Fall von $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ deren zugeordnete Approximationsfunktionen

$$\overline{\psi}_j = \underline{\psi}_{j+1}, \quad 1 \leq j \leq k, \quad (2.50)$$

erfüllen, näher zu untersuchen.

2.2.1 Extremal numbers

Ein erstes Beispiel für Vektoren, deren Approximationsfunktionen (2.50) erfüllen, stellen im Fall $k = 2$ die von Roy eingeführten sogenannten extremal numbers dar.

Definition 2.1. Eine reelle Zahl ζ heißt *extremal number*, falls die Approximationskonstante $\widehat{\omega}$ zur simultanen Approximation von $(\zeta_1, \zeta_2) := (\zeta, \zeta^2)$ maximal unter allen reellen Zahlen ist, die nicht algebraisch vom Grad kleiner oder gleich 2 sind.

Es ist bekannt, dass der maximale Wert aus der Definition durch $\gamma := \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ gegeben ist. Kettenbrüche von der Form

$$\zeta = [0; a, b, a, a, b, \dots] \quad (2.51)$$

mit dem Fibonacciwort auf $\{a, b\}$ führen beispielsweise zu extremal numbers ζ . Siehe [12] zu beidem, Theorem 3.1 Seite 8 bzw Seite 13.

In Abbildung 2.8 sehen wir einen Plot für ein ζ mit Kettenbruchentwicklung (2.51) im Fall $a = 1, b = 2$.

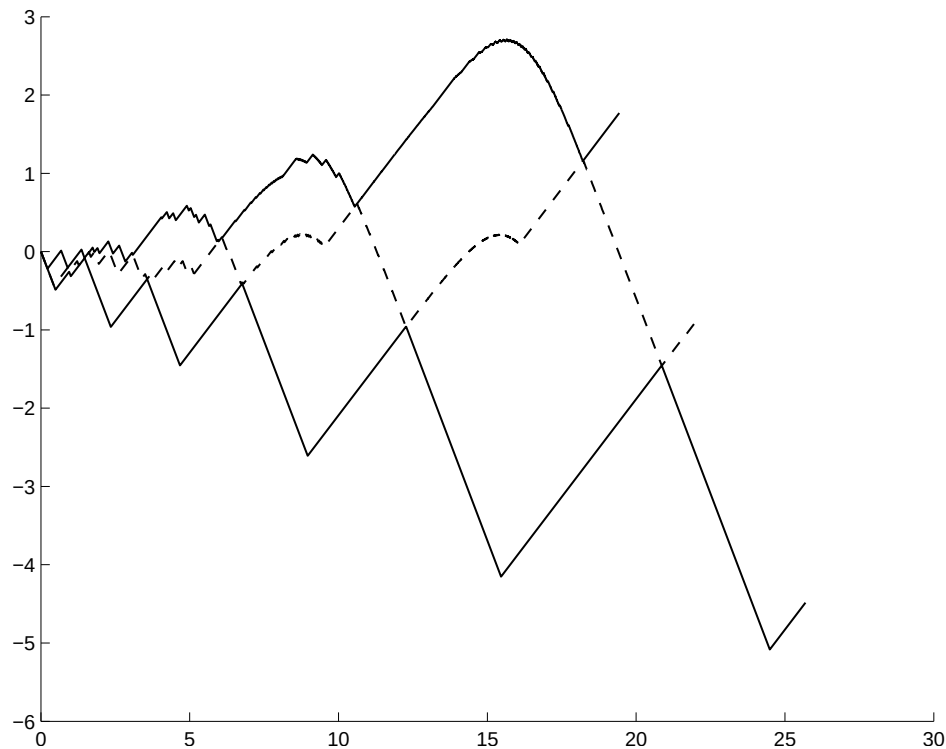


Abbildung 2.8: extremal numbers

Dabei wurde eine hinreichend lange Anfangssequenz des Fibonacciwortes auf $\{1, 2\}$ für die Kettenbruchentwicklung berücksichtigt, um den gegebenen Anfangsabschnitt im $(q, L_j(q))$ -Diagramm ausreichend genau widerzugeben (die eingeschränkte Computergenauigkeit macht eine zu lange

Anfangssequenz ohnehin nutzlos, da Werte ab einer gewissen Stelle einfach nicht mehr erkannt werden). Es wird bis zur Stelle des ersten lokalen Minimums q_0 von L_3 mit $q_0 > 19$ gezeichnet. Das scheinbar gekrümmte Einknicken von L_2 ist charakteristisch zumindest für extremal numbers von Typ (2.51), wie auch Plots zu anderen Wertepaaren a, b belegen, bei denen dieses Verhalten noch stärker ausgeprägt ist. Dieses spielt aber asymptotisch für $q \rightarrow \infty$ keine Rolle bei der Berechnung der Werte $\underline{\psi}_j, \overline{\psi}_j$ für $j = 2, 3$.

Extremal numbers erfüllen nämlich (2.50) auf eine besondere Art und Weise, die ab Abschnitt 2.2.3 genauer thematisiert wird. Siehe Theorem 3.1 in [12] für einen Beweis.

Wir werden im Abschnitt 2.2.4 nochmals auf die extremal numbers im Zusammenhang mit dem aufgefächerten Fall von (2.50) eingehen, wobei wir dort die Kettenbruchentwicklung von extremal numbers beleuchten werden.

Weiters werden sie im Kontext s -adischer Entwicklung im Abschnitt 3.1 nochmals vorkommen.

2.2.2 Der extremale Fall und die Schranken für $\omega, \widehat{\omega}$

Wir wenden uns nun für beliebige k einem interessanten Spezialfall von (2.50) zu, der in anderem Sinne als extremal bezeichnet werden kann.

Definition 2.2. Wir nennen für festes $k \geq 2$ den Fall von $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ deren zugehörige Approximationsfunktionen

$$\underline{\psi}_1 = -1 \tag{2.52}$$

$$\overline{\psi}_1 = \frac{1-k}{2k} = \underline{\psi}_2 \tag{2.53}$$

$$\overline{\psi}_j = \frac{1}{k} = \underline{\psi}_{j+1}, \quad 2 \leq j \leq k \tag{2.54}$$

$$\overline{\psi}_{k+1} = \frac{1}{k} \tag{2.55}$$

erfüllen, den *extremalen Fall* von (2.50).

Dabei ist (2.55) nur der Vollständigkeit halber angeführt.

Auf der Suche nach Beispielen von $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ deren Approximationsfunktionen (2.50) erfüllen, betrachten wir zunächst $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ aus Satz 2.2. Unter den spezielleren Voraussetzungen von Korollar 1.6 gilt (2.50) bis auf die Gleichung $\underline{\psi}_k = \overline{\psi}_{k+1}$ bzw. $\widehat{\omega}_k = \omega_{k+1}$. Satz 2.2 zeigt aber auf, dass diese ausständige Gleichung sich nicht unter den Voraussetzungen von Korollar 1.6 bei endlichem $C \in \mathbb{R}$ erzielen lässt. Beachte, dass unter den Voraussetzungen von Satz 1.14 selbiger Satz 1.14 sowie die Beziehung $\widehat{\omega} = \omega_2$ bzw. $\overline{\psi}_1 = \underline{\psi}_2$ bereits die Existenz von $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n}$ implizieren, was wieder auf die Situation von Korollar 1.6 führt. Also schließen die Konstruktionen aus Satz 1.14 im nichtextremalen Fall die Bedingung (2.50) sogar aus.

Kehren wir nun aber zum extremalen Fall von (2.50) zurück. Der folgende Satz 2.3 zeigt neben der Existenz auch, dass dieser Spezialfall bereits allein durch die zusätzliche Bedingung $\underline{\psi}_1 = -1$ induziert wird, was die Bezeichnung extremal rechtfertigt.

Satz 2.3. Sei $k \geq 2$ vorgegeben. Dann existieren $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ sodass $\{1, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k\}$ eine $\mathbb{Q}$ -linear unabhängige Menge ist und (2.52)-(2.55) gilt. Überdies stellt (2.53), (2.54), (2.55) eine Folgerung aus (2.52) dar, wenn (2.50) gilt.

Beweis: (2.52)-(2.55) ist via (1.40) gleichbedeutend mit dem System

$$\omega = \infty \quad (2.56)$$

$$\widehat{\omega} = 1 = \omega_2 \quad (2.57)$$

$$\widehat{\omega}_j = 0 = \omega_{j+1}, \quad 2 \leq j \leq k \quad (2.58)$$

$$\widehat{\omega}_{k+1} = 0. \quad (2.59)$$

Korollar 1.6 zeigt aber im Falle $k \geq 3, C = \infty$ wegen

$$\lim_{C \rightarrow \infty} \frac{C-1}{C} = 1, \quad \lim_{C \rightarrow \infty} \frac{C-1}{C^j} = 0, \quad j \geq 2$$

alle Gleichungen (2.56)-(2.59). Im Fall $k = 2, C = \infty$ zeigt Satz 2.1 selbige Gleichungen.

Für den zweiten Punkt bemerke zunächst, dass im Falle (2.52) stets $\overline{\psi}_j = \frac{1}{k}, 2 \leq j \leq k+1$, siehe Proposition 1.3. Diese Überlegung zeigt (2.55) und zusammen mit (2.50) auch (2.54).

Für (2.53) bemerke zuerst, dass $\frac{1-k}{2k}$ nach (1.34),(1.35) die untere Schranke für beide Werte $\overline{\psi}_1, \underline{\psi}_2$ darstellt. Für die Umkehrung zuerst ein paar Vorbemerkungen. Es ist jedes Maximum von $L_1(q)$ im $(q, L_j(q))$ -Diagramm ein Minimum von $L_2(q)$, also $L_1(q) = L_2(q)$, wie aus folgendem Argument ersichtlich wird. Für $a \in \mathbb{N}$ gilt

$$\max_{1 \leq t \leq k} |\zeta_t(ax) - (ay_t)| = a \max_{1 \leq t \leq k} |\zeta_t x - y_t| \geq \max_{1 \leq t \leq k} |\zeta_t x - y_t|, \quad (2.60)$$

also sind zwei aufeinanderfolgende Bestapproximationsvektoren linear unabhängig. Daraus folgt aber sofort die Aussage.

Beachte auch, dass wie im Abschnitt 1.1.2 festgestellt jedes lokale Maximum eines $L_j(q)$ mit einem Maximum von $\psi_j(Q)$ korrespondiert (und umgekehrt), sodass man in der Tat nur lokale Extrema von $L_1(q)$ betrachten muss um $\overline{\psi}_1$ zu bestimmen.

Wäre nun einer der Werte $\underline{\psi}_2, \overline{\psi}_1$ nun echt größer als diese Schranke $\frac{1-k}{2k}$, müsste wegen (1.18) in jedem Falle $\overline{\psi}_1 > \frac{1-k}{2k}$ und es existiert somit eine gegen unendlich konvergente Folge von lokalen Maxima $(q_n)_{n \geq 1}$ von L_1 mit $\psi_1(q_n) = \psi_2(q_n) > V$ mit einem $V > \frac{1-k}{2k}$.

Setze $V_0 := 2(V - \frac{1-k}{2k}) > 0$. Für hinreichend großen Index n gilt wegen (2.54),(2.55) des weiteren $\psi_j(q_n) > \frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} \frac{V_0}{2}$ für $3 \leq j \leq k+1$ und wir hätten weiter insgesamt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k+1} \psi_j(q_n) > 2V + (k-1) \left[\frac{1}{k} - \frac{V_0}{2(k-1)} \right] = \frac{V_0}{2} > 0,$$

wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \infty$ ein Widerspruch zu (1.16). Das zeigt (2.53). $\square$

Bemerkungen: 1) Man kann den im Beweis von Satz 2.3 verwendeten Fall $C = \infty$ von Korollar 1.6 als einen Spezialfall von Bemerkung 3 zu Satz 1.12 auffassen.

Dabei ist $\eta_2 = 1, \eta_3 = \eta_4 = \dots = \eta_{k+1} = 0$ und zusätzlich fällt jedes η_{j+1} viel schneller gegen Null als η_j im Sinne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_{n,j} - a_{n,j+1}}{a_{n,j}}}{\frac{a_{n,j+1} - a_{n,j+2}}{a_{n,j+1}}} = \infty, \quad 1 \leq j \leq k$$

mit der Notation aus Satz 1.12.

2) Die Tatsache dass jedes Maximum von L_1 ein Minimum von L_2 ist, ist nicht notwendig um Satz 2.3 zu beweisen. Es ist hinreichend die lokalen Maxima $(q_n)_{n \geq 1}$ von L_1 bzw ψ_1 (oder einfach Stellen mit $\psi_1(q) > \frac{1-k}{2k} + \epsilon$ mit $\epsilon > 0$ beliebig) zu betrachten und dort $L_2(q_n) \geq L_1(q_n)$ zu verwenden. Wir werden (2.60) aber im folgenden noch verwenden.

Nun haben wir alle Werkzeuge zur Hand, um auf einfache Weise die Optimalität der Schranken (1.47)-(1.52) anhand konkreter Beispiele abzuleiten. Wir werden dabei zu festem k nur 3 verschiedene Typen von Vektoren $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k)$ brauchen, nämlich

- generischer Fall (zB zusammen mit 1 $\mathbb{Q}$ -linear unabhängige *algebraische* Zahlen $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$)
- $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ wie in Korollar 1.6 mit $C = \infty$, etwa $\zeta_j = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(nk+j)!}$ für $1 \leq j \leq k$
- $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ wie in Korollar 1.3

Korollar 2.3. Die Schranken aus (1.47)-(1.52) sind für alle $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k)$, für die $\{1, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k\}$ eine $\mathbb{Q}$ -linear unabhängige Menge ist, sämtlich scharf.

Beweis: In Korollar 1.3 haben wir gesehen, dass die oberen Schranken aus (1.47), (1.48), (1.49) sowie die unteren Schranken aus (1.50), (1.51), (1.52) scharf sind.

In Satz 2.3 haben wir gesehen, dass die linke Seite von (1.49) und die rechte Seite von (1.50) optimal sind.

Schmidts Teilraumsatz sagt aber, dass im Falle algebraischer $\mathbb{Q}$ -linear unabhängiger Zahlen alle klassischen Approximationskonstanten simultan den Wert $\frac{1}{k}$ annehmen (was bereits aus $\omega = \frac{1}{k}$ folgt). Also können auch die linken Seiten von (1.47), (1.48) sowie die oberen Schranken aus (1.51), (1.52) nicht verbessert werden. Man prüft einfach, dass dies alle 12 Schranken aus (1.47)-(1.52) abdeckt. $\square$

Beachte, dass weil $\underline{\psi}_1 = 0$ bereits impliziert, dass alle Werte $\underline{\psi}_j, \bar{\psi}_j$ Null sein müssen, der generische Fall stets vertreten sein muss wenn man alle scharfen Schranken nachweisen will. Man überzeugt sich dadurch leicht, dass die angegebene Zahl von 3 Vektoren $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k)$ bei festem $k \geq 3$ tatsächlich minimal ist, um alle Schranken zu erhalten. Im Fall $k \in \{1, 2\}$ kann man sogar noch $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k)$ aus Korollar 1.3 weglassen.

2.2.3 Der allgemeine (nicht extremale) aufgefächerte Fall

Nun wenden wir uns wieder dem allgemeinen, nicht extremalen Fall von (2.50) zu, in dem also (2.52) nicht erfüllt ist. Der Fall $\underline{\psi}_1 = 0$ impliziert wegen (1.9) und (1.16) sofort $\underline{\psi}_j = \bar{\psi}_j = 0$ für alle $1 \leq j \leq k+1$ und ist daher uninteressant. Wir gehen also von $-1 < \underline{\psi}_1 < 0$ aus. Interessant ist der idealisierte Spezialfall, in dem asymptotisch alle wesentlichen lokalen Extrema von allen $L_j(q)$ durch dieselbe Folge $(x^{(i)})_{i \geq 1}$ von x -Werten zustande kommen und die Folge $(x^{(i)})_{i \geq 1}$ konstantes logarithmisches Wachstum $\frac{\log(x^{(i+1)})}{\log(x^{(i)})}$ hat. In diesem Fall bewirkt ein solches $x^{(i)}$ also ein Einknicken von L_{k+1} an einer Stelle $q_{(k+1),i}$ bis es an einer Stelle $q_{(k+1,k),i} > q_{(k+1),i}$ auf L_k trifft und den steigenden Verlauf von L_k bis zum folgenden $q_{(k+1,k),i+1}$ fortsetzt. Die Funktion L_k beginnt ihrerseits bei $q_{(k+1,k),i}$ zu fallen bis sie an einer Stelle $q_{(k,k-1),i}$ auf das bis dahin steigende L_{k-1} trifft und steigt dann bis zum nächsten $q_{(k,k-1),i+1}$. Dieser Vorgang setzt sich fort bis an einer Stelle $q_{(2,1),i}$ die Funktionen L_2 und L_1 zusammentreffen und L_2 den steigenden Verlauf von L_1 fortsetzt, hingegen L_1 bis zu einer Stelle $q_{(1),i+1}$ zu fallen beginnt und ab $q_{(1),i+1}$ beginnt es wieder zu steigen bis zum folgenden $q_{(2,1),i+1}$. Wir nennen dies den *aufgefächerten Fall* von (2.50), welchen wir in Kürze exakt definieren. Aus (2.50) und der Forderung des konstanten logarithmischen Wachstums sieht man, dass dies insbesondere die Existenz einer Folge von Approximationsvektoren $(x^{(i)}, y_1^{(i)}, \dots, y_k^{(i)})_{i \geq 1}$ mit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log(x^{(i+1)})}{\log(x^{(i)})} = \frac{\omega_j}{\omega_{j+1}}, \quad 1 \leq j \leq k \quad (2.61)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} - \frac{\log\left(\max_{1 \leq t \leq k} |x^{(i)} \zeta_t - y_t^{(i)}|\right)}{\log(x^{(i)})} = \omega. \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} q_{s+1}\underline{\psi}_1 &= q_s\overline{\psi}_3 - (q_{s+1} - q_s) \\ q_{s+2}\overline{\psi}_3 &= q_s\underline{\psi}_1 + \frac{q_{s+2} - q_s}{2} \end{aligned}$$

und daraus weiter

$$\frac{\underline{\psi}_1 - \frac{1}{2}}{\overline{\psi}_3 - \frac{1}{2}} = \frac{q_{s+2}}{q_s} = \frac{q_{s+2}}{q_{s+1}} \frac{q_{s+1}}{q_s} = \frac{(1 + \overline{\psi}_3)^2}{(1 + \underline{\psi}_1)^2}.$$

Es ergibt sich nach unserer Voraussetzung $\underline{\psi}_1 < 0$ und damit $\underline{\psi}_1 \neq \overline{\psi}_3$ der Zusammenhang

$$\underline{\psi}_1^2 + \underline{\psi}_1\overline{\psi}_3 + \overline{\psi}_3^2 + \frac{3}{2}(\underline{\psi}_1 + \overline{\psi}_3) = 0. \quad (2.64)$$

und mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen kann man $\overline{\psi}_3$ ausdrücken durch

$$\overline{\psi}_3 = -\frac{\underline{\psi}_1}{2} - \frac{3}{4} + \sqrt{-\frac{3}{4}\underline{\psi}_1^2 - \frac{3}{4}\underline{\psi}_1 + \frac{9}{16}}. \quad (2.65)$$

Aus Abbildung 2.9 sieht man auch

$$q_{s+1}\underline{\psi}_1 + (q_{s+1} - p) = p\underline{\psi}_2 = q_s\underline{\psi}_1 + \frac{p - q_s}{2},$$

woraus man mit ähnlichem Vorgehen wie oben

$$\overline{\psi}_1 = \underline{\psi}_2 = \frac{1}{2} \frac{2\underline{\psi}_1 + \overline{\psi}_3}{\overline{\psi}_3 - \underline{\psi}_1 + \frac{3}{2}}. \quad (2.66)$$

gewinnt. Die Jarnik-Identität in der Form $\overline{\psi}_1 + 2\underline{\psi}_1\underline{\psi}_3 + \underline{\psi}_3 = 0$ (Theorem 1.5 in [14], wir haben dies bereits in Kapitel 1 verwendet) liefert weiter

$$\overline{\psi}_2 = \underline{\psi}_3 = -\frac{\overline{\psi}_1}{2\underline{\psi}_1 + 1},$$

womit zusammen mit (2.65), (2.66) alle Approximationskonstanten durch $\underline{\psi}_1$ explizit ausgedrückt werden können.

Drückt man sich in (2.66) die Variable $\overline{\psi}_3 = \overline{\psi}_3(\underline{\psi}_1, \overline{\psi}_1)$ aus, so bestätigt man genau mit der Wahl

$$\underline{\psi}_1 = \frac{3\overline{\psi}_1}{4\overline{\psi}_1^2 + 2\overline{\psi}_1 + 1} \quad (2.67)$$

Gleichung (2.64). Es gilt also mit $\varphi_j := k\psi_j$ Gleichheit

$$\underline{\varphi}_1 = \frac{3\overline{\varphi}_1}{\overline{\varphi}_1^2 + \overline{\varphi}_1 + 1} = \frac{(n^2 - 3n + 3)\overline{\varphi}_1 + (n - 3)\overline{\varphi}_1^2}{(n - 2)^2 + (2n - 5)\overline{\varphi}_1 + \overline{\varphi}_1^2}$$

in Formel (1.20) von Summerer/Schmidt in [15] im Fall $n = k + 1 = 3$, was in unserer Notation $k = 2$ entspricht. Selbiges (1.20) in [15] besagt, dass für zusammen mit 1 $\mathbb{Q}$ -linear unabhängige $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ stets die Ungleichung

$$\underline{\varphi}_1 \leq \frac{(n^2 - 3n + 3)\overline{\varphi}_1 + (n - 3)\overline{\varphi}_1^2}{(n - 2)^2 + (2n - 5)\overline{\varphi}_1 + \overline{\varphi}_1^2}$$

gilt. In diesem Fall wird bei vorgegebenem $\underline{\psi}_1$ also $\overline{\psi}_1$ unter allen zusammen mit 1 $\mathbb{Q}$ -linear unabhängigen $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ minimiert oder wegen (1.40) äquivalent $\widehat{\omega}$ bei festem ω maximiert. Es liegt daher die *Vermutung* nahe, dass diese Eigenschaft des aufgefächerten Falls auch in höherer Dimensionen $k > 2$ Gültigkeit behält. Wir werden in Bemerkung 1 zu Proposition 2.4 bzw Korollar 2.5 und im Kontext von Lemma 3.1 nochmal kurz darauf zurückkommen.

Jetzt wollen wir den aufgefächerten Fall mit beliebigem k hinsichtlich der Werte $\underline{\psi}_j, \overline{\psi}_j$ diskutieren. Im Fall von beliebigem k erkennt man, dass sich mit einem analogen Vorgehen zum obigen Fall $k = 2$ die Gleichung

$$\left(\underline{\psi}_1 - \frac{1}{k}\right) \left(\underline{\psi}_1 + 1\right)^k = \left(\overline{\psi}_{k+1} - \frac{1}{k}\right) \left(\overline{\psi}_{k+1} + 1\right)^k \quad (2.68)$$

gewinnen lässt.

Eine Auflösung von $\overline{\psi}_{k+1}$ in (2.68) nach $\underline{\psi}_1$ würde also über mehrfache Anwendung von (1.40) alle $\underline{\psi}_j = \overline{\psi}_{j+1}$ in Abhängigkeit von $\underline{\psi}_1$ berechenbar machen ohne den Umweg über neue Stellen, wie wir sie im Fall $k = 2$ mit p eingeführt haben. Bedingung (2.68) lässt sich mit (1.40) umformen zu

$$\frac{(1 + \omega)^{k+1}}{\omega} = \frac{(1 + \widehat{\omega}_{k+1})^{k+1}}{\widehat{\omega}_{k+1}}. \quad (2.69)$$

Mit der Substitution $t := \omega + 1$ läuft die Bestimmung von $\widehat{\omega}_{k+1}$ aus ω auf das Auffinden der reellen Nullstelle im Intervall $I_k := (0, \frac{1}{k})$ von Polynomen vom Typ

$$P_{k+1}(t) := t^{k+1} - ct + c = 0$$

hinaus, wobei $P_{k+1}(c) = 0$ mit $c \in J_k := (\frac{1}{k}, \infty)$ und sich I_k, J_k aus den Bedingungen $-1 < \underline{\psi}_1 < 0, \overline{\psi}_{k+1} > 0$ ergeben. Aus (2.61) ergibt sich des weiteren

$$\omega_j = \omega^{1 - \frac{j-1}{k+1}} \widehat{\omega}_{k+1}^{\frac{j-1}{k+1}}, \quad 1 \leq j \leq k+1, \quad (2.70)$$

wobei dies auch für $j = k+2$ unter der Konvention $\omega_{k+2} := \widehat{\omega}_{k+1}$ zutrifft. Mit diesem Wissen wollen wir nun nochmals auf die extremal numbers zurückkommen, die wie bereits angemerkt Beispiele des aufgefächerten Falls von (2.50) darstellen. Aus der Kenntnis von $\widehat{\omega} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} =: \gamma$ berechnet man zusammen mit (1.40), (2.67), (2.61)

$$\begin{aligned} \omega &= 1 \\ \omega_2 &= \gamma = \widehat{\omega} \\ \omega_3 &= \gamma^2 = \widehat{\omega}_2 \\ &\quad \gamma^3 = \widehat{\omega}_3. \end{aligned}$$

Dies führt mit (1.40) zu Werten

$$\begin{aligned} \underline{\psi}_1 &= -\frac{1}{4} \\ \underline{\psi}_2 &\approx -0.0729 \approx \overline{\psi}_1 \\ \underline{\psi}_3 &\approx 0.0854 \approx \overline{\psi}_2 \\ &\quad 0.2135 \approx \overline{\psi}_3. \end{aligned}$$

Aus Abbildung 2.8 liest man der Reihe nach folgende Näherungswerte dieser Größen ab:

$$\begin{aligned}
(24.49, -5.084) &\approx (q, L_j(q)) \in L_1 &\implies \frac{q}{L_1(q)} &\approx -0.2076 \\
(20.86, -1.455) &\approx (q, L_j(q)) \in L_1 \cap L_2 &\implies \frac{q}{L_1(q)} &\approx -0.0698 \\
(18.22, 1.165) &\approx (q, L_j(q)) \in L_2 \cap L_3 &\implies \frac{q}{L_2(q)} &\approx 0.0639 \\
(15.68, 2.699) &\approx (q, L_j(q)) \in L_3 &\implies \frac{q}{L_3(q)} &\approx 0.1721.
\end{aligned}$$

Die Werte stellen sich also erst für recht großes q ein. Anzumerken ist auch noch, dass bei vorangehenden Minima von L_1 der Wert $\frac{q}{L_1(q)}$ kleiner als -0.25 ist.

2.2.4 Die Rolle der Kettenbruchentwicklung

Nun wollen wir aus bekannten Eigenschaften von Kettenbrüchen in der eindimensionalen diophantischen Approximation noch notwendige Bedingungen für den aufgefächerten Fall unter der Zusatzvoraussetzung $\omega > 1$ ableiten. Die nachfolgenden aufeinander aufbauenden Ergebnisse aus Proposition 2.2 bis Satz 2.4 sind jedoch allgemein gehalten und Satz 2.4 ließe sich allgemeiner für beliebige $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ mit $\omega > 1$ und einer Folge $(x^{(i)})_{i \geq 1}$ formulieren, welche nicht notwendig den Bedingungen (2.61), (2.62) genügt. Satz 2.4 ist somit thematisch verwandt mit Proposition 1.1 und Korollar 1.2, wo ω in Zusammenhang mit s -adischen Kriterien gebracht wurde.

Proposition 2.2. Seien für die Folge der Kettenbruchnäherungen $(\frac{p_i}{q_i})_{i \geq 1}$ an $\zeta \in \mathbb{R}$ die Zahlen δ_i bestimmt durch

$$\left| \zeta - \frac{p_i}{q_i} \right| = \frac{1}{2} q_i^{-2-\delta_i}, \quad (2.71)$$

so gilt

$$\frac{\log(q_{i+1})}{\log(q_i)} \geq 1 + \delta_i.$$

Beweis: Weil $\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$ eine bessere Approximation an ζ ist als $\frac{p_i}{q_i}$ gilt

$$\frac{1}{q_i q_{i+1}} \leq \left| \frac{p_i}{q_i} - \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}} \right| \leq \left| \frac{p_i}{q_i} - \zeta \right| + \left| \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}} - \zeta \right| \leq 2 \cdot \frac{1}{2} q_i^{-2-\delta_i} = q_i^{-2-\delta_i},$$

was nur eine Umformulierung der Aussage darstellt. □

Proposition 2.3. Sei $(\frac{p_i}{q_i})_{i \geq 1}$ die Folge der Kettenbruchnäherungen an $\zeta \in \mathbb{R}$, so folgt aus

$$\left| \frac{r}{s} - \zeta \right| < \left| \frac{p_i}{q_i} - \zeta \right|$$

bereits $s \geq q_{i+1}$.

Beweis: Unmittelbare Folgerung aus dem Satz von Lagrange. □

Daraus folgt gewinnt man unmittelbar

Korollar 2.4. Sei $(\frac{p_i}{q_i})_{i \geq 1}$ die Folge der Kettenbruchnäherungen an $\zeta \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\Psi(\zeta) := \lim_{i \rightarrow \infty} -\frac{\log(|q_i \zeta - p_i|)}{\log(q_{i+1})} = 1.$$

Beweis: Sei δ'_i bestimmt durch

$$|q_i \zeta - p_i| = q_i^{-\delta'_i}.$$

Offenbar gilt mit δ_i aus (2.71) nun

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\delta'_i}{1 + \delta_i} = 1. \quad (2.72)$$

Andererseits ist δ'_i gegeben durch

$$\delta'_i = -\frac{\log(|q_i \zeta - p_i|)}{\log(q_i)}.$$

Damit und mit Proposition 2.2 schließt man weiter für alle $i \geq 1$

$$-\frac{\log(|q_j \zeta - p_j|)}{\log(q_{j+1})} = -\frac{\log(|q_j \zeta - p_j|)}{\log(q_j)} \frac{\log(q_j)}{\log(q_{j+1})} \leq \delta'_i \frac{1}{1 + \delta_i}.$$

Wegen (2.72) also $\Psi(\zeta) \leq 1$. Andererseits gilt wegen Proposition 2.3 und dem Dirichletschen Approximationssatz sicher $\Psi(\zeta) \geq 1$, da im Falle $\Psi(\zeta) < 1$ für hinreichend großes i und $X = q_{i+1} - 1$ das System

$$\begin{aligned} |x| &\leq X \\ |\zeta x - y| &\leq X^{-1} \end{aligned}$$

keine Lösung $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ hätte. Damit muss Gleichheit gelten. $\square$

Satz 2.4. Es mögen $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ und eine Folge $(x^{(i)})_{i \geq 1}$ die Bedingungen (2.61), (2.62) des aufgefächerten Falls von (2.50) erfüllen, wobei darüber hinaus $\omega > 1$ für die simultane Approximationskonstante von $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ gelten möge. Dann ist die Folge $(x^{(i)})_{i \geq 1}$ ab einem Index $i \geq i_0$ gegeben als

$$x^{(i)} = \text{kgV}(q_{1, \sigma_1(i)}, q_{2, \sigma_2(i)}, \dots, q_{k, \sigma_k(i)}), \quad (2.73)$$

wobei für $1 \leq j \leq k$ die $\sigma_j : \{i_0, i_0 + 1, \dots\} \mapsto \mathbb{N}$ monotone, gegen unendlich strebende Abbildungen sind und $(q_{j, n})_{n \geq 1}$ die Folge der Hauptnenner in der Kettenbruchentwicklung von ζ_j . Es bezeichnet also $(q_{j, \sigma_j(i)})_{i \geq 1}$ bis auf mögliches mehrfaches Auftauchen von Folgengliedern eine Teilfolge der Hauptnennerfolge $(q_{j, n})_{n \geq 1}$ der Kettenbruchentwicklung von ζ_j .

Beweis: Nach unserer Voraussetzung lässt sich ω schreiben als $\omega = 1 + 2\epsilon$ mit $\epsilon > 0$, es erfüllt die Folge $x^{(i)}$ also für jedes $1 \leq j \leq k$ ab hinreichend großem Index $i \geq i_j$ die Beziehung $|x^{(i)} \zeta_j - y_j^{(i)}| < (x^{(i)})^{-1-\epsilon}$ für geeigneten $y_j^{(i)} \in \mathbb{Z}$ oder äquivalent

$$\left| \zeta_j - \frac{y_j^{(i)}}{x^{(i)}} \right| \leq (x^{(i)})^{-2-\epsilon} \leq \frac{1}{2(x^{(i)})^2},$$

wenn man i_j falls nötig noch hinreichend vergrößert um auch die rechte Ungleichung sicherzustellen. Damit lässt sich für $i \geq i_0 := \max_{1 \leq j \leq k} i_j$ simultan in $1 \leq j \leq k$ der Satz von Legendre anwenden, also muss $\frac{y_j^{(i)}}{x^{(i)}}$ je eine Kettenbruchnäherung von ζ_j sein. Im weiteren seien nur mehr Indizes $i \geq i_0$ betrachtet. Das bedeutet aber, dass $x^{(i)}$ ein gemeinsames Vielfaches von $q_{j, \sigma_j(i)}$ für gewisse $\sigma_j(i)$, $1 \leq j \leq k$ ist und die $y_j^{(i)}$ durch die Relationen

$$\frac{x^{(i)}}{q_{j, \sigma_j(i)}} = \frac{y_j^{(i)}}{p_{j, \sigma_j(i)}} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad (2.74)$$

induziert sind, also $y_j^{(i)} = x^{(i)} \frac{p_{j,\sigma_j(i)}}{q_{j,\sigma_j(i)}}$. Beachte nun, dass alle Vektoren, die der Bedingung (2.74) genügen, von der Form $a(x^{(i)'}, y_1^{(i)}, \dots, y_k^{(i)})$ mit $a \in \mathbb{N}$ und $x^{(i)'}$ definiert als die rechte Seite von (2.73), sind. Wegen (2.60) führt das kleinste gemeinsame Vielfache $x^{(i)} = x^{(i)'}$ für jedes ζ_j aber zu einer besseren Approximation als jedes echte Vielfache davon.

Bleiben also noch die Aussagen über die Funktionen σ_j zu zeigen. Sei $x^{(i)}$ also das kgV von $q_{j,\sigma_j(i)}$ mit Kettenbruchnäherungen $\frac{p_{j,\sigma_j(i)}}{q_{j,\sigma_j(i)}}$ von ζ_j und seien $(x^{(i)}, y_1^{(i)}, \dots, y_k^{(i)})$ die von der Relation (2.74) induzierten Approximationsvektoren, also mit $y_j^{(i)} = x^{(i)} \frac{p_{j,\sigma_j(i)}}{q_{j,\sigma_j(i)}}$. Um die Monotonie von σ_j zu zeigen, schreiben wir für $1 \leq j \leq k$ alle $\sigma_j(i+1)$ als $\sigma_j(i+1) = \sigma_j(i) - d_j$ mit $d_j \in \mathbb{Z}$ an und führen wir die Annahme, dass für mindestens einen Index $d_j \geq 1$ gilt, auf einen Widerspruch. Sei $s \in \{1, 2, \dots, k\}$ also ein solcher Index mit $d_s \geq 1$. Wegen Korollar 2.4 ist für hinreichend großes $i = i(\epsilon)$ wegen $d_s \geq 1$ insbesondere

$$-\frac{\log(|q_{s,\sigma_s(i)-d_s}\zeta_s - p_{s,\sigma_s(i)-d_s}|)}{\log(x^{(i)})} < -\frac{\log(|q_{s,\sigma_s(i)-d_s}\zeta_s - p_{s,\sigma_s(i)-d_s}|)}{\log(q_{s,\sigma_s(i)})} < 1 + \epsilon \quad (2.75)$$

erfüllt. Andererseits ist wegen $x^{(i+1)} > x^{(i)}$

$$-\frac{\log(|q_{s,\sigma_s(i)-d_s}\zeta_s - p_{s,\sigma_s(i)-d_s}|)}{\log(x^{(i+1)})} < -\frac{\log(|q_{s,\sigma_s(i)-d_s}\zeta_s - p_{s,\sigma_s(i)-d_s}|)}{\log(x^{(i)})}. \quad (2.76)$$

Weiters gilt wegen unserer Annahme $\sigma_j(i+1) = \sigma_j(i) - d_j$ und dem bereits bewiesenen (2.73) angewandt auf den Index $i+1$, dass $(x^{(i+1)}, y_1^{(i+1)}, \dots, y_k^{(i+1)})$ gegeben ist als die rechte Seite von (2.73) mit der Ersetzung $\sigma_j(i) - d_j$ statt $\sigma_j(i)$ in jedem Index der $q_{\cdot}$, (wobei d_j für $j \neq s$ negativ sein darf). Zusammen mit (2.60) ergibt sich

$$-\frac{\log(|x^{(i+1)}\zeta_s - y_s^{(i+1)}|)}{\log(x^{(i+1)})} \leq -\frac{\log(|q_{s,\sigma_s(i+1)}\zeta_s - p_{s,\sigma_s(i+1)}|)}{\log(x^{(i+1)})} = -\frac{\log(|q_{s,\sigma_s(i)-d_s}\zeta_s - p_{s,\sigma_s(i)-d_s}|)}{\log(x^{(i+1)})}. \quad (2.77)$$

Die Beziehungen (2.75), (2.76), (2.77) zusammen ergeben also eine Ungleichungskette, die insbesondere

$$-\frac{\log(|x^{(i+1)}\zeta_s - y_s^{(i+1)}|)}{\log(x^{(i+1)})} < 1 + \epsilon < \omega$$

zur Folge hat, entgegen der Voraussetzung (2.62). Wegen der Beliebigkeit von s kann $x^{(i+1)}$ also nicht kleinstes gemeinsames Vielfaches von Zahlen der Form $q_{j,\sigma_j(i)-d_j}$ sein, falls für mindestens ein $1 \leq j \leq k$ die Beziehung $d_j \geq 1$ gilt, was die Monotonie von jeder der Funktionen σ_j zeigt. Die letzte Aussage $\lim_{i \rightarrow \infty} \sigma_j(i) = \infty$ für $1 \leq j \leq k$ folgt einfach aus der Irrationalität der ζ_j und (2.62) die zeigen, dass man mit der andernfalls endlichen Menge von Hauptnennern $\{q_{j,n} : n \leq n_0\}$ und daraus gemäß (2.74) entstehenden Approximationsvektoren nicht beliebig gut approximieren könnte, also

$$|x^{(i)}\zeta_j - y_j^{(i)}| \geq \delta > 0 \quad \forall i.$$

Klarerweise impliziert (2.62) aber $\lim_{i \rightarrow \infty} |x^{(i)}\zeta_j - y_j^{(i)}| = 0$ für alle $1 \leq j \leq k$, ein Widerspruch. $\square$

Satz 2.4 legt nahe, wie man den aufgefächerten Fall für $k = 1$ konstruieren kann. Man muss Zahlen ζ wählen, deren Hauptnennerfolge $(q_n)_{n \geq 1}$ die Wachstumsbedingung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(q_{n+1})}{\log(q_n)} = \omega$$

erfüllt. Beachte, dass im Fall $k = 1$ stets $\omega \geq 1$ gilt und Satz 2.4 in diesem Fall auch für $\omega = 1$ korrekt bleibt, also keine Einschränkung an das irrationale ζ gegeben ist. Ist $[b_0; b_1, \dots]$ die Kettenbruchentwicklung von ζ , so reicht wegen der Beziehung $q_{n+1} = b_{n+1}q_n + q_{n-1}$ die Asymptotik

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(b_{n+1})}{\log(b_n)} = \omega$$

für eine sonst beliebige Folge $(b_n)_{n \geq 1}$ positiver ganzer Zahlen aus. In Abbildung 2.10 ist der Fall $\omega = 1.5$ illustriert, dabei wurde $b_0 = 0, b_1 = 2$ und $b_{j+1} = \lceil b_j^{1.5} \rceil$ für $1 \leq j \leq 10$ gesetzt, wobei man sich dieses Schema natürlich ad infinitum fortgesetzt denken muss.

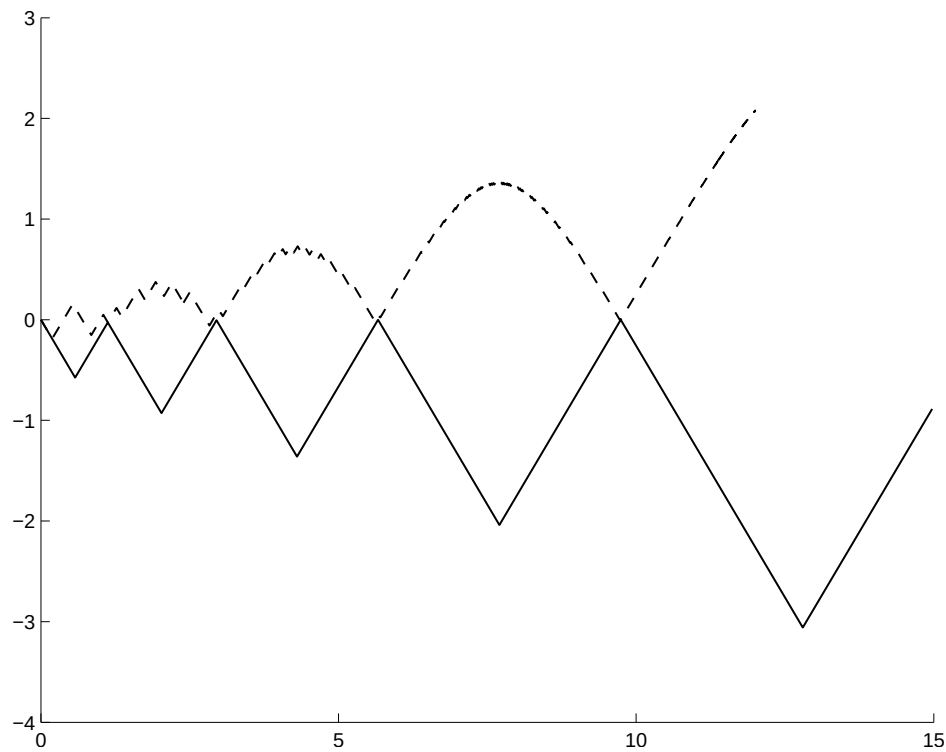


Abbildung 2.10: 1-dimensionaler Faecherfall

Beachte, dass eine Wahl von $\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-a_n}$ für die $C := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ und somit $C = \omega + 1$ gilt und auch (2.50) im Fall $k = 1$ wegen $\bar{\psi}_1 = \underline{\psi}_2 = 0$ immer erfüllt ist. All dies ist in der Bemerkung zu Korollar 2.2 festgehalten. Die einfache Rechnung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(2^{a_{n+1}})}{\log(2^{a_n})} = \omega + 1 \neq \omega = \frac{\omega}{1} = \frac{\omega}{\hat{\omega}}$$

zeigt nun aber, dass hier nicht der aufgefächerte Spezialfall entsteht. Dies liegt daran, dass gute Approximationen durch x -Werte der Form 2^{a_n} in zu niedriger Frequenz entstehen und dazwischen eine Reihe von Kettenbruchhauptnennern jeweils kleine Verbesserungen bewirken. Abbildung 2.11 visualisiert dieses Verhalten. Dabei ist $\zeta = 2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-9} + 2^{-27}$, was also den Fall $\zeta = \sum_{n \geq 1} 2^{-3^n}$ simulieren soll.

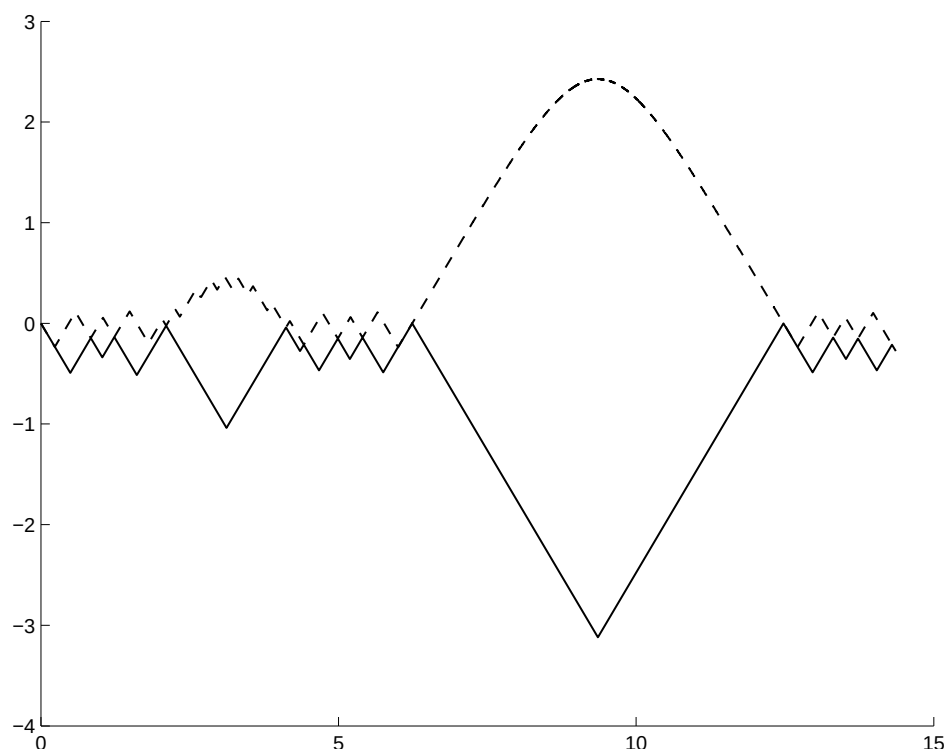


Abbildung 2.11: 1-dimensionaler Fall ohne Fächer

Dies zeigt auf, dass zumindest im Fall $k = 1$ der aufgefächerte Fall ein echter Spezialfall von (2.50) ist.

Beispiel: Nun wollen wir in Kontext von Satz 2.4 nochmal auf die extremal numbers zurückkommen. Wir wissen bereits, dass diese Beispiele für den aufgefächerten Fall von (2.50) darstellen. Satz 2.4 lässt sich zwar wegen $\omega = 1$ nicht anwenden, numerische Berechnungen deuten aber darauf hin, dass er für extremal numbers zumindest von der Form (2.51) trotzdem erfüllt ist. Dabei scheinen genauer die gemeinsamen besten x -Werte der simultanen Approximation von ζ, ζ^2 stets eine Teilfolge der Kettenbruchhauptnenner von ζ und ein kleines Vielfaches von den Hauptennern der Kettenbruchhauptnenner von ζ^2 darzustellen, sodass also die kgV-Werte in Satz 2.4 mit gewissen Hauptennern von ζ übereinstimmen. Betrachtet man etwa das bereits früher verwendete Beispiel von $a = 1, b = 2$ in (2.51) mit den simultanen ersten 6 besten x -Werten 1, 2, 4, 25, 576, 81788 (der Ausreißer 81212 wurde weggelassen) und vergleicht die Folge der Kettenbruchhauptnenner von ζ gegeben durch 1, 3, 4, 7, 18, 25, 68, 93, 161, 415, 576, 991, 2558, 3549, 9656, 13205, 22861, 58927, 81788 und jene von ζ^2 gegeben durch 1, 2, 25, 27, 52, 131, 445, 576, 1597, 3770, 16677, 20447 so erkennt man leicht dieses Muster, denn $4 \cdot 20447 = 81788$ und sonst sind die simultanen besten x -Werte hier sogar gemeinsame Hauptnenner von ζ, ζ^2 , was aber Zufall ist.

Wir wollen als nächstes einen weiteren Satz beweisen, der wieder auf bekannten Approximati-
onseigenschaften von Kettenbrüchen beruht und einen weiteren Zusammenhang (notwendige Be-
dingung) zwischen den Kettenbruchhauptennern der ζ_i und dem aufgefächerten Fall von (2.50)
herstellt. Eine Interpretation des eben bewiesenen Satzes 2.4 ist: Eine notwendige Bedingung
für den aufgefächerten Fall ist also insgesamt gegeben durch die Existenz einer Folge $(x^{(i)})_{i \geq 1}$
mit Wachstumsbedingung (2.61), welche aus Kettenbruchhauptennern von $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ gemäß

(2.73) in Kontext der Notation von Satz 2.4 hervorgeht, und darüber hinaus muss Approximationsbedingung (2.62) gelten. Es wäre nun also wünschenswert, auch Bedingung (2.62) in Beziehung zum Wachstum der Kettenbruchhauptnenner der Zahlen ζ_i zu bringen um eine noch vollständigere Beschreibung durch diese zu erhalten. Insbesondere zeigt der folgende Satz zusammen mit der im nächsten Abschnitt 2.2.5 folgenden Proposition 2.4, dass die auf die $x^{(i)}$ folgenden Kettenbruchhauptnenner der ζ_j alle im wesentlichen in den Intervallen $\left[(x^{(i)})^\omega, \left(x_i^{(i)} \right)^{\omega/\bar{\omega}} \right]$ liegen müssen. Beachte auch, dass im Beweis auch eine Asymptotik über Größe der Teilnenner $b_{..}$ der Kettenbruchentwicklung hergeleitet ist.

Satz 2.5. Unter fortgeführter Notation sowie Voraussetzungen von Satz 2.4 gilt

$$\omega \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \min_{1 \leq j \leq k} \frac{\log(q_{j, \sigma_j(i)+1})}{\log(x^{(i)})} \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} \min_{1 \leq j \leq k} \frac{\log(q_{j, \sigma_j(i)+1})}{\log(x^{(i)})} \leq \min \left\{ \omega + 1, \frac{\omega}{\bar{\omega}} \right\}. \quad (2.78)$$

Weiter gilt, dass für jedes $\epsilon > 0$ und hinreichend großes $i = i(\epsilon)$ und jedes $1 \leq j = j(i) \leq k$ die Beziehung $\frac{\log(q_{j, \sigma_j(i)+1})}{\log(x^{(i)})} > \frac{\omega}{\bar{\omega}} + \epsilon$ nur im Falle $\sigma_j(i) = \sigma_j(i+1)$ (oder gleichbedeutend

$q_{j, \sigma_j(i)} = q_{j, \sigma_j(i+1)}$) gelten kann.

Insbesondere ist im Fall $\sigma_j(i) \neq \sigma_j(i+1)$ für alle $i \geq i_0 \in \mathbb{N}$ und $1 \leq j \leq k$

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq k} \frac{\log(q_{j, \sigma_j(i)+1})}{\log(x^{(i)})} \leq \frac{\omega}{\bar{\omega}}. \quad (2.79)$$

Beweis: Wir beweisen zuerst obere Schranke $\frac{\omega}{\bar{\omega}}$ auf der rechten Seite von (2.78). Klarerweise gibt es aber zu jedem i mindestens einen Index $1 \leq j = j(i) \leq k$, sodass $q_{j, \sigma_j(i)+1} > q_{j, \sigma_j(i)}$ (da sonst $x^{(i)} = x^{(i+1)}$) und folglich wegen der Monotonie von σ_j weiter $q_{j, \sigma_j(i)+1} \geq q_{j, \sigma_j(i)+1}$. Weiter gilt für diesen Index j wegen (2.73) die Beziehung $q_{j, \sigma_j(i)+1} |x^{(i+1)}|$, also $q_{j, \sigma_j(i)+1} \leq x^{(i+1)}$ und somit insgesamt nach Logarithmieren $\log(q_{j, \sigma_j(i)+1}) \leq \log(x^{(i+1)}) \sim \log(x^{(i)}) \frac{\omega}{\bar{\omega}}$, wobei die Asymptotik eine Umformulierung von (2.61) darstellt. Division durch $\log(x^{(i)})$ zeigt die Behauptung und der Beweis zeigt genauer auch den Zusatzkommentar und in Folge (2.79). Die mittlere Ungleichung ist triviale Folgerung aus den Definitionen von $\liminf$ und $\limsup$. Nun zeigen wir die verbleibenden beiden Ungleichungen aus (2.78).

Allgemein gilt für reelles $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ und korrespondierenden Kettenbrüchen $(\frac{p_n}{q_n})_{n \geq 1}$, also

$$q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}, \quad (2.80)$$

wegen

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n^2 \left([a_{n+1}, a_{n+2}, \dots] + \frac{1}{[a_n, a_{n-1}, \dots, a_0]} \right)}$$

die Beziehung

$$\frac{1}{a_{n+1} + 2} \leq q_n |\alpha q_n - p_n| \leq \frac{1}{a_{n+1}}.$$

Dies besagt, wenn ω'_n die Approximationskonstante aus (1.36) für $|q_n \alpha - p_n|$ bezeichnet, also $q_n^{\omega'_n} = |q_n \alpha - p_n|$,

$$a_{n+1} \sim q_n^{\omega'_n - 1}. \quad (2.81)$$

Bezeichne $\zeta_j = [b_{j,0}; b_{j,1}, b_{j,2}, \dots]$ die Kettenbruchentwicklung von ζ_j für $1 \leq j \leq k$. Beachte dass wegen (2.74) für alle $i \geq 1$ und $1 \leq j \leq k$

$$\left| \zeta_j - \frac{y_j^{(i)}}{x^{(i)}} \right| = \left| \zeta_j - \frac{p_{j,\sigma_j(i)}}{q_{j,\sigma_j(i)}} \right|. \quad (2.82)$$

Seien für jedes i die Werte $\omega'_{\sigma_j(i)}, t_i$ definiert als Lösungen von

$$\begin{aligned} (q_{j,\sigma_j(i)})^{-\omega'_{\sigma_j(i)}} &= \min_{1 \leq j \leq k} |q_{j,\sigma_j(i)} \zeta_j - p_{j,\sigma_j(i)}|, \quad 1 \leq j \leq k \\ (x^{(i)})^{-t_i} &= \min_{1 \leq j \leq k} |\zeta_j x^{(i)} - y_j^{(i)}| \end{aligned} \quad (2.83)$$

und $1 \leq j_0 = j_0(i) \leq k$ der Index, für welchen bei festem i das Minimum auf der rechten Seite von (2.83) angenommen wird. Wegen (2.82) folgt dann

$$\frac{\log(x^{(i)})}{\log(q_{j,\sigma_j(i)})} (t_i + 1) - 1 = \omega'_{\sigma_j(i)}, \quad j = j_0 \quad (2.84)$$

$$\frac{\log(x^{(i)})}{\log(q_{j,\sigma_j(i)})} (t_i + 1) - 1 \leq \omega'_{\sigma_j(i)}, \quad j \neq j_0 \quad (2.85)$$

(beachte dass der "shift" um Eins durch Umrechnen der verschiedenen Approximationsprobleme $|\zeta - \frac{p}{q}|$ und $|\zeta q - p|$ entsteht). Nach Definition der Folge $(x^{(i)})_{i \geq 1}$ gilt aber $\omega = \lim_{i \rightarrow \infty} t_i$. Aus (2.84), (2.85) folgt damit insbesondere für alle $\epsilon > 0$ und hinreichend großes $i = i(\epsilon)$

$$\frac{\log(x^{(i)})}{\log(q_{j,\sigma_j(i)})} (\omega + 1) - 1 - \epsilon \leq \omega'_{\sigma_j(i)}, \quad 1 \leq j \leq k$$

mit asymptotischer Gleichheit für $j = j_0$ und $\epsilon = 0$. Man erhält weiter mit (2.81) angewandt auf die Zahlen $\alpha = \zeta_j$ und deren Näherungskettenbruchhauptnennern $q_{j,\sigma_j(i)}$ und korrespondierenden $b_{j,\sigma_j(i)}$

$$b_{j,\sigma_j(i)+1} \geq q_{j,\sigma_j(i)}^{(\omega+1) \frac{\log(x^{(i)})}{\log(q_{j,\sigma_j(i)})} - 2 - \epsilon}, \quad 1 \leq j \leq k \quad (2.86)$$

mit asymptotischer Gleichheit für $j = j_0$ und $\epsilon = 0$. (2.86) zusammen mit (2.80) angewandt auf $q_{j,\sigma_j(i)}$ liefern nun für $1 \leq j \leq k$

$$\begin{aligned} q_{j,\sigma_j(i)+1} &= b_{j,\sigma_j(i)+1} q_{j,\sigma_j(i)} + q_{j,\sigma_j(i)-1} \sim b_{j,\sigma_j(i)+1} q_{j,\sigma_j(i)} \\ &\geq q_{j,\sigma_j(i)}^{(\omega+1) \frac{\log(x^{(i)})}{\log(q_{j,\sigma_j(i)})} - 1 - \epsilon} = (x^{(i)})^{\omega+1-(1+\epsilon) \frac{\log(q_{j,\sigma_j(i)})}{\log(x^{(i)})}} \end{aligned}$$

mit asymptotischer Gleichheit in der Ungleichung für $j = j_0$ und $\epsilon = 0$. Lassen wir nun $\epsilon \rightarrow 0$ streben, so folgt die linke Seite von (2.78) mit der trivialen Abschätzung $\frac{\log(q_{j,\sigma_j(i)})}{\log(x^{(i)})} \leq 1$ für alle i und $1 \leq j \leq k$ sowie die fehlende rechte Ungleichung von (2.78) mit $j = j_0$ wegen der trivialen Abschätzung $\frac{\log(q_{j,\sigma_j(i)})}{\log(x^{(i)})} \geq 0$. Denn dies zeigt gerade, dass für alle $1 \leq j \leq k$ respektive den Index $j = j_0(i)$ der Exponent von $q_{j,\sigma_j(i)+1}$ zur Basis $x^{(i)}$ also für hinreichend großes i und $\epsilon \rightarrow 0$ durch ω nach unten respektive durch $\omega + 1$ nach oben beschränkt ist, weshalb man zum $\liminf$ respektive $\limsup$ übergehen kann. $\square$

2.2.5 Abschätzungen für $\widehat{\omega}$ in Abhängigkeit von ω

Beachte, dass $\widehat{\omega}$ im hier behandelten aufgefächerten Fall bereits durch ω mittels (2.69) und (2.70) festgelegt ist, also das Minimum in der rechten Seite von (2.78) abhängig von ω und k numerisch bestimmt werden kann. Es ergibt sich also aus Satz 2.5 in natürlicher Weise die Fragestellung nach der Größenordnung von $\frac{\omega}{\widehat{\omega}}$ in Abhängigkeit von $\omega \in [\frac{1}{k}, \infty]$.

Tatsächlich ist stets $\frac{\omega}{\widehat{\omega}}$ das Minimum der rechten Seite in Satz 2.5, wie die folgende Proposition zeigt. Der Term $\omega + 1$ ist in Satz 2.5 also redundant, bemerke in diesem Zusammenhang aber, dass sein Beweis mehr Information enthält als die Aussage des Satzes an sich.

Proposition 2.4. Es gilt im aufgefächerten Fall von (2.50) für die angegebenen k und alle $\frac{1}{k} \leq \omega \leq \infty$ und zugehörigem $\widehat{\omega} = \widehat{\omega}(\omega, k)$ bestimmt durch (2.69), (2.70)

$$\omega + 1 \geq \frac{\omega}{\widehat{\omega}} \geq \omega, \quad k \geq 1 \quad (2.87)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega + 1 - \frac{\omega}{\widehat{\omega}} = 0, \quad k \geq 2. \quad (2.88)$$

Dabei gilt in der rechten Ungleichung von (2.87) genau im Falle $k = 1$ oder $\omega = \infty$ Gleichheit, für die linke genau im Fall $\omega = \infty$.

Beweis: Die rechte Ungleichung von (2.87) folgt einfach aus (1.50). Der Gleichheitsfall $\widehat{\omega} = 1$ gilt stets für $k = 1$, da die Gleichung dann äquivalent zu $\overline{\psi}_1 = 0$ ist. Im Fall $k \geq 2$ folgt aus Gleichheit in der rechten Ungleichung wegen (1.40) zunächst $\overline{\psi}_1 = \frac{1-k}{2k}$. Gemäß (1.20) in [15], was in unserer Notation

$$\underline{\psi}_1 \leq \frac{(k^2 - k + 1)\overline{\psi}_1 + k(k-2)\overline{\psi}_1^2}{(k-1)^2 + k(2k-3)\overline{\psi}_1 + k^2\underline{\psi}_1^2},$$

entspricht, folgt daraus $\underline{\psi}_1 = -1$ und mit (1.40) weiter $\omega = \infty$ wie behauptet. Andererseits ist die Gleichheit im Falle $\omega = \infty$ Aussage von (2.57), was via (1.40) aus der Definition des aufgefächerten Falls folgt.

Wir zeigen nun die linke Ungleichung von (2.87). Gelte entgegen der Behauptung für ein $k \geq 1$ die Beziehung $\widehat{\omega} \leq \frac{\omega}{\omega+1}$. Gemäß (2.70) mit $j = 2$ (bemerke es gilt $\omega_2 = \widehat{\omega}$) führt dies zu

$$\widehat{\omega}_{k+1} \leq \left[\left(\frac{\omega}{\omega+1} \right) \omega^{-\frac{k}{k+1}} \right]^{k+1} = \frac{\omega}{(\omega+1)^{k+1}}. \quad (2.89)$$

Setze

$$f_k(x) := \frac{(x+1)^{k+1}}{x}, \quad k \geq 1.$$

Eine elementare Kurvendiskussion zeigt, dass jedes f_k auf $x \in (0, \frac{1}{k})$ fällt und auf $x \in (\frac{1}{k}, \infty)$ steigt (also insbesondere bei $x = \frac{1}{k}$ ein globales Minimum auf $(0, \infty)$ hat). Damit folgt wegen $\widehat{\omega}_{k+1} < \frac{1}{k}$ aus (2.69) und (2.89) weiter

$$f_k(\omega) = f_k(\widehat{\omega}_{k+1}) \geq f_k\left(\frac{1}{f_k(\omega)}\right), \quad k \geq 1.$$

Mit $z := \frac{1}{f_k(\omega)} \geq 0$ bedeutet dies $zf_k(z) = (z+1)^{k+1} \leq 1$, ein Widerspruch zu $z > 0$. Klarerweise kann nur im Fall $C = \infty$ Gleichheit angenommen werden.

Für (2.88) bemerke zuerst, dass im Spezialfall $k = 2$ noch eine explizite Formel für $\widehat{\omega}_{k+1}$ mittels (2.69) gegeben ist durch

$$\widehat{\omega}_{k+1} = \widehat{\omega}_3 = \frac{\omega+1}{2} \sqrt{1 + \frac{4}{\omega}} - \frac{\omega+3}{2}$$

und sich (2.88) weiter mit (2.70) im Fall $j = 2$ (beachte wieder $\widehat{\omega} = \omega_2$) auf das Nachprüfen von

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega + 1 - \left(\frac{\omega}{\frac{\omega+1}{2} \sqrt{1 + \frac{4}{\omega}} - \frac{\omega+3}{2}} \right)^{1/3} = 0$$

reduziert. Erweitert man im Ausdruck unter der dritten Wurzel Zähler und Nenner mit $\frac{\omega}{\frac{\omega+1}{2} \sqrt{1 + \frac{4}{\omega}} + \frac{\omega+3}{2}}$ ist dies äquivalent zu

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega + 1 - \left(\frac{1}{2} \omega^2 \left[(\omega + 1) \sqrt{1 + \frac{4}{\omega}} + \omega + 3 \right] \right)^{\frac{1}{3}} = 0.$$

Da (2.87) im Fall $k = 2$ äquivalent zu $\omega + 1 > \left(\frac{1}{2} \omega^2 \left[(\omega + 1) \sqrt{1 + \frac{4}{\omega}} + \omega + 3 \right] \right)^{\frac{1}{3}}$ für alle $\omega \geq \frac{1}{k} = \frac{1}{2}$ ist, müssen wir also nur zeigen, dass für alle $\epsilon > 0$ und hinreichend großes $\omega = \omega(\epsilon)$ die Beziehung

$$(\omega + 1 - \epsilon)^3 < \frac{1}{2} \omega^2 \left[(\omega + 1) \sqrt{1 + \frac{4}{\omega}} + \omega + 3 \right] \quad (2.90)$$

gilt. Schätzt man auf der rechten Seite von (2.90) nun $\sqrt{1 + \frac{4}{\omega}} \geq 1 + \frac{2}{\omega} - \frac{2}{\omega^2}$ ab, was für ω groß genug sicher zutreffend ist wie man durch ausquadrieren bestätigt, ergibt sich als hinreichende Bedingung für (2.90) nach ausmultiplizieren

$$\omega^3 + (3 - 3\epsilon)\omega^2 + 3(1 - \epsilon)^2\omega + (1 - \epsilon)^3 < \omega^3 + 3\omega^2 - \frac{\omega}{4} - \frac{1}{4},$$

was offensichtlich für hinreichend großes $\omega = \omega(\epsilon)$ zutrifft, da der führende quadratische Term einen größeren Koeffizienten auf der rechten Seite hat. Damit ist (2.88) im Fall $k = 2$ bewiesen.

Wir zeigen nun, dass für jedes feste ω der Wert $\widehat{\omega}$ fallend in k ist, und folgern somit die Behauptung aus dem Fall $k = 2$ und (2.87).

Wir führen dazu zunächst die Notation $\widehat{\omega}_{j,(l)}$ für $\widehat{\omega}_j$ in Dimension $k = l$ und $\widehat{\omega}_{(l)} := \widehat{\omega}_{1,(l)}$ ein. Es ist also zu festem ω der Wert $\widehat{\omega}_{k+1,(k)}$ als die Lösung von $f_k(\omega) = f_k(a)$ im Intervall $a \in (0, \frac{1}{k})$ bestimmt, und die übrigen $\omega_{j,(k)} = \widehat{\omega}_{j-1,(k)}$ für $2 \leq j \leq k+1$ ergeben sich aus (2.69), (2.70).

Wir wollen also $\widehat{\omega}_{(k+1)} < \widehat{\omega}_{(k)}$ zeigen, um den Beweis abzuschließen.

Bemerke zunächst, dass für festes ω die Beziehung $\frac{f_{k+1}(\omega)}{f_k(\omega)} = 1 + \omega$ gilt, sodass wegen (2.69) angewandt auf k und $k+1$ auch

$$\frac{f_{k+1}(\widehat{\omega}_{k+2,(k+1)})}{f_k(\widehat{\omega}_{k+1,(k)})} = 1 + \omega \quad (2.91)$$

gelten muss. Es ist aber auch

$$\widehat{\omega}_{k+2,(k+1)} < \widehat{\omega}_{k+1,(k)}, \quad (2.92)$$

denn im Falle $\widehat{\omega}_{k+1,(k)} > \frac{1}{k+1}$ ist dies trivial (wegen $\widehat{\omega}_{k+2,(k+1)} < \frac{1}{k+1}$) und im Fall $\widehat{\omega}_{k+1,(k)} < \frac{1}{k+1}$ folgt es aus dem monotonen Fallen von f_{k+1} auf dem Intervall $(0, \frac{1}{k+1})$ und aus

$$\frac{f_{k+1}(\widehat{\omega}_{k+1,(k)})}{f_k(\widehat{\omega}_{k+1,(k)})} = 1 + \widehat{\omega}_{k+1,(k)} < 1 + \omega \text{ kombiniert mit (2.91).}$$

Wegen (2.92) ist der Zähler von $f_{k+1}(\widehat{\omega}_{k+2,(k+1)})$ kleiner als der von $f_{k+1}(\widehat{\omega}_{k+1,(k)})$ und damit kleiner als das $\frac{f_{k+1}(\widehat{\omega}_{k+1,(k)})}{f_k(\widehat{\omega}_{k+1,(k)})} = (1 + \widehat{\omega}_{k+1,(k)})$ -fache des Zählers von $f_k(\widehat{\omega}_{k+1,(k)})$. Wegen (2.91) muss folglich der Nenner von $f_{k+1}(\widehat{\omega}_{k+2,(k+1)})$ um mindestens den Faktor $\frac{1 + \widehat{\omega}_{k+1,(k)}}{\omega + 1}$ kleiner als der von $f_k(\widehat{\omega}_{k+1,(k)})$ sein, also

$$\frac{\widehat{\omega}_{k+1,(k)}}{\widehat{\omega}_{k+2,(k+1)}} > \frac{1 + \omega}{1 + \widehat{\omega}_{k+1,(k)}}. \quad (2.93)$$

Beachte nun, dass (2.70) mit $j = 2$ (beachte wieder $\omega_2 = \widehat{\omega}$) angewandt auf k und $k + 1$

$$\widehat{\omega}_{(k)} = \omega^{\frac{k}{k+1}} \widehat{\omega}_{k+1,(k)}^{\frac{1}{k+1}} \quad (2.94)$$

$$\widehat{\omega}_{(k+1)} = \omega^{\frac{k+1}{k+2}} \widehat{\omega}_{k+2,(k+1)}^{\frac{1}{k+2}} \quad (2.95)$$

ergibt. Verwendet man (2.93) in (2.95) und bildet die Quotienten der jeweils linken und rechten Seiten von (2.94) durch (2.95), so erhält man

$$\frac{\widehat{\omega}_{(k)}}{\widehat{\omega}_{(k+1)}} > \omega^{-\frac{1}{(k+1)(k+2)}} \widehat{\omega}_{k+1,(k)}^{\frac{1}{(k+1)(k+2)}} \left(\frac{1 + \omega}{1 + \widehat{\omega}_{k+1,(k)}} \right)^{\frac{1}{k+2}}. \quad (2.96)$$

Man überzeugt sich aber leicht von

$$\omega^{-\frac{1}{(k+1)(k+2)}} \widehat{\omega}_{k+1,(k)}^{\frac{1}{(k+1)(k+2)}} \left(\frac{1 + \omega}{1 + \widehat{\omega}_{k+1,(k)}} \right)^{\frac{1}{k+2}} = 1 \iff f_k(\omega) = f_k(\widehat{\omega}_{k+1,(k)}) \quad (2.97)$$

und die rechte Gleichung von (2.97) ist per Definition erfüllt also auch die linke und (2.96) und (2.97) liefern zusammen $\widehat{\omega}_{(k)} > \widehat{\omega}_{(k+1)}$ wie behauptet. $\square$

Nun wollen wir bei fixiertem ω das Verhalten des aufgefächerten Falls in Abhängigkeit von k studieren.

Korollar 2.5. Betrachte für jedes feste $\omega > 0$ den aufgefächerten Fall in Abhängigkeit von k . Dabei ist $k \geq \lceil \frac{1}{\omega} \rceil$ wegen $\omega \in [\frac{1}{k}, \infty]$.

Dann sind bei festgehaltenem j die Werte $\omega_{j,(k)} = \omega_j(\omega, k)$ monoton fallend in k und unter der formalen Konvention $\widehat{\omega}_0 := \omega, \omega_{k+2,(k)} := \widehat{\omega}_{k+1,(k)}$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{\omega}_{j-1,(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \omega_{j,(k)} = \omega \cdot \left(\frac{1}{\omega + 1} \right)^{j-1}, \quad 1 \leq j \leq k + 2.$$

Beweis: Im Beweis von Proposition 2.4 haben wir insbesondere gezeigt, dass $\widehat{\omega}_{(k)} = \widehat{\omega}(\omega, k) = \omega_2(\omega, k)$ monoton fallend in k ist. Daraus folgt leicht mit (2.70), dass sogar für alle $j \geq 2$ und $k_1 > k_2 \geq j - 1$ und alle $\omega \geq \frac{1}{k_2}$ die Ungleichung $\omega_j(\omega, k_1) < \omega_j(\omega, k_2)$ gilt. Es werden also bei festgehaltenem ω alle entsprechenden Approximationskonstanten im aufgefächerten Fall von (2.50) mit steigender Dimension kleiner. Weiter folgt wegen (2.61) unter der formalen Konvention $\omega_{k+2} := \widehat{\omega}_{k+1}$

$$\widehat{\omega}_{j-1,(k)} = \omega_{j,(k)} = \omega \cdot \left(\frac{\widehat{\omega}_{(k)}}{\omega} \right)^{j-1} \geq \omega \cdot \left(\frac{1}{\omega + 1} \right)^{j-1}, \quad 2 \leq j \leq k + 2. \quad (2.98)$$

Aus Monotonie und Beschränktheit folgt insbesondere, dass bei festem ω für alle j die Grenzwerte $\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_{j,(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \omega_j(\omega, k)$ existieren und nach unten durch die rechten Seiten von (2.98) beschränkt sind. Wir müssen zeigen, dass sogar Gleichheit gilt.

Dabei reicht es wegen (2.70) offenbar, sich auf den Fall $j = 2$ zu beschränken, denn (2.70) besagt insbesondere $\omega_{j+1} = \omega_j \frac{\widehat{\omega}}{\omega} = \omega_j \frac{\omega_2}{\omega}$.

Definieren wir nun eine Folge von Werten $\alpha(k) \in [1, \infty)$ durch

$$\frac{\widehat{\omega}_{(k)}}{\omega} = \alpha(k) \cdot \frac{1}{\omega + 1}, \quad k \geq \left\lceil \frac{1}{\omega} \right\rceil,$$

so müssen wir also $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(k) = 1$ zeigen. Setzt man nun $\widehat{\omega}_{k+1,(k)} = \omega \left(\frac{\widehat{\omega}_{(k)}}{\omega} \right)^{k+1}$, was eine Umformulierung von (2.70) ist, in die rechte Seite von (2.69) ein, so ergibt dies nach elementarer Umformung

$$\alpha(k) = 1 + \omega \cdot \left(\frac{\alpha(k)}{\omega + 1} \right)^{k+1}, \quad k \geq \left\lceil \frac{1}{\omega} \right\rceil. \quad (2.99)$$

Wir wissen, dass $\alpha(k)$ monoton fallend konvergiert. Im Fall $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(k) \geq \omega + 1$ ergäbe sich $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\widehat{\omega}_{(k)}}{\omega} \geq 1$ und damit wegen der Monotonie von $\alpha(k)$ weiter $\widehat{\omega}_{(k)} > \omega$ für alle k , ein offensichtlicher Widerspruch zur Definition dieser Größen. Deswegen muss $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(k) < \omega + 1$ gelten und folglich konvergiert die rechte Seite von (2.99) aber für $k \rightarrow \infty$ gegen 1 und deshalb auch die linke, was gerade $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(k) = 1$ wie gewünscht liefert. $\square$

Bemerkungen: 1) Die linke Ungleichung von (2.87) besagt, dass im aufgefächerten Spezialfall von (2.50) stets $\widehat{\omega} \geq \frac{\omega}{\omega+1}$ gilt, wobei die Differenz $\widehat{\omega} - \frac{\omega}{\omega+1}$ bei festem ω mit steigendem k beliebig klein wird. Beachte in diesem Zusammenhang, dass die Konstruktionen aus Korollar 1.6 die Beziehung $\widehat{\omega} = \frac{\omega}{\omega+1}$ liefern, so wie auch sonst zumindest für $1 \leq j \leq k-1$ Gleichheit in den Ungleichungen (2.98) gilt. Es sei an die Vermutung aus dem Abschnitt 2.2.3 erinnert, wonach der aufgefächerte Fall den maximalen Wert $\widehat{\omega}$ unter allen zusammen mit 1 $\mathbb{Q}$ -linear unabhängigen $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ mit fester Approximationskonstante ω liefert. Proposition 2.4 und Korollar 2.5 zeigen, dass $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ aus Korollar 1.6 dieser mutmaßlichen Maximierung sehr nahe kommen.

2) Zusammen mit der Ungleichung $\frac{\widehat{\omega}^2}{1-\widehat{\omega}} \leq \omega$ von Jarnik ergibt die linke Ungleichung von (2.87) für den aufgefächerten Fall von (2.50) die Abschätzungen

$$\frac{\widehat{\omega}^2}{1-\widehat{\omega}} \leq \omega \leq \frac{\widehat{\omega}}{1-\widehat{\omega}}.$$

3) Im Fall $k = 1$ gilt für irrationales ζ generell immer $\widehat{\omega} = 1$ und daher $\omega + 1 - \frac{\omega}{\widehat{\omega}} = 1$ für alle $\omega \geq 1$.

2.2.6 Der Zusammenhang zur Schmidtschen Vermutung

Abschließend in diesem Abschnitt wollen wir noch etwas näher auf den Zusammenhang zwischen dem aufgefächerten Fall und der Schmidtschen Vermutung eingehen.

Dazu nehmen wir an, dass es bei festgehaltenem k für jeden vorgegebenen Wert $\omega \in [\frac{1}{k}, \infty]$ zusammen mit 1 $\mathbb{Q}$ -linear unabhängige $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ gibt, die den Bedingungen des aufgefächerten Falls genügen. Beachte in diesem Zusammenhang, dass sich im nicht-extremalen Fall $\omega \neq \infty$, die $\mathbb{Q}$ -lineare Unabhängigkeit wegen Bemerkung 2 zu Satz 1.10 nicht separat gefordert werden muss, weil dann wegen (2.69) offenbar $\omega_{k+1} > \widehat{\omega}_{k+1} > 0$ gilt.

Wir werden zweierlei Methoden präsentieren um aus dem aufgefächerten Fall Ergebnisse für die Schmidtsche Vermutung herzuleiten. Die erste in Korollar 2.6 vorgestellte bedient sich der Ergebnisse von Proposition 2.4 und ist hinsichtlich der Beweistechnik stark an Korollar 1.9 angelehnt. In Proposition 2.5 werden anschließend die Schranken aus Korollar 2.6 mit der zweiten Methode verschärft.

Korollar 2.6. Angenommen für jede fest gewählte positive ganze Zahl k und alle $\omega \geq \frac{1}{k}$ gibt es $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ die auf den aufgefächerten Fall von (2.50) zu diesen Parametern führen. Dann existiert eine Folge von Werten $T(k)$, wobei $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{T(k)}{k} = \frac{1}{e}$, sodass man zu jedem $T \leq T(k)$ den Wert ω dermaßen wählen kann, dass für die Approximationskonstanten der zugehörigen $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$

$$\overline{\psi}_T < 0, \quad \underline{\psi}_{T+2} > 0$$

gilt.

Beweis: Wegen (2.50) und (1.40) müssen wir ω so bestimmen, dass die dadurch festgelegten Werte $\omega_{T+1}, \omega_{T+2}$ die Beziehungen $\omega_{T+2} < \frac{1}{k} < \omega_{T+1}$ erfüllen. Wir wissen, dass für $\omega \rightarrow \infty$ ganz allgemein $\hat{\omega}_j \rightarrow 0$ für $j \geq 2$ gilt, siehe Beweis von Proposition 1.3. Also gilt wegen (2.50) $\omega_j \rightarrow 0$ für alle $j \geq 3$. Kann man also zu festem T eine Stelle $\omega = \omega_{(0)}$ finden, sodass $\omega_{T+1} > \frac{1}{k}$ für das zugehörige $\omega_{T+1} = \omega_{T+1}(\omega_{(0)})$, kann man wegen der strikten Ungleichung $\omega_{T+2} < \omega_{T+1}$ für jedes feste $\omega > \frac{1}{k}$ und der stetigen Abhängigkeit von $\omega_{T+1}, \omega_{T+2}$ von ω (wegen (2.69) und dem Hauptsatz über implizite Funktionen gilt dies für $\omega_{k+2} := \hat{\omega}_{k+1}$ und wegen (2.70) weiter für beliebiges T) eine Stelle $\omega_{(1)} > \omega_{(0)}$ finden, sodass die gewünschte Ungleichungskette mit $\omega = \omega_{(1)}$ gilt. Wegen (2.98) existiert so eine Stelle insbesondere, wenn es ein $\omega > \frac{1}{k}$ mit $g_{T+1}(\omega) := \frac{\omega}{(\omega+1)^{T+1}} > \frac{1}{k}$ gibt. Man berechnet mit der Wahl $\omega = \frac{1}{T}$ nun

$$g_{T+1}\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{T^T}{(T+1)^{T+1}} \sim \frac{1}{(T+1)e}, \quad \text{für } T \rightarrow \infty.$$

Damit gibt es also für alle $T \leq T(k) \sim \frac{k}{e}$ einen solchen Wert ω wie behauptet. $\square$

Offenbar wäre dies asymptotisch eine Verbesserung zur Schranke in Korollar 1.9 die im wesentlichen dadurch zustande kommt, dass wir im dortigen Ungleichungssystem (1.109) in unserem Fall nur die rechte Ungleichung erfüllen müssen, die weniger restriktiv ist als die linke. Siehe dazu auch Bemerkung 2 zu Proposition 2.4. Dabei ist anzumerken, dass die Konstruktion wegen $\hat{\omega} \neq \frac{\omega}{\omega+1}$ selbst im Falle von gegebenen $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$, die auf den aufgefächerten Fall von (2.50) führen mit vorgegebenem ω , nicht ganz so explizit ist wie die aus Korollar 1.9, da man ein passendes Intervall $z \in (x, x + \delta)$ aus dem Beweis von Korollar 2.6 zu vorgegebenem T nicht so leicht bestimmen kann (in Korollar 2.6 läuft dies einfach auf näherungsweise Lösen einer *Polynomgleichung* hinaus).

Man kann im aufgefächerten Fall von (2.50) aber durch die Wahl von ω -Werten in einem Intervall $(\frac{1}{k}, \frac{1}{k} + \epsilon)$ mit kleinem $\epsilon > 0$ eine noch bessere Schranke hinsichtlich der Schmidtschen Vermutung erzielen. Beachte, dass im Fall $\omega = \frac{1}{k}$ stets alle Approximationskonstanten den Wert $\frac{1}{k}$ annehmen, insbesondere in unserem aufgefächerten Fall von (2.50). Es ist also eine naheliegende Frage, wie viele ω_j für alle hinreichend kleinen $\epsilon > 0$ über den Wert $\frac{1}{k}$ steigen und wie viele unter diesen Wert fallen. In der Tat zeigt die nachfolgende Proposition, dass für $\epsilon > 0$ hinreichend klein etwa jeweils die Hälfte der Approximationskonstanten in jede der beiden Kategorien fallen.

Proposition 2.5. Unter den Voraussetzungen wie in Korollar 2.6 kann man

$$\overline{\psi}_T < 0, \quad \underline{\psi}_{T+2} > 0 \tag{2.100}$$

für alle $T < \frac{k+1}{2}$ erreichen. Überdies ist (2.100) in einer Umgebung $\omega \in (\frac{1}{k}, \frac{1}{k} + \epsilon)$ für gerades k mit $T = \frac{k}{2}$ und für ungerades k mit $T = \frac{k-1}{2}$ erfüllt.

Beweis: Im folgenden sei stets $2 \leq j \leq k+2$. Betrachte die Funktion $p(x, y) = \frac{(1+xy)^{k+1}}{xy}$.

Bemerke zuerst, dass für $x_0 := \omega^{1-\frac{k+1}{j-1}} := (\alpha \frac{1}{k})^{1-\frac{k+1}{j-1}}$, $\alpha > 1$ und $y_0 := \omega_j^{\frac{k+1}{j-1}}$ im Falle $\omega_j \leq \frac{1}{k}$ die Beziehung

$$\frac{\partial p(x, y)}{\partial y}(x_0, y_0) = (kx_0y_0 - 1)(1 + x_0y_0)^k \frac{1}{x_0^2 y_0^2} < 0 \tag{2.101}$$

erfüllt ist, und umgekehrt für α hinreichend nahe bei 1 ist $\omega_j \leq \frac{1}{k}$ auch notwendig um (2.101) zu erfüllen. Alle Funktionen $\phi_j := x \mapsto x^{\frac{k+1}{j-1}}$ sind offenbar monoton steigend auf $(0, \infty) \ni \omega_j$ und zusammen mit $\alpha > 1$ folgt $kx_0y_0 \leq k(\alpha \frac{1}{k})^{1-\frac{k+1}{j-1}} (\frac{1}{k})^{\frac{k+1}{j-1}} = \alpha^{1-\frac{k+1}{j-1}} < 1$ weil $\alpha > 1$ und $\frac{k+1}{j-1} \geq 1$

sowie $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \alpha^{1-\frac{k+1}{j-1}} = 1$, und die anderen Faktoren in (2.101) sind positiv. Andererseits folgt aus (2.69) und (2.70)

$$\frac{(1 + \alpha \frac{1}{k})^{k+1}}{\alpha \frac{1}{k}} = \frac{\left[1 + (\alpha \frac{1}{k})^{1-\frac{k+1}{j-1}} \omega_j^{\frac{k+1}{j-1}}\right]^{k+1}}{(\alpha \frac{1}{k})^{1-\frac{k+1}{j-1}} \omega_j^{\frac{k+1}{j-1}}}. \quad (2.102)$$

Wieder wegen der Monotonie der Funktionen ϕ_j auf $(0, \infty) \ni \omega_j$ wird also die rechte Seite von (2.102) wegen (2.101) größer wenn $\omega_j \in (0, \frac{1}{k})$ kleiner wird. Deshalb ist bereits

$$\frac{(1 + \alpha \frac{1}{k})^{k+1}}{\alpha \frac{1}{k}} < \frac{\left[1 + (\alpha \frac{1}{k})^{1-\frac{k+1}{j-1}} (\frac{1}{k})^{\frac{k+1}{j-1}}\right]^{k+1}}{(\alpha \frac{1}{k})^{1-\frac{k+1}{j-1}} (\frac{1}{k})^{\frac{k+1}{j-1}}} \quad (2.103)$$

eine hinreichende und notwendige Bedingung für $\omega_j > \frac{1}{k}$ für alle $\omega = \alpha \frac{1}{k}$ mit $\alpha > 1$ hinreichend nahe bei 1 oder gleichbedeutend ω in einem Intervall $(\frac{1}{k}, \frac{1}{k} + \delta)$ mit $\delta > 0$ hinreichend klein. Umformen von (2.103) ergibt die gleichbedeutende Aussage

$$\frac{1 + \frac{\alpha}{k}}{1 + (\frac{\alpha}{k})^{1-\frac{k+1}{j-1}} (\frac{1}{k})^{\frac{k+1}{j-1}}} < \alpha^{\frac{1}{j-1}}$$

und weiteres Umformen der linken Seite letztlich

$$\frac{k + \alpha}{k + \alpha^{1-\frac{k+1}{j-1}}} < \alpha^{\frac{1}{j-1}} \iff k > \frac{\alpha - \alpha^{\frac{j-k-1}{j-1}}}{\alpha^{\frac{1}{j-1}} - 1}.$$

Setzen wir nun $\theta := \alpha^{\frac{1}{j-1}}$, ist einerseits θ fällt gegen 1 äquivalent zu α fällt gegen 1 und andererseits ist die rechte Seite obiger Äquivalenz weiter äquivalent zu

$$k > \theta^{j-1-k} \frac{\theta^k - 1}{\theta - 1} = \theta^{j-2} + \theta^{j-3} + \dots + \theta^{j-1-k} =: \chi_j(\theta). \quad (2.104)$$

Offenbar gilt $\chi_j(1) = k$ für alle j , also ist $\chi_j'(1) < 0$ hinreichend und $\chi_j'(1) \leq 0$ notwendig um (2.104) auf einem Intervall $\theta \in (1, 1 + \delta_0)$ sicherzustellen und damit auch (2.103) für $\alpha \in (1, 1 + \delta_1)$ mit positiven δ_0, δ_1 . Die Bedingung $\chi_j'(1) < 0$ kann man explizit auflösen zu

$$(j-2) + (j-3) + \dots + (j-k-1) = kj - \sum_{i=2}^{k+1} i = kj - \frac{k^2 + 3k}{2} < k \iff j < \frac{k+3}{2}.$$

Die Aussagen der Proposition folgen nun wieder im wesentlichen wegen $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega_j = 0$ für $j \geq 3$, $\omega_j > \omega_{j+1}$ für alle j, ω und der stetigen Abhängigkeit der Werte ω_j von ω wie in Korollar 2.6. Diese Tatsachen erlauben den Schluss, dass für jedes $T < T_0 := \frac{k+3}{2}$ ein Intervall für ω existiert, auf dem $\omega_T > \frac{1}{k} > \omega_{T+1}$ sowie weiters nach obigen Feststellungen in einem hinreichend kleinen Intervall $\omega \in (\frac{1}{k}, \frac{1}{k} + \epsilon)$ die Beziehung $\omega_T > \frac{1}{k}$ für alle $T < T_0$ und $\omega_T > \frac{1}{k}$ für $T > T_0$. Wegen $\widehat{\omega}_{T-1} = \omega_T$ ist dies wiederum wegen (1.40) äquivalent zu $\overline{\psi}_T < 0$ für $T < T_0 - 1$ und $\underline{\psi}_T > 0$ für $T > T_0 + 1$. Im Falle von geradem k ist die größte ganze Zahl kleiner $T_0 - 1$ gerade $\lfloor \frac{k+3}{2} \rfloor - 1 = \frac{k}{2}$ und so ergeben sich die gewünschten Schranken.

Im Fall von ungeradem k ist lediglich für $T = T_0$ noch nicht klar ob $\omega_T > \frac{1}{k}$ und folglich $\overline{\psi}_{T-1} = \underline{\psi}_T < 0$, sodass wieder die Aussagen der Proposition zutreffen, oder ob jeweils umgekehrte Ungleichheitszeichen gelten. Diese fehlende Information ist offensichtlich durch das Vorzeichen von $\chi_j''(1) = (j-2)(j-3) + (j-3)(j-4) + \dots + (j-1-k)(j-2-k)$ mit $j := T_0$ bestimmt.

Man erkennt leicht, dass $\chi''_{T_0}(1) = \chi''_{\frac{k+3}{2}}(1) > 0$ (da nur ein Summand negativ ist und dieser von geringstem Absolutbetrag ist) und daher gilt $\chi_{T_0}(1+\epsilon) > k$ für kleines ϵ und in Folge $\omega_{T_0} < \frac{1}{k}$ für ω nahe bei $\frac{1}{k}$ mit analoger Argumentation wie vorher, was die ausständige Behauptung liefert. $\square$

Bemerkung: Im Fall $k = 2$ ist die Aussage von Proposition 2.5 gleichbedeutend mit $\overline{\psi}_1 < 0 < \underline{\psi}_3$, was im Falle dass nicht alle $\underline{\psi}_j, \overline{\psi}_j$ gleich Null sind, stets gewährleistet ist. In diesem wechselt also kein $\omega_j - \frac{1}{k}$ (bzw $\widehat{\omega}_j - \frac{1}{k}$) oder äquivalent $\underline{\psi}_j$ (bzw $\overline{\psi}_j$) bei steigendem $\omega \in (\frac{1}{k}, \infty)$ das Vorzeichen und gemäß Proposition 2.5 kommt dies sonst nur noch im Fall $k = 3$ vor.

Kapitel 3

Approximation durch algebraische Zahlen

In diesem Kapitel wollen wir Ergebnisse zur Approximation einer reellen Zahl durch algebraische Zahlen, deren Erweiterungsgrade über $\mathbb{Q}$ durch eine feste positive ganze Zahl n beschränkt sind, in Abhängigkeit von n studieren. Um die Approximationsgüte zu bewerten, werden dabei die Höhen der Minimalpolynome zugrunde gelegt werden, wobei die Höhe eines Polynoms den Betrag des betragsgrößten Koeffizienten bezeichnet. Wir werden sehen, dass Aussagen über algebraische Approximation eng mit dem zum Problem (1.5)-(1.8) dualen Problem im Spezialfall $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k) = (\zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^k)$ zusammenhängen.

In diesem Zusammenhang beginnen wir zunächst mit dem Studium dieses Spezialfalls von (1.5)-(1.8), also dem noch nicht dualisierten Problem. Wir werden sehen, dass sich durch ähnliche Methoden wie in Kapitel 1 vergleichbare Ergebnisse erhalten lassen.

Die übrigen Abschnitte von Kapitel 3 beschäftigen sich dann explizit mit dem dualen Problem und algebraischer Approximation.

3.1 Die Methode von Kapitel 1 im Spezialfall $\zeta_i = \zeta^i$

Wir wollen nun das Verhalten von Vektoren $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k) = (\zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^k)$ studieren, deren Einträge ζ_i alle Potenzen einer vorgegebenen Zahl ζ sind. In Satz 3.1 untersuchen wir die Approximationskonstanten für eine Klasse von Zahlen ζ , die insbesondere vom speziellen Liouvilletyp zur Basis 2 sind (wobei die Wahl der Basis keine Rolle spielt). Wir erhalten in diesem Fall eine sehr ähnliche Situation zum Spezialfall $\eta_2 = \eta_3 = \dots = \eta_{k+1} = \frac{1}{k}$ von Satz 1.12 bzw die Situation von Korollar 1.3, wobei ζ^j in Satz 3.1 im wesentlichen dem sich aus Satz 1.12 bzw Korollar 1.3 ergebenden ζ_{k+2-j} entspricht für $1 \leq j \leq k+1$. Die Wahl einer festen Menge von j Folgen von Approximationsvektoren und der Nachweis der aus ihnen resultierenden geforderten Approximationsgüte für die Abschätzungen von ω_j nach unten ist hier technisch etwas diffiziler als im Beweis von Satz 1.12. Der Nachweis der linearen Unabhängigkeit verläuft dann aber im wesentlichen wieder wie im Beweis von Satz 1.12 und es ergeben sich alle anderen Abschätzungen für den Beweis des Satzes leicht aus dem 2. Gitterpunktsatz von Minkowski und anderen bereits hergeleiteten Resultaten.

Es sei auch wie bereits unmittelbar vor Satz 1.15 angemerkt nochmals festgehalten, dass die Resultate von Satz 3.1 und Korollar 3.1 auch unter den allgemeineren Voraussetzungen gemäß Satz 1.15 des Abschnitts 1.3 zutreffen mit im wesentlichen analogem Beweis. Wir werden die Verallgemeinerung in Korollar 3.2 ohne Beweis angeben.

Satz 3.1. Sei $0 < \zeta < 1$ in Basis 2 gegeben durch $\zeta = \sum_{l \geq 1} 2^{-a_l}$, also mit einer streng monoton steigenden Folge positiver ganzer Zahlen $(a_l)_{l \geq 1}$, sodass

$$\limsup_{l \rightarrow \infty} \min \left\{ \frac{a_{l+1}}{a_l}, \frac{a_{l+2}}{a_{l+1}} \right\} = \infty,$$

was insbesondere im Falle

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{a_{l+1}}{a_l} = \infty$$

gilt. Sei weiter $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann sind die Approximationskonstanten zu $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k) := (\zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^k)$ unter der formalen Konvention $\frac{1}{0} = \infty$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \omega_j &= \frac{1}{j-1}, & 1 \leq j \leq k+1 \\ \hat{\omega} &= \frac{1}{k} \\ \hat{\omega}_j &= 0, & 2 \leq j \leq k+1. \end{aligned}$$

Beweis: Sei k beliebig, fest gewählt.

Wir bestimmen zunächst alle Werte von ω_j , die Werte $\hat{\omega}_j$ lassen sich dann leicht berechnen. Es gilt stets $\omega_j \leq \frac{1}{j-1}$, wie wir in (1.47)-(1.49) gesehen haben. Wir müssen also nur mehr die umgekehrten Ungleichungen $\omega_j \geq \frac{1}{j-1}$ zeigen.

Sei dazu $1 \leq j \leq k+1$ beliebig aber fest vorgegeben. Dazu geben wir wie im Beweis von Satz 1.12 wieder explizit eine Folge $(X_{j,n})_{n \geq 1}$ und eine Menge von j Folgen von (zu jedem festen Index n) linear unabhängigen Approximationsvektoren

$$(x^{1,n}, y_1^{1,n}, \dots, y_k^{1,n})_{n \geq 1}, (x^{2,n}, y_1^{2,n}, \dots, y_k^{2,n})_{n \geq 1}, \dots, (x^{k+1,n}, y_1^{k+1,n}, \dots, y_k^{k+1,n})_{n \geq 1}$$

mit $x^{i,n} \leq X_{j,n}$ für alle $n \geq 1, 1 \leq i \leq j$ an, welche für jedes $\epsilon > 0$ und hinreichend großes $n = n(\epsilon)$ die gewünschte Asymptotik

$$\max_{1 \leq t \leq k} |x^{i,n} \zeta^t - y_t^{i,n}| \leq X_{j,n}^{-\frac{1}{j-1} + \epsilon}, \quad 1 \leq i \leq j, \quad (3.1)$$

ergeben. Wir wählen ein Teilfolge $(b_n)_{n \geq 1} = (a_{l_n})_{n \geq 1}$ von $(a_l)_{l \geq 1}$ dermaßen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{l_n+1}}{a_{l_n}} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{a_{l+2}}{a_{l+1}} = \infty. \quad (3.2)$$

Eine solche existiert nach Voraussetzung des Satzes.

Wir behaupten, eine passende Folge von X -Werten, um (3.1) zu erhalten, ist dann gegeben durch

$$X_{j,n} := 2^{(j-1)a_{l_n+1} + kb_n} = 2^{(j-1)a_{l_n+1} + ka_{l_n}}, \quad n \geq 1, \quad 1 \leq j \leq k+1 \quad (3.3)$$

mit zugehörigen Approximationsvektoren

$$x^{i,n} := 2^{(i-1)a_{l_n+1} + ka_{l_n}}, \quad n \geq 1, \quad 1 \leq i \leq j, \quad (3.4)$$

$$y_t^{i,n} := \lfloor \zeta^t x^{i,n} \rfloor, \quad n \geq 1, \quad 1 \leq i \leq j, \quad 1 \leq t \leq k. \quad (3.5)$$

Offensichtlich ist die Voraussetzung $x^{i,n} \leq X_{j,n}$ für $1 \leq i \leq j$ erfüllt. Wir müssen die geforderten Approximationseigenschaften (3.1) und die lineare Unabhängigkeit der entstehenden Vektoren (zu jedem festen n) nachweisen. Wir beginnen mit ersterem.

Bezeichne S_N die N -te Partialsumme von ζ , also

$$S_N := \sum_{l=1}^N 2^{-a_l}. \quad (3.6)$$

Sei zuerst $j = 1$. Wir setzen $N := l_n$ für ein zunächst beliebiges aber hinreichend großes n . Dann erkennt man nach Konstruktion durch Auspotenzieren von ζ^t mittels des binomischen Lehrsatzes einerseits

$$S_N^t x^{1,n} \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq t \leq k,$$

weil für jedes t jeweils alle Summanden ganze Zahlen sind, und andererseits

$$0 \leq \zeta^t - S_N^t \leq 2 \cdot 2^{-a_{l_n+1}}.$$

Zusammen ergibt sich nach Definition (3.5)

$$\begin{aligned} y_t^{1,n} &= S_N^t x^{1,n}, & 1 \leq t \leq k \\ \max_{1 \leq t \leq k} \left| \zeta^t x^{i,n} - y_t^{i,n} \right| &\leq 2 \cdot 2^{a_{l_n} - a_{l_n+1}}, & 1 \leq t \leq k. \end{aligned}$$

Wegen der Wahl von $X^{1,n} = 2^{ka_{l_n}}$ aus (3.3) mit $j = 1$ und (3.2) gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{l_n+1}}{a_{l_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{l_n+1} - a_{l_n} + 1}{ka_{l_n}} = \infty, \quad (3.7)$$

also $\omega = \infty$ wie behauptet.

Sei nun $j \geq 2$. Wir definieren für $1 \leq t \leq k, 1 \leq i \leq k+1$ die Ausdrücke $T_{N+1,t}^i$ als die Summe aller Ausdrücke in der Entwicklung von ζ^t nach Ausmultiplizieren mittels des binomischen Lehrsatzes, in denen $2^{-a_{N+1}}$ nicht öfter als $(i-1)$ mal vorkommt und kein 2^{-a_L} mit $L \geq N+2$ vorkommt. Aus dieser Definition ergeben sich gemäß kombinatorischer Standardformeln die Identitäten

$$T_{N+1,t}^i = \sum_{\tau=0}^{\min\{t,i-1\}} \binom{t}{\tau} S_N^{t-\tau} 2^{-\tau \cdot a_{N+1}}, \quad 1 \leq t \leq k, 1 \leq i \leq k+1. \quad (3.8)$$

Insbesondere erkennt man etwa $T_{N+1,t}^1 = S_N^t$ für $1 \leq t \leq k$, was wir aber nicht benötigen werden. Weiter folgt aus (3.8) unmittelbar

$$T_{N+1,t}^{t+1} > T_{N+1,t}^t, \quad 1 \leq t \leq k \quad (3.9)$$

$$T_{N+1,t}^{t+1} = T_{N+1,t}^{t+2} = \dots = T_{N+1,t}^{k+1}. \quad (3.10)$$

Aus der Definition der Ausdrücke $T_{N+1,t}^i$ erkennt man weiters mit $N := l_n$ einerseits

$$x^{i,n} T_{N+1,t}^i \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq t \leq k, 1 \leq i \leq k+1, \quad (3.11)$$

denn jeder der auftretenden Summanden ist offensichtlich eine ganze Zahl. Andererseits behaupten wir, dass für eine Konstante $C(k) > 0$ und hinreichend großes n (bzw gleichbedeutend N)

$$0 < \zeta^t - T_{N+1,t}^i < C(k) \cdot 2^{-i \cdot a_{N+1}}, \quad 1 \leq t \leq k, 1 \leq i \leq k+1. \quad (3.12)$$

Per Definition haben alle Summanden, die in (der Entwicklung von) S_{N+1}^t auftreten aber nicht in (der Entwicklung von) $T_{N+1,t}^i$, mindestens i mal den Faktor $2^{-a_{N+1}} = 2^{-a_{l_n+1}}$. Wegen

$S_{N+1} < \zeta < 1, t \leq k$ und $\binom{a}{b} < a!$ für alle positiven ganzen Zahlen a, b folgt

$$0 < S_{N+1}^t - T_{N+1,t}^i = (S_{N+1} + 2^{-a_{N+1}})^t = \sum_{\tau=i}^t \binom{t}{\tau} 2^{-\tau \cdot a_{N+1}} S_{N+1}^{t-\tau} < k \cdot k! 2^{-i \cdot a_{N+1}}. \quad (3.13)$$

Aber es gilt auch wieder wegen $S_{N+1} < \zeta < 1$

$$\begin{aligned} 0 &< \zeta^t - S_{N+1}^t = (\zeta - S_{N+1}) (\zeta^{t-1} + \zeta^{t-2} S_{N+1} + \cdots + S_{N+1}^{t-1}) \\ &< (\zeta - S_{N+1}) k \zeta^{t-1} < k (\zeta - S_{N+1}) < k \cdot 2^{-a_{N+2} + a_{N+1} + 1}. \end{aligned}$$

Wegen (3.2) wird der letzte Ausdruck rechts aber für $n \rightarrow \infty$ (bzw gleichbedeutend $N \rightarrow \infty$) sicher kleiner als $2^{-(k+1) \cdot a_{N+1}} < 2^{-i \cdot a_{N+1}}$. Also insgesamt

$$0 < \zeta^t - S_{N+1}^t < 2^{-i \cdot a_{N+1}}, \quad 1 \leq t \leq k, 1 \leq i \leq k+1,$$

und addiert man dies zu (3.13) ergibt sich (3.12) mit $C(k) := k \cdot k! + 1$.

Für hinreichend große n wird die rechte von (3.12) kleiner 1 und es folgt somit aus (3.11),(3.12) mittels der Definition (3.5)

$$y_t^{i,n} = x^{i,n} T_{N+1,t}^i, \quad 1 \leq t \leq k, 1 \leq i \leq k+1 \quad (3.14)$$

$$\left| \zeta^t x^{i,n} - y_t^{i,n} \right| = x^{i,n} (\zeta^t - T_{N+1,t}^i) \leq C(k) 2^{ka_N - a_{N+1}}, \quad 1 \leq t \leq k, 1 \leq i \leq k+1. \quad (3.15)$$

Wegen (3.3),(3.15) gilt für jedes $\epsilon > 0$ und $n \geq n_0(\epsilon)$

$$-\log_{X_{j,n}} \left(\max_{1 \leq t \leq k} \left| \zeta^t x^{i,n} - y_t^{i,n} \right| \right) = -\frac{\log \left(\max_{1 \leq t \leq k} \left| \zeta^t x^{i,n} - y_t^{i,n} \right| \right)}{\log(X_{j,n})} \geq \frac{1}{j-1} - \epsilon, \quad 1 \leq i \leq j$$

was äquivalent zu (3.1) ist. Damit sind die Abschätzungen gezeigt.

Bleibt also noch die lineare Unabhängigkeit der Approximationsvektoren zu zeigen. Wie im Beweis der Ungleichungen $\omega_j \geq \wp_j(\eta)$ in Satz 1.12 zeigen wir, dass für alle n die Systemmatrix aus $\mathbb{Z}^{(k+1) \times (k+1)}$, in deren j -ter Zeile der j -te Approximationsvektor steht, regulär ist. Aufgrund von (3.14) ist diese mit $N := l_n$ von der Gestalt

$$\mathbf{V}_n = \begin{pmatrix} x^{1,n} & T_{N+1,1}^1 x^{1,n} & T_{N+1,2}^1 x^{1,n} & \cdots & \cdots & T_{N+1,k}^1 x^{1,n} \\ x^{2,n} & T_{N+1,1}^2 x^{2,n} & T_{N+1,2}^2 x^{2,n} & \cdots & \cdots & T_{N+1,k}^2 x^{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x^{k,n} & T_{N+1,1}^k x^{k,n} & T_{N+1,2}^k x^{k,n} & \cdots & \cdots & T_{N+1,k}^k x^{k,n} \\ x^{k+1,n} & T_{N+1,1}^{k+1} x^{k+1,n} & T_{N+1,2}^{k+1} x^{k+1,n} & \cdots & \cdots & T_{N+1,k}^{k+1} x^{k+1,n} \end{pmatrix}$$

Wir führen beginnnd bei $h = k$ fortlaufend bis $h = 1$ folgende Zeilenumformung durch: Wir ziehen das $\frac{x^{h+1,n}}{x^{h,n}}$ -fache der h -ten Zeile von der $(h+1)$ -ten Zeile ab. Auf diese Weise erhalten wir wegen (3.10) eine obere Dreiecksmatrix, deren Diagonaleinträge wegen (3.9) alle nicht verschwinden. Damit ist $\mathbf{V}_n$ für alle n regulär, was zu zeigen war.

Nun müssen wir noch die Werte $\widehat{\omega}_j$ bestimmen. Wegen $\omega = \infty$ erhält man für $2 \leq j \leq k+1$ mit dem gleichen Vorgehen wie im Beweis von Proposition 1.3 die Identitäten $\widehat{\omega}_j = 0$ bzw. $\overline{\psi}_j = \frac{1}{k}$. Aufgrund unserer speziellen Situation ist der noch ausstehende Wert $\widehat{\omega}$ ebenfalls leicht zu berechnen. Aus $\omega_{k+1} = \frac{1}{k}$ folgt mit (1.40) zunächst $\underline{\psi}_{k+1} = 0$.

Wegen (1.16) und $\psi_1(Q) \leq \psi_2(Q) \leq \dots \leq \psi_{k+1}(Q)$ ist $\overline{\psi}_1 < 0$ nicht möglich. Andernfalls wäre nämlich für ein $\epsilon > 0$ und alle hinreichend großen Q die Beziehung $\psi_1(Q) < -\epsilon$ gültig und in Folge an Stellen mit kleinem $\psi_{k+1}(Q) < \frac{\epsilon}{2k}$ die Bedingung (1.16) für $Q \rightarrow \infty$ wegen $\sum_{j=1}^{k+1} \psi_j(Q) \leq \psi_1(Q) + k\psi_{k+1}(Q) < -\epsilon + \frac{\epsilon}{2} = -\frac{\epsilon}{2}$ verletzt. Wegen (1.9) gilt aber auch $\overline{\psi}_1 \leq 0$. Es bleibt daher nur der Fall $\overline{\psi}_1 = 0$ übrig, mittels (1.40) ergibt sich $\widehat{\omega} = \frac{1}{k}$.

□

Bemerkung: Der Beweis zeigt bei festgehaltenem k genauer folgendes Kriterium um die im Satz angegebenen Approximationskonstanten zu erhalten: Für festes k und $\zeta = \sum_{l \geq 1} 2^{-a_l}$ existiert eine Teilfolge $(a_{l_n})_{n \geq 1}$ von $(a_l)_{l \geq 1}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $C > 0$ ein $n_0 = n_0(C)$ existiert mit

$$\begin{aligned} \frac{a_{l_n+1}}{a_{l_n}} &> C, & n \geq n_0 \\ \frac{a_{l_n+2}}{a_{l_n+1}} &> k+1, & n \geq n_0. \end{aligned}$$

Korollar 3.1. Sei $\zeta := \sum_{l \geq 1} 2^{-l!}$. Dann gilt simultan für alle $k \in \mathbb{N}$ unter der formalen Konvention $\frac{1}{0} = \infty$

$$\begin{aligned} \omega_j &= \frac{1}{j-1}, & 1 \leq j \leq k+1 \\ \widehat{\omega} &= \frac{1}{k} \\ \widehat{\omega}_j &= 0, & 2 \leq j \leq k+1. \end{aligned}$$

Beweis: Die Voraussetzungen für Satz 3.1 sind offensichtlich mit $(a_l)_{l \geq 1}$ gegeben durch $a_l = l!$ und der identischen Teilfolge $l_n = n$ für alle $n \geq 1$ erfüllt. □

Bemerkung: Die Wahl der Basis 2 hat keinerlei Bedeutung in Satz 3.1 und Korollar 3.1. Die eingangs erwähnte Verallgemeinerung ist im folgenden Korollar festgehalten, welches sich analog zur Verallgemeinerung von Satz 1.15 aus Satz 1.12 beweisen lässt.

Korollar 3.2. Sei $\zeta = \sum_{l \geq 1} \frac{1}{q_l}$ mit ganzen Zahlen q_l , sodass $q_l | q_{l+1}$ für alle $l \geq 1$ und darüber hinaus gelte

$$\limsup_{l \rightarrow \infty} \min \left\{ \frac{q_{l+1}}{q_l}, \frac{q_{l+2}}{q_{l+1}} \right\} = \infty.$$

Dann gelten die Aussagen von Satz 3.1.

Wir haben also noch eine Konstruktionsmethode von Vektoren $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k) \in \mathbb{R}^k$ gefunden, die Korollar 1.3 genügen. Beachte, dass die auftretenden Zahlen ζ als Liouvillezahlen transzendent sind, was per Definitionem simultan für alle $k \in \mathbb{N}$ die $\mathbb{Q}$ -lineare Unabhängigkeit von $\{1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^k\}$ impliziert (die sich auch sofort aus Bemerkung 2 zu Satz 1.10 ergibt).

Wir haben also insbesondere gesehen, dass im Spezialfall $\zeta_i = \zeta^i$ der optimale Wert $\underline{\psi}_1 = -1$ angenommen werden kann. Eine schwierigere Fragestellung ist es, den Wert $\overline{\psi}_1$ zu minimieren

bzw äquivalent $\widehat{\omega}$ zu maximieren. Die Zahlen ζ mit dieser Eigenschaft haben wir im Abschnitt 2.2.1 im Fall $k = 2$ als extremal numbers eingeführt und festgehalten, dass $\widehat{\omega} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ gilt. In höherer Dimension $k \geq 3$ ist der genaue größtmögliche Wert von $\widehat{\omega}$ unbekannt, siehe auch die Vermutung in Abschnitt 2.2.3. Das nächste Lemma zeigt in diesem Zusammenhang im Fall von beliebigem k , dass ω nicht zu groß sein darf, wenn $\widehat{\omega}$ maximiert werden soll.

Lemma 3.1. Sei $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dann erfüllen die zu $\zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^k$ gehörigen Approximationskonstanten $\omega, \widehat{\omega}$ die Beziehung

$$\widehat{\omega} \leq \max \left\{ \frac{1}{\omega}, \frac{1}{k} \right\}.$$

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass $0 < \zeta < 1$ keine Einschränkung darstellt. Denn mit

$$M_x(\zeta) := \max_{1 \leq t \leq k} \|\zeta^t x\|$$

folgt aus dem binomischen Lehrsatz für jedes $N \in \mathbb{Z}$

$$\|(\zeta + N)^t x\| = \left\| \sum_{l=0}^t \binom{t}{l} N^{t-l} \zeta^l x \right\| \leq \left\| N^k N! \sum_{l=0}^t \zeta^l x \right\| \leq N^{k+1} N! M_x(\zeta),$$

also $M_x(\zeta + N) := \max_{1 \leq i \leq k} \|(\zeta + N)^i x\| \leq W M_x(\zeta)$ mit einer Konstante $W := N^{k+1} N!$, die nicht von x abhängt. Für $x \rightarrow \infty$ gilt damit offenbar nach Definition der Approximationskonstanten ω_j , dass alle diese Approximationskonstanten von $\zeta + N$ nicht größer sind als die von ζ . Da man diese Relation in beide Richtungen lesen kann, muss also Gleichheit gelten. Also sei oBdA ζ aus dem Repräsentatensystem $[0, 1)$ von $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, also $0 < \zeta < 1$. Weiter sei $T := \lfloor \omega \rfloor$. Dann gibt es wegen $\zeta \notin \mathbb{Q}$ eine gegen unendlich strebende Basenfolge $(s_i)_{i \geq 1}$, sodass insbesondere für ζ für alle $\eta > 0$ die Beziehung $\|\zeta s_i\| \leq s_i^{-\omega+\eta}$. Da Multiplikation mit s_i nur das Komma um eine Stelle verschiebt bedeutet dies, ζ hat bezüglich jedem s_i im Falle einer Approximation von oben eine Darstellung

$$\zeta^{(s_i)} = 0.a_1 00 \dots 0 a_{T+2} a_{T+3} \dots, \quad (3.16)$$

mit von i abhängigen $0 \leq a_j = a_j(i) \leq s_i - 1$ bzw

$$\zeta^{(s_i)} = \frac{a_1}{s_i} + \frac{a_{T+2}}{s_i^{T+2}} + \frac{a_{T+3}}{s_i^{T+3}} + \dots \leq \frac{a_1}{s_i} + \frac{1}{s_i^{T+1}} \quad (3.17)$$

mit $0 \leq a_i \leq s_i - 1$, wobei für hinreichend großes i wegen $a_1 = \lfloor s_i \zeta \rfloor$ sicher $a_1 \neq 0$. Den anderen Fall einer Approximation von unten

$$\zeta^{(s_i)} = 0.a_1(s_i - 1)(s_i - 1) \dots (s_i - 1) a_{T+2} a_{T+3} \dots$$

kann man ganz ähnlich behandeln, wir gehen auf ihn nicht weiter ein. Weiter können wir oBdA annehmen, dass

$$\text{ggT}(a_1, s_i) = 1 \quad (3.18)$$

gilt. Denn ansonsten betrachte die Basen $\frac{s_i}{\text{ggT}(s_i, a_1)}$, in denen sich ebenfalls die Darstellung (3.16) ergibt. (Die Approximation von $\zeta^2, \dots, \zeta^k$ bezüglich dieser veränderten Basis muss nicht gut sein, was für unsere Argumentation aber nicht notwendig ist. Vergleiche Beispiel 3 dieses Abschnitts.) Es ergibt sich

$$\zeta^j = \frac{a_1^j}{s_i^j} + O(s_i^{-T-1}), \quad 1 \leq j \leq k. \quad (3.19)$$

Wir unterscheiden nun naheliegenderweise die beiden Fälle $\omega > k$ und $\omega \leq k$.

1. Fall: $\omega > k$. Dann gilt $T \geq k$ in (3.16) bzw. (3.17). Für zunächst beliebiges $\epsilon > 0$ setze $X_i := s_i^{k-\epsilon}$. Wir behaupten nun, dass sich für alle ganzzahligen $x = x(i) < X_i$ keine wesentlich bessere Approximation als

$$M_x(\zeta) := \max_{1 \leq t \leq k} \|\zeta^t x\| \leq s_i^{-1} \quad (3.20)$$

finden lässt. Um dies zu zeigen, nehmen wir an, es gäbe eine Verbesserung zu (3.20).

Der $x = x(i)$ -Wert des besseren Approximationsvektors habe in Basis s_i die Darstellung

$$x = \sum_{d=1}^D b_d s_i^{T_d}, \quad r_1 = r_1(i) < r_2 \dots < r_D = r_D(i), \quad 0 \leq b_d = b_d(i) \leq s_i - 1. \quad (3.21)$$

Setze $u := r_1 + 1$. Nach Voraussetzung von Fall 1 gilt $1 \leq u \leq k$. Wir führen den Widerspruch zu (3.20) über die Zahl $\zeta^u x$. Auf gleichen Nenner s_i^u bringen liefert wegen (3.18), $b_1 < s_i$ und der Definition von u

$$\left\| x \frac{a_1^u}{s_i^u} \right\| = \left\| b_1 s_i^{u-1} \frac{a_1^u}{s_i^u} \right\| = \left\| \frac{b_1 a_1^u}{s_i} \right\| \geq \frac{1}{s_i}.$$

Andererseits kann der Restterm $x \left(\zeta^u - \frac{a_1^u}{s_i^u} \right)$ von $x \zeta^u$ wegen (3.19) und unserer vorausgesetzten Schranke für x nach oben abgeschätzt werden durch $s_i^{-1-\epsilon}$. Man folgert mit der Dreiecksungleichung für jedes $\delta > 0$ und $i = i(\delta)$ groß genug

$$\|x \zeta^u\| \geq s_i^{-1} - s_i^{-1-\epsilon} \geq s_i^{-1-\delta}. \quad (3.22)$$

Also insbesondere $M_x(\zeta) \geq s_i^{-1-\delta}$, und weil dies für alle x unter unserer Randbedingung $x < s_i^{k-\epsilon}$ gilt $\widehat{\omega} \leq \frac{1+\delta}{k-\epsilon}$ für alle $\epsilon > 0, \delta > 0$ und mit $\epsilon \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$ die Behauptung $\widehat{\omega} \leq \frac{1}{k}$ von Fall 1.

Fall 2: $\omega \leq k$. Beachte, dass wieder die Darstellung (3.16) gilt. Es gelte wieder (3.21) für ein hypothetisches unserer Annahme widersprechendes x . Sei für zunächst beliebiges $\epsilon > 0$ weiter $x \leq s_i^{\omega-\epsilon} =: X_i$. Es folgt in jedem Fall $u \leq T$. Im Fall $u < T$ kann man die Argumentation von Fall 1 verwenden, um die Schranke $\|\zeta^u x\| \geq s_i^{-1-\delta}$ für alle $\delta > 0$ und hinreichend großes i zu erhalten. Im Fall $u = T$ berechnet man analog

$$\left\| x \frac{a_1^T}{s_i^T} \right\| = \left\| \frac{b_1 a_1^T}{s_i} \right\| \geq \frac{1}{s_i}.$$

Die Restterme von $\zeta^T x$ lassen sich hier wegen $x \leq s_i^{\omega-\epsilon}$ wiederum nach oben durch $s_i^{-1-\epsilon}$ abschätzen. Mit (3.22) folgert man daraus wieder $\|\zeta^T x\| \geq s_i^{-1-\delta}$ für alle $\delta > 0$ und hinreichend großes i , wie im Fall $u < T$. Analog zu Fall 1 schließt man weiter $M_x(\zeta) \geq s_i^{-1-\delta}$ und weil $x \leq s_i^{\omega-\epsilon}$ beliebig war $\widehat{\omega} \leq \frac{1+\delta}{\omega-\epsilon}$ und mit $\epsilon \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$ schließlich $\widehat{\omega} \leq \frac{1}{\omega}$, die Aussage von Fall 2. $\square$

Bemerkungen: 1) Wegen (1.50) ist die Aussage des Satzes nur für $\omega > 1$ nichttrivial. Da der Satz von Roth äquivalent zu $\omega = 1$ im Falle $k = 1$ und einer algebraischen Zahl ζ ist und in Folge $\omega \leq 1$ in beliebiger Dimension k für die Approximation von $\zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^k$ mit algebraischem ζ , ist die Aussage des Satzes nur für transzendente Werte von ζ interessant. (Beachte auch, dass wenn ζ algebraisch vom Grad $\geq k+1$ ist, wegen des Schmidtschen Teilraumsatzes sogar $\omega = \frac{1}{k}$ gilt.)
2) Gemäß (1.50) kann man Lemma 3.1 auch formulieren als

$$\begin{aligned} \widehat{\omega} &= \frac{1}{k}, & \omega &\geq k \\ \frac{1}{k} &\leq \widehat{\omega} \leq \frac{1}{\omega}, & 1 &\leq \omega < k. \\ \widehat{\omega} &\leq \omega, & \omega &< 1. \end{aligned}$$

Beachte, dass für die extremal numbers $\omega = 1$ gilt, also ist in höherer Dimension $k > 2$ der Fall $\omega < 1$ zu erwarten.

3) Man kann den ersten Teil des Beweises ausweiten um allgemeiner zu zeigen, dass Transformationen der Form $\zeta \mapsto a\zeta + b$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ die Werte $\omega_j, \widehat{\omega}_j$ unverändert lässt. Vergleiche auch den Unterabschnitt $E = \infty$, in dem das duale von Approximationen durch Polynome mit beschränkter Höhe Problem behandelt wird.

4) Davenport, Schmidt und Laurent zeigen im Theorem auf Seite 46 in [7] für die Approximationskonstante $\widehat{\omega}$ von $\zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^k$ für ζ nicht algebraisch vom Grad $\leq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$ die Abschätzung

$$\widehat{\omega} \leq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil^{-1}, \quad (3.23)$$

was momentan die besten bekannten oberen Schranken darstellt. Nach unten ist keine bessere Abschätzung des Supremums von $\widehat{\omega}$ über alle $\zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^k$ mit $\zeta \in \mathbb{R}$ nicht algebraisch vom Grad $\leq k$ als die triviale durch $\frac{1}{k}$ aus (1.50) bekannt.

Lemma 3.1 liefert in diesem Zusammenhang die folgende Aussage: für jede Folge $(\zeta_n)_{n \geq 1}$ reeller Zahlen, sodass die Approximationskonstanten $\widehat{\omega}$ bezüglich $\zeta_n, \zeta_n^2, \dots, \zeta_n^k$ gegen das Supremum aller auftretenden Werte $\widehat{\omega}$ zu $\zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^k$ für reelle ζ , konvergieren, ist die simultane Approximationskonstante ω bezüglich $\zeta_n, \zeta_n^2, \dots, \zeta_n^k$ durch $\omega \leq k$ beschränkt für $n \geq n_0$. Insbesondere ist im Falle der Existenz eines $\zeta = \zeta_0$, das die Approximationskonstante $\widehat{\omega}$ zu $\zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^k$ maximiert, sicher $\omega \leq k$ für die Approximationskonstante ω zu $\zeta_0, \zeta_0^2, \dots, \zeta_0^k$.

5) Sei die Größe $w_k^*(\zeta)$ definiert als das um 1 verringerte Supremum aller wählbaren μ in (3.55) im Abschnitt Abschätzung, in dem das duale Problem behandelt wird. Dabei entspricht das k hier dem dortigen n . Lemma 1 auf Seite 396 in [2] von Davenport/Schmidt, das wir später im Abschnitt 3.2.2 selbst alternativ beweisen werden, besagt in unserer Notation für alle ζ nicht algebraisch vom Grad $\leq k$

$$w_k^*(\zeta)\widehat{\omega} \geq 1 \quad \forall k \geq 2. \quad (3.24)$$

Zusammen mit Lemma 3.1 bzw obiger Bemerkung 2 zu diesem Lemma sieht man einfach den Zusammenhang

$$\omega \leq k \implies w_k^*(\zeta) \geq \omega, \quad \forall k \geq 2.$$

In diesem Fall $\omega \leq k$ liegt der Wert $w_k^*(\zeta)$ unter Vorwegnahme von Notation und Ergebnissen aus dem folgenden Abschnitt 3.2 zwischen ω und $w_k(\zeta)$. Weiter gilt im Falle $\omega = k$ immer $w_k^*(\zeta) \geq k$, wobei hierfür aber wegen Khinchins Transferprinzip $w_k(\zeta) \geq k\omega + k - 1$ zusammen mit der hinreichenden Bedingung (3.93) aus dem folgenden Unterabschnitt $E = \infty$ die schwächere Bedingung $\omega \geq 1$ ausreichend ist.

Definition 3.1. Für einen Approximationsvektor $(x, y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{Z}^{k+1}$ heißt $\zeta_j x$ eine *Approximation von oben*, wenn $y_j = \lfloor \zeta_j x \rfloor$ bzw äquivalent $\{\zeta_j x\} < \frac{1}{2}$ und andernfalls *Approximation von unten*. Sind alle $\zeta_j x$ simultan Approximationen von oben respektive unten, so sprechen wir von einer *gleichseitigen Approximation von oben respektive unten*. Gilt $k = 2$ und ist genau eine der beiden Approximationen $\zeta_j x$ eine Approximation von oben und die andere eine Approximation von unten, so nennen wir dies eine *verschiedenseitige Approximation*.

Thematisch verwandt mit Lemma 3.1 und beweistechnisch ähnlich ist auch das folgende

Lemma 3.2. Sei $\zeta \in \mathbb{R}$ und für die Approximationskonstante ω von $\zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^k$ gelte $\omega > 1$. Dann existiert eine Folge von Basen $(s_i)_{i \geq 1}$, sodass für ζ in der Darstellung s_i

$$\zeta = 0.a_1a_2a_3 \dots$$

die Beziehung

$$s_i \mid a_1^2 \quad \wedge \quad a_2 = 0 \quad \text{respektive} \quad (3.25)$$

$$s_i \mid (a_1 + 1)^2 \quad \wedge \quad a_2 = s_i - 1 \quad (3.26)$$

gilt, je nachdem ob ζs_i eine Approximation von oben respektive von unten ist. Weiters ist die Approximation zu $\zeta s_i, \zeta^2 s_i$ eine gleichseitige Approximation. Ist darüber hinaus die Darstellung von ζ^2 in Basis s_i gegeben durch

$$\zeta^2 = 0.b_1b_2b_3 \dots$$

so gilt im Fall einer gleichseitigen Approximation von oben entweder $b_1 s_i = a_1^2$ oder $(b_1 - 1)s_i = a_1^2$, wobei im Fall $\zeta < \frac{1}{2}$ stets der erste Fall eintritt und im Fall einer gleichseitigen Approximation von unten $(b_1 + 1)s_i = (a_1 + 1)^2$ oder $(b_1 + 2)s_i = (a_1 + 1)^2$, wobei im Fall $\zeta < \frac{1}{2}$ stets der erste Fall eintritt.

Beweis: Zuerst bemerken wir, dass wir oBdA $k = 2$ annehmen können, da die Aussage sonst nur schwächer wird. Wir zeigen nur (3.25), der Nachweis von (3.26) verläuft analog. Es gelte $\omega = 1 + \epsilon$ mit $\epsilon > 0$. Weil ζs_i eine Approximation von oben ist folgt aus der Definition von ω für i hinreichend groß

$$\zeta s_i - \lfloor \zeta s_i \rfloor = \zeta s_i - a_1 \leq s_i^{-1-\frac{\epsilon}{2}},$$

und Division durch s_i und Addition von $\frac{a_1}{s_i}$ liefert

$$\zeta \leq \frac{a_1}{s_i} + s_i^{-2-\frac{\epsilon}{2}}. \quad (3.27)$$

Für alle s_i für welche die Aussage des Satzes (3.25) falsch ist, gilt offenbar

$$\left(\frac{a_1}{s_i} \right)^2 \geq \frac{1}{s_i^2}.$$

Zusammen mit (3.27) und der Dreiecksungleichung folgt für jedes $\delta > 0$ wenn man i gegebenenfalls noch vergrößert

$$\|\zeta^2 s_i\| \geq \frac{1}{s_i} - 2s_i^{-1-\frac{\epsilon}{2}} - s_i^{-3-\epsilon} \geq s_i^{-1-\delta}. \quad (3.28)$$

Gäbe es keine Teilfolge die die Aussage des Satzes erfüllt, wäre (3.28) mit $\delta \rightarrow 0$ ein Widerspruch zu $\omega > 1$.

Um $a_2 = 0$ einzusehen bemerke, dass wegen $\|\zeta s_i\| \leq s_i^{-1}$ die Beziehung $a_2 = 0$ oder $a_2 = s_i - 1$ folgt. In zweiterem Fall wäre aber $\frac{a_1}{s_i} + \frac{s_i - 1}{s_i^2} \leq \zeta \leq \frac{a_1 + 1}{s_i}$ und weiter wegen (3.25)

$$\left\| \frac{2a_1 + 1}{s_i} - \frac{2(a_1 + 1)}{s_i^2} + \frac{1}{s_i^3} \right\| \leq \|\zeta^2 s_i\| \leq \left\| \frac{2a_1 + 1}{s_i} \right\|,$$

und beide Seiten konvergieren für $i \rightarrow \infty$ gegen $\{2\zeta\} \neq 0$, ein Widerspruch.

Für den zweiten Punkt bemerke, dass im Falle von (3.25) wegen (3.27)

$$\{\zeta^2 s_i\} \leq 2s_i^{-1-\frac{\epsilon}{2}} + s_i^{-3-\epsilon},$$

was gegen Null konvergiert für $s_i \rightarrow \infty$. Dies zeigt wie gewünscht, dass $\zeta^2 s_i$ eine Approximation von oben ist, wenn ζx eine solche ist. Analog sieht man ein, dass $a_2 = s_i - 1$ gelten muss im Falle einer Approximation von unten, also ist $\zeta^2 s_i$ eine Approximation von unten wenn ζs_i eine solche ist. Damit handelt es sich bei $\zeta s_i, \zeta^2 s_i$ in jedem Fall um eine gleichseitige Approximation. Die letzte Aussage zeigen wir wieder nur im Fall von gleichseitigen Approximationen von oben, der Fall einer gleichseitigen Approximation von unten geht analog und im letzten Punkt haben wir verschiedenseitige Approximation ausgeschlossen. Wir wissen im Fall einer gleichseitigen Approximation von oben bereits aus (3.25), dass

$$\frac{a_1^2}{s_i} = \frac{[\zeta s_i]^2}{s_i} \in \mathbb{Z}. \quad (3.29)$$

Wegen $0 < \zeta s_i - [\zeta s_i] < 1$ folgt andererseits für hinreichend großes i

$$\zeta^2 s_i - 2 < \zeta^2 s_i - 2\zeta + \frac{1}{s_i} < \frac{a_1^2}{s_i} < \zeta^2 s_i \quad (3.30)$$

und wegen (3.29) weiter $\frac{[\zeta^2 s_i]}{s_i} \in \{[\zeta^2 s_i], [\zeta^2 s_i] - 1\}$. Wegen $[\zeta^2 s_i] = b_1$ und weil man die linke Seite von (3.30) im Falle $\zeta < \frac{1}{2}$ durch $\zeta^2 s_i - 1$ ersetzen darf, folgt die Aussage. $\square$

An dieser Stelle noch ein Beispiel, das Lemma 3.1 und Lemma 3.2 illustrieren soll.

Beispiel 3: Sei $\zeta = 2^{-1} + 2^{-4} + 2^{-50}$ und zunächst $k = 2$. In der Basis $s_i = 2^8 = 256$ ergeben sich die Darstellungen

$$\begin{array}{rcl} \zeta & = & 0. \quad 144 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 64 \\ \zeta^2 & = & 0. \quad 81 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 72 \end{array}$$

Man berechnet $81 \cdot 256 = 144^2$, wie nach Vorhersage von Lemma 3.2. Sei nun $k \geq 2$ beliebig. Dividiert man gemäß dem Beweis von Lemma 3.1 die Ausdrücke s_i, a_1 durch ihren ggT, so entstehen $s'_i = 2^4 = 16, a'_1 = 9$. In der neuen Basis s'_i berechnet man die Nachkommadarstellungen

$$\begin{array}{rcl} \zeta & = & 0. \quad 9 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \\ \zeta^2 & = & 0. \quad 5 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \quad 8 \\ \zeta^3 & = & 0. \quad 2 \quad 13 \quad 9 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 3 \quad 12 \\ & & \vdots & & \vdots & & & & & & & & & & \end{array}$$

wobei die beiden Einträge 4 sowie der Eintrag 3 je an 13. Stelle hinter dem Komma stehen, weil 13 das kleinste Vielfache von 4 größer als 50 ist. Interessanter ist jedoch die Dreiecksstruktur davor. Weil Multiplikation mit s_i nur das Komma um eine Stelle nach rechts verschiebt erkennt man, dass $\zeta^2 s'_i$ keine gute Approximation an eine ganze Zahl ist wegen $a_2 = 1$, ebenso $\zeta^3 s'_i{}^2$ wegen $a_3 = 9$ usw. Dies veranschaulicht etwas vereinfacht das Grundprinzip des Beweises von Lemma 3.1.

Die x -Werte der Form $x = 2^{n!}$ respektive $x = s^{a_n}$, die zu guten Approximationsvektoren $(x, y_1, \dots, y_k)$ aus Lemma 3.1 respektive Korollar 3.1 führen, erfüllen *nicht* die Bedingung (3.18), wobei x den Werten s_i in der Notation von Lemma 3.1 entspricht. Es gilt nämlich in der Notation von Lemma 3.1 gemäß Lemma 3.2 $s_1 | a_1^2$, vergleiche auch Beispiel 3.

Dabei ist noch zu erwähnen, dass es sich nach Konstruktion bei den guten Approximationen von Lemma 3.1 bzw Korollar 3.1 immer um gleichseitige Approximationen von oben gehandelt hat,

also mit kleinem $\{x\zeta^i\}$ nahe bei 0 für alle $1 \leq i \leq k$. Dagegen scheint es sich bei den extremal numbers beispielsweise immer um eine verschiedeneitige Approximation von $\zeta x, \zeta^2 x$ zu handeln, wie man mithilfe von Ausgaben des Programms sieht. Im Falle $a = 1, b = 2$ in (2.51) ermittelt das Programm die ersten x -Werte- sie seien in Anlehnung an Lemma 3.2 mit s_i bezeichnet- die Verbesserungen an L_1 erzielen, als $s_i = 1, 2, 4, 25, 576, 81212, 81788$. Dabei ist 81212 ein Ausreißer der nur geringfügige Verbesserung zu $s_i = 576$ erzielt. Für die übrigen bestätigen Ausgaben die Beziehungen

$$a_1^2 + 1 = (b_1 + 1)s_i, \quad a_2 = 0 \quad \text{respektive} \quad (3.31)$$

$$(a_1 + 1)^2 - 1 = b_1 s_i, \quad a_2 = s_i - 1 \quad (3.32)$$

je nachdem ob $\{\zeta s_i\}$ nahe Null und $\{\zeta^2 s_i\}$ nahe Eins respektive umgekehrt. Diese müssen in der Tat erfüllt sein, um in diesem Fall $\max\{||\zeta s_i||, ||\zeta^2 s_i||\} \leq s_i^{-1}$ im Falle von verschiedeneitiger Approximation von $\zeta s_i, \zeta^2 s_i$ zu ermöglichen, was man ähnlich wie im Beweis von Lemma 3.2 nachprüft.

Beachte, dass für extremal numbers $\omega = 1$ gilt, wie wir im Abschnitt 2.2.3 festgestellt haben. Also darf Lemma 3.2 gerade noch nicht angewendet werden, was diese Ergebnisse ermöglicht. Sollte die Aussage der stets verschiedeneitigen Approximation von $\zeta s_i, \zeta^2 s_i$ und damit für jede gute Approximation s_i eine der beiden Gleichungen (3.31), (3.32) zutreffen, ergäben sich mithilfe der Feststellungen aus dem Abschnitt 2.2.1 die folgenden beiden Charakterisierungen der extremal numbers. Gehen wir von einer Zahl $0 < \zeta < \frac{1}{2}$ mit $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] \geq 3$ aus, dann gilt:

- ζ ist eine extremal number, wenn die Approximationskonstante ω zur simultanen Approximation von ζ, ζ^2 unter der Voraussetzung einer stets verschiedeneitigen Approximation maximiert wird. In diesem Fall ist $\omega = 1$.
- sei die Folge $S := (s_i)_{i=1}^R$, $R \in \{\mathbb{N} \cup \infty\}$ definiert als die monoton wachsend geordnete Menge positiver ganzer Zahlen s_i , welche eine der beiden Gleichungssysteme

$$[\zeta s_i]^2 + 1 = ([\zeta^2 s_i] + 1)s_i \quad \wedge \quad [\zeta s_i^2] - s_i[\zeta s_i] = 0 \quad (3.33)$$

$$([\zeta s_i] + 1)^2 - 1 = [\zeta^2 s_i] s_i \quad \wedge \quad [\zeta s_i^2] - s_i[\zeta s_i] = s_i - 1 \quad (3.34)$$

erfüllen. Dann ist ζ eine extremal number genau dann, wenn $|S| = \infty$ und

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log(s_{i+1})}{\log(s_i)} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} \approx 1.6180.$$

Ist ζ hingegen keine extremal number und $|S| = \infty$, so gilt $\limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{\log(s_{i+1})}{\log(s_i)} > \frac{2}{\sqrt{5} - 1}$.

Die erste Aussage folgt aus Lemma 3.2. Um die zweite einzusehen bemerken wir zuerst, dass per Definitionem für extremal numbers $\hat{\omega} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} =: \gamma$ gilt und für alle übrigen ζ unter unseren Voraussetzungen $\hat{\omega} > \gamma$. Weiters sind (3.33) respektive (3.34) äquivalent zu (3.31) respektive (3.32). Haben (3.33) oder (3.34) also unendlich viele Lösungen, so gilt offenbar $||s_i \zeta^j|| \leq s_i^{-1}$ für $j = 1, 2$ und damit $\omega \geq 1$, und nach Lemma 3.2 im Falle von ausschließlich verschiedeneitigen Approximationen, was für die extremal numbers nach unserer Voraussetzung gilt, folgt sogar $\omega = 1$. Wegen

$$\frac{\log(s_{i+1})}{\log(s_i)} \geq \frac{\omega}{\hat{\omega}} \geq \frac{1}{\gamma} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} \quad (3.35)$$

mit Gleichheit in der zweiten Ungleichung von (3.35) nur im Falle von $\hat{\omega} = \gamma$, also bei extremal numbers, folgt $\limsup \frac{\log(s_{i+1})}{\log(s_i)} \geq \frac{2}{\sqrt{5}-1}$ und Gleichheit ist nur im Falle von extremal numbers

möglich. Im Abschnitt 2.2 haben wir aber festgestellt, dass das $(q, L_j(q))$ -Bild von ζ, ζ^2 mit einer extremal number ζ aber im wesentlichen wie Abbildung 2.9 aussieht mit $\omega = 1$. (Ein exakter Plot so eines Anfangsabschnitts ist in Abbildung 2.8 zu sehen.) Genauer gibt es nach Roy zu jeder extremal number eine Folge $(x_i)_{i \geq 1}$ positiver ganzer Zahlen, sodass

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log(x_{i+1})}{\log(x_i)} = \frac{1}{\gamma}$$

$$\max \{ \|\zeta x_i\|, \|\zeta^2 x_i\| \} \sim x_i^{-1}.$$

Dies führt auf den aufgefächerten Fall von (2.50) mit $\omega = 1$. Wegen unserer Voraussetzung der stets verschiedenseitigen Approximation und $|S| = \infty$ stimmt diese Folge $(x_i)_{i \geq 1}$ mit unserer Folge $(s_i)_{i \geq 1}$ überein und dies impliziert Gleichheit auch in der ersten Ungleichung von (3.35) für alle extremal numbers.

Für andere Charakterisierungen der extremal numbers siehe Theorem 3.1 in [12].

3.2 Das duale Problem

Im folgenden werden die Approximierbarkeit einer reellen Zahl $\zeta \in \mathbb{R}$ durch algebraische Zahlen beschränkten Grades untersucht. Grundlage dazu bildet die Approximation an 0 durch Werte $P(\zeta)$, wobei P die Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten durchläuft. Dieses Problem steht offenbar in engem Zusammenhang zur Approximation von Linearformen, wie aus dem System

$$|y_1| \leq Q^{\frac{1}{n} + \theta} \quad (3.36)$$

$$|y_2| \leq Q^{\frac{1}{n} + \theta} \quad (3.37)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad (3.38)$$

$$|y_n| \leq Q^{\frac{1}{n} + \theta} \quad (3.39)$$

$$|\zeta y_1 + \zeta^2 y_2 + \cdots + \zeta^n y_n + x| \leq Q^{-1 + \theta}, \quad (3.40)$$

ersichtlich ist. Dabei sind $(x, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ gesucht, sodass θ möglichst klein wird. Genauer definieren wir $\nu_j^*(Q)$ die kleinste reelle Zahl, sodass (3.36)-(3.40) eine Menge von j linear unabhängigen Lösungen besitzt.

Man kann dieses System analog zum System (1.5)-(1.8) als Gitterpunktproblem auffassen. Wir geben zwei verschiedene Arten an, dies zu tun. Einerseits definieren wir $\eta_j^*, 1 \leq j \leq n+1$, als die sukzessiven Minima bezüglich des Gitters Λ^* und des Körpers $M(Q)$ gegeben durch

$$\Lambda^* := \{(x + \zeta_1 y_1 + \zeta_2 y_2 + \cdots + \zeta_n y_n, y_1, y_2, \dots, y_n) : x, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{Z}\} \quad (3.41)$$

$$M(Q) := \left\{ (x, y_1, \dots, y_n) \in \left[-\frac{1}{Q}, \frac{1}{Q} \right] \times \left[-Q^{\frac{1}{n}}, Q^{\frac{1}{n}} \right]^n \right\} \quad (3.42)$$

und erkennen $\nu_j^*(Q) = \frac{\log(\eta_j^*(Q))}{q}$.

Andererseits stimmen $\eta_j^*(Q)$ auch mit den sukzessiven Minima bezüglich

$$\Lambda := \mathbb{Z}^{n+1} \quad (3.43)$$

$$L(Q) := \{(x, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : |y_t| \leq Q^{\frac{1}{n}} \quad 1 \leq t \leq n, |x + \zeta y_1 + \cdots + \zeta^n y_n| \leq Q^{-1}\} \quad (3.44)$$

überein, was den obigen Zusammenhang zwischen den via (3.36)-(3.40) definierten ν_j^* und den sukzessiven Minima bestätigt. Zweitens werden wir später in diesem Abschnitt (und

folgenden) mit $X := Q^{\frac{1}{n}}$, sowie ohne Notationswechsel im Abschnitt 3.2.3, aufgreifen.

Wir können das System auch im wesentlichen als das zur Problemstellung (1.5)-(1.8) der bisherigen Kapitel duale Problem, im Spezialfall $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) = (\zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^n)$ mit einem $\zeta \in \mathbb{R}$, auffassen. Dabei ist die Zahl der Variablen hier mit n anstatt wie im dualen Fall mit k bezeichnet. Dazu betrachten wir die sukzessiven Minima $\lambda_j^*(Q)$ zum Gitter Λ^* aus (3.41) und anstatt $M(Q)$ aus (3.42) den zum Simplex K aus (1.12), (1.13) dualen konvexen Körper $K^*(Q) \subset K(Q)$, welcher gegeben ist durch

$$K^*(Q) := \left\{ f = (f_1, f_2, \dots, f_{n+1}) \in K(Q) : \sum_{i=1}^{n+1} |f_i| \leq 1 \right\}.$$

$K^*(Q)$ ist dabei wieder für alle Q ein Simplex. Diese unterscheiden sich in der Tat wenig von den Lösungen des Systems (3.36)-(3.40), wie wir nun zeigen. Setzt man

$$\psi_j^*(Q) := \frac{\log(\lambda_j^*(Q))}{q}, \quad (3.45)$$

so gilt nämlich

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \psi_j^*(Q) - \nu_j^*(Q) = 0. \quad (3.46)$$

Es ist nämlich wie oben gezeigt $\nu_j^*(Q)$ über die sukzessiven Minima $\eta_j^*(Q)$ bezüglich des Gitters Λ^* und des Körpers $M(Q)$ gegeben und wegen $K^*(Q) \subset M(Q) \subset (n+1)K^*(Q)$, siehe auch [14], Seite 68, folgt

$$\eta_j^*(Q) \leq \lambda_j^*(Q) \leq (n+1)\eta_j^*(Q).$$

Zusammen mit (3.45) folgt (3.46). Insbesondere folgt mit

$$\begin{aligned} \underline{\nu}_j^* &:= \liminf_{Q \rightarrow \infty} \nu_j^*(Q), & \overline{\nu}_j^* &:= \limsup_{Q \rightarrow \infty} \nu_j^*(Q), \\ \underline{\psi}_j^* &:= \liminf_{Q \rightarrow \infty} \psi_j^*(Q), & \overline{\psi}_j^* &:= \limsup_{Q \rightarrow \infty} \psi_j^*(Q), \end{aligned}$$

aus (3.46)

$$\underline{\psi}_j^* = \underline{\nu}_j^*, \quad \overline{\psi}_j^* = \overline{\nu}_j^*.$$

Es macht also keinen essentiellen Unterschied, ob wir mit η_j^*, ν_j^* oder mit λ_j^*, ψ_j^* arbeiten. Aus Minkowskis Gitterpunktsatz folgt wieder $\lambda_1^*(Q) < 1$ für alle $Q > 0$. Es seien gleich an dieser Stelle ein paar Anmerkungen zu den höheren sukzessiven Minima gemacht, welche wir im Abschnitt 3.2.3 verwenden werden. Bis dahin werden wir aber hauptsächlich von $\lambda_1^*(Q)$ abgeleitete Größen im polynomialen Spezialfall in den Mittelpunkt unserer Betrachtungen stellen.

Es gelten Mahlers Identitäten

$$1 \ll \lambda_{n+2-j}^*(Q) \lambda_j(Q) \ll 1, \quad 1 \leq j \leq n$$

mit nur vom Vektor $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ abhängigen Konstanten in $\ll$ und diese erlauben, die Approximationskonstanten der beiden zueinander dualen Problemstellungen zu einem festen Vektor ζ zueinander in Beziehung setzen. In Ausdrücken der Funktionen ψ_j, ψ_j^* übersetzen sich Mahlers Identitäten in

$$q \cdot |\psi_j^*(Q) - \psi_{n+2-j}(Q)| \leq C(\Lambda, K), \quad 1 \leq j \leq n+1, \quad (3.47)$$

also insbesondere $\lim_{Q \rightarrow \infty} \psi_j^*(Q) - \psi_{n+2-j}(Q) = 0$. Dies zieht insbesondere

$$\underline{\psi}_j^* = -\overline{\psi}_{n+2-j}, \quad \overline{\psi}_j^* = -\underline{\psi}_{n+2-j} \quad (3.48)$$

nach sich.

An dieser Stelle sind noch die aus (1.16), (1.18), (1.10) zusammen mit (3.47) folgenden Beziehungen

$$q \cdot \left| \sum_{j=1}^{n+1} \psi_j^*(Q) \right| \leq C(\Lambda, K), \quad Q > 1 \quad (3.49)$$

$$\underline{\psi}_{j+1}^* \leq \overline{\psi}_j^*, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (3.50)$$

$$-\frac{1}{k} \leq \psi_1^*(Q) \leq \psi_2^*(Q) \leq \dots \leq \psi_{n+1}^*(Q) \leq 1, \quad Q > 1, \quad (3.51)$$

erwähnenswert, die sich bereits in [14] Seite 77,78 finden. Insbesondere folgt aus (3.49) analog zum dualen Fall $\lim_{Q \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n+1} \psi_j^*(Q) = 0$.

Seien für das Linearformenproblem die Approximationskonstanten $w_{n,j}(\zeta)$ respektive $\widehat{w}_{n,j}(\zeta)$ analog zu den dualen Approximationskonstanten ω_j respektive $\widehat{\omega}_j$ im Falle von $k = n$ Variablen ζ_i definiert als das Supremum aller reellen Zahlen ν , sodass das System

$$\begin{aligned} |y_i| &\leq X, & 1 \leq i \leq n \\ \left| x + \sum_{i=1}^n \zeta_i y_i \right| &\leq X^{-\nu} \end{aligned}$$

unendliche viele (respektive für alle hinreichend großen X) eine Menge von j linear unabhängigen Lösungen besitzt, und setze $w_n(\zeta) := w_{n,1}(\zeta)$ und $\widehat{w}_n(\zeta) := \widehat{w}_{n,1}(\zeta)$. Dabei sind die Doppelindizes vorerst nur im Hinblick auf später folgende Notation verwendet, wo wir $w_n(\zeta) := w_n(\zeta)$, $\widehat{w}_n(\zeta) := \widehat{w}_n(\zeta)$ mit $\zeta = (\zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^n)$ in Abhängigkeit von n untersuchen werden. Man kann analog zum dualen Problem parameterabhängige Funktionen $w_{n,j}(\zeta)(X)$ definieren und erhält $w_{n,j}(\zeta) = \limsup_{X \rightarrow \infty} w_{n,j}(\zeta)(X)$, $\widehat{w}_{n,j}(\zeta) = \liminf_{X \rightarrow \infty} w_{n,j}(\zeta)(X)$. Wir werden dies aber nicht weiter verwenden. Man kann ähnlich wie in Satz 1.11 die Beziehungen

$$(w_{n,j}(\zeta) + 1) \left(\frac{1}{n} + \underline{\psi}_j^* \right) = (\widehat{w}_{n,j}(\zeta) + 1) \left(\frac{1}{n} + \overline{\psi}_j^* \right) = \frac{n+1}{n} \quad (3.52)$$

zeigen, mittels (3.48) können wir dies auch anschreiben als

$$(w_{n,j}(\zeta) + 1) \left(\frac{1}{n} - \overline{\psi}_{n+2-j} \right) = (\widehat{w}_{n,j}(\zeta) + 1) \left(\frac{1}{n} - \underline{\psi}_{n+2-j} \right) = \frac{n+1}{n}, \quad (3.53)$$

wobei $n = k$ im Sinne der Notation aus dem dualen Problem gilt. Für einen Beweis verweisen wir auf [14] *Proof of Theorem 1.4* Seite 79 und 80, wo dies für $j = 1$ ausgeführt ist, der Beweis des allgemeinen Falles verläuft analog, vergleiche auch den Beweis von Satz 1.11.

Zusammen mit Satz 1.11 berechnet man daraus wieder für $1 \leq j \leq n+1$

$$w_{n,j}(\zeta) = \frac{1}{\widehat{\omega}_{n+2-j}}, \quad \widehat{w}_{n,j}(\zeta) = \frac{1}{\omega_{n+2-j}}. \quad (3.54)$$

Die Schranken aus (1.47)-(1.52) liefern zusammen mit (3.54) folgende Schranken für die Approximationskonstanten des Linearformenproblems:

$$\begin{aligned} n &\leq w_n(\zeta) \leq \infty \\ n+2-j &\leq w_{n,j}(\zeta) \leq \infty, & 2 \leq j \leq n \\ 1 &\leq w_{n,n+1}(\zeta) \leq n \\ n+1-j &\leq \widehat{w}_{n,j}(\zeta) \leq \infty, & 1 \leq j \leq n \\ 1 &\leq \widehat{w}_{n,n}(\zeta) \leq n \\ 0 &\leq \widehat{w}_{n,n+1}(\zeta) \leq n. \end{aligned}$$

Dass diese Schranken sämtlich bestmöglich sind, folgert man unmittelbar aus (3.54) und Korollar 2.3.

Weiters ermöglicht (3.54) insbesondere bei Kenntnis von ω_{k+1} (respektive $\widehat{\omega}_{k+1}$) die Berechnung von $w_n(\zeta)$ (respektive $\widehat{w}_n(\zeta)$), welche im folgenden von Interesse sein werden. Weiter sei noch festgehalten, dass wir in den ersten beiden Kapiteln für gewisse Spezialfälle von simultaner Approximation von (schwachen) Liouvillezahlen vom speziellen Typ alle Approximationskonstanten berechnet bzw abgeschätzt haben. Die entsprechenden Approximationskonstanten des polynomialen Linearformenproblems lassen sich mit (3.54) einfach umrechnen, was wir jedoch nicht weiter verfolgen.

3.2.1 Polynome, Höhen und ein Ergebnis von Sprindžuk

Wie bereits angedeutet, wird Approximation mit Polynomen im weiteren eine große Rolle spielen. Im dualen Problem, das in den ersten beiden Kapiteln behandelt wurde, haben wir um die Güte einer Approximation zu bewerten, die Größe $\max_{1 \leq t \leq k} |\zeta_t x - y_t|$ in Zusammenhang mit einer oberen Schranke X für $|x|$ gebracht. Sich auf $|x|$ zu beschränken war keine wesentliche Einschränkung, da für gute Approximationen die Asymptotik $y_t \sim \zeta_t x$ besteht, also $|x| \ll |y_t| \ll |x|$ für $1 \leq t \leq k$ mit nur von $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ abhängigen Konstanten in $\ll$, welche beim Logarithmieren zur Basis X für große X bedeutungslos werden.

Um in unserer Situation der Approximation der Linearform $x + \zeta y_1 + \dots + \zeta^n y_n$ einen sinnvollen Begriff von der Güte einer Approximation zu bekommen, eignet sich nach dem Notationswechsel $x_0 := x, x_t := y_t$ für $1 \leq t \leq n$ als Maß der Betrag des betragsgrößten Koeffizienten des entstehenden Polynoms $P(\zeta) = x_0 + \zeta x_1 + \dots + \zeta^n x_n$. In der folgenden Definition ist das für uns im weiteren wichtige Vokabular in diesem Zusammenhang festgehalten.

Definition 3.2. Ist ein Polynom $P \in \mathbb{Z}[T]$ gegeben durch $P(T) = x_0 + x_1 T + \dots + x_n T^n$, so sei

$$H(P) := \max \{|x_0|, |x_1|, \dots, |x_n|\}$$

die *Höhe des Polynoms* P und für eine algebraische Zahl α sei die *Höhe* $H(\alpha)$ von α als die Höhe $H(P)$ des Minimalpolynoms $P \in \mathbb{Z}[T]$ von α mit teilerfremden Koeffizienten definiert.

Konkret lautet die Fragestellung in den übrigen Abschnitten von Kapitel 3 ab dieser Stelle, die Exponenten μ zu klassifizieren, sodass

$$|\zeta - \alpha| \ll H(\alpha)^{-\mu} \tag{3.55}$$

unendlich viele Lösungen für algebraische Zahlen α fest beschränkten Grades $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] \leq n$ mit nur von n, ζ abhängigen Konstanten in $\ll$ besitzt.

Definition 3.3. Wir bezeichnen für $n \geq 1$ das Supremum aller $\mu \in \mathbb{R}$, sodass (3.55) unendlich viele Lösungen α mit $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] \leq n$ besitzt, im folgenden mit $\mathcal{A}_n(\zeta)$.

Die Größe $\mathcal{A}_n(\zeta)$ steht in engem Zusammenhang zur Polynomapproximation (insbesondere der Größe $w_n(\zeta)$) wie wir später genauer ausführen. Auf der Ebene der Polynome gilt, dass für alle positiven ganzen Zahlen n und reellen ζ

$$|P(\zeta)| \ll H(P)^{-n} \quad (3.56)$$

mit einer von ζ, n abhängigen Konstante in $\ll$ für alle ζ unendlich viele Lösungen $P \in \mathbb{Z}[T]$ vom Grad $\leq n$ hat. Dies folgert man aus dem Gitterpunktsatz von Minkowski, denn betrachtet man für festes X den Bereich $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ definiert durch die Ungleichungen

$$\begin{aligned} |x_1| &\leq X \\ |x_2| &\leq X \\ &\vdots \\ |x_n| &\leq X \\ |P(\zeta)| = |x_0 + \zeta x_1 + \cdots + \zeta^n x_n| &\leq X^{-n}, \end{aligned}$$

so gilt $\text{vol}(D) = 2^{n+1}$ und D ist symmetrisch und als Simplex konvex. Man findet also einen ganzzahligen von Null verschiedenen Gitterpunkt $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ in D , den wir im folgenden durchgehend mit dem Polynom $P(T) = x_0 + x_1 T + \cdots + x_n T^n$ identifizieren werden. (Vergleiche vorangehende Einleitung des Abschnitts 3.2 insbesondere im Hinblick auf (3.43), (3.44), wo die Variable X hier dem dortigen $Q^{\frac{1}{n}}$ entspricht.)

Für die Höhe eines im Bereich D liegenden P gilt aber $H(P) \ll X$, denn $|x_1|, \dots, |x_n|$ sind nach Definition durch X beschränkt und aus der Dreiecksungleichung folgert man leicht $|x_0| \leq (1 + |\zeta| + \cdots + |\zeta^n|)X \ll X$. Die beiden Tatsachen

$$\begin{aligned} |P(\zeta)| = |x_0 + \zeta x_1 + \cdots + \zeta^n x_n| &\leq X^{-n} \\ H(P) &\ll X \end{aligned}$$

liefern $|P(\zeta)| \ll H(P)^{-n}$. Lässt man $X \rightarrow \infty$ streben, so erkennt man, weil einerseits X^{-n} für $X \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert und es wegen ζ nicht algebraisch vom Grad $\leq n$ (andernfalls ist die Aussage trivial, man nehme Vielfache des Minimalpolynoms) andererseits in jedem beschränkten Bereich ein minimales $|P(\zeta)| > 0$ gibt, dass es P mit beliebig großen Höhen mit den geforderten Eigenschaften geben muss und damit unendlich viele.

Das vorliegende Problem (3.55) ist jedoch komplizierter. Es wird vermutet, dass der optimale globale (also für *alle* ζ simultan) Exponent μ in (3.55) durch $(n+1)$ gegeben ist, also die Beziehung $\mathcal{A}_n(\zeta) \geq n+1$ für alle $\zeta \in \mathbb{R}$ erfüllt ist, wobei noch ungeklärt ist, ob diese Schranke tatsächlich erreicht wird. Ein heuristisches Argument für die Schranke $(n+1)$ ist, dass für ein α mit Minimalpolynom $P \in \mathbb{Z}[T]$ wie oben gilt

$$|\zeta - \alpha| \leq n \cdot \left| \frac{P(\zeta)}{P'(\zeta)} \right|. \quad (3.57)$$

Dies sieht man ein, indem man die Ungleichung umformt zu

$$|\zeta - \alpha| \cdot \left| \frac{P'(\zeta)}{P(\zeta)} \right| \leq n \quad (3.58)$$

und bemerkt, dass für ein Polynom $P(T) = (T - \alpha_1)(T - \alpha_2) \cdots (T - \alpha_n)$ die logarithmische Ableitung gegeben ist durch

$$\frac{P'(T)}{P(T)} = \frac{1}{T - \alpha_1} + \frac{1}{T - \alpha_2} + \cdots + \frac{1}{T - \alpha_n}.$$

Es gilt also mit $T := \zeta$

$$|\zeta - \alpha| \cdot \left| \frac{P'(\zeta)}{P(\zeta)} \right| = \left| \frac{\zeta - \alpha}{\zeta - \alpha_1} + \dots + \frac{\zeta - \alpha}{\zeta - \alpha_n} \right|, \quad (3.59)$$

und die Wahl $\alpha := \alpha_j$ mit der Nullstelle α_j von P , die $|\zeta - \alpha_j|$ über alle j minimiert, ergibt die Behauptung (3.58), weil alle Summanden in (3.59) durch 1 beschränkt sind, sodass in Folge (3.57) gilt. Für $|\zeta - \alpha|$ gilt folglich

$$|\zeta - \alpha| \ll \left| \frac{P(\zeta)}{P'(\zeta)} \right|$$

mit nur von n, ζ abhängigen Konstanten in $\ll$, und eine echt kleinere Größenordnung ist nicht zu erwarten. (Tatsächlich kann man relativ einfach für alle $\zeta \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$\mathcal{A}_n(\zeta) \leq w_n(\zeta) + 1 \quad (3.60)$$

zeigen, siehe [17] Seite 22. Das ist für uns aber die uninteressante Richtung der Ungleichung.) Ungleichung (3.57) bildet die Grundlage des gesamten weiteren Vorgehens.

Nun zeigt aber Sprindžuk in [16], dass die Menge der $\zeta \in \mathbb{R}$, für die es ein $\epsilon > 0$ gibt, sodass für unendlich viele Polynome $P \in \mathbb{Z}[T]$ vom Grad $\leq n$

$$|P(\zeta)| \leq H(P)^{-n-\epsilon}$$

erfüllt ist, eine Lebesgue-Nullmenge Λ von $\mathbb{R}$ bildet. Der typische Fall ist also, dass der Exponent $-n$ in $|P(\zeta)| \ll H(P)^{-n}$ optimal ist.

Weiter ist offenbar der Exponent $\nu = 1$ in $|P'(\zeta)| \gg X^\nu$ offenbar bestmöglich, da P ja im Bereich D liegt. Weil also $|P(\zeta)| \ll X^{-n}$ im allgemeinen bestmöglich und $\nu = 1$ im allgemeinen optimal sind, liegt nach (3.58) die Vermutung nahe, dass $\mu = n + 1$ in (3.55) die global beste Schranke ist, also $\mathcal{A}_n(\zeta) \geq n + 1$ für *alle* ζ gilt. Anderenfalls, wenn also für ein $\zeta \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $\mathcal{A}_n(\zeta) < n + 1$ gilt, müssten alle P , die $|P(\zeta)| \ll X^{-n}$ erfüllen - wie oben aus Minkowskis Gitterpunktsatz gefolgt, existieren solche Punkte stets- auch $|P'(\zeta)| \leq X^r$ für ein festes von P unabhängiges $r < 1$ erfüllen, also in Richtung des Normalvektors der Hyperebene $P'(\zeta) = 0$ des $\mathbb{R}^{n+1}$ durch ein $X^r, r < 1$ beschränkt sein. Auf solche Schranken r wird unten in Fall 2 nochmals eingegangen.

Im weiteren werden hier 2 Fälle unterschieden. Es sei dabei an die Größen $w_n(\zeta), \hat{w}_n(\zeta)$, definiert im vorangehenden Abschnitt 3.2, erinnert.

Fall 1: $\hat{w}_n(\zeta) = n$. Dies ist gleichbedeutend mit:

Es gibt zu $\zeta \in \mathbb{R}$ für alle $\epsilon > 0$ beliebig große H , sodass für kein Polynom $P \in \mathbb{Z}[T]$ vom Grad $\leq n$ mit Höhe $H(P) \leq H$

$$|P(\zeta)| \leq H^{-n-\epsilon}$$

erfüllt ist. (Also $\hat{w}_n(\zeta) \leq n$ und weil umgekehrt $\hat{w}_n(\zeta) \geq n$ für alle $\zeta \in \mathbb{R}$ gilt ist dieser Fall gleichwertig mit $\hat{w}_n(\zeta) = n$).

Fall 2: $\hat{w}_n(\zeta) > n$. Dies ist gleichbedeutend mit:

Es gibt zu $\zeta \in \mathbb{R}$ ein $\epsilon > 0$, sodass für jedes hinreichend große H ein Polynom $P \in \mathbb{Z}[T]$ vom Grad $\leq n$ mit Höhe $H(P) \leq H$ mit

$$|P(\zeta)| \leq H^{-n-\epsilon} \quad (3.61)$$

existiert.

Da die Bedingung für Fall 2 die Negation der Bedingung von Fall 1 ist, fällt jedes $\zeta \in \mathbb{R}$ entweder in Fall 1 oder in Fall 2. Im weiteren werden wir $\zeta \in \mathbb{R}$ als zu Fall 1 gehörig oder als zu Fall 2 gehörig bezeichnen. Oben zitiertes Resultat von Sprindžuk besagt insbesondere, dass die zu Fall 2 gehörigen $\zeta \in \mathbb{R}$ eine Nullmenge Λ bilden. Man beachte aber, dass die hier für Fall 2 gestellte

Forderung stärker ist als die Voraussetzung bei Sprindžuk.

Es wird im weiteren in Satz 3.2 auf geometrischem Wege bewiesen, dass für zu Fall 1 gehörige ζ stets $\mathcal{A}_n(\zeta) \geq n + 1$ erfüllt ist. Dies liefert eine kleine Verbesserung zu Corollary 1 in §21 in Sprindžuks Arbeit [16], der $\mathcal{A}_n(\zeta) \geq n + 1$ außerhalb obiger Ausnahmenullmenge Λ der Zahlen mit $w_n(\zeta) > n$ beweist, diese ist aber größer als die Menge der zu Fall 2 gehörigen ζ wegen der stärkeren Voraussetzung $\widehat{w}_n > n$ in Fall 2 (wobei im Falle von Λ bzw. $w_n(\zeta) = n$ wegen (3.60) sogar die Identität $\mathcal{A}_n(\zeta) = n + 1$ folgt).

Weiters wird aus einer Verallgemeinerung der Beweismethode für zu Fall 2 gehörige ζ , abhängig von dem größtmöglichen $\epsilon > 0$, das man zu ζ in (3.61) wählen kann, eine untere Abschätzung für $\mathcal{A}_n(\zeta)$ folgen, die sich bereits als Theorem 2.1 in [1] findet. Dies ist in Satz 3.3 festgehalten. Die Schranke aus Satz 3.3 stimmt jedoch nur im Fall $\epsilon = 0$ mit $n + 1$ überein und wird mit wachsendem ϵ schlechter. In Kombination mit einem Ergebnis von E. Wirsing in [18], genauer Formel (4) auf Seite 68 ebendort, werden wir daraus aber eine kleine Verbesserung der globalen unteren Schranke von $\mathcal{A}_n(\zeta) \geq \frac{n+3}{2}$ folgern, welche direkt aus selbigem Resultat abgeleitet war. Mithilfe von Abschätzungen betreffend die Werte $\underline{\psi}_{k+1}, \overline{\psi}_{k+1}$ aus jüngster Vergangenheit von Summerer/Schmidt in Theorem 1.3 aus [15] lassen sich noch weitere geringfügige Verbesserungen an der Schranke vornehmen. An dieser Stelle sei noch erwähnt, dass die spezielle Struktur des Problems der Linearformenapproximation eines Vektors der Form $(\zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^k)$, die sich im geometrischen Beweis anhand von den Hyperebenen $P(\zeta) = 0, P'(\zeta) = 0$ in $\mathbb{R}^{n+1}$ (mit $P \in \mathbb{Z}[T]$) manifestieren wird, im Beweis keine tragende Rolle spielen wird. Von der speziellen Gestalt der Hyperebene $P'(\zeta) = 0$ wird lediglich verwendet, dass der Konstante Term beim Differenzieren wegfällt und damit ihr Normalvektor in $\{0\} \times \mathbb{R}^n$ liegt.

Es wird schließlich noch als Korollar 3.5 eine hinreichende Bedingung zur allgemeinen Gültigkeit (also in beiden Fällen) von $\mathcal{A}_n(\zeta) \geq n + 1$ angegeben, deren Richtigkeit aber sehr in Frage steht. Dann wird Fall 2, für welchen die Schranke $\mathcal{A}_n(\zeta) \geq n + 1$ nicht allgemein bewiesen ist, noch auf eine andere Art behandelt. Es werden in der vorliegenden Arbeit mithilfe von Funktionen Γ, Γ^* , deren Einführung durch die vorangehende geometrische Anschauung des Problems motiviert ist, Bedingungen herausgearbeitet, die sich aus der Annahme $\mathcal{A}_n(\zeta) < n + 1$ für ein $\zeta \in \mathbb{R}$ in diesem Fall ergeben würden.

3.2.2 Anwendungen des ersten Gitterpunktsatzes und Bestätigung einer Abschätzung von Bugeaud und Laurent

Fall 1: $\widehat{w}_n(\zeta) = n$

In diesem Fall zeigen wir den folgenden Satz:

Satz 3.2. Für jede positive ganz Zahl n , jedes zu Fall 1 gehörige $\zeta \in \mathbb{R}$ und jedes $\epsilon > 0$ gibt es unendlich viele algebraische Zahlen α vom Grad höchstens n mit

$$|\zeta - \alpha| \ll H(\alpha)^{-n-1+\epsilon}, \quad (3.62)$$

es gilt also $\mathcal{A}_n(\zeta) \geq n + 1$.

Beweisschema und Notation: Es sei n im folgenden beliebig aber fest. Es wird eine Folge P_i von Polynomkoeffizientenvektoren $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ konstruiert, die zu festen $\zeta, \epsilon_0 > \epsilon_1 > 0$ die Beziehungen

$$|P_i(\zeta)| \ll X_i^{-n} \quad (3.63)$$

$$H(P_i) \ll X_i^{1+(n-1)\epsilon_1} \quad (3.64)$$

$$|P'_i(\zeta)| \gg X_i^{1-\epsilon_0} \quad (3.65)$$

für hinreichend großen Index i mit gegen unendlich strebenden $X_i \in \mathbb{N}$ und von $\zeta, n, \epsilon_0, \epsilon_1$ abhängigen Konstanten erfüllen. Dabei ist

$$P(\zeta) = x_0 + x_1\zeta + \cdots + x_n\zeta^n$$

Daraus ergibt sich nach (3.57) die Existenz einer Nullstelle α von P_i mit

$$|\zeta - \alpha| \ll X_i^{-n-(1-\epsilon_0)} \ll H(P_i)^{\kappa(\epsilon_0, \epsilon_1)} = H(\alpha)^{\kappa(\epsilon_0, \epsilon_1)}$$

mit $\kappa(\epsilon_0, \epsilon_1) := \frac{-n-(1-\epsilon_0)}{1+(n-1)\epsilon_1}$ und von $\zeta, n, \epsilon_0, \epsilon_1$ abhängigen Konstanten.

Wegen $\lim_{(\epsilon_0, \epsilon_1) \rightarrow (0,0)} \kappa(\epsilon_0, \epsilon_1) = -(n+1)$ gilt die Behauptung (3.62), wenn man die frei wählbaren $\epsilon_0 > \epsilon_1 > 0$ klein genug wählt und dazu die Folge P_i konstruiert, die (3.63), (3.64), (3.65) für hinreichend großen Index i simultan erfüllt. Genauer wird die Folge $(P_i)_{i \geq 1}$ so konstruiert, dass (3.63), (3.64) immer erfüllt ist und für hinreichend große von $n, \zeta, \epsilon_0, \epsilon_1$ abhängige Indizes i auch Bedingung (3.65).

Beweis: Wir müssen die Polynome P_i aus den einführenden Bemerkungen, die also (3.63)-(3.65) erfüllen sollen, konstruieren. Seien zunächst

$$\begin{aligned} G_X &:= \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x_0 + \zeta x_1 + \cdots + \zeta^n x_n| \leq X^{-n}\} \\ H &:= \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0 = 0\} \\ H_1 &:= \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0 + x_1\zeta + \cdots + x_n\zeta^n = 0\} \\ H_2 &:= \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1 + x_2 \cdot 2\zeta + \cdots + x_n \cdot n\zeta^{n-1} = 0\} \end{aligned}$$

Dabei sind H_1, H_2 die Nullstellenhyperräume von $P(\zeta)$ und $P'(\zeta)$. Sei weiter mit der Einheits-sphäre $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$$v_n := H_2^\perp \cap S^n \in H,$$

wobei man sich beliebig für einen der beiden Vektoren aus $H_2^\perp \cap S^n$ entscheidet, und $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ so, dass $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ eine orthonormale Basis von H wird. Wir wollen Punkte P mit großer Ableitung $|P'(\zeta)|$ konstruieren, und v_n ist genau so gewählt, dass große Werte $|P'(\zeta)|$ mit großen v_n -Koordinaten von P korrespondieren. Die beiden unterscheiden sich nur durch den multiplikativen Faktor $R := \|(0, 1, 2\zeta, \dots, n\zeta^{n-1})\|_2^{-1}$, der in Lemma 3.5 auftauchen wird.

Betrachte die kompakten Gebiete

$$\Delta_X := \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n : |\alpha_j| \leq X^{1-\epsilon_1}, 1 \leq j \leq n\} \quad (3.66)$$

$$\widehat{\Delta}_X := \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n : |\alpha_j| \leq X^{1-\epsilon_1}, 1 \leq j \leq n-1, |\alpha_n| \leq X^{1+(n-1)\epsilon_1}\} \quad (3.67)$$

und weiter

$$\begin{aligned} B_X &:= \Pi^{-1}(\Delta_X) \cap G_X \\ \widehat{B}_X &:= \Pi^{-1}(\widehat{\Delta}_X) \cap G_X, \end{aligned}$$

wobei Π die Orthogonalprojektion von $\mathbb{R}^{n+1}$ auf H ist (also in Richtung x_0).

Nach diesen Definitionen gilt $\Delta_X \subset \widehat{\Delta}_X$ sowie in Folge $B_X \subset \widehat{B}_X$ und die Bereiche unterscheiden sich dadurch, dass die mit Dach versehenen Bereiche in v_n -Richtung- also genau in Richtung des

stärksten Wachstums von $P'(\zeta)$ -längen sind. Genauer überzeugt man sich unmittelbar, dass für die v_n -Koordinate $v_n(P)$ eines jeden Punktes $P \in \widehat{B}_X \setminus B_X$ gilt

$$|v_n(P)| \geq X^{1-\epsilon_1}. \quad (3.68)$$

Außerdem beachte man, dass nach Definition von G_X jeder Punkt in B_X bzw. $\widehat{B}_X$ automatisch $|P(\zeta)| \leq X^{-n}$ erfüllt.

Die Intention ist zu zeigen, dass für eine nach unendlich strebende Folge von X -Werten X_i jeweils ein ganzzahliger Punkt P_i in $\widehat{B}_{X_i} \setminus B_{X_i}$ existiert. Ein solcher Punkt würde also $|P_i(\zeta)| \leq X_i^{-n}$ erfüllen und gemäß (3.68) eine große Ableitung $|P'_i(\zeta)|$ besitzen, wie gewünscht. Nach (3.57) wird jedes Element P_i einer solchen Folge eine gute Approximation α liefern.

Um die Existenz so einer Folge von Punkten P_i zu zeigen, beweisen wir 2 Lemmata, wobei im zweiten unsere Bedingung von Fall 1 eingehen wird.

Lemma 3.3. Für alle $X \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathbb{Z}^{n+1} \cap \widehat{B}_X \neq \emptyset$$

Beweis: Da $\widehat{B}_X$ offenbar konvex und ursprungssymmetrisch ist, reicht es, $\text{vol}(\widehat{B}_X) = 2^{n+1}$ zu zeigen, um die Aussage des Lemmas aus dem Gitterpunktsatz von Minkowski zu folgern, denn die Gitterkonstante von $\mathbb{Z}^{n+1}$ ist 1.

Die Projektion von $\widehat{B}_X$ auf die $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ -Hyperebene H ist gerade $\widehat{\Delta}_X$ und hat n -dimensionales Volumen $(2X)^n$. Dies gilt, weil $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ eine ONB von H bilden und daher

$$\text{vol}(\widehat{\Delta}_X) = \prod_{1 \leq j \leq n} 2\beta_j$$

wobei β_j die Grenzen für α_j in (3.67) bezeichnen, was den Wert

$$\text{vol}(\widehat{\Delta}_X) = ((2X)^{1-\epsilon_1})^{n-1} (2X)^{1+(n-1)\epsilon_1} = (2X)^n$$

ergibt. Da aber G_X genau ein Streifen der konstanten Dicke $2X^{-n}$ in x_0 -Richtung um die Hyperebene H_1 ist und $\widehat{\Delta}_X \subset H = x_0^\perp$, gilt nach dem Cavalieri-Prinzip

$$\text{vol}(\widehat{B}_X) = \text{vol}(\widehat{\Delta}_X) \cdot 2X^{-n} = (2X)^n \cdot 2X^{-n} = 2^{n+1}.$$

□

Lemma 3.4. Sei ζ zu Fall 1 gehörig. Dann existiert eine Folge $(X_i)_{i \geq 1}$ mit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} X_i = \infty \quad \text{und} \quad \forall i \geq 1: \quad B_{X_i} \cap \mathbb{Z}^{n+1} = \emptyset$$

Beweis: Wir zeigen zuerst: jedes Polynom mit Koeffizientenvektor in $B_X = \Pi^{-1}(\Delta_X) \cap G_X$ erfüllt

$$H(P) \ll (1 + |\zeta| + \dots + |\zeta|^n) X^{1-\epsilon_1},$$

genauer

$$H(P) \leq \sqrt{n} (1 + |\zeta| + \dots + |\zeta|^n) X^{1-\epsilon_1}. \quad (3.69)$$

Da $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ und $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ ONB von H sind, gilt für alle $v_j, 1 \leq j \leq n$, dass ihre größte Koordinate in der ONB $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ kleiner als

$$\frac{\|v_i\|_2}{\|v_i\|_\infty} \leq \sqrt{n}$$

ist, wobei $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm und $\|\cdot\|_\infty$ die Supremumsnorm jeweils in Koordinaten $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ bezeichnet. Weil die Koordinaten jedes Elements von Δ_X in der ONB $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ nach (3.66) durch $X^{1-\epsilon_1}$ beschränkt sind, folgt die Behauptung aus der Dreiecksungleichung. Diese Erkenntnis sagt also aus, dass es im wesentlichen egal ist, in welcher ONB man arbeitet, die Exponenten in den Schranken bleiben die selben. Nach Voraussetzung hat für jedes $\epsilon > 0$ die Ungleichung (3.61) für beliebig große X keine Lösung $P \in \mathbb{Z}^{n+1}$ mit $H(P) \leq X$. Man kann also eine Folge $(X_i)_{i \geq 1}$ bilden, sodass (3.61) keine Lösung für $X = X_i$ hat. Das bedeutet aber zusammen mit (3.69), dass für jedes $\epsilon > 0$

$$|P(\zeta)| \leq X_i^{(-n-\epsilon)(1-\epsilon_1)} = X_i^{-n+n\epsilon_1+\epsilon(\epsilon_1-1)}$$

keine Lösung hat. Insbesondere hat mit $\epsilon := \frac{n\epsilon_1}{1-\epsilon_1}$ die Gleichung

$$|P(\zeta)| \leq X_i^{-n}$$

keine Lösung, also ist kein solcher Koeffizientenvektor P in G_{X_i} und damit auch nicht in $B_{X_i} = G_{X_i} \cap \Pi^{-1}(\Delta_{X_i})$. Das ist aber genau die Aussage des Lemmas. $\square$

Beide Lemmata zusammen ergeben

Korollar 3.3. Für zu Fall 1 gehörige ζ existiert eine Folge $(X_i)_{i \geq 1}$ mit $\lim_{i \rightarrow \infty} X_i = \infty$, sodass

$$\forall i \geq 1 : \quad (\widehat{B}_{X_i} \setminus B_{X_i}) \cap \mathbb{Z}^{n+1} \neq \emptyset.$$

Beweis: Die Folge $(X_i)_{i \geq 1}$ aus Lemma 3.4 erfüllt nach Lemma 3.3 die Voraussetzung. $\square$

Die Bedingungen (3.63), (3.64) sind für alle P_i nach Konstruktion trivial erfüllt, denn das gilt für jeden Punkt in $\widehat{B}_{X_i}$. Dabei gilt für (3.64) genauer für hinreichend große X die Abschätzung

$$H(P) \leq \sqrt{n}(1 + |\zeta| + \dots + |\zeta|^n) X^{1+(n-1)\epsilon_1}$$

wie man fast analog zum Beweis der Behauptung (3.69) von Lemma 3.4 sieht.

Der entscheidende Punkt (3.65), der den Beweis von Satz 3.2 vollendet, ist einfache Konsequenz folgenden Lemmas, in dem die verwendete Notation beibehalten wird:

Lemma 3.5. Sei $\epsilon_0 > \epsilon_1$ und

$$E_{X, \epsilon_0} := \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x_1 + x_2 \cdot 2\zeta + \dots + x_n \cdot n\zeta^{n-1}| \leq X^{1-\epsilon_0}\}.$$

Dann gilt:

$$\exists X_0 = X_0(\zeta, n, \epsilon_0, \epsilon_1) : \forall X \geq X_0 : E_{X, \epsilon_0} \cap (\widehat{B}_X \setminus B_X) = \emptyset.$$

Beweis: Bezeichne mit W_K die Menge aller Punkte des $\mathbb{R}^{n+1}$, deren v_n -Koordinate in der ONB $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ von H betragsmäßig höchstens K ist. Einerseits gilt nach der Wahl von v_n als Orthogonalvektor von H_2

$$E_{X, \epsilon_0} = W_{R \cdot X^{1-\epsilon_0}} \quad \text{mit} \quad R := \|(0, 1, 2\zeta, \dots, n\zeta^{n-1})\|_2^{-1},$$

andererseits gilt für jedes $Y = (Y_1, \dots, Y_n) \in (\widehat{\Delta}_X \setminus \Delta_X)$ in dieser Basis nach (3.68), dass die v_n -Koordinate $Y_n := v_n(P)$ größer als $X^{1-\epsilon_1}$ ist. Wegen $\epsilon_0 > \epsilon_1$ gilt für $X > R^{\frac{1}{\epsilon_0 - \epsilon_1}}$, dass $X^{1-\epsilon_1} > R \cdot X^{1-\epsilon_0}$, folglich $Y \notin W_{R \cdot X^{1-\epsilon_0}}$. Weil $Y \in (\widehat{\Delta}_X \setminus \Delta_X)$ beliebig war, also

$$(\widehat{\Delta}_X \setminus \Delta_X) \cap E_{X, \epsilon_0} = \emptyset$$

und damit auch

$$\Pi^{-1}\left(\left(\widehat{\Delta}_X \setminus \Delta_X\right) \cap E_{X,\epsilon_0}\right) = \emptyset,$$

und wegen $E_{X,\epsilon_0} = \Pi^{-1}(E_{X,\epsilon_0})$ gilt:

$$\begin{aligned} (\widehat{B}_X \setminus B_X) \cap E_{X,\epsilon_0} &= \Pi^{-1}\left(\widehat{\Delta}_X \setminus \Delta_X\right) \cap G_X \cap E_{X,\epsilon_0} \\ &= \Pi^{-1}\left(\widehat{\Delta}_X \setminus \Delta_X\right) \cap G_X \cap \Pi^{-1}(E_{X,\epsilon_0}) \\ &\subset \Pi^{-1}\left(\widehat{\Delta}_X \setminus \Delta_X\right) \cap \Pi^{-1}(E_{X,\epsilon_0}) \\ &= \Pi^{-1}\left(\left(\widehat{\Delta}_X \setminus \Delta_X\right) \cap E_{X,\epsilon_0}\right) = \emptyset. \end{aligned}$$

Das Lemma ist also mit der Wahl $X_0 := R^{\frac{1}{\epsilon_0 - \epsilon_1}}$ gültig. □

Man beachte, dass ein Punkt P nach Konstruktion genau dann in E_{X,ϵ_0} ist, wenn $|P'(\zeta)| \leq X^{1-\epsilon_0}$, das heißt

$$P \in E_{X,\epsilon_0} \iff |P'(\zeta)| \leq X^{1-\epsilon_0}. \quad (3.70)$$

Für jedes P_i gilt jedoch nach Definition $P_i \in \widehat{B}_{X_i} \setminus B_{X_i}$, nach Lemma 3.5 für die spezielle Wahl $X = X_i$ in E_{X,ϵ_0} also $P_i \notin E_{X_i,\epsilon_0}$ für alle hinreichend großen Indizes i , genauer für i so groß, dass $X_i \geq X_0 := R^{\frac{1}{\epsilon_0 - \epsilon_1}}$ (beachte $\lim_{i \rightarrow \infty} X_i = \infty$). Diese Überlegung kombiniert mit (3.70) zeigt die ausstängige Behauptung (3.65) und zusammen mit (3.63),(3.64) also in Folge (3.62), wie eingangs erläutert. Damit ist Satz 3.2 bewiesen. □

Das abschließende Lemma zeigt, dass im Fall $\widehat{w}_n(\zeta) = n$ im Gegensatz zum Fall $w_n(\zeta) = n$ im allgemeinen *keine Gleichheit* $\mathcal{A}_n(\zeta) = n + 1$ gilt. Aufgrund notationeller Mehrdeutigkeiten im Zusammenhang mit dem verwendeten Satz 3.1 sei dabei n_0 anstatt wie bisher n die Anzahl der Variablen, wir betrachten also die Linearformen $x_0 + \zeta x_1 + \zeta^2 x_2 + \dots + \zeta^{n_0} x_{n_0}$.

Lemma 3.6. Sei wie in Satz 3.1 bzw Korollar 3.1 $\zeta = \sum_{l \geq 1} 2^{-a_l}$ mit $\limsup_{l \rightarrow \infty} \min\{\frac{a_{l+1}}{a_l}, \frac{a_{l+2}}{a_{l+1}}\} = \infty$ gegeben. Dann gilt für alle positiven ganzen Zahlen n_0

$$\widehat{w}_{n_0}(\zeta) = n_0, \quad w_{n_0}(\zeta) = \mathcal{A}_{n_0}(\zeta) = \infty.$$

Beweis: In Satz 3.1 haben wir gesehen, dass für die Approximationskonstanten des letzten $(n_0 + 1)$ -ten sukzessiven Minimums bezüglich $\zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{n_0}$ die Identitäten

$$\omega_{n_0+1} = \frac{1}{n_0}, \quad \widehat{\omega}_{n_0+1} = 0$$

gelten. Aus (3.54) folgt damit

$$w_{n_0}(\zeta) = \infty, \quad \widehat{w}_{n_0}(\zeta) = n_0.$$

Um $\mathcal{A}_{n_0}(\zeta) = \infty$ einzusehen, betrachte zu beliebigem aber festem n die Polynome $(P_N)_{N \geq 1} \in \mathbb{Z}[T]$ gegeben durch $P_N(T) = x^{1,n} T^n - x^{1,n} S_N^k$ wobei S_N die Partialsummen der binomischen Entwicklung von $\sum_{l=1}^N 2^{-a_l}$ bezeichnet und auch die Notation $x^{1,n}$ aus Satz 3.1 entnommen ist (beachte nochmals n in $x^{1,n}$ ist *nicht die Variablenanzahl* welche mit n_0 bezeichnet ist). Für diese Polynome gilt gemäß dem Beweis von Satz 3.1 für alle N die Beziehung $P_N(\zeta) = x^{1,n} \zeta^n - x^{1,n} S_N^k = \{\zeta^n x^{1,n}\}$.

Wie der Beweis von Satz 3.1 gezeigt hat, induzieren genauer gerade Approximationsvektoren mit 1. Komponente $x^{1,n}$ den Wert $\omega = \infty$, was insbesondere die Asymptotik

$\lim_{N \rightarrow \infty} -\log_{H(P_N)}(P_N(\zeta)) = \infty$ impliziert aufgrund der speziellen Form von P_N . Für die Ableitungen an der Stelle ζ gilt andererseits $P'_N(\zeta) = nx^{1,n}\zeta^{n-1} \gg x^{1,n} = X_{1,n} \sim H(P_N)$ (wieder mit $X^{1,n}$ wie in Satz 3.1).

Aus den beiden Beziehungen

$$P'_N(\zeta) \gg X_{1,n} = H(P_N), \quad \lim_{N \rightarrow \infty} -\log_{H(P_N)}(P_N(\zeta)) = \infty$$

zusammen folgt wegen (3.58) die Behauptung. $\square$

Fall 2: $\hat{w}_n(\zeta) > n$

Der Zusammenhang zwischen ϵ und der Schranke Der wesentliche Schritt des Beweises von Satz 3.2 gehörte $\zeta \in \mathbb{R}$ war zu zeigen, dass für beliebig große X ein ganzzahliger Punkt in $\hat{B}_X \setminus B_X$ existiert, also

$$(\hat{B}_X \setminus B_X) \cap \mathbb{Z}^{n+1} \neq \emptyset.$$

Um das zu zeigen, wurde in Lemma 3.4 wesentlich Gebrauch von der Voraussetzung an ζ aus Fall 1 gemacht. Jedes solche X liefert so ein passendes P und in Folge von (3.57) eine gute Approximation α . In diesem Abschnitt wollen wir bei fester Dimension n den ebenfalls eingangs erwähnten Zusammenhang zwischen $\mathcal{A}_n(\zeta)$ und dem größtmöglichen ϵ , das man zu festem ζ in (3.61) zu jedem Parameter H wählen kann, herstellen.

Dieses zu vorgegebenen n, ζ größtmögliche ϵ sei im folgenden mit E bezeichnet, das heißt

$$E = E(n, \zeta) := \hat{w}_n(\zeta) - n.$$

A priori könnte E den Wert ∞ annehmen. Weil (3.56) stets eine Lösung besitzt, ist $E \geq 0$. Der Fall $E > 0$ ist genau Fall 2. In Fall 2 gilt also $E \in (0, \infty]$.

Dennoch wollen wir für die folgenden Überlegungen $E = 0$ zulassen (was genau Fall 1 entspricht), da es nicht weiter störend ist und sich im wesentlichen mit dem Beweis aus Fall 1 deckt. Wir werden den Fall $E = \infty$ separat behandeln. In diesem Fall wird die Schranke $\mathcal{A}_n(\zeta) \geq n + 1$ in (3.55) nachgewiesen werden. Tatsächlich wird diese für $E \geq n^2 - 2$ nachgewiesen werden- de facto sogar für eine etwas schwächere Voraussetzung. Man könnte den unten folgenden $E = \infty$ -Fall auch als $E \geq n^2 - 2$ -Fall bezeichnen.

Zuerst aber wenden wir uns dem Fall $0 < E < \infty$ zu, für den man mit einer ähnlichen Vorgangsweise wie in Fall 1 eine Schranke herleiten kann, die allerdings für $E > 0$ schlechter als $n + 1$ ist und mit wachsendem ϵ zunehmend schlechter wird.

$E < \infty$ Mit E sei hier wieder durchwegs das größte in (3.61) wählbare $\epsilon \in [0, \infty)$ bezeichnet.

Definition 3.4. Es bezeichne für $E \in [0, \infty)$ die Größe $\mathcal{A}_{n,E}$ die beste gleichmäßige Schranke für $\mathcal{A}_n(\zeta)$ unter allen ζ mit $\hat{w}_n(\zeta) \geq n + E$, also

$$\mathcal{A}_{n,E} := \inf\{\mathcal{A}_n(\zeta) : \epsilon(\zeta) \geq E\} = \inf\{\mathcal{A}_n(\zeta) : \hat{w}_n(\zeta) \geq n + E\}.$$

Unser Hauptziel in diesem Abschnitt ist es mit ähnlichen Mitteln wie im vorangehenden Abschnitt den folgenden Satz zu beweisen. Es sei auch auf die dem Satz nachfolgende Bemerkung hingewiesen, die noch nähere Einblicke liefern wird.

Satz 3.3. Es gilt

$$\mathcal{A}_{n,E} \geq \frac{n + E}{1 + E} + 1 \geq \frac{\hat{w}_n(\zeta)}{\hat{w}_n(\zeta) + 1 - n} + 1.$$

Dabei ist die Ungleichung ganz rechts so zu verstehen, dass wir nur ζ mit $\widehat{w}_n(\zeta) \geq n+E$ zulassen.

Beweis: Sei analog zur Einführung der Bereich D' definiert durch

$$\begin{aligned} |x_1| &\leq X \\ |x_2| &\leq X \\ &\vdots \\ |x_n| &\leq X \\ |P(\zeta)| = |x_0 + \zeta x_1 + \cdots + \zeta^n x_n| &\leq X^{-n-E}. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung hat dieses System stets eine Lösung $P \in \mathbb{Z}^{n+1}$, denn würde man die zusätzliche Bedingung $|x_0| \leq X$ fordern, hätte man genau

$$\begin{aligned} H(P) &\leq X \\ |P(\zeta)| &\leq X^{-n-E}, \end{aligned}$$

was nach Voraussetzung eine Lösung besitzt (genauer: das hat System für alle $\delta > 0$ eine Lösung wenn man den Exponenten $-n-E$ durch $-n-E+\delta$ ersetzt, vergleiche die Argumentation von Fall 1). Ohne die Zusatzbedingung gibt es also a fortiori auch eine Lösung. Ebenso sei in Anlehnung an Fall 1

$$G'_X := \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x_0 + \zeta x_1 + \cdots + \zeta^n x_n| \leq X^{-n-E}\}$$

und $H, H_1, H_2, (v_1, v_2, \dots, v_n), \Delta_X$ exakt so wie aus Fall 1 und mit

$$\widehat{\Delta}'_X := \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n : |\alpha_j| \leq X^{1-\epsilon_1}, 1 \leq j \leq n-1, |\alpha_n| \leq X^{1+E+(n-1)\epsilon_1}\},$$

wobei $\epsilon_1 > 0$ ein zunächst frei wählbarer Parameter ist den wir später gegen Null konvergieren lassen, seien wieder

$$\begin{aligned} B'_X &:= G'_X \cap \Pi^{-1}(\Delta_X) \\ \widehat{B}'_X &:= G'_X \cap \Pi^{-1}(\widehat{\Delta}'_X). \end{aligned}$$

Wir zeigen nun das analoge Resultat zu Fall 1, nämlich dass es für beliebig große X einen Punkt in $(\widehat{B}'_X \setminus B'_X) \cap \mathbb{Z}^{n+1}$ gibt. Dieser Punkt P hat dann wieder kleines $|P(\zeta)|$ und eine große v_n -Koordinate- ist also weit von der $P'(\zeta) = 0$ Hyperebene entfernt und hat damit großes $|P'(\zeta)|$. Das Problem ist, dass die Höhe $H(P)$ nur noch mit der X -Potenz $1+E+(n-1)\epsilon_1$ nach oben abschätzen lässt, und dieses zusätzliche E verschlechtert den Wert $\kappa(\epsilon_0, \epsilon_1)$ von Fall 1, sodass $n+1$ auf diesem Wege nicht direkt erreicht werden kann. Die Schranken aus dem Gitterpunktsatz von Minkowski sind dafür nicht ausreichend.

Lemma 3.7.

$$\forall X \in \mathbb{N}: \quad \mathbb{Z}^{n+1} \cap \widehat{B}'_X \neq \emptyset.$$

Beweis: Analog zum Beweis von Lemma 3.3 rechnet man nach, dass $\text{vol}(\widehat{B}'_X) = 2^{n+1}$, sodass man den Gitterpunktsatz von Minkowski daher anwenden kann. $\square$

Lemma 3.8. Es existiert eine Folge $(X_i)_{i \geq 1}$ mit $\lim_{i \rightarrow \infty} X_i = \infty$ und

$$\forall i \geq 1: \quad B'_{X_i} \cap \mathbb{Z}^{n+1} = \emptyset.$$

Beweis: Dies folgt im wesentlichen wie Lemma 3.4 unter Berücksichtigung der Maximalität von $\epsilon = E$ in (3.61).

Die Maximalität von E besagt gerade, dass für $\delta > 0$

$$|P(\zeta)| \leq H^{-n-E-\delta} \quad (3.71)$$

für unendlich viele $X = H$ keine Lösung P mit $H(P) \leq H$ besitzt. Es gibt also zu festem $\delta > 0$ eine Folge $(X_i)_{i \geq 1}$, sodass (3.71) mit $H = X_i$ keine Lösung P mit $H(P) \leq X_i$ besitzt. Alle P im Bereich B'_X erfüllen aber wegen $B'_X \subset B_X$ und Ungleichung (3.69)

$$H(P) \ll X^{1-\epsilon_1}.$$

Nach (3.71) hat also

$$|P(\zeta)| \leq X^{(-n-E-\delta)(1-\epsilon_1)} \quad (3.72)$$

für $X = X_i$ keine Lösung. Wählt man $\delta < \delta_0 := (n + E) \cdot \frac{\epsilon_1}{1-\epsilon_1}$, so hat mit (3.72) auch die mit dieser Wahl wegen $(-n - E - \delta)(1 - \epsilon_1) > -n - E$ für $\delta < \delta_0$ stärkere Ungleichung (3.61) für $X = X_i$ a fortiori keine Lösung P mit $H(P) \leq X_i$ in $\mathbb{Z}^{n+1}$. Das besagt aber gerade, dass in den Bereichen B'_{X_i} kein ganzzahliger Punkt liegt, also die Aussage des Lemmas. $\square$

Korollar 3.4. Es existiert eine Folge $(X_i)_{i \geq 1}$ mit $\lim_{i \rightarrow \infty} X_i = \infty$, sodass

$$\forall i \geq 1 : \quad (\widehat{B}'_{X_i} \setminus B'_{X_i}) \cap \mathbb{Z}^{n+1} \neq \emptyset.$$

Beweis: Die Folge $(X_i)_{i \geq 1}$ aus Lemma 3.8 erfüllt nach Lemma 3.7 die Voraussetzung. $\square$

Die (oder besser eine) zu X_i gehörige Folge, die Korollar 3.4 erfüllt, sei wieder mit P_i bezeichnet. Um nun die gewünschte Abschätzung in Abhängigkeit von E zu erhalten, bemerken wir, dass für alle Punkte in $\widehat{B}'_{X_i} \setminus B'_{X_i}$ und damit insbesondere für die P_i gilt:

$$|P_i(\zeta)| \leq X_i^{-n-E} \quad (3.73)$$

$$X_i^{1-\epsilon_1} \ll H(P_i) \ll X_i^{1+E+(n-1)\epsilon_1} \quad (3.74)$$

$$H(P_i) \ll |P'_i(\zeta)| \ll H(P_i) \quad (3.75)$$

mit nur von n, ζ abhängigen Konstanten in (3.74), (3.75), wobei die Konstante in (3.75) wieder durch Umrechnen der ONB $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ in die ONB $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ von H entsteht. Im folgenden sind ebenfalls alle $\ll$ so zu verstehen, dass die Konstanten von n, ζ abhängen.

Dabei gilt (3.73) einfach wegen $P_i \in G'_{X_i}$. Gleichung (3.74) gilt weil nach Konstruktion v_n die betragsgrößte Koordinate von $v_1, v_2, \dots, v_n$ für jeden Punkt in $\widehat{B}'_{X_i} \setminus B'_{X_i}$ ist, folglich

$$H(P_i) \ll |v_n(P_i)| \ll H(P_i) \quad (3.76)$$

und die Grenzen für $|v_n(P)|$ für ein P in $\widehat{B}'_{X_i} \setminus B'_{X_i}$ sind nach Definition von $\widehat{\Delta}'_{X_i}$ genau die von (3.74).

Schließlich gilt (3.75), weil sich $v_n(P)$ sich von $P'(\zeta)$ nur durch eine multiplikative Konstante R unterscheidet, wie bereits im Beweis von Lemma 3.5 ausgenutzt. Zusammen mit (3.76) folgt also (3.75).

Abhängig vom genauen Exponenten von $H(P_i)$ in (3.74) erhält man nun Schranken für μ in (3.55). Gilt $H(P_i) = X_i^{\gamma_i}$, wobei $1 - \epsilon_1 \leq \gamma_i \leq 1 + E + (n - 1)\epsilon_1$ nach (3.74), so gibt es nach (3.57) mit den Schranken für $|P_i(\zeta)|$ aus (3.73) respektive $|P'_i(\zeta)|$ aus (3.75) eine Nullstelle α von P_i mit

$$|\zeta - \alpha| \ll X_i^{\kappa_i}, \quad (3.77)$$

wobei $\kappa_i := \frac{n-E-\gamma_i}{\gamma_i}$. Diese Gleichungen gelten dabei für alle $\epsilon_1 > 0$. Lässt man $\epsilon_1 \rightarrow 0$ so erhält man weil κ_i offenbar mit steigendem γ_i fällt, im schlechtest möglichen Fall $\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i = \limsup_{i \geq 1} \gamma_i = 1 + E$, dass es für alle $E_0 < E$ eine Lösung zu

$$|\zeta - \alpha| \ll X_i^{\frac{-n-E-(1+E_0)}{1+E_0}}$$

für hinreichend große i gibt. Ist $\liminf_{i \geq 1} \gamma_i$ sogar echt kleiner als $1 + E$, so kann man diese Schranke entsprechend verbessern, siehe (3.79) unten.

Der Wert $\mathcal{A}_{n,E} := \inf\{\mathcal{A}_n(\zeta) : \epsilon(\zeta) \geq E\} = \inf\{\mathcal{A}_n(\zeta) : \hat{w}_n(\zeta) \geq n+E\}$ mit $\epsilon(\zeta)$ dem größtmöglichen gleichmäßigen ϵ aus (3.61), lässt sich also nach unten in Abhängigkeit von E durch

$$\mathcal{A}_{n,E} \geq \sigma_{n,E} := \frac{n+E+(1+E)}{1+E} = \frac{n+E}{1+E} + 1 \geq \frac{\hat{w}_n(\zeta)}{\hat{w}_n(\zeta) + 1 - n} + 1 \quad (3.78)$$

abschätzen (wobei die Ungleichung ganz rechts so zu verstehen ist, dass wir nur ζ mit $\hat{w}_n(\zeta) \geq n + E$ zulassen). Das ist aber gerade die Aussage der Satzes. $\square$

Man verifiziert also leicht im Fall $E = 0$ - und nur diesem- das Ergebnis (3.62). Für $E \rightarrow \infty$ gilt aber $\lim_{E \rightarrow \infty} \sigma_{n,E} = 1$. Das ist natürlich ein unbrauchbare Schranke für $\mathcal{A}_n(\zeta)$.

Bemerkung: Der Beweis von Satz 3.3 zeigt genuer: gilt für die Folge P_i jeweils $H(P_i) = X_i^{\gamma_i}$, $1 - \epsilon_1 \leq \gamma_i \leq 1 + E + (n-1)\epsilon_1$, so lässt sich die Schranke für $\mathcal{A}_{n,E}$ verbessern zu

$$\mathcal{A}_{n,E} \geq \sigma_{n,E} := \liminf_{i \geq 1} \frac{n+E+\gamma_i}{\gamma_i}. \quad (3.79)$$

Da die Schranke $\kappa := \liminf_{i \geq 1} \kappa_i$ für wachsendes

$$\Gamma := \liminf_i \gamma_i$$

schlechter (kleiner) wird, ist (3.79) äquivalent zu

$$\mathcal{A}_{n,E} \geq \sigma_{n,E} = \frac{n+E+\Gamma}{\Gamma} \geq \frac{\hat{w}_n(\zeta) + \Gamma}{\Gamma} + 1 \quad (3.80)$$

(Wobei die Ungleichung rechts wieder so zu verstehen ist, dass wir nur ζ mit $\hat{w}_n(\zeta) \geq n + E$ zulassen).

Diese Konstruktion lässt sich erneut für jedes $\epsilon_1 > 0$ durchführen. Lassen wir ϵ_1 gegen 0 streben, so gelten die Abschätzungen $1 \leq \Gamma \leq 1 + E$.

Insbesondere sieht man aus (3.80), dass man im Fall

$$\Gamma = \Gamma(E) \leq 1 + \frac{E}{n} \quad (3.81)$$

die gewünschte Schranke $\mathcal{A}_{n,E} \geq n + 1$ erreicht. Falls insbesondere $\Gamma = 1$ für jedes zu Fall 2 gehörige ζ gelten würde, so wäre folglich $\mathcal{A}_n(\zeta) \geq n + 1$ für alle $\zeta \in \mathbb{R}$ bewiesen. Nimmt man die Notation aus einem späteren Kapitel vorweg, so sieht man allgemeiner mit dieser Überlegung:

$$w_n^*(\zeta) \geq \frac{\hat{w}_n(\zeta)}{\Gamma}$$

Man sieht die ausständige Behauptung (3.80) und in Folge das äquivalente (3.79) dabei einfach ein, indem man eine Teilfolge $(Y_j)_{j \geq 1}$ und zugehörig $(P_j)_{j \geq 1}, (\gamma_j)_{j \geq 1}$ von $(X_i)_{i \geq 1}, (P_i)_{i \geq 1}, (\gamma_i)_{i \geq 1}$ mit $\lim_{j \rightarrow \infty} \gamma_j = \Gamma$ wählt, nach der Definition von Γ als $\liminf$ ist dies sicher möglich, und für die zugehörige Folge $(P_j)_{j \geq 1}$ wieder wie oben auf die Existenz einer Folge von α -Werten mit

(3.77) schließt. Wegen $\lim_{j \rightarrow \infty} \gamma_j = \Gamma$ folgt die Aussage.

Unabhängigkeit von der konkreten Folge X_i Momentan hängt Γ noch von der speziell gewählten Folge $(X_i)_{i \geq 1}$ ab. Da man jedoch bei der Wahl der Folge viele Freiheiten hat, kann man die Bedingungen so formulieren, dass die willkürliche Folge $(X_i)_{i \geq 1}$ nicht auftaucht. Betrachtet man die Menge aller $P \in \mathbb{Z}^{n+1}$, für die es ein X gibt mit $P \in \hat{B}'_X \setminus B'_X$, wobei man jedem solchen P das größte solche X zuordnet, ordnet die entstehende Folge P_i nach Höhe und definiert mit dem zugeordneten X_i wieder $H(P_i) = X_i^{\gamma_i}$, so ist $\Gamma = \liminf_{i \geq 1} \gamma_i$ notationstechnisch unabhängig von $(X_i)_{i \geq 1}$ gegeben als das Infimum aller Zahlen $\eta \geq 1$, für die das System

$$\begin{aligned} |v_1(P)| &\leq X \\ |v_2(P)| &\leq X \\ &\vdots \\ |v_{n-1}(P)| &\leq X \\ |P(\zeta)| = |x_0 + \zeta x_1 + \cdots \zeta^n x_n| &\leq X^{-n-E} \\ |P'(\zeta)| &\geq X^\eta \end{aligned}$$

für beliebig große X eine Lösung $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ hat. Dabei geht wie üblich $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ durch eine orthogonale Transformation aus $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ hervor wobei $v_i(P)$ die v_i -Koordinate des Punktes $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ bezeichnet. In der letzten Gleichung konnte $H(P)$ aus der Definition der γ_i durch $|P'(\zeta)|$ ersetzt werden wegen $H(P) = |v_n(P)| = |P'(\zeta)|R$ mit R aus Lemma 3.5. Es sei an dieser Stelle nochmals erwähnt, dass im Falle (3.81) die Schranke $\mathcal{A}_n(\zeta) \geq n+1$ erreicht wird.

Umschreiben der Ergebnisse in klassische Notation: $w_n^*(\zeta)$ Wir gehen vom Ergebnis (3.78) des letzten Abschnitts aus, welches in Abhängigkeit von E eine Schranke für $\mathcal{A}_n(\zeta)$ liefert. Insbesondere wurde für $E = 0$ in (3.78) die gewünschte Schranke $\mathcal{A}_n(\zeta) \geq n+1$ erreicht. Dabei wurde ein Bereich des $\mathbb{R}^{n+1}$ betrachtet, in dem die Koordinaten $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ der ONB $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ durch eine Konstante $X^{1-\epsilon_1}$ beschränkt waren, und untersucht, für welche ganzzahligen v_n -Koordinaten es eine zugehörige ganzzahlige x_0 -Koordinate gibt, sodass $|P(\zeta)| \leq X^{-n}$ eine Lösung hat. Wir wollen nun die in dieser praktikablen aber etwas unschönen Notation gewonnenen Ergebnisse noch etwas klarer formulieren, und verwenden dazu eine an Sprindzuks Notation angelehnte Bezeichnung. Es gilt für $w_n(\zeta) := w_n(\zeta)$ mit $\zeta := (\zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^n)$ definiert wie im Abschnitt 3.2 die Identität

$$w_n(\zeta) = \limsup_{H \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{w_n(H, \zeta)}}{\log H},$$

wobei

$$w_n(H, \zeta) := \min_{P: H(P) \leq H} |P(\zeta)|.$$

Man erkennt, dass $w_n(\zeta)$ genau dem am Beginn des Linearformenskapitels betrachteten Ausdruck $w_n(\zeta)$ mit $\zeta = (\zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^n)$ entspricht. Die Tatsache, dass

$$\begin{array}{rcl}
|x_1| & \leq & X \\
|x_2| & \leq & X \\
& \vdots & \\
|x_n| & \leq & X \\
|P(\zeta)| = |x_0 + \zeta x_1 + \cdots + \zeta^n x_n| & \leq & X^{-n}
\end{array}$$

stets lösbar ist (Minkowskis 1. Gitterpunktsatz) übersetzt sich in dieser Notation insbesondere in $w_n(\zeta) \geq n$, denn das X entspricht genau dem H in der neuen Notation. Der Ausdruck w_n wird beispielsweise bei Sprindžuk verwendet um die Schranke $\mathcal{A}_n(\zeta) = n + 1$ für alle ζ außerhalb der Ausnahmenullmenge Λ zu beweisen.

Unsere stärkere Voraussetzung für Fall 2 veranlasst jedoch das Hauptaugenmerk auf den Ausdruck

$$\widehat{w}_n(\zeta) := \liminf_{H \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{w_n(H, \zeta)}}{\log H},$$

mit dem $\liminf$ anstelle des $\limsup$ zu legen. Dies entspricht genau dem Ausdruck $\widehat{w}_n(\zeta)$ aus der Einleitung des Abschnitts 3.2 mit $\zeta := (\zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^n)$.

Es hat sich eine alternative klassische Notation im Kontext zu $\mathcal{A}_n(\zeta)$ eingebürgert, welcher wir ab diesem Zeitpunkt hauptsächlich folgen werden.

Definition 3.5. Es bezeichne $w_n^*(\zeta)$ den Wert $\mathcal{A}_n(\zeta) - 1$ mit $\mathcal{A}_n(\zeta)$ definiert wie in Definition 3.3 im Unterkapitel 3.2.1.

Also haben wir im letzten Abschnitt in Satz 3.3 das nachfolgende Lemma gezeigt, welches die im Titel des aktuellen Abschnitts 3.2.2 genannte Abschätzung von Laurent und Bugeaud ist:

Lemma 3.9. Sei n eine positive ganze Zahl und $\zeta \in \mathbb{R}$ nicht algebraisch vom Grad $\leq n$. Gilt $\widehat{w}_n(\zeta) < \infty$, so gilt die folgende Beziehung zwischen den klassischen Approximationsgrößen $w_n^*(\zeta), \widehat{w}_n(\zeta)$:

$$w_n^*(\zeta) \geq \frac{\widehat{w}_n(\zeta)}{\widehat{w}_n(\zeta) + 1 - n}. \quad (3.82)$$

Insbesondere ist eine hinreichende Bedingung für die Richtigkeit der Schranke $\mathcal{A}_n(\zeta) \geq n + 1$ für alle $\zeta \in \mathbb{R}$ in dieser Notation gegeben durch:

Korollar 3.5. Falls $\widehat{w}_n(\zeta) = n$ für alle $\zeta \in \mathbb{R}$ die nicht algebraisch vom Grad $\leq n$ sind, so folgt $w_n^*(\zeta) \geq n$ für alle solchen $\zeta \in \mathbb{R}$.

Die Annahme im Korollar ist gleichbedeutend mit $E = 0$ für alle $\zeta \in \mathbb{R}$ die nicht algebraisch vom Grad $\leq n$ sind.

Bemerkungen: 1) Für algebraische Zahlen ζ vom Grad $\leq n$ ist $\widehat{w}_n(\zeta) = E = \infty$, weshalb man mit dieser Methode keine Aussagen treffen kann.

2) Man hätte (3.82) auch ohne (3.80) direkt aus (3.78) folgern können, hier ist jedoch etwas mehr Information enthalten.

3) Für den Wert $w_n(\zeta)$ wissen wir aus Satz 3.1, dass $w_n(\zeta) = \infty$ möglich ist. Resultate zu $w_n(\zeta)$ und $w_n^*(\zeta)$ sind von Interesse. Es sei in diesem Zusammenhang kurz auf die Mahlersche Klasseneinteilung der reellen Zahlen und ein paar Resultate eingegangen.

Mahler unterteilt alle transzendenten reellen Zahlen in die disjunkten Klassen der U -Zahlen, S -Zahlen und T -Zahlen. Dabei sind U -Zahlen ζ gegeben als die Menge aller Zahlen mit

$$\exists n : w_n(\zeta) = \infty$$

Diejenigen transzendenten reellen Zahlen ζ mit

$$\exists n : w_n^*(\zeta) = \infty$$

heißen U^* -Zahlen. Aus diesen Definitionen und jener der Größen $w_n(\zeta), w_n^*(\zeta)$ folgt unmittelbar, dass sich die Gültigkeit der Kriterien für U -Zahlen für ein $n = n_0$ auf alle kleineren $1 \leq n \leq n_0$ überträgt. Das kleinste wählbare $n \in \mathbb{N}$ heißt der *Index der U -Zahl* respektive U^* -Zahl. LeVeque konstruiert in [8] in Theorem 5 Seite 227, transzendente U -Zahlen zu beliebigem Index n .

S -Zahlen sind diejenigen für die der Wert $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega_n(\zeta)}{n} < \infty$ gilt, analog sind S^* -Zahlen diejenigen für die $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega_n^*(\zeta)}{n} < \infty$ gilt.

Folglich sind T -Zahlen diejenigen, für die $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega_n(\zeta)}{n} = \infty$ ohne dass es einen endlichen Index mit $w_n(\zeta) = \infty$ gibt und analog für T^* -Zahlen.

Da die abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder eine Nullmenge ist (und der abzählbare Durchschnitt komplementärer Mengen folglich ein Komplement vom Maß 0 liefert), zeigt Sprindžuks Resultat insbesondere, dass Lebesgue-fast alle Zahlen S -Zahlen sind und es sich folglich bei den U -Zahlen und T -Zahlen um Lebesgue-Nullmengen handelt. Beachte in diesem Zusammenhang, dass die mehrdimensionale Version des Satzes von Khinchin und (3.54) aufgrund der speziellen Situation $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k) = (\zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^k)$ nicht ausreichend ist, um entsprechende Aussagen aus dem dualen Problem zu übertragen.

Koksma führt in [6] Seite 179 auch den Begriff des *Index einer S -Zahl* ein als das Infimum aller $\gamma > 0$ sodass für alle $n \geq 1, H \geq 1$ die Ungleichung

$$\omega_n(H, \zeta) \geq \Gamma_n H^{-\gamma \cdot n}$$

für nur von ζ, n abhängigen Konstanten Γ_n gilt. Er zeigt weiter in [6] in Satz 9 Seite 186, dass jede S -Zahl eine S^* -Zahl mit mindestens um 2 verkleinertem sowie maximal gleichem $*$ -Index ist.

4) Die Voraussetzung von Korollar 3.5 ist für $n = 2$ nicht erfüllt (die extremal numbers sind Gegenbeispiele), sodass Korollar 3.5 frühestens bei $n = 3$ angewandt werden kann. Beachte, dass wir für das duale Problem etwa in Satz 1.12 viele Freiheiten für Konstruktionen von $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ mit $\omega_{k+1} < \frac{1}{k}$ in beliebiger Dimension k gegeben haben, was wegen (3.54) gleichbedeutend mit $\hat{w}_n(\zeta) > n$ ist ($\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k)$ und beachte $n = k$), jedoch haben wir hier die zusätzliche Einschränkung $\zeta_i = \zeta^i$, wofür wir keine Konstruktion von $\omega_{k+1} < \frac{1}{k}$ angegeben haben.

$E = \infty$ Hier wird allgemeiner gezeigt, dass für hinreichend großes E , das nur von n abhängt, für alle ζ mit $E = E(\zeta)$ die Beziehung $\mathcal{A}_n(\zeta) \geq n + 1$ gilt. Genauer wird gezeigt, dass im Falle $\mathcal{A}_n(\zeta) < n + 1$ gelten muss

$$w_n(\zeta) \leq n^2 - 2.$$

Damit auch $\hat{w}_n(\zeta) \leq n^2 - 2$ bzw $E \leq n^2 - n - 2$. Insbesondere ist die Schranke $\mathcal{A}_n(\zeta) \geq n + 1$ im Fall $E = \infty$ damit nachgewiesen.

Es sei angemerkt, dass dieser Unterabschnitt " $E = \infty$ " in einem gewissen Sinn nur der Vollständigkeit halber angeführt ist, da wir für die Verbesserung der Schranke $w_n^*(\zeta)$ im darauffolgenden Unterabschnitt ein bekanntes Resultat von Wirsing verwenden werden (auf dem auch die bislang beste gleichmäßige untere Schranke von $w_n^*(\zeta)$ beruht, welche wir verbessern), welches stärker als die in diesem Unterabschnitt angeführten Abschätzungen ist. Die kommenden Berechnungen

sind jedoch elementarer als Wirtings Arbeit und reichen aus, um die Zielsetzung $\mathcal{A}_n(\zeta) \geq n+1$ im Falle $E = \infty$ herzuleiten.

Wir wollen also den Wert $w_n(\zeta)$ nach oben abschätzen. Es gebe also zu festem $K \in \mathbb{N}$ für alle $\delta > 0$ unendlich viele Lösungen P der Ungleichung

$$|P(\zeta)| \leq H(P)^{-K+\delta}. \quad (3.83)$$

Beachte, dass das Supremum aller wählbaren K genau $w_n(\zeta)$ entspricht. Müsste (3.83) für alle hinreichend großen $H(P)$ anstatt für unendlich viele gelten, was dann $\widehat{w}_n(\zeta)$ statt $w_n(\zeta)$ entspräche, so entspräche K dem Wert $n+E$. Wir werden zunächst voraussetzen, dass es unendlich viele Polynome gibt, die der Bedingung (3.83) genügen, mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass x_n die betragsgrößte Koordinate ist, also

$$H(P) = |x_n|. \quad (3.84)$$

Danach werden wir diese Behauptung mithilfe eines Resultats in Sprindzucs Arbeit rechtfertigen. Dabei faktorisieren wir die reellen Zahlen nach der Äquivalenzrelation

$$\zeta \sim \zeta' \iff \exists A, B, C, D \in \mathbb{Z} : \zeta' = \frac{A\zeta + B}{C\zeta + D} \quad (3.85)$$

und verwenden Sprindzucs Resultat, dass es in jeder Äquivalenzklasse einen Repräsentanten gibt, der eine Polynomfolge mit (3.83) und (3.84) zulässt, und dann zeigen wir im 2. Schritt die Invarianz von $\mathcal{A}_n(\zeta)$ innerhalb einer Klasse der Äquivalenzrelation.

Sei nun also (3.84) erfüllt. Dann folgt offenbar

$$H(P) \leq H(P^{(k)}) = \frac{n!}{(n-k)!} |x_n| \leq n! H(P), \quad 0 \leq k \leq n-1, \quad (3.86)$$

das heißt alle Ableitungen $H(P^{(k)})$ sind im wesentlichen von der selben Größenordnung $H(P)$. Gilt für solche P

$$|P'(\zeta)| \geq H(P)^{-K+\delta+n+1},$$

so hat (3.55) unter der Voraussetzung $\mathcal{A}_n(\zeta) \geq n+1$ nach (3.57) für jedes solche P eine Lösung α unter den Nullstellen von P .

Sollte also $\mathcal{A}_n(\zeta) < n+1$ gelten, muss folglich

$$|P'(\zeta)| \leq H(P)^{-K+\delta+(n+1)}$$

und wegen (3.86)

$$|P'(\zeta)| \ll H(P)^{-K+\delta+(n+1)}$$

gelten. Da man P' ebenfalls als Polynom vom Grad n mit führendem Koeffizienten 0 auffassen kann, kann man gleiches Argument nun auf P' und den neuen Exponenten $(-K+n+1)$ statt $(-K)$ anwenden und sieht zuerst

$$|P''(\zeta)| \ll H(P)^{-K+\delta+2(n+1)}$$

und weiter wegen (3.86)

$$|P''(\zeta)| \ll H(P)^{-K+\delta+2(n+1)}.$$

Indem man in diesem Sinne weitermacht erhält man also

$$|P^{(k)}(\zeta)| \ll H(P)^{-K+\delta+k(n+1)}, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Setzt man $k = n-1$, bekommt man die Beziehung

$$n!|x_n| \ll H(P)^{-K+\delta+n^2-1}. \quad (3.87)$$

Aus (3.84) folgt aber $n!|x_n| \geq H(P)$, also muss der Exponent von $H(P)$ in (3.87) mindestens 1 sein. Daraus folgt mit $\delta \rightarrow 0$

$$K \leq n^2 - 2.$$

Das bedeutet also

$$w_n(\zeta) \leq n^2 - 2,$$

insbesondere $E \leq n^2 - n + 2$. Für größere Werte von E ist $\mathcal{A}_n(\zeta) \geq n+1$ also- vorerst noch unter der Zusatzvoraussetzung- bewiesen.

Bemerkung: Man kann obiger Konstruktion genauer entnehmen, dass im Fall $\mathcal{A}_n(\zeta) < n+1$ gelten muss:

$$w_k(\zeta) - w_{k-1}(\zeta) \leq n+1, \quad 2 \leq k \leq n.$$

Die Zusatzvoraussetzung (3.84) stellt keine Einschränkung der Allgemeinheit dar, wie nun ausgeführt wird. Sprindžuk zeigt, dass es zu jedem $\zeta \in \mathbb{R}$ ein ζ' gibt, das durch eine Möbiustransformation mit ganzzahligen Koeffizienten aus ζ hervorgeht, also gemäß (3.85), und es somit eine Polynomfolge $(P_i)_{i \geq 1}$ mit (3.84) für alle P_i gibt, sodass $w_n(\zeta) = w_n(\zeta')$. Für diese ζ' lässt sich obige Konstruktion also durchführen und man erhält die Schranke $\mathcal{A}_n(\zeta') \geq n+1$. Sei nun zu festem ζ ein solches ζ' fest gewählt. Es gibt also zu jedem $\delta > 0$ eine Folge von α -Werten $(\alpha_i)_{i \geq 1}$ mit

$$|\zeta' - \alpha_i| \leq H(\alpha_i)^{-n-1+\delta}. \quad (3.88)$$

Die Menge aller durch eine Möbiustransformation mit ganzzahligen Koeffizienten ineinander überführbaren Zahlen induzieren eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$. Daher kann man umgekehrt auch ζ aus ζ' durch eine solche gewinnen und

$$\zeta = \frac{E\zeta' + F}{G\zeta' + H}, \quad E, F, G, H \in \mathbb{Z}$$

schreiben. Betrachtet man die Folge $(\beta_i)_{i \geq 1}$ definiert durch

$$\beta_i = \frac{E\alpha_i + F}{G\alpha_i + H},$$

so gilt einerseits

$$\mathbb{Q}(\alpha_i) = \mathbb{Q}(\beta_i) \implies [\mathbb{Q}(\alpha_i) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\beta_i) : \mathbb{Q}] = n$$

und die Zahlen β_i haben also weiterhin den passenden Grad n , andererseits

$$\begin{aligned} |\zeta - \beta_i| &= \left| \frac{E\zeta' + F}{G\zeta' + H} - \frac{E\alpha_i + F}{G\alpha_i + H} \right| \\ &= \left| \frac{(EH - FG)(\zeta' - \alpha_i)}{(F\zeta' + G)(F\alpha_i + G)} \right|. \end{aligned}$$

Der Nenner des letzten Ausdrucks lässt sich wegen $F\zeta' + G \neq 0$ und $\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_i = \zeta'$ für großes i durch die feste Konstante $(|F\zeta' + G|/2)^2$ nach unten abschätzen, sodass man also mit (3.88)

$$|\zeta - \beta_i| \ll H(\alpha_i)^{-n-1+\delta} \quad (3.89)$$

mit einer von i unabhängigen, nur von ζ, E, F, G, H abhängigen Konstante folgert. Wir wären fertig, wenn wir zeigen könnten, dass

$$H(\beta_i) \ll H(\alpha_i) \ll H(\beta_i) \quad (3.90)$$

mit von ζ, n abhängigen Konstanten gilt. Dann könnten wir nämlich $H(\alpha_i)$ durch $H(\beta_i)$ ersetzen in (3.89). Um dies zu nachzuweisen, zeigt Sprindžuk in §6 Seite 232 in [16]: gibt es zu einem nur von ζ, n, K (also von $H(P)$ unabhängigen) $C \in \mathbb{R}$ unendlich viele Lösungen P zu

$$|P(\zeta)| \leq C \cdot H(P)^{-K},$$

dann gibt es zu jedem $a \in \mathbb{N}$ zu den Ausdrücken

$$\zeta_1 = \zeta + a, \quad a \cdot \zeta, \quad \frac{1}{\zeta} \quad (3.91)$$

für ein entsprechendes $C_1 \in \mathbb{R}$ unendlich viele Q , die

$$|Q(\zeta_1)| \leq C_1 H(Q)^{-K}$$

erfüllen. Das zeigt die oben erwähnte Gleichung $w_n(\zeta) = w_n(\zeta')$. Die zugehörigen Polynome Q sind nämlich der Reihenfolge nach gegeben durch

$$Q(x) = P(x - a), \quad a^n P\left(\frac{x}{a}\right), \quad x^n P\left(\frac{1}{x}\right).$$

Entscheidend ist die Tatsache, dass für durch solche Transformationen ineinander übergeführte Polynome offenbar

$$H(Q) \ll H(P) \ll H(Q)$$

mit nur von a abhängigen Konstanten zutreffend ist. Dies ist für uns der entscheidende Punkt. Es stehen also auch die Höhen von Nullstellen von P und Q in selbigem Zusammenhang, sie sind ja gerade definiert als die Höhen der Minimalpolynome. Man kann aber jede Möbiustransformation durch wiederholte Anwendung der Einzeltransformationen aus (3.91) erhalten. Weil die β_i durch eine feste Möbiustransformation aus den α_i hervorgehen, zeigt dies (3.90).

Wirings Resultat und Schranken für $w_n^*(\zeta)$ Insgesamt haben wir also im letzten Unterabschnitt " $E = \infty$ " zusammen mit Korollar 3.5 für $\mathcal{A}_n(\zeta) < n + 1$ die notwendigen Bedingungen

$$n < \hat{w}_n(\zeta) \leq w_n(\zeta) \leq n^2 - 2$$

herausgearbeitet. Allgemeiner sieht man durch obiges Vorgehen, dass sich ein Zusammenhang der Form

$$\left(w_n^*(\zeta) \leq A \implies w_n(\zeta) \leq (n-1)A - 1 \right) \iff w_n^*(\zeta) \geq \frac{1 + w_n(\zeta)}{n-1}$$

erzielen lässt.

Die Schranke $n^2 - 2$ und ihre Konsequenzen für den Zusammenhang zwischen $w_n(\zeta)$ und $w_n^*(\zeta)$ sind in diesem Kontext nicht bestmöglich. E. Wirsing zeigt in [18] (Formel (4) auf Seite 68) auf

komplizierterem Wege für ζ nicht algebraisch vom Grad $\leq n$ folgenden Zusammenhang zwischen $w_n(\zeta)$ und $w_n^*(\zeta)$:

$$w_n^*(\zeta) \geq \frac{w_n(\zeta) + 1}{2} \quad (3.92)$$

Daraus ergibt sich für die Richtigkeit der Schranke $w_n^*(\zeta) \geq n$ die schwächere hinreichende Bedingung $w_n(\zeta) \geq 2n - 1$, es lässt sich demnach die Verbesserung

$$n < \widehat{w}_n(\zeta) \leq w_n(\zeta) \leq 2n - 1 \quad (3.93)$$

gewinnen (und damit insbesondere $E < n - 1$). Weiters folgt zusammen mit (3.82)

$$w_n^*(\zeta) \geq \max \left\{ \frac{w_n(\zeta) + 1}{2}, \frac{\widehat{w}_n(\zeta)}{\widehat{w}_n(\zeta) + 1 - n} \right\}.$$

und wegen $\widehat{w}_n(\zeta) \leq w_n(\zeta)$ insbesondere

$$w_n^*(\zeta) \geq \max \left\{ \frac{\widehat{w}_n(\zeta) + 1}{2}, \frac{\widehat{w}_n(\zeta)}{\widehat{w}_n(\zeta) + 1 - n} \right\}. \quad (3.94)$$

Mithilfe dieser Ungleichung kann man nun eine kleine Verbesserung der gleichmäßigen Abschätzung des Wertes $w_n^*(\zeta)$ durch

$$w_n^*(\zeta) \geq \frac{w_n(\zeta) + 1}{2} \geq \frac{n + 1}{2} \quad (3.95)$$

vornehmen, die unmittelbar aus dem Resultat (3.92) von Wirsing folgt.

Definiert man gemäß $n \leq \widehat{w}_n(\zeta) \leq w_n(\zeta)$ auf dem Intervall $t \in [n, \infty)$ die Funktionen

$$\phi_{n,1}(t) := \frac{t}{t + 1 - n}, \quad \phi_2(t) := \frac{t + 1}{2},$$

wobei das Argument t der Approximationsgröße $\widehat{w}_n(\zeta)$ entspricht, so erkennt man, dass einerseits ϕ_1 monoton fallend und ϕ_2 monoton steigend ist, sowie andererseits $\phi_{n,1}(n) = n > \frac{n+1}{2} = \phi_2(n)$ gilt. Mit dieser Erkenntnis folgt aus (3.94), dass

$$w_n^*(\zeta) \geq \phi_{n,1}(t_0) (= \phi_2(t_0)),$$

wobei $(t_0, \phi_{n,1}(t_0))$ der Schnittpunkt der Graphen von $\phi_{n,1}, \phi_2$ ist. Die Schnittstelle errechnet sich zu

$$t_0 = \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + n - 1}$$

und der zugehörige gemeinsame Funktionswert $\phi_{n,1}(t_0) = \phi_2(t_0)$, der zugleich eine untere Schranke für w_n^* darstellt, berechnet sich in Folge zu

$$\frac{n + 1}{2} \leq \phi_{n,1}(t_0) = \frac{\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + n - 1} + 1}{2} \leq \frac{n + 2}{2},$$

was in der Tat geringfügig besser als (3.95) ist, besonders für große n , denn man vergewissert sich mithilfe von

$$\sqrt{\frac{n^2}{4} + n - 1} = \sqrt{\left(\frac{n}{2} + 1\right)^2 - 2}$$

leicht von $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2} - \phi_{n,1}(t_0) = 0$, also

$$w_n^*(\zeta) \geq \phi_{n,1}(t_0) = \frac{n}{2} + 1 - o(1).$$

Man erkennt an der Rechnung, dass eine bessere Abschätzung von $w_n(\zeta)$ nach unten in Abhängigkeit von $\widehat{w}_n(\zeta)$ als die triviale durch $\widehat{w}_n(\zeta)$ Potential zu einer Verbesserung der besten gleichmäßigen Schranke $w_n^*(\zeta)$ in sich trägt. Dies entspricht wegen (3.54) einer Abschätzung von $\widehat{w}_{k+1}$ in Abhängigkeit von w_{k+1} im dualen Problem. Unter Verwendung von

$$\overline{\psi}_{k+1} \geq \frac{(k^2 - k + 1)\underline{\psi}_{k+1} + k(k-2)\underline{\psi}_{k+1}^2}{(k-1)^2 + k(2k-3)\underline{\psi}_{k+1} + k^2\underline{\psi}_{k+1}^2}, \quad (3.96)$$

was Theorem 1.3, (1.20') in [15] in unsere Notation überführt, darstellt (beachte $k+1 = n$), errechnet man mittels (1.40) und anschließend (3.54)

$$w_n(\zeta) \geq \frac{(n-1)\widehat{w}_n(\zeta)(\widehat{w}_n(\zeta) - 1)}{1 + (n-2)\widehat{w}_n(\zeta)}. \quad (3.97)$$

Die Verbesserung $w_n(\zeta) - \widehat{w}_n(\zeta)$ ist jedoch für Werte von $\widehat{w}_n(\zeta)$ nahe bei n sehr gering, sodass man bei Ersetzen von $\frac{\widehat{w}_n(\zeta)+1}{2}$ durch $\frac{\mathcal{Z}+1}{2}$, mit $\mathcal{Z}$ der rechten Seite von (3.97), in (3.94) bei analoger weiterer Rechnung nur eine marginale Verbesserung erhält (den exakten Wert abhängig von n kann man durch Lösen einer Polynomgleichung von Grad 3 mithilfe der Cardanischen Lösungsformel explizit berechnen, was hier aber ausgespart sei. Numerische Berechnungen in Matlab deuten darauf hin, dass die Schranke $\frac{n+2}{2}$ nicht erreicht wird). Beachte aber, dass es keinen Grund gibt, die Abschätzungen (3.96) und daraus resultierende Konsequenzen für bestmöglich zu halten und dass vor allem die spezielle Struktur $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k) = (\zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^k)$ nicht eingeht. Im Fall $k = 2$ zeigen jedoch die extremal numbers, dass (3.96) in diesem Fall zumindest für das Wertepaar

$$\left(\underline{\psi}_{k+1}, \overline{\psi}_{k+1}\right) = \left(\left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^2, \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^3\right)$$

scharf ist.

Die Funktionen $\Gamma_{n,\zeta}$ und $\Gamma_{n,\zeta}^*$ Wir kehren zum Fall $E < \infty$ zurück. Hier soll im Falle $\mathcal{A}_n(\zeta) < n+1$ etwas über das Verhalten von $|P'(\zeta)|$ bei festen Schranken für die Koordinaten $v_1(P), v_2(P), \dots, v_{n-1}(P)$ ausgesagt werden. Wir wollen die jedem $E = E(\zeta)$ zugeordnete Zahl $\Gamma = \Gamma_{n,\zeta}(E)$ zunächst zu einer Funktion auf

$$\Gamma_{n,\zeta}: [0, E] \mapsto [1, 1+E]$$

erweitern. Dabei entspricht somit das bisherige Γ weiterhin $\Gamma_{n,\zeta}(E)$. Dazu definieren wir in Anlehnung an den Unterabschnitt "Unabhängigkeit von der konkreten Folge X_i " von 3.2.2:

Definition 3.6. Wir bezeichnen für $t \in [0, E]$ das Infimum aller $\eta \geq 1$ für die das System

$$\begin{aligned} |v_1(P)| &\leq X \\ |v_2(P)| &\leq X \\ &\vdots \\ |v_{n-1}(P)| &\leq X \\ |P(\zeta)| = |x_0 + \zeta x_1 + \dots + \zeta^n x_n| &\leq X^{-n-t} \\ |P'(\zeta)| &\geq X^\eta \end{aligned}$$

für beliebig große X eine Lösung $P \in \mathbb{Z}^{n+1}$ besitzt, mit $\Gamma_{n,\zeta}(t)$.

Wegen $\Gamma_{n,\zeta}(E) \leq 1 + E$ ist $\Gamma_{n,\zeta}$ wohldefiniert und monoton steigend auf $[0, E]$, denn die vorletzte Bedingung wird mit wachsendem t stärker und damit wird das Infimum über eine kleinere Menge erstreckt.

Indem man zu jedem festen $t \in [0, E]$ eine Folge $(P_i^{(t)})_{i \geq 1}$ in $\mathbb{Z}^{n+1}$ wählt, deren $|P_i^{(t)'(\zeta)|}$ -Werte bzw. gleichbedeutend $H(P_i^{(t)})$ gegen $X^{\Gamma_{n,\zeta}(t)}$ konvergieren erhält man eine Verallgemeinerung von (3.80): Bezeichnet $\mathcal{A}_{n,E}$ wieder den bestmöglichen gleichmäßigen Exponenten $\mathcal{A}_n(\zeta)$ unter allen ζ mit $\widehat{\omega}_n(\zeta) = n + E$, dann gilt

$$\mathcal{A}_{n,E} \geq \sigma_t = \frac{n + t + \Gamma_{n,\zeta}(t)}{\Gamma_{n,\zeta}(t)}, \quad \forall t \in [0, E]. \quad (3.98)$$

Wieder müsste im Falle $\mathcal{A}_n(\zeta) < n + 1$ für alle $t \in [0, E]$ gelten

$$\Gamma_{n,\zeta}(t) > 1 + \frac{t}{n}$$

und insbesondere gilt dann $\Gamma_{n,\zeta}(0) > 1$.

Aus (3.98) sieht man allgemeiner den Zusammenhang zwischen $\Gamma_{n,\zeta}(t)$ und der Approximationsgröße w_n^* :

$$\Gamma_{n,\zeta}(t) > \frac{n + t}{w_n^*(\zeta)}.$$

Nun wollen wir die Funktion $\Gamma_{n,\zeta}$ nach oben abschätzen. Leider kann man für eine obere Schranke von $\Gamma_{n,\zeta}(t)$ nicht unmittelbar wie im Fall $t = E$ argumentieren und daher *keine Ungleichung der Form* $\Gamma_{n,\zeta}(t) \leq 1 + t$ erhalten, weil für die Herleitung von $\Gamma_{n,\zeta}(E) \leq 1 + E$ die Maximalität von E eine entscheidende Rolle gespielt hat.

Man erhält aber das schwächere Resultat

Lemma 3.10. Gilt für ein $\zeta \in \mathbb{R}$ die Beziehung $\mathcal{A}_n(\zeta) < n + 1$, dann folgt

$$\Gamma_{n,\zeta}(t) \leq (n + t) \frac{1 + E}{n + E}, \quad t \in [0, E].$$

Beweis: Es ist zu zeigen, dass für alle $\epsilon > 0$ das System

$$\begin{aligned} |v_1(P)| &\leq X \\ |v_2(P)| &\leq X \\ &\vdots \\ |v_{n-1}(P)| &\leq X \\ |P(\zeta)| = |x_0 + \zeta x_1 + \cdots + \zeta^n x_n| &\leq X^{-n-t} \\ X \leq |P'(\zeta)| &\leq X^{(n+t)\frac{1+E}{n+E}-\epsilon} \end{aligned}$$

für beliebig große X Lösungen besitzt. Wir wollen zu festem $\epsilon > 0$ mithilfe von Korollar 3.4 eine Folge $(Y_i)_{i \geq 1}$ von X -Werten und eine zugehörige Folge von Polynomen $(P_i)_{i \geq 1}$ finden, die obigem Ungleichungssystem genügen. Wir lösen die Gleichung

$$(Y_i^\alpha)^{-n-E} = Y_i^{-n-t}$$

woraus sich $\alpha = \frac{n+t}{n+E} \leq 1$ ergibt. Wir betrachten eine Folge $(X_i)_{i \geq 1}$ von X -Werten und zugehörige Polynome $(P_i)_{i \geq 1}$ die sich aus Korollar 3.4 ergeben und setzen $Y_i := X_i^{\frac{1}{\alpha}}$, sodass also $X_i = Y_i^\alpha$ gilt. Wegen Korollar 3.4 erfüllen diese Folgen $(P_i)_{i \geq 1}, (Y_i)_{i \geq 1}$ einerseits (wegen $P_i \in \widehat{B}'_{X_i}$) die Eigenschaften

$$\begin{aligned}
|v_1(P_i)| &\leq Y_i^\alpha \leq Y_i \\
|v_2(P_i)| &\leq Y_i^\alpha \leq Y_i \\
&\vdots \\
|v_{n-1}(P_i)| &\leq Y_i^\alpha \leq Y_i \\
|P_i(\zeta)| = |x_0 + \zeta x_1 + \cdots + \zeta^n x_n| &\leq (Y_i^\alpha)^{-n-E} = Y_i^{-n-t}
\end{aligned}$$

erfüllen, sowie gemäß $1 + \frac{E}{n} \leq \Gamma_{n,\zeta}(E) \leq 1 + E$ (beachte: wir haben gezeigt dass im Fall $1 + \frac{E}{n} > \Gamma_{n,\zeta}(E)$ stets $\mathcal{A}_n(\zeta) \geq n + 1$ entgegen der Voraussetzung des Lemmas) andererseits (wegen $P_i \notin B'_{X_i}$) auch

$$Y_i^{(1+\frac{E}{n})\alpha} \leq |P'_i(\zeta)| \leq Y_i^{(1+E)\alpha-\epsilon} = Y_i^{(1+E)\frac{n+t}{n+E}-\epsilon}. \quad (3.99)$$

Beachte nun, dass

$$\left(1 + \frac{E}{n}\right) \alpha = \frac{n+t}{n} \geq 1,$$

was eingesetzt in (3.99) insbesondere

$$Y_i \leq |P'_i(\zeta)| \leq Y_i^{(1+E)\frac{n+t}{n+E}-\epsilon}$$

zur Folge hat. Damit genügen die Folgen $(Y_i)_{i \geq 1}, (P_i)_{i \geq 1}$ den gestellten Anforderungen. $\square$

Zusammenfassend erfüllt $\Gamma_{n,\zeta}$ also:

$$\begin{aligned}
a < b &\implies \Gamma_{n,\zeta}(a) < \Gamma_{n,\zeta}(b) \\
1 + \frac{t}{n} < \Gamma_{n,\zeta}(t) &\leq (n+t) \frac{1+E}{n+E}, \quad \forall t \in [0, E]
\end{aligned}$$

und insbesondere

$$\begin{aligned}
\Gamma_{n,\zeta}(0) &= 1 + J_0 > 1 \\
\Gamma_{n,\zeta}(E) &\leq 1 + E.
\end{aligned}$$

Soll für ein ζ die Ungleichung $\mathcal{A}_n(\zeta) < n + 1$ gelten, so darf aber der Exponent der Ableitung $|P'(\zeta)|$ auch von der anderen Seite nicht beliebig nahe an 1 herankommen. Wir definieren

Definition 3.7. Sei die Funktion

$$\Gamma_{n,\zeta}^* : [0, E] \mapsto [-\infty, 1],$$

wobei $\Gamma_{n,\zeta}^*(t)$ das Supremum aller reellen Zahlen $\eta < 1$ ist, sodass das System

$$\begin{aligned}
|v_1| &\leq X \\
|v_2| &\leq X \\
&\vdots \\
|v_{n-1}| &\leq X \\
|P(\zeta)| = |x_0 + \zeta x_1 + \cdots + \zeta^n x_n| &\leq X^{-n-t} \\
|P'(\zeta)| &\geq X^\eta
\end{aligned}$$

für beliebig große X eine Lösung $P \in \mathbb{Z}^{n+1}$ besitzt.

Äquivalent dazu kann $\Gamma_{n,\zeta}^*$ definiert werden durch

$$\Gamma_{n,\zeta}^*(t) := \limsup_{X \rightarrow \infty} \frac{\log |P'(\zeta)|}{\log H(P)},$$

wobei der $\limsup$ nur über diejenigen P erstreckt wird, welche den Bedingungen

$$\begin{aligned} |P(\zeta)| &\leq X^{-n-t} \\ H(P) &= X \end{aligned}$$

genügen (was gleichbedeutend mit $|P(\zeta)| \leq H(P)^{-n-t}$ ist).

$\Gamma_{n,\zeta}^*$ ist monoton fallend und wegen (3.57) muss im Falle $\mathcal{A}_n(\zeta) < n+1$

$$\Gamma_{n,\zeta}^*(0) = 1 - J_1 < 1$$

gelten. Genauer überzeugt man sich mithilfe von (3.57) im Fall $\mathcal{A}_n(\zeta) < n+1$ davon, dass

$$\Gamma_{n,\zeta}^*(t) < 1 - t, \quad \forall t \in [0, E]$$

gelten muss, denn die Höhen $H(P_i)$ sind nun durch X (anstatt durch $|P'(\zeta)|$ wie im $\Gamma_{n,\zeta}$ -Fall) gegeben. Für $\mathcal{A}_n(\zeta) < n+1$ muss man also lediglich

$$\frac{n+t+\Gamma_{n,\zeta}^*(t)}{1} < n+1$$

nach $\Gamma_{n,\zeta}^*(t)$ lösen. Allgemeiner zeigt dieses Vorgehen

$$\Gamma_{n,\zeta}^*(t) \leq w_n^*(\zeta) + 1 - n - t.$$

Weiter kann man den Wertebereich von $\Gamma_{n,\zeta}^*$ noch weiter eingrenzen und in gleichem Zuge eine Abschätzung von $\Gamma_{n,\zeta}^*(t)$ nach unten bekommen. Tatsächlich gilt:

Lemma 3.11. Die Funktion $\Gamma_{n,\zeta}^*$ erfüllt die Differenzenungleichung

$$\Gamma_{n,\zeta}^*(t) \geq -n - t, \quad \forall t \in [0, E].$$

Beweis: Angenommen es gäbe ein $t \in [0, E]$ mit $\Gamma_{n,\zeta}^*(t) < -n - t$. Dann folgte also für alle hinreichend großen X :

$$|P(\zeta)| \leq X^{-n-t} \implies |P'(\zeta)| \leq X^{-n-t}.$$

Weil P' ebenfalls als Polynom vom Grad n mit Leitkoeffizient 0 aufgefasst werden kann, kann man selbige Überlegung auf P' anwenden und induktiv weiter für höhere Ableitungen und erhält

$$|P^{(k)}(\zeta)| \leq X^{-n-t}, \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad (3.100)$$

und schließlich mit $k = n-1$ in (3.100)

$$|P(\zeta)| \leq X^{-n-t} \implies |P^{(n-1)}(\zeta)| = n!|x_n| \leq X^{-n-t} < \frac{1}{2} \implies x_n = 0.$$

Wir haben jedoch im Abschnitt $E = \infty$ festgestellt, dass sich μ durch eine Möbiustransformation mit ganzzahligen Koeffizienten von ζ nicht verändert und es stets eine solche Möbiustransformation gibt, sodass eine Folge zugehöriger Polynome $|x_n|$ als größten Koeffizienten haben. Erneute Anwendung dieser Tatsache an dieser Stelle führt mit $x_n = 0$ sofort zu dem Widerspruch, dass

jedes Glied dieser Folge das Nullpolynom sein müsste. Damit ist die Annahme $\Gamma_{n,\zeta}^*(t) < -n - t$ zu einem Widerspruch geführt. $\square$

Die wesentlichen Eigenschaften von $\Gamma_{n,\zeta}^*$ im Falle $\mathcal{A}_n(\zeta) = \omega_n^*(\zeta) + 1 < n + 1$ sind also:

$$\begin{aligned} a < b &\implies \Gamma_{n,\zeta}^*(a) > \Gamma_{n,\zeta}^*(b) \\ -n - t &\leq \Gamma_{n,\zeta}^*(t) < 1 - t, \quad \forall t \in [0, E], \end{aligned}$$

insbesondere

$$\begin{aligned} \Gamma_{n,\zeta}^*(E) &\geq -n - E \\ \Gamma_{n,\zeta}^*(0) &< 1. \end{aligned}$$

Fasst man also Ergebnisse betreffend $\Gamma_{n,\zeta}, \Gamma_{n,\zeta}^*$ zusammen, so ergibt sich, dass für die Lösungen $P \in \mathbb{Z}^{n+1}$ des Systems

$$\begin{aligned} |v_1(P)| &\leq X \\ |v_2(P)| &\leq X \\ &\vdots \\ |v_{n-1}(P)| &\leq X \\ |P(\zeta)| = |x_0 + \zeta x_1 + \dots + \zeta^n x_n| &\leq X^{-n-t} \end{aligned}$$

für alle $\epsilon > 0$ für hinreichend große $X = X(\epsilon)$ die Bedingung

$$|P'(\zeta)| \leq X^{\Gamma_{n,\zeta}^*(t)+\epsilon} \quad \vee \quad |P'(\zeta)| \geq X^{\Gamma_{n,\zeta}(t)-\epsilon}$$

und insbesondere

$$|P'(\zeta)| \leq X^{\Gamma_{n,\zeta}^*(0)+\epsilon} = X^{1-J_1+\epsilon} \quad \vee \quad |P'(\zeta)| \geq X^{\Gamma_{n,\zeta}(0)-\epsilon} = X^{1+J_0-\epsilon}$$

erfüllt sein muss, so $\mathcal{A}_n(\zeta) < n + 1$ gelten soll. Es muss also einen gewissen Bereich geben, der durch eine mittelgroße $|v_n|$ -Koordinate bzw mittelgroße Werte von $|P'(\zeta)|$ im Verhältnis zur größten der übrigen Koordinaten $|v_i|$, $1 \leq i \leq n-1$ gekennzeichnet ist, in dem keine ganzzahligen Gitterpunkte P liegen, für die $P(\zeta)$ nahe an 0 liegt.

Bemerkung: Im Falle $|P'(\zeta)| \geq X^{\Gamma_{n,\zeta}(0)-\epsilon}$ folgt aus der Definition von v_n , dass die paarweisen Quotienten von den Koordinaten $x_0(P), x_1(P), x_2(P), \dots, x_n(P)$ von guten Approximationen P für gegen unendlich strebendes $X = H(P)$ gegen feste, von ζ, n abhängige Konstanten konvergieren. Genauer gilt

$$\begin{aligned} \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{x_i(P)}{x_1(P)} &= i\zeta^{i-1}, \quad 1 \leq i \leq n, \\ \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{x_0(P)}{x_1(P)} &= -\zeta - 2\zeta^3 - 3\zeta^5 - \dots - n\zeta^{2n-1}. \end{aligned}$$

Um die erste Gleichung einzusehen bemerke, dass v_n gerade durch den Richtungsvektor $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) = (1, 2\zeta, \dots, n\zeta^{n-1}) \in H$ gegeben ist, und wegen $\Gamma_{n,\zeta}(t) \geq \Gamma_{n,\zeta}(0) > 1$ ist $v_n(P)$ von größerer Ordnung als die restlichen Koordinaten $v_1(P), v_2(P), \dots, v_{n-1}(P)$ von P in der Ebene H deren Größe sämtlich durch X beschränkt ist. Schreibt man nun $\alpha_i(P)v_i$ für den Vektor in der Länge α_i in Richtung v_i ($\alpha_i(P)$ entspricht unserem bisherigen $v_i(P)$ entspricht) sowie $\beta_i(P)$

für den Vektor in der Länge β_i in Richtung v_i ($\beta_i(P)$ entspricht unserem bisherigen $x_i(P)$), so ist ein Approximationspunkt P in den ONB $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ und $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ gegeben als

$$P = \alpha_1(P)v_1 + \dots + \alpha_n(P)v_n = \beta_1(P)x_1 + \dots + \beta_n(P)x_n.$$

Man erkennt wegen $|\beta_i(P) - \alpha_n(P)| \leq \sqrt{n} \max_{1 \leq i \leq n-1} |\alpha_i(P)| \leq \sqrt{n}X$ (was wir schon in Lemma 3.4 benutzt haben) und $|\alpha_n(P)| \geq \gamma_i X^{\Gamma(0)-\epsilon}$

$$\gamma_i X^{\Gamma(0)-\epsilon} - (n-1)\sqrt{n}X \leq \beta_i(P) \leq \gamma_i X^{\Gamma(0)-\epsilon} + (n-1)\sqrt{n}X, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Daraus und aus $\Gamma_{n,\zeta}(0) > 1$ zusammen mit der Wahl $\epsilon = \frac{\Gamma(0)-1}{2}$ (sodass der Exponent von X echt größer als 1 ist) erkennt man, dass der Quotient $\frac{x_i(P)}{x_j(P)} = \frac{\beta_i(P)}{\beta_j(P)}$ für gegen unendlich strebendes X gegen $\frac{\gamma_i}{\gamma_j}$ konvergiert. Mit $j = 1$ ist das die Aussage des ersten Punktes. Der zweite folgt aus dem ersten und der Forderung, dass $|P(\zeta)|$ klein ist, denn der erste Punkt liefert

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{\zeta x_1(P) + \zeta^2 x_2(P) + \dots + \zeta^n x_n(P)}{x_1(P)} = \zeta + 2\zeta^3 + \dots + n\zeta^{2n-1}.$$

Wäre die zweite Gleichung falsch, so könnte $|P(\zeta)|$ nicht einmal stets beschränkt sein, ein Widerspruch.

Die Bereiche $\mathbf{A}_{X,t}, \mathbf{B}_{X,t}$ In den kommenden zwei Unterabschnitten gehen wir durchwegs von der zu widerlegenden Behauptung $\mathcal{A}_n(\zeta) < n+1$ für ein gewisses $\zeta \in \mathbb{R}$ und eine ganze Zahl $n \geq 2$ aus.

Gemäß der Feststellung des letzten Unterabschnitts seien nun die beiden Bereiche $\mathbf{A}_{X,t}, \mathbf{B}_{X,t}$ wie folgt definiert.

Definition 3.8. Sei $\mathbf{A}_{X,t}$ gegeben als die Menge aller $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ sodass

$$\begin{aligned} |v_1(P)| &\leq X \\ |v_2(P)| &\leq X \\ &\vdots \\ |v_{n-1}(P)| &\leq X \\ |P(\zeta)| = |x_0 + \zeta x_1 + \dots + \zeta^n x_n| &\leq X^{-n-t} \\ |P'(\zeta)| &\leq X^{\Gamma_{n,\zeta}^*(t)} \end{aligned}$$

und $\mathbf{B}_{X,t}$

$$\begin{aligned} |v_1(P)| &\leq X \\ |v_2(P)| &\leq X \\ &\vdots \\ |v_{n-1}(P)| &\leq X \\ |P(\zeta)| = |x_0 + \zeta x_1 + \dots + \zeta^n x_n| &\leq X^{-n-t} \\ |P'(\zeta)| &\geq X^{\Gamma_{n,\zeta}(t)} \end{aligned}$$

Bemerkung: Man sieht leicht, dass die Bereiche in beiden Argumenten monoton sind, es gilt:

$$\begin{aligned} X_1 \leq X_2 &\implies \mathbf{A}_{X_1,t} \subset \mathbf{A}_{X_2,t}, \quad \mathbf{B}_{X_1,t} \subset \mathbf{B}_{X_2,t} & \forall t \in [0, E]; \\ t_1 \leq t_2 &\implies \mathbf{A}_{X,t_2} \subset \mathbf{A}_{X,t_1}, \quad \mathbf{B}_{X,t_2} \subset \mathbf{B}_{X,t_1} & \forall X \geq 0. \end{aligned}$$

Im folgenden sei mit P stets ein ganzzahliger Punkt $P \in \mathbb{Z}^{n+1}$ gemeint.

Nach den Feststellungen über $\Gamma_{n,\zeta}, \Gamma_{n,\zeta}^*$ muss jedes P von hinreichend großer Höhe, das die erste bis zur vorletzten Bedingung von oben für ein Paar t, X erfüllt, in genau einem der Bereiche $\mathbf{A}_{X,t}$ oder $\mathbf{B}_{X,t}$ liegen. Zu festem P und t in einem der Bereiche $\mathbf{A}_{X,t}, \mathbf{B}_{X,t}$ für ein X kann man offenbar ein minimales zugehöriges X angeben, sodass dies erfüllt ist. Dann gilt offenbar $X = \max\{|v_1(P)|, |v_2(P)|, \dots, |v_{n-1}(P)|\} =: \hat{H}(P)$ und die obigen Bedingungen an die $v_1, \dots, v_{n-1}$ sind dann offenbar gleichbedeutend mit

$$\hat{H}(P) \leq X.$$

Für $P \in \mathbf{A}_{X,t}$ gilt dann offenbar $H(P) = \max\{|x_0|, \hat{H}(P)\}$, in Konsequenz

$$\begin{aligned} \hat{H}(P) &\leq \sqrt{n}H(P) \\ H(P) &\leq \sqrt{n}(1 + |\zeta| + \dots + |\zeta|^n) \cdot \hat{H}(P), \end{aligned}$$

während für $P \in \mathbf{B}_X$ die Höhe durch die v_n -Koordinate bestimmt wird, denn in diesem Fall gilt $\frac{1}{\sqrt{n}}|v_n(P)| \leq H(P) \leq \sqrt{n}|v_n(P)|$.

Differenzenungleichungen für $\Gamma_{n,\zeta}, \Gamma_{n,\zeta}^*$ Nächstes Ziel in der Untersuchung von $\Gamma_{n,\zeta}, \Gamma_{n,\zeta}^*$ ist, zunächst unter einer Zusatzvoraussetzung und anschließend ohne Zusatzvoraussetzungen eine Differenzenungleichung für die Funktion $\Gamma_{n,\zeta}$ herzuleiten. Diese werden den Verlauf der Funktion $\Gamma_{n,\zeta}$ noch ein wenig besser beschreiben, wobei naheliegenderweise die Ergebnisse unter Annahme der Zusatzvoraussetzung etwas besser ausfallen.

Dahinterliegende Motivation ist, dass alle guten Approximationen P (im Verhältnis zu ihrer Höhe $X = H(P)$) in den Bereichen $\mathbf{A}_{X,t}, \mathbf{B}_{X,t}$ liegen, entsprechend der Definitionen dieser Bereiche. Diese Bereiche definieren sich aber gerade durch die Funktionen $\Gamma_{n,\zeta}, \Gamma_{n,\zeta}^*$. Dabei bedeuten große Werte $\Gamma_{n,\zeta}(t)$ kleine Bereiche $\mathbf{B}_{X,t}$ sowie kleine Werte von $\Gamma_{n,\zeta}^*(t)$ kleine Bereiche $\mathbf{A}_{X,t}$. Die im folgenden erarbeiteten Differenzungleichungen geben Aufschluss darüber wie schnell die Funktionen $\Gamma_{n,\zeta}(t), \Gamma_{n,\zeta}^*(t)$ bei wachsendem Argument t steigen bzw fallen müssen und damit, wie schnell sich der Bereich ohne gute Approximation dabei vergrößert.

Die Idee der Herleitung ist durch die Addition eines Punktes $P \in \mathbf{B}_{X,t}$ und eines Punktes $Q \in \mathbf{A}_{Y,t}$ für $Y > X$, wobei man Y gegen X mithilfe der folgenden Zusatzvoraussetzung gegen konvergieren lassen kann, einen Punkt $P + Q$ zu bekommen, der ebenfalls kleines $(P + Q)(\zeta)$ hat. Man kann also wieder die erste bis zur vorletzten Bedingung in der Definition von $\mathbf{A}_{X,t}$ bzw $\mathbf{B}_{X,t}$ erfüllen mit leicht variierten $X = X_0, t = t_0$. Die nötige Zugehörigkeit von $P + Q$ zu einem Bereich der Form $\mathbf{A}_{X,t}$ oder $\mathbf{B}_{X,t}$ mit diesem Paar $X = X_0, t = t_0$ liefert dann Bedingungen an die Funktion $\Gamma_{n,\zeta}$.

Wir nehmen im ersten Teil dieses Abschnitt die folgende Zusatzvoraussetzung an:

Zu jedem $\epsilon > 0$ und beliebigem $t \in [0, E]$ und zu hinreichend großen $X = X(\epsilon, t)$ gibt es ein Element $Q \in \mathbf{A}_{Y,t}$ mit $X \leq Y \leq X^{1+\epsilon}$. Wegen der Monotonie von $\mathbf{A}_{X,t}$ im zweiten Argument ist es dabei eigentlich ausreichend diese Voraussetzung für $t = E$ zu fordern. Ist die Voraussetzung aber erst für ein $t_1 < E$ gültig, gelten die in Folge hergeleiteten Beziehungen für alle $0 \leq t \leq t_1$. Diese Voraussetzung besagt also, dass die Abstände der Höhen von der Höhe nach geordneten guten Approximationen Q_i in $\mathbf{A}_{Y,t}$ nie sehr groß werden. Dies trifft insbesondere zu, wenn $w_n(\zeta) = \hat{w}_n(\zeta)$ gilt.

Proposition 3.1. Unter Annahme obiger Zusatzvoraussetzung an ζ gelten die Differenzenungleichungen

$$\Gamma_{n,\zeta}(t) \geq \left(1 + \frac{t}{n}\right) \Gamma_{n,\zeta}(0) > 1 + \frac{t}{n} \quad (3.101)$$

$$\Gamma_{n,\zeta}(\hat{t}) \leq (1+E) \frac{n+\hat{t}}{n+E}, \quad \hat{t} \in [0, E]. \quad (3.102)$$

Die Funktion Γ ist fast überall differenzierbar und an Differenzierbarkeitsstellen t von Γ gilt

$$\Gamma'_{n,\zeta}(t) \geq \frac{\Gamma_{n,\zeta}(t)}{n+t} \geq \frac{\Gamma_{n,\zeta}(0)}{n} > \frac{1}{n}. \quad (3.103)$$

Beweis: Für eine gegen unendlich strebende Folge $(X_i)_{i \geq 1}$ und ein im ganzen Abschnitt durchwegs fest gewähltes $t > 0$ sei eine Folge $(P_i)_{i \geq 1} \in \mathbb{Z}^{n+1}$ in $\mathbf{B}_{X_i,t}$ vorgegeben. Zusätzlich soll die $v_n(P)$ -Koordinate gegen $\Gamma_{n,\zeta}(t)$ konvergieren, was wegen der Definition von $\Gamma_{n,\zeta}(t)$ als $\limsup$ erreicht werden kann. Diese Folge erfüllt dann die Bedingungen

$$\begin{aligned} \hat{H}(P_i) &= X_i \\ |P_i(\zeta)| &\leq X_i^{-n-t} \\ X_i^{u-\eta_1(i)} &\leq |P'_i(\zeta)| \leq X_i^{u+\eta_1(i)} \end{aligned}$$

mit

$$u := \Gamma_{n,\zeta}(t), \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \eta_1(i) = 0$$

und wir setzen

$$v := \Gamma_{n,\zeta}^*(t).$$

Weiters sei für zunächst beliebiges $0 < \epsilon_0 < u - 1$ eine Folge $(Q_i)_{i \geq 1} \in \mathbb{Z}^{n+1}$ in $\mathbf{A}_{X_i^{1+\epsilon_0+\eta_2(i)},t} \setminus \mathbf{A}_{X_i^{1+\epsilon_0},t}$ mit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \eta_2(i) = 0 \quad (3.104)$$

gegeben, also

$$\begin{aligned} X_i^{1+\epsilon_0} \leq \hat{H}(Q_i) &= X_i^{1+\epsilon_0+\eta_2(i)} \\ |Q_i(\zeta)| &\leq X_i^{(1+\epsilon_0)(-n-t)} \\ |Q'_i(\zeta)| &\leq X_i^{(1+\epsilon_0)v} \end{aligned}$$

Die Existenz so einer Folge ist insbesondere durch die Zusatzvoraussetzung gesichert, wenn man das dortige X für jedes hinreichend große i als $X_i^{1+\epsilon_0}$ wählt.

Für die Folge $P_i + Q_i$ gilt nach Konstruktion

$$\hat{H}(P_i + Q_i) \leq X_i + X_i^{1+\epsilon_0+\eta_2(i)},$$

insbesondere wegen (3.104) für jedes $\epsilon_1 > 0$ und i groß genug

$$\hat{H}(P_i + Q_i) \leq X_i^{1+\epsilon_0+\epsilon_1}.$$

Für $P_i + Q_i$ gilt weiter, wenn man gegebenenfalls Q_i durch $-Q_i$ ersetzt,

$$|(P_i + Q_i)(\zeta)| \leq X_i^{-n-t}. \quad (3.105)$$

Ist nämlich

$$0 < P_i(\zeta) \leq X_i^{-n-t},$$

so gilt

$$-X_i^{-n-t} < -X_i^{(1+\epsilon_0)(-n-t)} \leq -|Q_i| < 0$$

und damit (3.105). Im Falle $P_i(\zeta) < 0$ argumentiert man analog um ein Q_i mit $Q_i(\zeta) > 0$ zu finden, aus dem (3.105) folgt. Wegen der Nullsymmetrie der Bereiche $\mathbf{A}_{X_i,t}, \mathbf{B}_{X_i,t}$ ist eine Substitution $Q_i \mapsto -Q_i$ zulässig.

Wählt man

$$\epsilon_2 > (n + E)\epsilon_1 > \frac{(n + t)\frac{\epsilon_1}{1+\epsilon_0}}{1 + \epsilon_0 + \epsilon_1} \quad \forall t \in [0, E], \quad (3.106)$$

so erhält man

$$|(P_i + Q_i)(\zeta)| \leq (X_i^{1+\epsilon_0+\epsilon_1})^{\frac{-n-t}{1+\epsilon_0}} (X_i^{1+\epsilon_0+\epsilon_1})^{\epsilon_2} = X_i^{-n-t} X_i^{\epsilon_1 \frac{-n-t}{1+\epsilon_0} + (1+\epsilon_0+\epsilon_1)\epsilon_2} = Y_i^{\frac{-n-t}{1+\epsilon_0} + \epsilon_2}.$$

Insgesamt haben wir also erreicht, dass für jedes $\epsilon_2 > 0$ das System

$$|v_1(P_i + Q_i)| \leq Y_i \quad (3.107)$$

$$|v_2(P_i + Q_i)| \leq Y_i \quad (3.108)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad (3.109)$$

$$|v_{n-1}(P_i + Q_i)| \leq Y_i \quad (3.110)$$

$$|(P_i + Q_i)(\zeta)| \leq Y_i^{\frac{-n-t}{1+\epsilon_0} + \epsilon_2} = Y^{-n + (n\frac{\epsilon_0}{1+\epsilon_0} - \frac{t}{1+\epsilon_0} + \epsilon_2)} \quad (3.111)$$

für abgeschnittene Teilfolgen der Form $(P_i)_{i \geq i_0}, (Q_i)_{i \geq i_0} \in \mathbb{Z}^{n+1}$ von $(P_i)_{i \geq 1}, (Q_i)_{i \geq 1} \in \mathbb{Z}^{n+1}$ lösbar ist, wobei $Y_i := X_i^{1+\epsilon_0+\epsilon_1}$ für hinreichend kleines ϵ_1 in Abhängigkeit von ϵ_2 gemäß (3.106).

Nun untersuchen wir $|(P_i + Q_i)'(\zeta)|$.

Es gilt einerseits

$$|(P_i + Q_i)'(\zeta)| \geq X_i^{u-\eta_1(i)} - (X_i^{1+\epsilon_0})^v$$

und wegen

$$u \geq (1 + \epsilon_0) > (1 + \epsilon_0)v \quad (3.112)$$

folgt für hinreichend große Indizes i

$$|(P_i + Q_i)'(\zeta)| \geq X_i^{u-\eta_1(i)} - (X_i^{1+\epsilon_0})^v \geq X_i^{1+\epsilon_0+\epsilon_1} \geq (X_i^{1+\epsilon_0+\epsilon_1})^{1-J_1},$$

und daher also

$$P_i + Q_i \notin \mathbf{A}_{X_i^{1+\epsilon_0+\epsilon_1}, w} \quad \forall w \in [0, E].$$

Es muss also für alle $\hat{t} < \frac{t-n\epsilon_0}{1+\epsilon_0}$ wegen (3.107)-(3.111)

$$P_i + Q_i \in \mathbf{B}_{X_i^{1+\epsilon_0+\epsilon_1}, \hat{t}} \quad (3.113)$$

da $P_i + Q_i$ ja nach Voraussetzung $\mathcal{A}_n(\zeta) < n + 1$ in einem der Bereiche $\mathbf{A}_{X_i, \hat{t}}$ oder $\mathbf{B}_{X_i, \hat{t}}$ liegen muss für ein $\hat{t}$ mit oberer Grenze aus (3.113). Andererseits ist

$$|(P_i + Q_i)'(\zeta)| \leq X_i^{u+\eta_1(i)} + (X_i^{1+\epsilon_0})^v.$$

Die rechte Seite kann man für hinreichend großen Index i wieder wegen (3.112) nach unten abschätzen durch

$$X_i^{u+\eta_1(i)} + (X_i^{1+\epsilon_0})^v \leq X_i^{u+u\frac{\epsilon_1}{1+\epsilon_0}} = X_i^{(1+\epsilon_0+\epsilon_1)\frac{u}{1+\epsilon_0}}.$$

Die Folgen $(P_i)_{i \geq i_1}, (Q_i)_{i \geq i_1}$ erfüllen also für genügend großes von ϵ_1 abhängiges i_1 das Ungleichungssystem (3.107)-(3.111) und zusätzlich

$$|(P_i + Q_i)'(\zeta)| \leq Y_i^{\frac{u}{1+\epsilon_0}}. \quad (3.114)$$

Daraus und aus (3.113) gewinnen wir nun die angestrebte Differenzengleichung für $\Gamma_{n,\zeta}$.

Lässt man das frei wählbare $\epsilon_2 > 0$ und damit auch $\epsilon_1 > 0$ gegen 0 konvergieren, so sieht man: Wir haben aus

$$\Gamma_{n,\zeta}(t) = u$$

gefolgert, dass für hinreichend kleine $\epsilon_0 > 0$

$$\Gamma_{n,\zeta}(\hat{t}) \leq \frac{u}{1+\epsilon_0} \quad \forall \quad \hat{t} < \frac{t - n\epsilon_0}{1+\epsilon_0}.$$

Durch Berechnung des Differenzenquotienten

$$\frac{\Gamma_{n,\zeta}(t) - \Gamma_{n,\zeta}(\hat{t})}{t - \hat{t}} \geq \frac{u}{n+t} = \frac{\Gamma_{n,\zeta}(t)}{n+t}$$

liefert einerseits $\hat{t} = 0$ wieder

$$\Gamma_{n,\zeta}(t) \geq \left(1 + \frac{t}{n}\right) \Gamma_{n,\zeta}(0) > 1 + \frac{t}{n}, \quad (3.115)$$

andererseits liefert wegen $\Gamma_{n,\zeta}(E) \leq 1 + E$ mit $t = E$ eine Abschätzung von $\Gamma_{n,\zeta}$ nach oben

$$\Gamma_{n,\zeta}(\hat{t}) \leq (1+E) \frac{n+\hat{t}}{n+E}, \quad \hat{t} \in [0, E],$$

was nochmals bereits bekannte Resultate bestätigt. Die Differenzengleichung und die folgende Differentialungleichung (3.116) geben jedoch etwas mehr Information über den Verlauf von $\Gamma_{n,\zeta}$. Weiters erkennt man mit $\hat{t} \rightarrow \frac{t-n\epsilon_0}{1+\epsilon_0}$ und $\epsilon_0 \rightarrow 0$, was insbesondere $\hat{t} \rightarrow t$ zur Folge hat, dass an den Differenzierbarkeitsstellen t von $\Gamma_{n,\zeta}$

$$\Gamma'_{n,\zeta}(t) \geq \frac{\Gamma_{n,\zeta}(t)}{n+t} \geq \frac{\Gamma_{n,\zeta}(0)}{n} > \frac{1}{n}, \quad (3.116)$$

wobei in der vorletzten Ungleichung Gebrauch von (3.115) gemacht wurde. Beachte, dass $\Gamma_{n,\zeta}$ wegen der Monotonie fast überall differenzierbar ist. Damit sind alle Behauptungen der Proposition bewiesen. $\square$

Bemerkungen: 1) Aufgrund der vielen Abhängigkeiten der $\eta_1, \eta_2, \epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2$ sei nochmals die logische Hierarchie dieser Größen im Beweis aufgezeigt: Für festes t wird zu $u = \Gamma_{n,\zeta}(t) \geq 1$ ein

beliebiges $\epsilon_0 < u - 1$ gewählt. Dann kann man zu jedem $\epsilon_2 > 0$ das System (3.107)-(3.111) und (3.114) lösen mit jedem ϵ_1 (das in der Definition von Y_i auftritt) gemäß (3.106), sofern i groß genug ist um $\eta_1(i), \eta_2(i)$ hinreichend klein werden zu lassen, damit die auftretenden Ungleichungen erfüllt sind. Weil $\eta_1(i), \eta_2(i)$ für i gegen unendlich gegen Null konvergieren, ist dies erreichbar. Man kann also letztlich für beliebiges ϵ_0, ϵ_2 die Gleichungen (3.107)-(3.111) und (3.114) erfüllen. Lässt man ϵ_2 gegen Null konvergieren, erhält man eine Abschätzung für $\Gamma_{n,\zeta}$, die zu einer rechtsseitigen Differenzengleichung für $\Gamma_{n,\zeta}$ führt, in der ϵ_0 nicht mehr explizit vorkommt, jedoch einen Bereich von $\hat{t}$ -Werten bestimmt, in dem diese gültig ist. Weil man ϵ_0 beliebig klein machen kann, gilt die Differenzengleichung für jedes $\hat{t} < t$. Lässt man nun ϵ_0 gegen Null konvergieren, so erhält man an den Differenzierbarkeitsstellen von $\Gamma_{n,\zeta}$ eine Differentialungleichung.

2) Wie bereits erwähnt, ist die Zusatzvoraussetzung im Falle $w_n(\zeta) = \hat{w}_n(\zeta)$ gewährleistet. Um dies zu beweisen, reicht es im wesentlichen den Fall $t = E$ zu betrachten. Aufgrund der Monotonie von $\mathbf{A}_{X,t}$ im zweiten Argument wird sich dann der allgemeine Fall ergeben. Im Fall $t = E$ und $w_n(\zeta) = \hat{w}_n(\zeta)$ hat das System

$$|v_1(P)| \leq X \quad (3.117)$$

$$|v_2(P)| \leq X \quad (3.118)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad (3.119)$$

$$|v_n(P)| \leq X \quad (3.120)$$

$$|P(\zeta)| \leq X^{-n-E} \quad (3.121)$$

einerseits nach Definition von $\hat{w}_n(\zeta) = n + E$ stets eine Lösung, andererseits hat das System

$$\begin{aligned} |v_1(P)| &\leq X \\ |v_2(P)| &\leq X \\ &\vdots \\ |v_n(P)| &\leq X \\ |P(\zeta)| &\leq X^{-n-E-\delta} \end{aligned}$$

für $\delta > 0$ nach Definition von $w_n(\zeta) = n + E$ und hinreichend große X nie eine Lösung. Zweiteres bedeutet aber, dass das System

$$\begin{aligned} |v_1(P)| &\leq X^{1-\frac{\delta}{n+E+\delta}} \\ |v_2(P)| &\leq X^{1-\frac{\delta}{n+E+\delta}} \\ &\vdots \\ |v_n(P)| &\leq X^{1-\frac{\delta}{n+E+\delta}} \\ |P(\zeta)| &\leq X^{-n-E} \end{aligned}$$

für hinreichend großes X für kein $\delta > 0$ eine Lösung hat. Zusammen ergibt sich also, dass es Lösungen $P_1 \in \mathbb{Z}^{n+1}$ zum Problem

$$|P_1(\zeta)| \leq X^{-n-E}$$

mit

$$X^{1-\frac{\delta}{n+E+\delta}} \leq H(P_1) \leq X$$

für beliebig kleines $\delta > 0$ und hinreichend großes von δ abhängiges X gibt. Die Behauptung folgt für $t = E$ mit $\delta \rightarrow 0$, indem man das X aus der Definition der Zusatzvoraussetzung mit $X^{1 - \frac{\delta}{n+E+\delta}}$ identifiziert und $\epsilon := \frac{\delta}{n+E+\delta}$ setzt. Da $\mathbf{A}_{X,E}$ aber der kleinste der Bereiche $\mathbf{A}_{X,t}$, $t \in [0, E]$ ist, gilt sie a fortiori für alle $t \in [0, E]$.

Man sieht allgemeiner, dass die Größe

$$\frac{2n-1}{n} \geq \Omega_n(\zeta) := \frac{w_n(\zeta)}{\widehat{w}_n(\zeta)} \geq 1,$$

wobei wir in der Abschätzung von Ω_n nach oben (3.93) verwendet haben, ein Maß dafür ist, wie lange Approximationen höchstens anhalten können bis neue gute Approximationspunkte (gemäß (3.117)-(3.121)) kommen müssen. Genauer ist sie ein Maß für

$$\wp_n(\zeta) := \limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{\log H(P_{i+1})}{\log H(P_i)} \geq 1,$$

wenn $(P_i)_{i \geq 1}$ hier die nach Höhen geordneten ganzzahligen Lösungen des Systems (3.117)-(3.121) sind. Es ist leicht einzusehen, dass $\wp_n(\zeta)$ den minimalen Wert von $(1 + \epsilon)$ aus der Definition der Zusatzvoraussetzung liefert. Die Zusatzvoraussetzung entspricht also $\wp_n(\zeta) = 1$. Das Resultat von oben zeigt gerade

$$\Omega_n(\zeta) = 1 \implies \wp_n(\zeta) = 1.$$

Allgemeiner kann man mit obiger Vorgangsweise zeigen:

$$\wp_n(\zeta) \leq \Omega_n(\zeta).$$

Abschließend soll noch *ohne Zusatzvoraussetzung* eine Abschätzung für das minimale Wachstum von Γ sowie für das minimale negative Wachstum der Funktion $\Gamma_{n,\zeta}^*$ hergeleitet werden, um eine noch etwas bessere Beschreibung für $\Gamma_{n,\zeta}, \Gamma_{n,\zeta}^*$ im allgemeinen Fall zu gewinnen.

Proposition 3.2. Die Funktion $\Gamma_{n,\zeta}^*$ genügt der Differenzengleichung

$$\Gamma_{n,\zeta}^*(t) \leq \Gamma_{n,\zeta}^*(0) + t \cdot \frac{\Gamma_{n,\zeta}^*(0) - 1}{1+n},$$

weiter ist $\Gamma_{n,\zeta}^*$ fast überall differenzierbar und an Differenzierbarkeitsstellen t gilt

$$\Gamma_{n,\zeta}^{*'}(t) \leq \frac{\Gamma_{n,\zeta}^*(t) - 1}{1+n+t} < 0.$$

Die Funktion $\Gamma_{n,\zeta}$ genügt den Differenzengleichung

$$\Gamma_{n,\zeta}(t) \geq \Gamma_{n,\zeta}(0) + t \cdot \frac{\Gamma_{n,\zeta}(0) - 1}{1+n},$$

weiter ist $\Gamma_{n,\zeta}$ fast überall differenzierbar und an ihren Differenzierbarkeitsstellen t gilt

$$\Gamma_{n,\zeta}'(t) \geq \frac{\Gamma_{n,\zeta}(t) - 1}{1+n+t} > 0.$$

Beweis: Wir beginnen mit $\Gamma_{n,\zeta}^*$. Dabei multiplizieren wir Punkte $Q_i \in \mathbf{A}_{X_i,t}$ mit Höhen X_i für festes t mit von X_i abhängigen ganzen Zahlen m_i , sodass eine Folge ganzzahliger Punkte $m_i Q_i$ entsteht, und schätzt ab, wie sehr sich die Approximation $|m_i Q_i(\zeta)|$ höchstens verschlechtern

kann, verglichen mit $Q_i(\zeta)$.

Sei für ein festes $t \in [0, E]$ die Funktion $\Gamma_{n,\zeta}^*$ an der Stelle t durch beliebiges $\delta < 1$ gegeben:

$$\Gamma_{n,\zeta}^*(t) = \delta \quad (3.122)$$

Dann gibt es nach Definition von $\Gamma_{n,\zeta}^*$ eine ganzzahlige Punktfolge $(Q_i)_{i \geq 1}$ mit

$$\begin{aligned} H(Q_i) &= X_i \\ |Q_i(\zeta)| &\leq X_i^{-n-t} \\ |Q_i'(\zeta)| &\leq X_i^{\delta-\epsilon_i} \quad \text{mit} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \epsilon_i = 0. \end{aligned}$$

Multipliziert man jedes Q_i mit $m_i := \lfloor n_i \rfloor$ wobei $n_i := X_i^{\frac{t-t_0}{1+n+t_0}}$ für zunächst beliebiges $0 \leq t_0 < t$ und setzt zur Vereinfachung der Notation $\gamma(t, t_0) := \frac{t-t_0}{1+n+t_0}$, so berechnet man

$$\begin{aligned} H(m_i Q_i) &= m_i X_i \\ |m_i Q_i(\zeta)| = m_i |Q_i(\zeta)| &\leq X_i^{-n-t+\gamma(t, t_0)} = (n_i X_i)^{-n-t_0} \\ &= (m_i X_i)^{-n-t_0-\rho_i} = (H(m_i Q_i))^{-n-t_0-\rho_i} \end{aligned}$$

wobei $\lim_{i \rightarrow \infty} \rho_i = 0$, sowie

$$\begin{aligned} |(m_i Q_i)'(\zeta)| = m_i |Q_i'(\zeta)| &\leq X_i^{\delta+\gamma(t, t_0)-\epsilon_i} \\ &= (n_i X_i)^{\frac{\delta+\gamma(t, t_0)}{1+\gamma(t, t_0)}} = (m_i X_i)^{\frac{\delta+\gamma(t, t_0)}{1+\gamma(t, t_0)+\lambda_i}} \quad \text{mit} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \epsilon_i = \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i = 0. \end{aligned}$$

Nach Definition von $\Gamma_{n,\zeta}^*$ heißt das

$$\Gamma_{n,\zeta}^*(t_0) \geq \frac{\delta + \gamma(t, t_0)}{1 + \gamma(t, t_0)}.$$

Zusammen mit (3.122) berechnet man

$$\frac{\Gamma_{n,\zeta}^*(t) - \Gamma_{n,\zeta}^*(t_0)}{t - t_0} \leq \frac{\delta - \frac{\delta + \gamma(t, t_0)}{1 + \gamma(t, t_0)}}{t - t_0} = \frac{\delta - 1}{1 + n + t} = \frac{\Gamma_{n,\zeta}^*(t) - 1}{1 + n + t}.$$

Mit $t_0 = 0$ erhält man

$$\Gamma_{n,\zeta}^*(t) \leq \Gamma_{n,\zeta}^*(0) + t \cdot \frac{\Gamma_{n,\zeta}^*(0) - 1}{1 + n}.$$

Außerdem liefert der Grenzübergang $t_0 \rightarrow t$ an allen Differenzierbarkeitsstellen t von $\Gamma_{n,\zeta}^*$

$$\Gamma_{n,\zeta}^{*'}(t) \leq \frac{\Gamma_{n,\zeta}^*(t) - 1}{1 + n + t} < 0.$$

Beachte, dass $\Gamma_{n,\zeta}^*$ als monotone Funktion fast überall differenzierbar ist.

Ganz ähnlich kann man vorgehen, um eine Abschätzung bzw Differentialgleichung für $\Gamma_{n,\zeta}$ zu erhalten. Sei

$$\Gamma_{n,\zeta}(t) = \delta' > 1, \quad (3.123)$$

und man betrachte wieder das im wesentlichen gleiche System wie oben

$$\begin{aligned}
H(P_i) &= X_i \\
|P_i(\zeta)| &\leq X_i^{-n-t} \\
|P'_i(\zeta)| &\geq X_i^{\delta' + \epsilon_i} \quad \text{mit} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \epsilon_i = 0.
\end{aligned}$$

Definiert man m_i wie oben und bildet $m_i P_i$, so erhält man mit ganz ähnlicher Argumentation, dass für $0 \leq t_0 < t$ beliebig

$$\Gamma_{n,\zeta}(t_0) \leq \frac{\delta' + \gamma(t, t_0)}{1 + \gamma(t, t_0)}$$

gilt, wobei das Ungleichungszeichen wegen der Definition von $\Gamma_{n,\zeta}$ als $\liminf$ statt $\limsup$ umgedreht ist, und weiter mit (3.123) und $t_0 = 0$

$$\Gamma_{n,\zeta}(t) \geq \Gamma_{n,\zeta}(0) + t \cdot \frac{\Gamma_{n,\zeta}(0) - 1}{1 + n}.$$

Diese Abschätzung ist etwas schwächer als die aus (3.115), benötigt aber keine Zusatzvoraussetzungen. Mit $t_0 \rightarrow t$ erhält man andererseits für die Ableitung von $\Gamma_{n,\zeta}$ an allen ihren Differenzierbarkeitsstellen t

$$\Gamma'_{n,\zeta}(t) \geq \frac{\Gamma_{n,\zeta}(t) - 1}{1 + n + t} > 0,$$

was wiederum etwas schwächer als (3.116) ist. Beachte wieder, dass auch $\Gamma_{n,\zeta}$ wegen der Monotonie fast überall differenzierbar ist. Damit sind alle Aussagen der Proposition bewiesen. $\square$

Bemerkung: Es ist $\Gamma_{n,\zeta}^*(0) - 1 < 0$, die Aussagen bezüglich $\Gamma_{n,\zeta}^*$ folgen also nicht trivial aus der Monotonie von $\Gamma_{n,\zeta}^*$, sondern man erhält eine Abschätzung, wie schnell $\Gamma_{n,\zeta}^*$ mindestens fallen muss. Analoges gilt für $\Gamma_{n,\zeta}$.

3.2.3 Anwendungen des zweiten Gitterpunktsatzes, Bestätigung einer Abschätzung von Davenport und Schmidt und ein neues Resultat

Die Ergebnisse zur Approximation von algebraischen Zahlen ab Abschnitt 3.2 beruhten bisher im wesentlichen auf geschickter Anwendung von Minkowskis 1. Gitterpunktsatz. Wir wollen nun wieder ausgehend von (3.58) die Kenntnis des Verhaltens der höheren sukzessiven Minima aus Minkowskis 2. Gitterpunktsatz einfließen lassen, um in ζ gleichmäßige Abschätzungen für den Wert $w_n^*(\zeta)$ zu erzielen. Wir zielen darauf ab, mit der Notation aus der Einleitung des Abschnitts 3.2 den folgenden Satz zu zeigen:

Satz 3.4. Für alle $\zeta \in \mathbb{R}$ und positive ganze Zahlen n gilt für die Approximationskonstante $w_n(\zeta)^*$ die Beziehung

$$w_n^*(\zeta) \geq w_{n,n+1}(\zeta).$$

Leichte Adaption der Methode des Beweises wird dann schließlich in Satz 3.5 ein weiteres Resultat liefern.

Satz 3.4 ist wegen (3.54) beinahe gleichbedeutend mit dem Resultat (3.24) aus [2], wobei wir auf die dortige Voraussetzung, dass ζ nicht algebraisch vom Grad $\leq n$ ist, verzichten können. Daraus erhalten wir unter Zuhilfenahme von (3.23) aus [7] (für genauere Literaturangaben siehe Abschnitt 3.1 Bemerkung 4 nach Lemma 3.1) respektive Wirtings Resultat (3.92) gleichmäßige Abschätzungen für $w_n^*(\zeta)$ nach unten, welche in den folgenden drei Korollaren festgehalten sind. Die Abschätzungen werden dabei immer besser, aufgrund der verschiedenen Methodik seien jedoch alle drei Ergebnisse vorgestellt.

Korollar 3.6. Für alle positive ganze Zahlen n und $\zeta \in \mathbb{R}$ nicht algebraisch vom Grad $\leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ gilt für die Approximationskonstante $w_n^*(\zeta)$ die Beziehung

$$w_n^*(\zeta) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

Beweis: In unserer Situation der simultanen Approximation von $\zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^n$ gilt im dualen Problem die Abschätzung (3.23). Zusammen mit (3.54) und Satz 3.4 ergibt sich die Aussage des Korollars. $\square$

Korollar 3.7. Für alle positive ganze Zahlen n und $\zeta \in \mathbb{R}$ nicht algebraisch vom Grad $\leq n$ gilt für die Approximationskonstante $w_n^*(\zeta)$ die Beziehung

$$w_n^*(\zeta) \geq \frac{n}{4} + \sqrt{\frac{n^2}{16} + \frac{n}{2}} =: \mathcal{S}(n). \quad (3.124)$$

Beweis: Wir zeigen zuerst die Beziehung

$$w_n(\zeta) \geq n - 1 + \frac{n}{w_{n,n+1}(\zeta)}. \quad (3.125)$$

Man kann sich mittels (3.52) die Approximationskonstante $\underline{\psi}_{n+1}^*$ aus $w_{n,n+1}(\zeta)$ ausdrücken durch

$$\underline{\psi}_{n+1}^* = \frac{n - w_{n,n+1}(\zeta)}{n(w_{n,n+1}(\zeta) + 1)}. \quad (3.126)$$

Verwendet man das aus (3.49) folgende

$$\overline{\psi}_1^* \leq -\frac{1}{n} \underline{\psi}_{n+1}^* \quad (3.127)$$

(vergleiche genauer die linke Ungleichung auf Seite 70 unten in [14], woraus es mit (3.48) folgt) um $\overline{\psi}_1^*$ nach oben abzuschätzen und rechnet dann wieder auf die sich mittels (3.52) ergebende untere Schranke für $\widehat{w}_n(\zeta)$ zurück, ergibt sich genau die rechte Seite von (3.125). Diese ist folglich auch für $w_n(\zeta) \geq \widehat{w}_n(\zeta)$ untere Schranke, also ist (3.125) korrekt.

Aus (3.125) und Wirsings Schranke $w_n^*(\zeta) \geq \frac{w_n(\zeta)+1}{2} \geq \frac{\widehat{w}_n(\zeta)+1}{2}$ sowie Satz 3.4 folgt

$$w_n^*(\zeta) \geq \max \left\{ \frac{n}{2} + \frac{n}{2w_{n,n+1}(\zeta)}, w_{n,n+1}(\zeta) \right\}.$$

Der linke Term in Maximum fällt mit steigendem $w_{n,n+1}(\zeta)$, sodass der Wert $w_n^*(\zeta)$ bei Gleichheit der beiden Terme im Maximum minimiert wird. Die Lösung der entstehenden quadratischen Gleichung liefert aber genau $\mathcal{S}(n)$. $\square$

Bemerkungen: 1) Man kann wieder mittels (1.20') in [15] kleine Verbesserungen erzielen, vergleiche Unterabschnitt "Wirsings Resultat und Schranken für $w_n^*(\zeta)$ " von Abschnitt 3.2.2.

2) Die Schranke $\mathcal{S}(n)$ in (3.128) liegt offenbar im Intervall $(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1)$ und es gilt $\mathcal{S}(n) = \frac{n}{2} + 1 - o(1)$. Die Schranke ist daher für große n besser als die von Korollar 3.6 und stimmt größenordnungsmäßig mit der im Unterabschnitt "Wirsings Resultat und Schranken für $w_n^*(\zeta)$ " von Abschnitt 3.2.2 via Lemma 3.9 gewonnenen überein.

Indem man die in Korollar 3.7 verwendete Ungleichung (3.127) und den Verlust durch die Abschätzung von $\widehat{w}_n(\zeta)$ anstatt direkt von $w_n(\zeta)$ umgeht und eine alternative Abschätzung verwendet, erhält man noch eine Verbesserung. Diese ist in Korollar 3.8 festgehalten. Die besagte alternative Abschätzung ist in der folgenden Proposition festgehalten.

Proposition 3.3. Für die zu $\mathbb{Q}$ -linear unabhängigen $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ gehörigen Approximationskonstanten gilt

$$\underline{\psi}_1^* \leq -\frac{2}{n-1} \underline{\psi}_{n+1}^*.$$

Beweis: Für beliebiges $\epsilon > 0$ gilt per Definitionem für alle hinreichend großen Q die Beziehung $\psi_{n+1}^*(Q) \geq \underline{\psi}_{n+1}^* - \epsilon$. Weiters ist aber auch wegen (3.50) auch $\underline{\psi}_{n+1}^* \leq \underline{\psi}_n^*$, also gibt es beliebig große Q mit $\psi_n^*(Q) \geq \underline{\psi}_{n+1}^*(Q) - \epsilon$. Es gibt also einerseits beliebig große Q , sodass die Beziehung $\psi_n^*(Q) + \psi_{n+1}^*(Q) \geq 2\underline{\psi}_{n+1}^*(Q) - 2\epsilon$ gilt.

Gemäß (3.51) gilt an diesen Stellen Q aber andererseits $(n-1)\psi_1^*(Q) \leq \sum_{j=1}^{n-1} \psi_j^*(Q)$. Die Aussage der Proposition folgt aus beiden Erkenntnissen zusammen mit (3.49) und $\epsilon \rightarrow 0$. $\square$

Korollar 3.8. Für alle positive ganze Zahlen n und $\zeta \in \mathbb{R}$ nicht algebraisch vom Grad $\leq n$ gilt für die Approximationskonstante $w_n^*(\zeta)$ die Beziehung

$$w_n^*(\zeta) \geq \frac{1}{4} \left(n+1 + \sqrt{n^2 + 10n - 7} \right) =: \mathcal{W}(n). \quad (3.128)$$

Es gilt für $n \rightarrow \infty$ die Beziehung $\mathcal{W}(n) = \frac{n}{2} + \frac{3}{2} + o(1)$.

Beweis: Wir verfahren ähnlich zum Beweis von Korollar 3.7. Wir verwenden (3.126) und Proposition 3.3 (im Spezialfall $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) = (\zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^n)$ für ζ nicht algebraisch vom Grad $\leq n$) an Stelle von (3.127) um $\underline{\psi}_1^*$ durch Ausdrücke in $w_{n,n+1}(\zeta)$ nach oben abzuschätzen. Nun verwenden wir Wirtings Resultat (3.92) und den erhaltenen Ausdruck für $\underline{\psi}_1^*$ in (3.52), um schließlich $w_n^*(\zeta)$ durch $w_{n,n+1}(\zeta)$ in der Form

$$w_n^*(\zeta) \geq \frac{w_n(\zeta) + 1}{2} \geq \frac{n+1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{n-1} \frac{n - w_{n,n+1}(\zeta)}{w_{n,n+1}(\zeta) + 1}}$$

abzuschätzen. Es ergibt sich zusammen mit Satz 3.4

$$w_n^*(\zeta) \geq \max \left\{ \frac{n+1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{n-1} \frac{n - w_{n,n+1}(\zeta)}{w_{n,n+1}(\zeta) + 1}}, w_{n,n+1}(\zeta) \right\}.$$

Der linke Ausdruck im Maximum fällt wieder mit steigendem $w_{n,n+1}(\zeta)$. Gleichsetzen der Ausdrücke im Maximum, Lösen der quadratischen Gleichung und Vereinfachen liefert $\mathcal{W}(n)$.

Für die asymptotische Formel für $\mathcal{W}(n)$ bemerke, dass die Diskriminante $D(n)$ in (3.128) für $n \rightarrow \infty$ von der Form $\sqrt{(n+5)^2 - 32}$ ist, sie kann also für $n \rightarrow \infty$ als $D(n) = n+5 + o(1)$ angeschrieben werden. Der Rest ist elementare Grenzwertrechnung:

$$\mathcal{W}(n) = \frac{1}{4} \left(n+1 + \sqrt{n^2 + 10n - 7} \right) = \frac{n+1}{4} + \frac{n+5 + o(1)}{4} = \frac{n}{2} + \frac{3}{2} + o(1).$$

$\square$

Bemerkungen: 1) Der Fehlerterm $\mathcal{W}(n) - \frac{n}{2} - \frac{3}{2}$ ist für alle n negativ, konvergiert also von unten gegen 0.

2) Es sind andere Abschätzungen bekannt die Wirtings Resultat $w_n^*(\zeta) \geq \frac{n+1}{2}$ in ähnlicher Art verbessern, siehe Seite 2 in [12] für Referenzen. Die angegebenen Methoden demonstrieren aber insbesondere die Nützlichkeit der Funktionen $\psi_j(Q)$ im Kontext solcher Fragestellungen.

Wir beweisen nun Satz 3.4. Wir betrachten das System (3.36)-(3.40), bezeichnen es als System A, und verwenden die Notation vom einleitenden Abschnitt 3.2. Wir erinnern, dass wenn $\eta_{j,A}^*(Q)$ das j -te sukzessive Minimum bezüglich Λ und $L(Q)$ aus (3.43),(3.44) an einer festen Stelle Q

bezeichnet, und $\nu_{j,A}^*(Q)$ das minimale $\theta = \theta(Q)$, sodass das System (3.36)-(3.40) j linear unabhängige Lösungen hat, der Zusammenhang $\eta_{j,A}^*(Q) = Q^{\nu_{j,A}^*(Q)}$ besteht, siehe den einleitenden Abschnitt 3.2. Weiter betrachten wir System B, das aus System A unter der zusätzlichen Restriktion $|P'(\zeta)| \leq c(Q)Q^{\frac{1}{n}}$ hervorgeht mit geeignetem später spezifizierten $c(Q) \in \mathbb{R}^+$ und $P(\zeta) = x + \zeta y_1 + \dots + \zeta^n y_n$. Wir betrachten die sukzessiven Minima $\nu_{j,B}^*(Q)$ bezüglich dem Gitter Λ^* und dem Körper $\mathcal{K}(Q) := L(Q) \cap c(Q) \cdot W(Q) \subset L(Q)$ wobei

$$W(Q) := \left\{ (x, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : |y_1 + 2\zeta y_2 + \dots + n\zeta^{n-1} y_n| \leq Q^{\frac{1}{n}} \right\}.$$

Der Körper $L(Q)$ wird also im wesentlichen in Richtung orthogonal zur Hyperebene $P'(\zeta) = 0$ um den Faktor $c(Q)$ komprimiert, um $\mathcal{K}(Q)$ zu erhalten. Wir wählen dabei $c = c(Q)$ dermaßen, dass

$$\text{vol}(\mathcal{K}(Q)) = \frac{1}{2^{(n+1)!}} \text{vol}(L(Q)) < \frac{1}{(n+1)!} \text{vol}(L(Q)) = \frac{2^{n+1}}{2^{(n+1)!}} \quad (3.129)$$

gilt. Aufgrund der Stetigkeit des Volumens $\text{vol}(\mathcal{K}(Q))$ in $c(Q)$ sowie $\text{vol}(\mathcal{K}(Q)) = \text{vol}(L(Q))$ für alle hinreichend großen $c(Q) \geq c_0(Q)$ und $\text{vol}(\mathcal{K}(Q)) = 0$ für $c(Q) = 0$ existiert nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen genau ein solches $c = c(Q) \in (0, c_0(Q))$.

Aufgrund von (3.129) ergibt der 2. Gitterpunktsatz von Minkowski, dass für jedes Q mindestens ein sukzessives Minimum in System B echt kleiner sein muss als das entsprechende Minimum in System A. Wir können im weiteren oBdA davon ausgehen, dass dies durchgehend auf das letzte Minimum zutrifft, also $\nu_{n+1,A}^*(Q) > \nu_{n+1,B}^*(Q)$ für alle Q , sonst werden die Schranken in den kommenden Abschätzungen nur besser. Das bedeutet aber nach Konstruktion, dass es (mindestens) einen ganzzahligen Vektor $\mathbf{d}(Q) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ in

$$\left(Q^{\nu_{n+1,A}^*(Q)} L(Q) \right) \setminus \left(Q^{\nu_{n+1,A}^*(Q)} \mathcal{K}(Q) \right)$$

gibt. Wir identifizieren $\mathbf{d}(Q) = (x, y_1, \dots, y_n)$ in natürlicher Weise mit dem ihm zugeordneten Polynom $P(\zeta) = x + \zeta y_1 + \dots + \zeta^n y_n$. Eine gegen unendlich strebende Folge von Q -Werten (und somit Vektoren $\mathbf{d}(Q) \in \mathbb{Z}^{n+1}$) induziert also eine Folge von Polynomen P in eben geschilderter Weise, die Abhängigkeit der Polynome P von Q sei in der Folge in der Notation unterdrückt. Zum einen gilt für $\mathbf{d}(Q)$, weil sich $L(Q), \mathcal{K}(Q)$ nur in der Richtung orthogonal zur Hyperebene $P'(\zeta) = 0$ unterscheiden

$$|P'(\zeta)| > Q^{\nu_{n+1,A}^*(Q)} c(Q) Q^{\frac{1}{n}}. \quad (3.130)$$

Weil aber $\mathbf{d}(Q) \in Q^{\nu_{n+1,A}^*(Q)} L(Q)$ gilt andererseits für alle $\epsilon > 0$ und hinreichend großes $Q = Q(\epsilon)$ per Definition von $\nu_{n+1,A}^*(Q)$

$$|P(\zeta)| \leq Q^{-1+\nu_{n+1,A}^*(Q)+\epsilon}, \quad (3.131)$$

$$H(P) \ll Q^{\frac{1}{n}+\nu_{n+1,A}^*(Q)}. \quad (3.132)$$

mit nur von ζ, n abhängigen Konstanten in $\ll$. Genauer gilt wegen $|y_t| \leq Q^{\frac{1}{n}+\nu_{n+1,A}^*(Q)}$ für $1 \leq t \leq k$, sowie klarerweise $|P(\zeta)| \leq 1$ für Q hinreichend groß für das zum $(n+1)$ -ten Minimum $\nu_{n+1,A}^*(Q)$ an der Stelle Q entsprechende P

$$|x| \leq |P(\zeta)| + (1 + |\zeta| + \dots + |\zeta|^n) \max_{1 \leq t \leq n} |y_t| \leq 1 + (1 + |\zeta| + \dots + |\zeta|^n) Q^{\frac{1}{n}+\nu_{n+1,A}^*(Q)}.$$

Wir erhalten folglich, da auch alle anderen Beträge der Koeffizienten von P durch $Q^{\frac{1}{n}+\nu_{n+1,A}^*(Q)}$ beschränkt sind, die Abschätzung $H(P) \leq 1 + (1 + |\zeta| + \dots + |\zeta|^n) Q^{\frac{1}{n}+\nu_{n+1,A}^*(Q)}$ für Q hinreichend groß, also insbesondere (3.132). Da (3.130), (3.131), (3.132) für alle Q gilt, kann man eine Folge

$(Q_s)_{s \geq 1}$ von Q -Werten wählen, sodass $\nu_{n+1,A}^*(Q)$ gegen $\nu_{n+1,A}^*$ konvergiert und erhält für $\epsilon > 0$ und hinreichend großes $Q = Q_s$ (also mit $s \geq s(\epsilon)$) ganzzahlige Punkte, deren zugeordnete Polynome

$$|P(\zeta)| \leq Q^{-1+\nu_{n+1,A}^*+\epsilon} \quad (3.133)$$

$$|P'(\zeta)| \geq c(Q)Q^{\frac{1}{n}+\nu_{n+1,A}^*} \quad (3.134)$$

$$H(P) \ll Q^{\frac{1}{n}+\nu_{n+1,A}^*} \quad (3.135)$$

mit nur von ζ, n abhängigen Konstanten in $\ll$ erfüllen. Können wir zeigen, dass $\lim_{Q \rightarrow \infty} \log_Q c(Q) = 0$, folgt Satz 3.4 mittels (3.133), (3.134), (3.135) mit $\epsilon \rightarrow 0$ via

$$w_n^*(\zeta) + 1 \geq -\frac{\log\left(\frac{P(\zeta)}{P'(\zeta)}\right)}{\log(H(P))} \gg \frac{n+1}{n} \frac{1}{\frac{1}{n} + \nu_{n+1,A}^*} = \omega_{k,k+1}(\zeta) + 1, \quad (3.136)$$

wobei die linke Ungleichung aus (3.58) sowie die letzte Gleichheit aus (3.46) und (3.52) folgt. Die ausständige Aussage $\lim_{Q \rightarrow \infty} \log_Q c(Q) = 0$ ist in allgemeinerer Form Inhalt des folgenden geometrischen Lemmas. Dort wird im wesentlichen gezeigt, dass $B < c(Q) < B'$ mit von Q unabhängigen Konstanten $B = B(n, \zeta), B' = B'(n, \zeta)$. Die Abschätzung nach unten ist dabei nur aus Gründen der Vollständigkeit angeführt.

Lemma 3.12. Betrachte zu festen $n \geq 2, \zeta \in \mathbb{R}$ und positiven reellen Parametern R, Q die Mengen

$$\begin{aligned} \chi_A(Q) &:= \{(x, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : |P(\zeta)| \leq Q^{-1}\} \\ \chi_B(R) &:= \{(x, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : |P'(\zeta)| \leq R\} \\ \chi_C(Q) &:= \{(x, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : |y_t| \leq Q^{\frac{1}{n}}, \quad 1 \leq t \leq n\}, \end{aligned}$$

wobei $P(\zeta) = x + \zeta y_1 + \dots + \zeta^n y_n$.

Dann gilt für hinreichend große Q und alle $R \leq C(n, \zeta)\sqrt{n}Q^{\frac{1}{n}}$

$$FRQ^{-\frac{1}{n}} \leq \text{vol}(\chi_A(Q) \cap \chi_B(R) \cap \chi_C(Q)) \leq ERQ^{-\frac{1}{n}}$$

mit von Q unabhängigen Konstanten $C(n, \zeta), E = E(n, \zeta), F = F(n, \zeta)$.

Beweis: Beachte zuerst, dass für Q hinreichend groß wegen $P(\zeta) \leq Q^{-1}$, wie schon mehrfach verwendet, $|x| \leq 1 + (1 + |\zeta| + \dots + |\zeta^n|)Q^{\frac{1}{n}}$ gilt, man also die redundante Zusatzvoraussetzung $|x| \leq C(n, \zeta)Q^{\frac{1}{n}}$ mit einer Konstante $C(n, \zeta)$ treffen kann, ohne das Problem zu verändern. Man muss also um das Volumen von $\chi_A(Q) \cap \chi_B(R)$ zu berechnen, nur $(x, y_1, \dots, y_k)$ im Quader $\mathcal{S}(Q) \supset \chi_A(Q) \supset \chi_A(Q) \cap \chi_B(R)$, der durch $|y_t| \leq Q^{\frac{1}{n}}$ für $1 \leq t \leq n$ und $|x| \leq C(n, \zeta)Q^{\frac{1}{n}}$ gegeben ist, berücksichtigen.

Wir unterziehen nun $\mathbb{R}^{n+1}$ einer Drehung ϖ dermaßen, dass die durch $P(\zeta) = 0$ gegebene Hyperebene auf die durch $x = 0$ gegebene Hyperebene H_0 abgebildet wird. Das Bild der Hyperebene $P'(\zeta) = 0$ unter ϖ sei die Hyperebene H_1 . Man überzeugt sich leicht, dass die durch $P(\zeta) = 0$ definierte Hyperebene verschieden von der durch $P'(\zeta) = 0$ gegebenen Hyperebene ist, also gilt $H_0 \neq H_1$, also ist die Dimension von $H_0 + H_1 := \{x + y | x \in H_1, y \in H_2\}$ echt größer als n , und damit schon $H_0 + H_1 := \{x + y | x \in H_0, y \in H_1\} = \mathbb{R}^{n+1}$. Wir folgern weiter aus der Dimensionsformel aus der linearen Algebra:

$$\dim(H_0 \cap H_1) = \dim(H_0) + \dim(H_1) - \dim(H_0 + H_1) = n + n - (n + 1) = n - 1.$$

Das Bild des Quaders $\mathcal{T}(Q)$ unter ϖ ist sicherlich im zentralsymmetrischen Würfel $\kappa(Q)$ mit der Seitenlänge $2C(n, \zeta)\sqrt{n}Q^{\frac{1}{n}}$ gegeben durch

$$\kappa(Q) := \left\{ (x, y_1, \dots, y_n) : |x| \leq \sqrt{n}C(n, \zeta)Q^{\frac{1}{n}}, |y_t| \leq \sqrt{n}C(n, \zeta)Q^{\frac{1}{n}}, 1 \leq t \leq n \right\},$$

enthalten. Damit also auch

$$\varpi(\chi_A(Q) \cap \chi_B(R) \cap \chi_C(Q)) \subset \varpi(\mathcal{T}) \subset \kappa(Q). \quad (3.137)$$

Deshalb ist das $(n-1)$ -dimensionale Volumen von $H_0 \cap H_1 \cap \kappa(Q)$ offensichtlich proportional zu $(Q^{\frac{1}{n}})^{n-1}$, also gleich $DQ^{\frac{n-1}{n}}$ mit einer von Q unabhängigen Konstante D .

Nennen wir für $a, b \in \mathbb{R}$ die zu H_0 bzw H_1 parallelen Hyperebenen

$$\begin{aligned} H_{0,a} &:= \varpi(\{P : P(\zeta) = a\}) = \{(x, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x = a\}, \\ H_{1,b} &:= \varpi(\{P : P'(\zeta) = b\}), \end{aligned}$$

(insbesondere also $H_0 = H_{0,0}, H_1 = H_{1,0}$), so gilt klarerweise auch $\dim(H_{0,a} \cap H_{1,b}) = n-1$ für alle a, b und obiges Argument trifft auch auf alle

$$\varpi(\{P : P(\zeta) = a\}) \cap \varpi(\{P : P'(\zeta) = b\}) \cap \kappa(Q) = H_{0,a} \cap H_{1,b} \cap \kappa(Q)$$

unter der Identifikation $P = (x, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ zu. Man kann aus Kompaktheits- und Stetigkeitsgründen ein D_0 wählen, sodass alle diese Bilder $H_{0,a} \cap H_{1,b} \cap \kappa(Q)$ ein durch $D_0Q^{\frac{n-1}{n}}$ beschränktes $(n-1)$ -dimensionales Volumen haben (oder man umgibt $\varpi(\kappa(Q))$ mit der kleinsten Kugel, die es enthält und erhält analog eine Abschätzung der gegebenen Form). Also ausgeschrieben

$$\text{vol}_{n-1}(H_{0,a} \cap H_{1,b} \cap \kappa(Q)) \leq D_0Q^{\frac{n-1}{n}}, \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (3.138)$$

Nun schätzen wir in die andere Richtung ab. Die rotationsinvariante $(n+1)$ -dimensionale Kugel $U_{n+1}(Q)$ mit Radius $Q^{\frac{1}{n}}$ liegt in $\chi_C(Q)$ und der $(n-1)$ -dimensionale Schnitt $U_{n+1}(Q) \cap H_0 \cap H_1 \subset \chi_A(Q) \cap \chi_B(R) \cap \chi_C(Q)$ ist offenbar eine $(n-1)$ -dimensionale Kugel $U_{n-1}(Q)$ vom selben Radius $Q^{\frac{1}{n}}$ in der n -dimensionalen Hyperebene H_0 . Diese hat aber bekanntermaßen ein zu $(Q^{\frac{1}{n}})^{n-1}$ proportionales $(n-1)$ -dimensionales Volumen, also insgesamt

$$\text{vol}(U_{n+1}(Q) \cap H_0 \cap H_1) = \text{vol}(U_{n-1}(Q)) =: \tau(Q) = w_n Q^{\frac{n-1}{n}}, \quad w_n \in \mathbb{R}.$$

Beachte nun, dass $\chi_B(R)$ aus der Menge aller Punkte in $\mathbb{R}^{n+1}$ besteht, die von der Hyperebene $P'(\zeta) = 0$ einen Abstand höchstens $m_2 R$ mit einer von Q unabhängigen Konstante m_2 haben. Damit ist $\varpi(\chi_B(R))$ die Menge aller Punkte, die von H_1 Abstand höchstens $m_2 R$ haben. Schneidet man diese Menge $\varpi(\chi_B(R)) \supset H_1$ mit $U_{n+1}(Q) \cap H_0$, entsteht also eine volumsgleiche (weil einfach gedrehte) n -dimensionale Menge der Form

$$\mathcal{V}_0(R, Q) := \left\{ (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : |y_1| \leq m_2 R, \left(\sum_{j=1}^n y_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq Q^{\frac{1}{n}} \right\}.$$

Integriert man das $(n-1)$ -dimensionale Volumen der Schnitte mit konstantem y_1 (jeweils $(n-1)$ -dimensionale Kugeln) nach y_1 , um nach dem Satz von Fubini das Volumen von $\mathcal{V}_0(R, Q)$ zu erhalten, erkennt man leicht, dass für $R \leq C(n, \zeta)\sqrt{n}Q^{\frac{1}{n}}$ mit einer von Q unabhängigen Konstante m_3

$$\text{vol}_n(\mathcal{V}_0(R, Q)) \geq m_3 R Q^{\frac{n-1}{n}}$$

gilt. Genauer ist eine untere Abschätzung von m_3 offenbar durch das Volumen der n -dimensionalen Kugel mit Radius r dividiert durch das $C(n, \zeta)$ -fache des Volumens r^n des Würfels mit Seitenlänge r gegeben, also $m_3 \leq \frac{w_n}{C(n, \zeta)}$ mit den oben eingeführten Größen $w_n, C(n, \zeta)$. (Für alle $R > C(n, \zeta)\sqrt{n}Q^{\frac{1}{n}}$ ist $\text{vol}_n(\mathcal{V}_0(R, Q))$ konstant weil dann $\chi_B(R) \supset \mathcal{T}(Q)$. Das ist aber für den Beweis nicht wichtig und im weiteren sei stets $R \leq C(n, \zeta)\sqrt{n}Q^{\frac{1}{n}}$ angenommen).

Wir wollen nun die n -dimensionalen Volumina von $\mathcal{V}_a(R, Q) := \varpi(\chi_B(R)) \cap U_{n+1}(Q) \cap H_{0,a}$ mit kleinem a abschätzen (in der Rechnung eben mit $\mathcal{V}_0$ war $a = 0$).

Aus Stetigkeitsgründen gibt es zu jedem festen Q ein Intervall $I(Q) = (-T(Q), T(Q))$ sodass für $a \in I(Q)$ gilt

$$\text{vol}_n(\mathcal{V}_a(R, Q)) \geq \frac{1}{2} \text{vol}_n(\mathcal{V}_0(R, Q)) \geq \frac{1}{2} m_3 R Q^{\frac{n-1}{n}}, \quad a \in (-T(Q), T(Q)). \quad (3.139)$$

Wir führen dies noch näher aus: Sei $\pi_Y : \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^n$ die Projektion $(x, y_1, \dots, y_n) \mapsto (y_1, \dots, y_n)$ und bezeichne $\mathbb{1}_M(z)$ die Indikatorfunktion an der Stelle $z \in \mathbb{R}^n$ bezüglich einer Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$. Wir definieren für jedes Paar R, Q und eine reelle Folge $(a_l)_{l \geq 1}$

$$\begin{aligned} M_0 &:= \pi_Y(\mathcal{V}_0(R, Q)) = \pi_Y(\varpi(\chi_B(R)) \cap U_{n+1}(Q) \cap H_0) \subset \mathbb{R}^n \\ M_l &:= \pi_Y(\mathcal{V}_{a_l}(R, Q)) = \pi_Y(\varpi(\chi_B(R)) \cap U_{n+1}(Q) \cap H_{0,a_l}) \subset \mathbb{R}^n, \quad l > 0. \end{aligned}$$

Beachte, dass $M_0 = M_0(R, Q)$, $M_l = M_l(R, Q)$ von R, Q abhängen.

Da $H_1 \neq H_0$ gibt es zunächst sogar ein reelles Intervall $a \in (-N, N)$ um Null sodass $\chi_B(R) \cap U_{n+1}(Q) \cap H_{0,a} \neq \emptyset$. Aufgrund der Definitionen von $\chi_B(R), U_{n+1}(Q), H_{0,a}$ sieht man leicht die stetige Abhängigkeit von der x -Komponente a . Es folgt offenbar punktweise in z für jede Nullfolge $(a_l)_{l \geq 1}$ bei festen R, Q

$$\lim_{l \rightarrow \infty} f_l(z) := \lim_{l \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{M_l}(z) = \mathbb{1}_{M_0}(z) =: f_0(z).$$

Daraus folgt mit dem Lemma von Fatou angewandt auf das n -dimensionale Lebesguemaß λ_n

$$\text{vol}_n(M_0) = \int_{\mathbb{R}^n} f_0 \, d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{l \rightarrow \infty} f_l \, d\lambda_n = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_l \, d\lambda_n = \lim_{l \rightarrow \infty} \text{vol}_n(M_l).$$

Die Beliebigkeit der Nullfolge $(a_l)_{l \geq 1}$ impliziert die stetige Abhängigkeit dieser Volumina $\text{vol}_n(M_a)$ von a , aber klarerweise, weil π_Y orthogonal zu den Hyperebenen $H_{0,a} \supset \mathcal{V}_a$ projiziert auch $\text{vol}_n(M_a) = \text{vol}_n(\mathcal{V}_a(R, Q))$. Damit folgt insgesamt (3.139).

Wir behaupten als nächstes: Das maximal wählbare $a = T(Q)$ in (3.139), sodass also $\text{vol}_n(\mathcal{V}_a(R, Q)) = \frac{1}{2} m_3 R Q^{\frac{n-1}{n}}$, ist bei festem R proportional zu $Q^{\frac{1}{n}}$. Bemerke hierzu zunächst, dass mit $Q^* := u^n Q$ bzw. $(R^*, (Q^*)^{\frac{1}{n}}) := (uR, uQ^{\frac{1}{n}})$ mit reellem Parameter $u > 0$ alle betrachteten Mengen als Teilmengen des $\mathbb{R}^{n+1}$ ähnlich mit Ähnlichkeitsfaktor u sind, also insbesondere für alle a

$$\frac{\text{vol}_n(\mathcal{V}_a(R, Q))}{R Q^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{u^n \text{vol}_n(\mathcal{V}_a(R, Q))}{(uR)(u^{n-1} Q^{\frac{n-1}{n}})} = \frac{\text{vol}_n(\mathcal{V}_{ua}(R^*, Q^*))}{R^* (Q^*)^{\frac{n-1}{n}}}.$$

Im Falle $a = T(Q)$ ergibt sich also genau mit der Wahl $T(Q^*) = ua = (Q^*)^{\frac{1}{n}} [Q^{-\frac{1}{n}} T(Q)]$ jeweils der Wert $\frac{1}{2} m_3$. Dabei kann man $[Q^{-\frac{1}{n}} T(Q)]$ zu fest gewähltem $Q = Q_0$ als Konstante auffassen. Da zusätzlich noch das Volumen $\text{vol}_n(\mathcal{V}_a(R, Q))$ bei festem Q mit wachsendem R abnimmt und folglich für $u > 1$ oder äquivalent $Q^* > Q$ das Paar (R, Q^*) ein größeres Volumen $\text{vol}_n(\mathcal{V}_a(\cdot, \cdot))$ liefert als das Paar (R^*, Q^*) , folgt die Behauptung.

Insbesondere wächst $T(Q)$ bei festem R mit steigendem Q . Daraus folgt aber mit (3.139), dass

es ein festes $a'' > 0$ gibt, sodass für alle hinreichend großen $Q \geq Q_1$ mit einem $Q_1 = Q_1(a'')$ und $-a'' \leq a \leq a''$ gilt:

$$\text{vol}_n(\mathcal{V}_a(R, Q)) \geq \frac{1}{2} m_3 R Q^{\frac{n-1}{n}}. \quad (3.140)$$

Für $-a'' \leq a \leq a''$ und $Q \geq Q_1$ wie oben ist wegen (3.138), (3.140) folglich mit $G_0 := \frac{1}{2} m_3$

$$G_0 Q^{\frac{n-1}{n}} R \leq \text{vol}_n(H_{0,a} \cap \varpi(\chi_B(R) \cap \chi_C(Q))) \leq D_0 Q^{\frac{n-1}{n}} \cdot D_1 R \quad (3.141)$$

für ein positive Konstante D_1 , die nur vom Winkel zwischen der x -Achse und H_1 abhängt.

Wir haben also das n -dimensionale Volumen von Schnitten mit Hyperebenen $H_{0,a}$ für kleine a deren Normalvektor $(x, y_1, \dots, y_n) = (1, 0, 0, \dots, 0)$ ist, abgeschätzt.

$\chi_A(Q)$ hat die Dicke $2mQ^{-1}$ in zur Hyperebene $P(\zeta) = 0$ orthogonaler Richtung mit von Q unabhängigen nur vom Winkel zwischen x -Achse und Hyperebene $P(\zeta) = 0$ abhängigen Konstante $m = m(n, \zeta)$. Daraus folgt

$$\varpi(\chi_A(Q)) = \bigcup_{-mQ^{-1} \leq a \leq mQ^{-1}} H_{0,a} = \{(x, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| \leq mQ^{-1}\}. \quad (3.142)$$

Der Satz von Fubini ergibt nun durch Integrieren des n -dimensionalen Flächenelements $F_x(Q)$ bei festem x -Wert entlang der x -Achse das Volumen des um ϖ gedrehten Körpers $\chi_A(Q) \cap \chi_B(R) \cap \chi_C(Q)$. Unter Beachtung von (3.142) liefert dies

$$\text{vol}(\varpi(\chi_A(Q) \cap \chi_B(R) \cap \chi_C(Q))) = \int_{-mQ^{-1}}^{mQ^{-1}} F_x(Q) dx. \quad (3.143)$$

Da die Hyperbenen $x = a$ gerade $H_{0,a}$ sind, also $F_a(Q) = \text{vol}_n(\mathcal{V}_a(Q))$, kann man die oberen und unteren Schranken aus (3.141) direkt als Abschätzungen für $F_x(Q)$ auffassen. Gemäß dieser Abschätzungen eingesetzt in (3.143) ergeben sich für $Q_2 := m\frac{1}{a''}$ und $Q \geq \max\{Q_1, Q_2\}$, sodass man also (3.140) und damit (3.141) auf den Integrand in (3.143) anwenden kann, die obere bzw untere Schranke

$$\begin{aligned} \text{vol}(\varpi(\chi_A(Q) \cap \chi_B(R) \cap \chi_C(Q))) &\leq 2mQ^{-1} \cdot D_0 D_1 Q^{\frac{n-1}{n}} R = 2mD_0 D_1 Q^{-\frac{1}{n}} R \\ \text{vol}(\varpi(\chi_A(Q) \cap \chi_B(R) \cap \chi_C(Q))) &\geq 2mQ^{-1} \cdot G_0 Q^{\frac{n-1}{n}} R = 2mG_0 Q^{-\frac{1}{n}} R. \end{aligned}$$

wobei (3.137) bei der Abschätzung nach oben eingegangen ist. Da ϖ als Drehung das Volumen unverändert lässt also auch

$$\begin{aligned} \text{vol}(\chi_A(Q) \cap \chi_B(R) \cap \chi_C(Q)) &\leq 2mD_0 D_1 Q^{-\frac{1}{n}} R \\ \text{vol}(\chi_A(Q) \cap \chi_B(R) \cap \chi_C(Q)) &\geq 2mG_0 Q^{-\frac{1}{n}} R. \end{aligned}$$

Die Aussage des Lemmas folgt mit $E := 2mD_0 D_1$, $F := 2mG_0$. □

Bemerkung: Nur die Abschätzungen nach unten benötigen die Voraussetzungen Q hinreichend groß und $R \leq C(n, \zeta) Q^{\frac{1}{n}}$, wie der Beweis gezeigt hat. Dies sind aber die für unsere Zwecke wichtigeren Abschätzungen, wie der Beweis nachfolgenden Korollars zeigt.

Korollar 3.9. Im Kontext vom Beweis von Satz 3.4 gilt $\lim_{Q \rightarrow \infty} \log_Q c(Q) = 0$.

Beweis: Es gilt offenbar mit der Notation von Lemma 3.12 und $c(Q)$ definiert wie im ersten Teil des Beweises von Satz 3.4, $c(Q) = R(Q) Q^{-\frac{1}{n}}$ für genau jenes $R = R(Q)$, für das

$$\text{vol}(\chi_A(Q) \cap \chi_B(R) \cap \chi_C(Q)) = \frac{2^{n+1}}{2(n+1)!}.$$

Offenbar ist dabei $R \leq C(n, \zeta) \sqrt{n} Q^{\frac{1}{n}}$ erfüllt, da sonst $\chi_A(Q) \cap \chi_B(R) \cap \chi_C(Q) = \chi_A(Q) \cap \chi_C(Q)$ und damit $\text{vol}(\chi_A(Q) \cap \chi_B(R) \cap \chi_C(Q)) = \text{vol}(\chi_A(Q) \cap \chi_C(Q)) = 2^{n+1} \neq \frac{2^{n+1}}{2(n+1)!}$.

Wir dürfen also Lemma 3.12 anwenden und mit der Konstante $F = F(n, \zeta)$ aus ebendiesem Lemma gilt

$$\frac{2^{n+1}}{2(n+1)!} \geq FR(Q)Q^{-\frac{1}{n}},$$

oder äquivalent $B \cdot Q^{\frac{1}{n}} \geq R(Q) = Q^{\frac{1}{n}} c(Q)$ mit $B := \frac{2^{n+1}}{2(n+1)!F}$ für alle $Q > 0$ und damit $c(Q) \leq B$ für alle Q . Insbesondere also $\lim_{Q \rightarrow \infty} \log_Q c(Q) = 0$. $\square$

Nun kommen wir abschließend zum im Titel vom aktuellen Abschnitt 3.2.3 erwähnten neuen Resultat. Dieses lässt sich unter geringfügigen Adaptionen analog zum Beweis von Satz 3.4 herleiten, weshalb wir den Beweis nur skizzenhaft ausführen. Es betrifft die gleichmäßige Approximationskonstante $\hat{w}_n^*(\zeta)$. Sie steht in analogem Zusammenhang zu $w_n^*(\zeta)$ wie etwa $w_n(\zeta)$ zu $\hat{w}_n(\zeta)$ (oder ω_j zu $\hat{\omega}_j$) und ist wie folgt definiert.

Definition 3.9. Wir bezeichnen zu festen $n \geq 1$ und $\zeta \in \mathbb{R}$ die größte reelle Zahl, sodass

$$|\zeta - \alpha| \ll H(\alpha)^{-\mu-1}$$

für alle hinreichend großen H eine algebraische Zahl α vom Grad $\leq n$ mit $H(\alpha) \leq H$ mit nur von n, ζ abhängigen Konstanten in $\ll$ als Lösung besitzt, mit $\hat{w}_n^*(\zeta)$.

Es folgt wieder aus (3.57), dass man sich auf das Studium von Polynomen von Grad $\leq n$ beschränken kann, um die Approximationskonstante $\hat{w}_n^*(\zeta)$ zu verstehen. Dies werden wir im Beweis implizit verwenden.

Satz 3.5. Für alle positiven ganzen Zahlen n und alle $\zeta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\hat{w}_n^*(\zeta) \geq \hat{w}_{n,n+1}(\zeta).$$

Beweis:[Skizze] Indem man im wesentlichen der Argumentation des Beweises von Satz 3.4 folgt, erhält man unter Berücksichtigung der Definitionen der Größen $\mathcal{L}_{n+1,A}^*$ und $\overline{\mathcal{V}}_{n+1,A}^*$, dass es für jedes hinreichend große H ein Polynom P der Höhe $H(P) \leq H$ gibt, sodass (3.133)-(3.135) erfüllt ist, wenn man jeweils $\mathcal{L}_{n+1,A}^*$ durch $\overline{\mathcal{V}}_{n+1,A}^*$ ersetzt. Daraus ergibt sich die Behauptung mittels (3.52) analog zu (3.136) in Kombination mit Korollar 3.9 zu Lemma 3.12. $\square$

Bemerkungen: 1) Da wir ein vergleichbares Resultat zu jenem von Wirsing für $\hat{w}_n^*(\zeta)$ nicht zur Verfügung haben, ist es schwierig eine vernünftige gleichmäßige untere Schranke für $\hat{w}_n^*(\zeta)$ anzugeben.

2) Man kann analog zu Satz 3.4 auch Lemma 3.9 "dualisieren", die Beziehung

$$\hat{w}_n^*(\zeta) \geq \frac{w_n(\zeta)}{w_n(\zeta) + 1 - n}.$$

wurde in [7] erbracht und findet sich auch in [17] Seite 22.

Korollar 3.10. Sei n eine positive ganze Zahl und $\zeta \in \mathbb{R}$. Weiter sei ω die Approximationskonstante der Kapitel 1 und 2 zu $(\zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^n)$. Dann gilt

$$\hat{w}_n^*(\zeta) \geq \frac{1}{\omega}.$$

Beweis: Kombination aus Satz 3.5 und (3.54). $\square$

Anhang A

Programm

A.1 Herleitung eines Algorithmus

Das vorliegende Programm beschäftigt sich mit dem simultanen Approximationsproblem

$$\begin{aligned} |x| &\leq Q^{+1+\theta} \\ |\zeta_1 x - y_1| &\leq Q^{-\frac{1}{n-1}+\theta} \\ |\zeta_2 x - y_2| &\leq Q^{-\frac{1}{n-1}+\theta} \\ &\vdots \\ |\zeta_{n-1} x - y_{n-1}| &\leq Q^{-\frac{1}{n-1}+\theta} \end{aligned}$$

für $\mathbb{Q}$ -linear unabhängige und oBdA positive $\{1, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n-1}\}$. Genauer betrachtet man die *sukzessiven Minima*

$$\lambda_i(Q) := \min\{\lambda > 0 : \dim(\text{span}(\lambda \cdot C \cap \Gamma)) = i\}$$

wobei C der Quader $C := [-Q, Q] \times \left[-Q^{-\frac{1}{n-1}}, Q^{-\frac{1}{n-1}}\right]^{n-1}$ ist und Γ das Gitter bestehend aus allen Vektoren

$$(x, \zeta_1 x - y_1, \zeta_2 x - y_2, \dots, \zeta_{n-1} x - y_{n-1}), \quad \mathbf{x} := (x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{Z}^n$$

Die im Programm berechneten L_i sind nun definiert durch

$$L_i(q) := \log(\lambda_i(e^q)), \quad q := \log(Q)$$

Definiert man für ein $\mathbf{x} = (x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{Z}^n$

$$L_{\mathbf{x}}(q) := \max \left\{ \log(x) - q, \max_{1 \leq i \leq n-1} \log(|\zeta_i x - y_i|) + \frac{q}{n-1} \right\}$$

so ist $L_i(q)$ der kleinste Wert s , zu dem i linear unabhängige $\mathbf{x}$ existieren mit jeweils $L_{\mathbf{x}}(q) \leq s$. Klarerweise gibt es ein zugehöriges $\mathbf{x}$ mit $L_i(q) = L_{\mathbf{x}}(q)$ und genau bei lokalen Maxima von L_i treffen zwei Vektoren $\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}$ zusammen mit $x_k < x_{k+1}$, dieses $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{k+1}$ ist allein maßgeblich für das folgende lokale Minimum. Es bezeichne im weiteren $\mathbf{x}_2$ das zum lokalen Extremum gehörige $\mathbf{x}$, die lokalen Minima seien auch als *Knickpunkte* bezeichnet.

Diese $L_i(q)$ sind folglich stückweise linear mit Steigung -1 oder $1/(n-1)$.

Input:

$\zeta := (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n-1})$ mit $\{1, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n-1}\} \subset \mathbb{Q}$ -linear unabhängig (idealisiert).
 q_{max} ... terminiert Abbruch, genauer wird bis zum Schnittpunkt der fallenden (weitergezeichneten) Gerade des ersten lokalen Minimums q von $L_n(q)$ das $q > q_{\text{max}}$ und alle n Bestapproximationen kleiner als $\log(0.5)$ erfüllt, mit den $L_i(q)$ gerechnet und geplottet

Output:

plot der Funktionen $L_1(q), L_2(q), \dots, L_n(q)$ bis zu oben genannter Gerade
 $laenge_vorlauf$... größtes x im Vorlauf des Programms $d(n) > \log(0.5)$
 x_{max} ... letztes durchlaufenes x
 $bestapproximationen$... Vektor der n Bestapproximationen $\max_i |\zeta_i x - y_i|$, $x \leq x_{\text{max}}$ zu l.u. zugehörigen Vektoren $\mathbf{x}$
 $\log_bestapproximationen$... Vektor Länge n , Eintragsweise Logarithmen obigen Vektors
 K ... Matrix; in der j -ten Zeile stehen die $M(j)$ -Stück lokalen Extrema von L_j der Größe nach, ab $M(j) + 1$ bis $\max_j M(j)$ durch 0 fortgesetzt

Bemerkung: es gilt $x_{\text{max}} \geq laenge_vorlauf + 1$

Das Programm berechnet der Reihe nach die lokalen Extrema der $L_i(q)$ die von neuen $\mathbf{x}$ hervorgerufen werden und speichert sie in Matrix K mit n Zeilen. Dabei wird durchgehend Verwendung davon gemacht, dass für $\mathbf{x}_k < \mathbf{x}_{k+1}$ mit $x_k < x_{k+1}$ stets bis zum ersten Knickpunkt $L_{\mathbf{x}_k} < L_{\mathbf{x}_{k+1}}$ gilt, sodass also die zu lokalen Extrema $K_{i,1:M(i)}$ von L_i gehörigen $\mathbf{x}$ mit steigendem Index j im Vektor M streng monoton wachsende x -Koordinaten haben.

Es werden für jede neue x -Koordinate die notwendige Anzahl an Bestapproximationen $(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{Z}^{n-1}$ für $L_{\mathbf{x}}$ mit $\mathbf{x} = (x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ bestimmt. Dann wird überprüft, in welcher Weise diese neuen Vektoren den Verlauf der L_i verändern und schließlich x um 1 erhöht und das Ganze beginnt von neuem.

Um diese Überprüfungsphase korrekt und rechenzeitsparend durchzuführen sind zwei einfache Lemmata nachzuprüfen:

Lemma A.1. Für festes $x \in \mathbb{N}$ erfüllt genau ein $(n-1)$ -Tupel $(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ die Bedingung

$$\omega_{\mathbf{x}} := \max_i |\zeta_i x - y_i| \leq \frac{1}{2}$$

Beweis: Für feste i, ζ_i, x ist $|\zeta_i x - y_i| \leq \frac{1}{2}$ wegen $\zeta_i \notin \mathbb{Q}$ für alle i und daher $\{\zeta_i x\} \neq \frac{1}{2}$ offenbar nur genau für die eindeutig bestimmte nächste ganze Zahl $\|\zeta_i x\|$ an $\zeta_i x$ erfüllt. Also ist auch das $(n-1)$ -Tupel eindeutig als dieser Bestapproximationsvektor bestimmt. $\square$

Bemerkung: Man sollte gemäß Lemma A.1 Fälle vermeiden, in denen numerisch für kleine x und einen Index $\{\zeta_i x\} \approx \frac{1}{2}$ gilt.

Lemma A.2. Betrachtet man für festes $x \in \mathbb{N}$ wieder zu jedem $\mathbf{x} := (x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{Z}^n$ den Wert

$$\omega_{\mathbf{x}} := \max_i |\zeta_i x - y_i|$$

und ordnet diese der Größe nach, so sind unter den kleinsten $2^{n-2} + 1$ Zahlen $\omega_{\mathbf{x}}$ stets n Stück $\omega_{\mathbf{x}_1}, \omega_{\mathbf{x}_2}, \dots, \omega_{\mathbf{x}_n}$ zu finden, deren zugehörige Vektoren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ linear unabhängig sind.

Definition A.1 (lineare Hülle, affine Hülle). Die *lineare Hülle* zu gegebenen $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^n$ ist der von den $\mathbf{y}_i$ aufgespannte Unterraum von $\mathbb{R}^n$, formelmäßig gegeben durch

$$\{\lambda_1 \mathbf{y}_1 + \lambda_2 \mathbf{y}_2 + \cdots + \lambda_k \mathbf{y}_k : \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

Die *affine Hülle* zu gegebenen $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^n$ ist der um den Vektor $\mathbf{y}_1$ verschobene Unterraum von $\mathbb{R}^n$ der von den Differenzvektoren $\{\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_1, \quad 2 \leq i \leq k\}$ aufgespannt wird, formelmäßig gegeben durch

$$\left\{ \lambda_1 \mathbf{y}_1 + \lambda_2 \mathbf{y}_2 + \cdots + \lambda_k \mathbf{y}_k : \lambda_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}$$

Hilfslemma: Die Dimension der affinen Hülle einer Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist nie größer als die der linearen Hülle und Gleichheit gilt genau dann, wenn die affine Hülle mit der linearen Hülle übereinstimmt. Dies ist genau dann der Fall, wenn die affine Hülle den Nullvektor enthält.

Beweis Hilfslemma: Aus der Definition der affinen bzw linearen Hülle als Linearkombinationen folgt unmittelbar, dass die affine Hülle stets in der linearen Hülle enthalten ist. Daraus folgen sofort die ersten beiden Aussagen. Letzte folgt aus der Tatsache, dass affine Teilräume genau dann Unterräume sind, wenn sie den Nullvektor enthalten.

Bemerkung: Es folgt ebenfalls sofort aus den Definitionen von linearer und affiner Hülle, dass die Dimension der affinen Hülle nicht mehr als um 1 kleiner sein kann als die der linearen Hülle.

Beweis: Vorab zur Bezeichnung: Unter der i -ten Bestapproximation zu gegebenen $x_0, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n-1}$ verstehen wir

$$d(i) := \max \{t \in \mathbb{R} : \forall \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i \text{ l.u. : } t \leq \log(\omega_{\mathbf{x}_i})\} \quad (\text{A.1})$$

wobei alle $\mathbf{x}_i$ die x -Koordinate x_0 haben. Beachte, dass es stets ein i -Tupel von Vektoren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_i$ gibt, für welches $d(i)$ angenommen wird da es für jedes feste x_0 nur eine endliche Menge von Approximationsvektoren gibt die zu guten Approximationen führen (weshalb man überhaupt erst Maximum statt Supremum schreiben darf). Die zugehörigen Vektoren $\mathbf{x}_j$ heißen Bestapproximationsvektoren. Weiters bedeutet im folgenden die richtig gerundete Zahl zu $\zeta_i x$ die nächste ganze Zahl, und falsch gerundet die zweitnächste. Die beiden Werte sind also als ungeordnete Menge gegeben durch $\lfloor \zeta_i x_0 \rfloor$ und $\lceil \zeta_i x_0 \rceil$.

Zunächst ordnet man die logarithmierten Abstände der $\zeta_i x$ zur nächsten ganzen Zahl der Größe nach ordnet, also

$$\begin{aligned} b_1 &= \min_i \min_{y \in \mathbb{N}} |\zeta_i x - y|, \quad \min_i =: i_1 \\ b_2 &= \min_{i \neq i_1} \min_{y \in \mathbb{N}} |\zeta_i x - y|, \quad \min_{i \neq i_1} =: i_2 \\ b_3 &= \min_{i \notin \{i_1, i_2\}} \min_{y \in \mathbb{N}} |\zeta_i x - y|, \quad \min_{i \notin \{i_1, i_2\}} =: i_3 \\ &\vdots \\ b_{n-1} &= \min_{i \notin \{i_1, i_2, \dots, i_{n-2}\}} \min_{y \in \mathbb{N}} |\zeta_i x - y| = \max_i \min_{y \in \mathbb{N}} |\zeta_i x - y| \end{aligned}$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass für festes $x = x_0$ die Bestapproximation mit Wert b_{n-1} durch richtiges runden aller $\zeta_i x_0$ und für $1 \leq j \leq n-1$ die kleinsten 2^j Werte $\omega_{\mathbf{x}}$ davon die größten 2^{j-1} mit Wert b_{n-1-j} dadurch entstehen, dass man alle Kombinationen $y_{i_k} = \lfloor \zeta_{i_k} x_0 \rfloor$ und $y_{i_k} = \lceil \zeta_{i_k} x_0 \rceil$ für $n-j \leq k \leq n-1$ nimmt und die übrigen $n-j-1$ richtig rundet. (Mit $j = n-1$ sind das übrigen genau die $(n-1)$ -Tupel, für die $\omega_{\mathbf{x}} < 1$ gilt.)

Diese 2^j Punkte bilden die Eckpunkte eines j -dimensionalen Würfels W_j mit Seitenlänge 1, und es gilt

$$W_j \subset W_{j+1}.$$

Offenbar nimmt die Dimension der affinen Hülle der ersten k Punkte genau an den Stellen $k \in \Omega := \{1, 2, \cup_{j=1}^{n-2} \{2^j + 1\}\}$ um eins zu, wenn man für die leere Menge formal Dimension -1 setzt, denn der erste Punkt spannt erst einen affinen Raum der Dimension 0 auf. Ordnet man zu $x = x_0$ für alle Vektoren $\mathbf{x}$ die Werte $\omega_{\mathbf{x}}$ der Größe nach

$$\mathbf{x}_1 < \mathbf{x}_2 < \dots,$$

so spannt die n -elementige Menge $\{\mathbf{x}_k, k \in \Omega\}$ folglich einen $(n-1)$ -dimensionalen affinen Raum auf. Daher könnte die Dimension nach obigem Hilfslemma nur dann echt kleiner n sein, wenn die affine Hülle dieser Würfeckpunkte den Nullvektor enthält. Das ist aber unmöglich, da der ganze Würfel in einer Hyperebene mit fester x -Koordinate ungleich Null liegt. $\square$

Bemerkung: Der Beweis von Lemma A.2 zusammen mit der Bemerkung nach dem Hilfslemma zeigen, dass man zu festem x explizite Kenntnis der n Bestapproximationsvektoren besitzt. Denn die lineare Hülle einer Menge von Vektoren kann durch Hinzugabe eines weiteren Vektors natürlich nur dann an Dimension anwachsen wenn die affine dies tut. Die durch die Indexmenge Ω - die ja die Stellen des Anwachsens der affinen Hülle um Dimension 1 kennzeichnet- beschriebene Menge an Bestapproximationsvektoren kann also nicht verbessert werden. Dies wird im weiteren verwendet.

Im weiteren wird aufgrund der Lesbarkeit nicht durchgehend streng zwischen dem Vektor der Bestapproximationen und dem logarithmierten Vektor `log_bestapproximationen` unterschieden (siehe Output). Der im folgenden auftretende Vektor d wird stets die bereits logarithmierten Bestapproximationen enthalten, zwischendurch wird `Bestapproximation(en)` aber auch für die noch nicht logarithmierte Version verwendet.

Nach Lemma A.2 und der Definition von $L_{\mathbf{x}}$ existieren zu $x = 1$ stets n linear unabhängige Vektoren $\mathbf{x}$ die

$$L_{\mathbf{x}}(q) \leq 0, \quad q \in [0, q_0], \quad q_0 > 0$$

erfüllen. Das bedeutet, dass alle L_i in einer Nullumgebung Steigung -1 haben. Um den ersten Knickpunkt von L_j zu berechnen, muss man also den Vektor b aus dem Beweis von Lemma A.2 berechnen und sich für später auch die zugehörigen Bestapproximationsvektoren merken. Dies geschieht, indem die n Bestapproximationen aus dem Beweis von nach Lemma A.2 der Größe ihrer Bestapproximation nach zeilenweise in eine $(n \times n)$ -Matrix C gespeichert werden, die n Bestapproximationen (aus den b_i gewonnen) logarithmiert in einen Vektor d . Die Zeilen von C minimieren also $\omega(\mathbf{x})$ für linear unabhängige $\mathbf{x}$ und ist $\mathbf{x}_i$ die i -te Zeile von C , so gilt $d(i) = \log(\omega_{\mathbf{x}_i})$.

Im Programm passiert dies entsprechend dem Beweis von Lemma A.2. Zuerst werden die Abstände von $\zeta_i x$ zur nächsten ganzen Zahl der Größe nach geordnet. Die bereits nach aufsteigender Größe geordneten Werte seien mit $g(1), g(2), \dots, g(n-1)$ bezeichnet. Sie entsprechen den $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ aus dem Beweis von Lemma A.2. Tatsächlich werden im Programm die Bestapproximationen zu jedem $1 \leq i \leq n-1$ noch ungeordnet und zuerst in einem Vektor b gespeichert und dann mittels eines vordefinierten sort-Algorithmus die Werte geordnet in einen Vektor g gespeichert und ein Hilfsvektor h mitgeführt, der angibt an welcher Stelle in b das entsprechende Element von g steht, also $g(j) = b(h(j))$. (Dies ist unter anderem notwendig, um die richtigen Spalten in der Matrix C zu ändern, die im kommenden im Vorlauf durch zusammenstückeln zweier Matrizen entsteht. Würden die Spalten dieser beiden Matrizen verschieden getauscht, könnte der Rang

nicht korrekt wiedergegeben werden.)

Der Bestapproximationsvektor ist einfach dieser Vektor der nächsten ganzen Zahlen, der zugehörige Wert ist $d(1) = \log(g(1))$. Danach erhält man für $1 \leq j \leq n-1$ jeweils den nächstbesten Bestapproximationsvektoren mit Wert $d(j+1) = \log(1 - g(j+1))$, indem man die i_j -Koordinate falsch und die übrigen richtig rundet.

Die ersten Knickpunkte $K(i, \cdot)$ von L_i errechnen sich durch Lösen von

$$\log(x) - K(i, \cdot) = d(i) + \frac{K(i, \cdot)}{2} \implies K(i, \cdot) = \frac{2}{3} \cdot [\log(x) - d(i)], \quad 1 \leq i \leq n. \quad (\text{A.2})$$

Nun beginnt der *Vorlauf* des Programms, die Phase in der $d(n) > \log(0.5)$. Anfangs ist dies für $n \geq 2$ stets erfüllt, da der Vektor d nach Lemma A.1 nur an der ersten Stelle einen Wert kleiner $\log(0.5)$ annimmt. Die Matrix C wird gemäß dem Beweis von Lemma A.2 um die Matrix D der n Bestapproximationsvektoren zum nächsten x - wieder analog zur Bestimmung der Matrix C bei der Bestimmung ersten Knickpunkte mithilfe von neuen Vektoren b, g, h - erweitert, zeilenweise geordnet nach der Approximationsgüte, sodass eine $(2n \times n)$ -Matrix E entsteht. Der aus dem zum neuen x gehörigen Vektor g gewonnene Vektor der Bestapproximationswerte der oben bereits mit den Bestapproximationen d übereinstimmte wird nun mit r bezeichnet. Es gilt also

$$\begin{aligned} r(1) &= \log(g(1)) \\ r(j+1) &= \log(1 - g(n-j)), \quad 1 \leq j \leq n-1. \end{aligned}$$

Der Vektor d wird um den neuen Vektor r auf einen Vektor e der Länge $2n$ erweitert, also

$$\begin{aligned} e(j) &= d(j), \quad 1 \leq j \leq n \\ e(j) &= r(j), \quad n+1 \leq j \leq 2n. \end{aligned}$$

Nun wird e wieder mit der sort-Funktion zu einem Vektor p geordnet und die entsprechenden Indizes in e in einem Vektor q mitgeführt, sodass also $p(j) = e(q(j))$, $1 \leq j \leq 2n$, und mithilfe dieser Vektoren werden die Zeilen der Matrix E der Approximationsgüte nach geordnet und die ersten $(2n-1)$ entstehenden Zeilen der Matrix wieder in C umbenannt, C ist also eine $(2n-1) \times n$ -Matrix. Der schlechteste Approximationsvektor der in der letzten $(2n)$ -ten Zeile stehen würde muss nicht mehr betrachtet werden, da nach den ersten $(2n-1)$ Zeilen sicher eines der beiden n -Tupel aus der alten Matrix C und der Matrix D bereits vollständig aufgetreten ist und daher der Rang der Matrix an dieser Stelle bereits n ist. Dabei ist die lineare Unabhängigkeit der ersten n Zeilen von C noch nicht notwendig gewährleistet.

Danach wird also für L_j untersucht, wann die ersten j linear unabhängigen Vektoren in C gefunden sind. Dies geschieht unter Vermeidung der rank-Funktion, indem alle n -elementigen Teilmengen

$$\{(m_1, m_2, \dots, m_n) : m_1 < m_2 < \dots < m_n\} \subset \{1, 2, \dots, 2n-1\}$$

lexikographisch geordnet durchlaufen werden bis erstmals die Matrix die aus den $m_1, m_2, \dots, m_n$ -ten Zeilen von C gebildet wird, regulär ist. C wird von dieser neuen $(n \times n)$ -Matrix überschrieben. Die entsprechenden m_i -Werte zeigen auch an, welche Einträge von e in welcher Abfolge im neuen Vektor d stehen müssen, der nun die korrekten n besten Werte enthält. Genauer: Die alte Matrix C (vor der eben erfolgten Rangabklärung) hat genau ab der m_j -ten Zeile Rang mindestens j (klarerweise $m_j \geq j$), und es gilt daher offenbar $d(j) = e(m_j)$, $1 \leq j \leq n$. Die nun überschriebene $(n \times n)$ -Matrix C und der Vektor d sind nun die echten Bestapproximationen bis inklusive zur neuen x -Koordinate.

Ist also $\mathbf{x}_i$ die i -te Zeile von C , so minimiert $d(i)$ den Wert $\log(\omega_{\mathbf{x}_i})$, sodass es i linear unabhängige Vektoren $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_i$ gibt mit $\log(\omega_{\mathbf{y}_i}) \leq d(i)$. Dann werden die neuen Extrema gemäß (A.2)

berechnet. Für genau die j , für die L_j durch ein zum neuen x gehöriges $\mathbf{x}$ keine (zwei) neuen Extrema entstehen, werden diese im nächsten Durchlauf überschrieben.

Ab dem Zeitpunkt $d(n) < \log(0.5)$ (in der Regel passiert dies sehr früh, nach Lemma A.3 geschieht es stets irgendwann) muss man gemäß Lemma A.1 nur noch die Bestapproximationen zu $\zeta_i x$, also $b_1(x)$ betrachten. Verlässt man also den Vorlauf, so wird in jedem weiteren Durchlauf zuerst so lange x erhöht und (nur) die zugehörige Bestapproximation dazu berechnet, bis diese (Erst-)Bestapproximation kleiner als das aktuelle $d(n)$ ist, also die aktuelle n -Bestapproximation, denn das sind die einzigen Werte, an denen potentiell neue Extrema der L_j entstehen können. In diesem Fall arbeitet man fortan also durch Hinzufügen des zugehörigen Bestapproximationsvektors zur Matrix der alten n Bestapproximationsvektoren nur mehr mit einer $((n+1) \times n)$ -Matrix C vom Rang n . Daher reicht es herauszufinden, an welcher Stelle (in welcher Zeile) die Matrix ihren vollen Rang verliert und von da an ist der Rang stets um 1 defizient. Dies wird im Programm realisiert, indem man j so lange vergrößert bis beim Überschreiben der Zeilen $(n-j)$ bis n durch die jeweils darauffolgende bis die entstehende Matrix regulär ist. In der $(n-j)$ -ten Zeile wird C dann offenbar rangdefizient. Dieses Vorgehen vermeidet abermals die rank-Funktion, es müssen erneut lediglich die Determinanten der entsprechenden Matrizen C ausgewertet werden um festzustellen ob sie regulär sind. Der Vektor d wird wieder bestimmt, indem ab der defizienten Index jeder Eintrag von d durch den darauffolgenden überschrieben wird, und die neuen lokalen Extrema werden wieder gemäß (A.2) berechnet.

Letztendlich werden noch $L_1, L_2, \dots, L_{n-1}$ bis zur Gerade des letzten Maximums und Minimums von L_n linear mit Anstieg $1/(n-1)$ vom letzten lokalen Minimum weitergezeichnet, sollten sie durch $x_{\max}$ nicht ohnehin neue Extrema annehmen, da bis dahin offensichtlich kein x neue Extrema verursacht hat. Die Abfrage, ob ein L_j durch $x_{\max}$ verursachte Extrema hat erfolgt durch eine Schleife.

Abbruch: Der Algorithmus bricht ab, wenn im letzten Durchlauf der langen while-Schleife $K(n, M(n)) > q_{\max}$ erkannt wird- also ein Extremum von L_n größer als $q_{\max}$ ist, und man sich nicht mehr in der Schleife befindet, in der $d(n) < \log(0.5)$ gilt. Man muss zeigen, dass beides für $q \geq q_0, q_0 \in \mathbb{R}$ erfüllt ist. Dies ist mit unserer Notation nochmals im untenstehenden Lemma abgearbeitet, es entspricht aber im wesentlichen der Aussage von Lemma 1.1.

Lemma A.3. Seien $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n-1}$ mit $\{1, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n-1}\}$ $\mathbb{Q}$ -linear unabhängig. Dann hat jedes L_j unendlich viele lokale Extrema und es existiert ein $q_0 \in \mathbb{R}$ sodass $d(n) < \log(0.5)$ für $q \geq q_0$, mit $d(i)$ wie oben in (A.1) für $1 \leq i \leq n$, wobei die x -Koordinaten aller $\mathbf{x}_i$ indirekt durch q beschränkt sind.

Beweis: Da das sukzessive Minimaproblem nach dem Dirchiletschen Approximationssatz stets eine Lösung besitzt und $Q^{-\frac{1}{n-1}}$ für festes n bei $Q \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert und das Maximum der auftretenden rechten Seiten des Ungleichungssystems aber gerade $\omega_{\mathbf{x}}$ ist, was unserem $d(1)$ entspricht, muss also $d(1) \rightarrow 0$ für $q \rightarrow \infty$ und daher muss wegen der vorausgesetzten $\mathbb{Q}$ -linearen Unabhängigkeit (insbesondere gibt es also ein irrationales ζ_i , was für diese Überlegung ausreichend ist) L_1 auch unendlich viele Extrema haben. Für alle weiteren $L_j, j \geq 2$ folgt es induktiv aus der Tatsache, dass für jedes $1 \leq s \leq n-1$ unendlich viele Stellen q mit

$$\lambda_s(q) = \lambda_{s+1}(q)$$

gibt, also auch unendlich viele Stellen q mit

$$L_s(q) = L_{s+1}(q).$$

Aus $d(j) \rightarrow 0$ für $q \rightarrow \infty$ folgt also $d(j+1) \rightarrow 0$ für $q \rightarrow \infty$ und damit gibt es auch unendlich viele lokale Extrema für L_{j+1} . $\square$

Bemerkung: die Vorlaufphase des Programms kann für spezielle Wahlen der ζ_i beliebig lange werden. Wählt man zu $k \in \mathbb{N}$ simultan $0 < \{\zeta_i\} < \frac{1}{2k}$, so sind die (Erst-)Bestapproximationsvektoren zu $x = 1, x = 2, \dots, x = k$ paarweise linear abhängig, also kann erst ab $x = k + 1$ die Vorlaufphase verlassen werden. Tatsächlich passiert dies teils erst erheblich später (als bei $\max \frac{1}{2\{\zeta_i\}}$), also ist die Rechenzeit für den Vorlauf in solchen Fällen hoch. Das Problem, dass numerisch mit rationalen Zahlen gerechnet wird und daher die Forderung aus Lemma A.3 keine praktische Grundlage hat tritt jedoch aufgrund der genügend großen Zahl von 16 Nachkommastellen in Matlab typischerweise nicht auf.

A.2 Matlabcode

```
function[m]= L1L2L3zeichnen32(zeta, q_max)

% Input: Vektor zeta der Laenge >=1, plot-Grenze q_max

% berechnet und plottet L_i(q) von q=0 wahlweise bis zur
% Gerade f(q)= log(x_max)- q an der L_n das erste Minimum nach
% q_max annimmt fuer das die n-te Bestapproximation kleiner log(0.5) ist

% und gibt weiters

% K(j,.) ...      Vektoren mit lokalen Extrema von resp. L_j
% der letzte Eintrag von r,s ist in der Regel kein Extremum von L1 bis
% L_n-1 sondern nur von L_n
% x_max ...      letztes durchlaufenes x
% Bestapproximation ...      Bestapproximationsvektor am Schluss des plots

% zurueck;

% Bestapproximation: max_{j} min_{y_j}(abs(zeta_j*x-y_j)
% bzw          max_{j} min_{y_j}log((abs(zeta_j*x-y_j))
% Q:= exp(q), 0 < x =< Q, y1, y2 ganze Zahlen
% 2./3./...n. Bestapproximation: entsprechend mit 2/3/...n lu Vektoren

% 1. SCHRITT: ersten Minima aller L_i bestimmen, x=1

% man kann die ersten Minima explizit ohne Schleife hinschreiben,
% sie haben alle x=1;

% 2. SCHRITT: Vorlauf

% nimm die besten n alten und berechne alle Approximationen < 1
% zu neuem x_neu und suche aus all diesen die n lu Bestapproximationen
% solange bis d(n)< log(0.5);

% 3. SCHRITT: Programm ab dem Zeitpunkt wo d(n)< log(0.5) ab dort brauche ich
% nur noch die Bestapproximation zu jedem x_neu berechnen

tic % Zeitmessung
```

```

n= length(zeta)+1;    % n ist Raumdimension, length(zeta) ist (n-1)

% Initialisieren

K(1:n, 1)= 0;    % Umschaltstellenvektoren q-Werte; erster Index ist i in L_i,
                % zweiter die Stelle ("= das wievielte Extremum")
L(1:n, 1)= 0;    % L_i-Vektoren; erster Index ist i in L_i, zweiter die Stelle
M(1:n)= 1;    % Hilfsvariablen zum Erhoehen des Indizes in K,L
x_neu= 1;

% 1. SCHRITT

for j=1:n-1
    if zeta(j)*x_neu- floor(zeta(j)*x_neu)< 1/2
        a(j,1)= floor(zeta(j)*x_neu);
        b(j)= zeta(j)*x_neu- floor(zeta(j)*x_neu);
        a(j,2)= ceil(zeta(j)*x_neu);
    else
        a(j,1)= ceil(zeta(j)*x_neu);
        b(j)= ceil(zeta(j)*x_neu)- zeta(j)*x_neu;
        a(j,2)= floor(zeta(j)*x_neu);
    end
end

% a(j, 1)... Bestapproximationskoordinate zu zeta(j)*x_neu
% a(j, 2)... Zweitbestapproximationskoordinate zu zeta(j)*x_neu
% b(j)... Bestapproximation zu zeta(j)*x_neu,
% b(j)= min_{y}: abs(zeta(j)*x_neu-y)

[g,h]= sort(b,2);

d(1)= log(g(n-1));
for j=2: n
    d(j)= log(1- g(n-j+1));
end

% d bestimmt

% definiere zugehoerige (n*n)-Matrix C zu Vektor d
% in j-ter Zeile steht die j.-Bestapproximation aus Z^n

C(1:n, 1)= x_neu;    % 1. Spalte von C befuellt

for j=1:n
    for t= 1:n-1
        C(j,h(t)+1)= a(h(t),1);
    end
end

for j=1:n-1
    C(j+1, h(n-j)+1)= a(h(n-j),2);
end
% ueberschreiben der falschen Eintraege

```

```

% Matrix C bestimmt

for j=1:n          % ersten lokalen Minima bestimmen
M(j)= M(j)+1;
K(j,M(j))= [(n-1)/n]*[log(x_neu)-d(j)];
L(j,M(j))= log(x_neu)- K(j,M(j));
end

% Praeparation fuer Schleife
x_neu= x_neu+1;
for j=1:n-1
    if zeta(j)*x_neu- floor(zeta(j)*x_neu)< 1/2
        a(j,1)= floor(zeta(j)*x_neu);
        b(j)= zeta(j)*x_neu- floor(zeta(j)*x_neu);
        a(j,2)= ceil(zeta(j)*x_neu);
    else
        a(j,1)= ceil(zeta(j)*x_neu);
        b(j)= ceil(zeta(j)*x_neu)- zeta(j)*x_neu;
        a(j,2)= floor(zeta(j)*x_neu);
    end
end

% a(j, 1)... Bestapproximationskoordinate zu zeta(j)*x_neu
% a(j, 2)... Zweitbestapproximationskoordinate zu zeta(j)*x_neu
% b(j)... Bestapproximation zu zeta(j)*x_neu,
% b(j)= min_{y}: abs(zeta(j)*x_neu-y)

d_neu= log(max(b)); % neue Bestapproximation, nur fuer n=1 notwendig

% 2. SCHRITT

while K(n,M(n))< q_max

% brauche in jedem Schleifendurchlauf x_neu, d_neu, Matrix a=a(1:n-1,1:2)
% Vektor b=b(1:n-1), Matrix C=C(1:n,1:n) und Vektor d= d(1:n)

    while d(n) > log(0.5)

        % d_neu < log(0.5) < d(n) -> x_neu ist sicher neues x

        for j=1:n          % lokale Maxima bestimmen
M(j)= M(j)+1;
K(j,M(j))= [(n-1)/n]*[log(x_neu)-d(j)];
L(j,M(j))= log(x_neu)- K(j,M(j));
end

        % a(j, 1)... Bestapproximationskoordinate zu zeta(j)*x(j)
        % a(j, 2)... Zweitbestapproximationskoordinate zu zeta(j)*x(j)
        % b(j)... Bestapproximation zu zeta(j)*x(j),
        % b(j)= min_{y}: abs(zeta(j)*x(j)-y)

```

```

[g,h]= sort(b,2);

r(1)= log(g(n-1));
for j=2: n
    r(j)= log(1- g(n-j+1));
end

% r enthaelt fuer die besten n lu Bestapproximationsvektoren zu
% neuem x der Groesze nach geordnet den Wert

e= [d r];                % length(e)= 2n
[p,q]= sort(e,2);

% definiere nun (n*n)-Matrix D der 2n lu bestapproximationen
% mit x= x_neu zu Vektor r;

D(1:n, 1)= x_neu;        % 1. Spalte von C befuellt

for j=1:n
    for t= 1:n-1
        D(j,h(t)+1)= a(h(t),1);
    end
end

for j=1:n-1
    D(j+1, h(n-j)+1)= a(h(n-j),2);
end

% definiere Hilfsmatrix E die spaeter wieder zu C umgeschrieben
% wird
% E enthaelt die wie e:= [d r] geordneten Bestapproximationsvektoren
% zu e (noch nicht notwendig lu)

E= [C; D];

for j=1:2*n-1
    C(j,1:n)= E(q(j),1:n); % ordnet E wie p und benennt E wieder in C um
end

% Matrix C fertig bestimmt mit n oder (n-1) alten und jenen
% (n-1) oder n neuen Bestapproximationen fuer die eine
% Aenderung in alter Matrix C auftreten kann von diesen
% muessen die kleinsten n linear unabhaengigen ermittelt werden;
% Vektor p der Laenge 2n enthaelt zugehoerige Werte;
% Vektor q der Laenge 2n enthaelt zugehoerige Positionen
% in Vektor e:= [d r];

% so lange n-Tupel (m_1,m_2,...,m_n) von (1,2,...,2n) lexikographisch
% geordnet durchlaufen bis die entstehende Matrix in der in der
% n-ten Zeile die m_n-te Zeile von C steht regulaer wird

s= 1:n;

```

```

R=C(1:n,1:n);

while abs(det(R))<1/2
    j=0;
    while s(n-j)== 2*n-1-j
        j=j+1;
    end

    alpha= s(n-j);

    for i=(n-j):n
        s(i)= alpha+i-(n-j)+1;
    end

    for j=1:n
        R(j,1:n)= C(s(j),1:n);
    end
end

C=R; % richtige Matrix C

for j=1:n
    d(j)= p(s(j));
end

for j=1:n % lokale Minima bestimmen
    M(j)= M(j)+1;
    K(j,M(j))= [(n-1)/n]*[log(x_neu)-d(j)];
    L(j,M(j))= log(x_neu)- K(j,M(j));
    if K(j,M(j))== K(j, M(j)-1)

% falls durch x_neu keine neuen Extrema gefunden

        M(j)= M(j)-2; % ueberschreibe Werte in naechstem Durchlauf
    end
end

laenge_vorlauf= x_neu;

x_neu= x_neu+1;
for j=1:n-1
    if zeta(j)*x_neu- floor(zeta(j)*x_neu)< 1/2
        a(j,1)= floor(zeta(j)*x_neu);
        b(j)= zeta(j)*x_neu- floor(zeta(j)*x_neu);
        a(j,2)= ceil(zeta(j)*x_neu);

        y(j)= a(j,1); % nur fuer ersten Durchlauf unterer
                        % while-Schleife (3.SCHRITT), notwendig
                        % um notationelle Uebereinstimmung mit
                        % dieser Schleife zu erzielen
    else
        a(j,1)= ceil(zeta(j)*x_neu);
    end
end

```

```

        b(j)= ceil(zeta(j)*x_neu)- zeta(j)*x_neu;
        a(j,2)= floor(zeta(j)*x_neu);

        y(j)= a(j,1); % nur fuer ersten Durchlauf unterer
                      % while-Schleife (3.SCHRITT), notwendig
                      % um notationelle Uebereinstimmung mit
                      % dieser Schleife zu erzielen

    end
end

% a(j, 1)... Bestapproximationskoordinate zu zeta(j)*x_neu
% a(j, 2)... Zweitbestapproximationskoordinate zu zeta(j)*x_neu
% b(j)... Bestapproximation zu zeta(j)*x_neu,
% b(j)= min_{y}: abs(zeta(j)*x_neu-y)

        d_neu= log(max(b)); % neue Bestapproximation

end % Ende while d(n) > log(0.5) Schleife

% nun erstmals d(n) < log(0.5)

% 3. SCHRITT

while d(n)<= d_neu % solange kein besseres x gefunden wird
% bestapproximation fuer naechstes x berechnen und bedingung
% wieder pruefen
x_neu= x_neu+1;
% Bestapproximation berechnen
    for j=1:n-1
        if zeta(j)*x_neu- floor(zeta(j)*x_neu)< 1/2
            y(j)= floor(zeta(j)*x_neu);
            z(j)= zeta(j)*x_neu- floor(zeta(j)*x_neu);
        else
            y(j)= ceil(zeta(j)*x_neu);
            z(j)= ceil(zeta(j)*x_neu)- zeta(j)*x_neu;
        end
    end

    % y(j)... Bestapproximationskoordinate zu zeta(j)*x_neu
    % z(j)... Bestapproximation zu zeta(j)*x_neu
    % z(j)= min_{y}: abs(zeta(j)*x_neu-y)

    d_neu= log(max(z)); % neue Bestapproximation
end % neuer x_neu-Kandidat gefunden

best= [x_neu y]; % neue Bestapproxiamtionskoordinaten

a=1;
while d(a)< d_neu

```

```

    a=a+1;
end          % an a-ter Stelle steht d_neu, d(a)= d_neu

for j=n:-1:a
C(j+1, 1:n)= C(j, 1:n);
end
C(a, 1:n)= best; % vorlaeufige neue Matrix C, noch nicht lu

j=n+1;
f= C(j,1:n);
C= C(1:n,1:n);

while abs(det(C))<1/2 % det(C)==0 testen, wegen
    % Ganzzahligkeit der Determinante gleichbedeutend mit
    %  $-1 < \det(C) < 1$  und wegen rechenungenauigkeit bei det
    % matlabintern besser so testen
    j=j-1;
    g= C(j,1:n);
    C(j,1:n)= f;
    f=g;
end % neue Matrix C fuer naechsten Durchlauf bestimmt
    % genau ab Zeile j war der Rang um (genau) 1 defizient

for i=a:j-1          % lokale Maxima bestimmen
    M(i)= M(i)+1;
    K(i,M(i))= [(n-1)/n]*[log(x_neu)-d(i)];
    L(i,M(i))= log(x_neu)- K(i,M(i));
end

B= [d(1:a-1) d_neu d(a:j-2)];

for i=a:j-1
    d(i)= B(i);
end
% neue n Bestapproximationen bestimmt, andere d(i)'s bleiben gleich

for i=a:j-1          % lokale Minima bestimmen
    M(i)= M(i)+1;
    K(i,M(i))= [(n-1)/n]*[log(x_neu)-d(i)];
    L(i,M(i))= log(x_neu)- K(i,M(i));
end

% fuer naechsten Durchlauf
x_neu= x_neu+1;
% Bestapproximation berechnen
for j=1:n-1
    if zeta(j)*x_neu- floor(zeta(j)*x_neu)< 1/2
        y(j)= floor(zeta(j)*x_neu);
        z(j)= zeta(j)*x_neu- floor(zeta(j)*x_neu);
    else

```

```

        y(j)= ceil(zeta(j)*x_neu);
        z(j)= ceil(zeta(j)*x_neu)- zeta(j)*x_neu;
    end
end

% y(j)... Bestapproximationskoordinate zu zeta(j)*x_neu
% z(j)... Bestapproximation zu zeta(j)*x_neu
% z(j)= min_{y}: abs(zeta(j)*x_neu-y)

d_neu= log(max(z)); % neue Bestapproximation
end

% zeichne L(1),L(2),...L(n-1) weiter bis zur
% Gerade des letzten Maximums und Minimums von L(n)

for j= 1:n-1
    if K(j,M(j))- K(n,M(n)) ~= L(n,M(n))- L(j,M(j))

        % liegen nicht bereits auf der Gerade vom letzten L_n max&min

        M(j)= M(j)+1;
        K(j, M(j))= [(n-1)/n]*(log(x_neu-1)- d(j));
        L(j, M(j))= log(x_neu-1)- K(j,M(j));
    end
end

% plotte Funktionen in min(n,5) verschiedenen Farben
hold;
for j=1:n
    for i= 1:M(j)
        v(i)= K(j,i);
        w(i)= L(j,i);
    end
    if j/5== floor(j/5)
        plot(v,w,'--k','LineWidth',1,...
            'MarkerEdgeColor','k',...
            'MarkerFaceColor','g',...
            'MarkerSize',0.2)
    elseif j/5== floor(j/5)+1/5
        plot(v,w,'-c','LineWidth',1,...
            'MarkerEdgeColor','k',...
            'MarkerFaceColor','g',...
            'MarkerSize',0.2)
    elseif j/5== floor(j/5)+ 2/5
        plot(v,w,'--b','LineWidth',1,...
            'MarkerEdgeColor','k',...
            'MarkerFaceColor','g',...
            'MarkerSize',0.2)
    elseif j/5== floor(j/5)+ 3/5
        plot(v,w,'-r','LineWidth',1,...
            'MarkerEdgeColor','k',...
            'MarkerFaceColor','g',...
```

```
        'MarkerSize',0.2)
    else
        plot(v,w,'-.g','LineWidth',1,...
            'MarkerEdgeColor','k',...
            'MarkerFaceColor','g',...
            'MarkerSize',0.2)
    end
    v=0;    % zuruecksetzen fuer naechsten Durchlauf
    w=0;    % zuruecksetzen fuer naechsten Durchlauf
end

for j=1:n
    letzte_L_j_Extrema(j,1:min(12,M(j)))= K(j, max(1,M(j)-11):M(j));
    letzte_L_j_Werte(j,1:min(12,M(j)))= L(j, max(1,M(j)-11):M(j));
end

letzte_L_j_Extrema
letzte_L_j_Werte
log_bestapproximationen= d;
log_bestapproximationen
bestapproximationen= exp(d);
bestapproximationen
laenge_vorlauf
x_max= x_neu-1;
x_max
M
K;
L;

toc    % Zeitmessung
```

Anhang B

Zusammenfassung (Abstract)

In dieser Dissertation untersuchen wir die simultane Approximierbarkeit von reellen Zahlen $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$, die wir mithilfe der klassischen Approximationskonstanten $\omega_j, 1 \leq j \leq k+1$ sowie unter Verwendung der in den letzten Jahren eingeführten Approximationskonstanten $\underline{\psi}_j, \overline{\psi}_j$ zu quantifizieren. Dabei steht konkret das vom Parameter $Q > 1$ abhängige System

$$|x| \leq Q^{\mu_1 + \theta} \tag{B.1}$$

$$|\zeta_1 x - y_1| \leq Q^{\mu_2 + \theta} \tag{B.2}$$

$$\vdots \tag{B.3}$$

$$|\zeta_k x - y_k| \leq Q^{\mu_{k+1} + \theta} \tag{B.4}$$

für vorgegebene $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ im Vordergrund. Wir fragen, abhängig vom Parameter Q , nach dem Supremum aller reellen θ , sodass das System ganzzahlige Lösungen $(x, y_1, \dots, y_k)$ besitzt. Auf das dazu in gewisser Weise duale Problem der Approximation von Linearformen $x + \zeta_1 y_1 + \dots + \zeta_k y_k$ wird ebenfalls näher eingegangen, insbesondere im interessanten Spezialfall $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k) = (\zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^k)$, in dem es also um Polynomapproximation geht.

Diese Probleme lassen sich mithilfe der Methoden aus dem Bereich Geometrie der Zahlen als Gitterpunktprobleme auffassen, was sich als fruchtbarer Ansatz erwiesen hat.

Im Verlauf der Arbeit werden $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ mit verschiedenen vorgegebenen Approximationseigenschaften konstruiert, deren Approximationskonstanten explizit angegeben werden können. Dabei geht es meist um Spezialfälle besonders guter Approximation.

We study the simultaneous approximation properties of real numbers $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ in terms of classical approximation constants $\omega_j, 1 \leq j \leq k+1$ and $\underline{\psi}_j, \overline{\psi}_j$ introduced in recent years. More concretely we study the system (B.1)-(B.4) in dependence of the parameter Q . Furthermore, we study the dual problem of approximation of linear forms.

These problems can be interpreted as a lattice point problems and one can use results from geometry of numbers.

We give examples of $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ with special prescribed approximation properties and applications. We mostly deal with the case of well approximable numbers.

Anhang C

Lebenslauf

PERSÖNLICHE DATEN

- Name: Johannes Schleisnitz
- Email: johannes.schleisnitz@univie.ac.at
- Nationalität: Österreich
- Geburtsdatum: 15. 11. 1985
- Geburtsort: Eisenstadt

AUSBILDUNG

- Volksschule Eisenstadt, September 1992- Juni 1996
- Gymnasium Kurzweide Eisenstadt, September 1996- Juni 2004
- Wehrdienst Martinskaserne Eisenstadt, September 2004- Mai 2005
- Studium Technische Mathematik, Zweig Mathematik in den Naturwissenschaften an der TU Wien, Oktober 2005- Oktober 2010 mit Auszeichnung abgeschlossen
- Diplomarbeit "Abelsche Zahlkörper und das Klassenzahlproblem" unter Anleitung von Univ.Prof. Michael Drmota
- Dissertant an der UniWien seit November 2010 (FWF-Projekt) unter Anleitung von Ao.Univ.Prof. Leonhard Summerer

SONSTIGES

- ÖMO-Bronzemedailen 2003, 2004
- Honorable Mention bei der International Mathematics Competition (IMC) 2009, Budapest
- Paper "Diophantine approximation and special Liouvillean numbers" wird derzeit geprüft

Literaturverzeichnis

- [1] Y.Bugeaud, M. Laurent, *Exponents of Diophantine approximation and Sturmian continued fractions*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 55 (2005), no.3, p. 773-804
- [2] H. Davenport, W.M. Schmidt, *Approximation to real numbers by algebraic integers*, Acta Arith. 15 (1969), p. 393-416
- [3] J. Elstrodt, *Maß- und Integrationstheorie*, Springer Verlag (2009)
- [4] P.M. Gruber, C.G. Lekkerkerker, *Geometry of numbers*, North-Holland Verlag (1987)
- [5] A. Khinchin, *Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen*, MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT Volume 24, Number 1, 706-714 (1925)
- [6] J.F. Koksma, *Über die Mahlersche Klasseneinteilung der transzendenten Zahlen und die Approximation komplexer Zahlen durch algebraische Zahlen*, Monatsh. Math. Physik 48 (1939), 176-189. MR 1, 137
- [7] M. Laurent, *On simultaneous rational approximation to successive powers of a real number*, Indag. Math. (N.S.) 14 (2003), no. 1, p. 45-53
- [8] W.J. LeVeque, *On Mahler's U-numbers*, J. London Math. Soc. 28 (1953), 220-229
- [9] N.G. Moshchevitin, *Proof of W.M. Schmidt's conjecture concerning successive minima of a lattice*, J. London Math. Soc. (2012) doi: 10.1112/jlms/jdr076, 12 Mar 2012
- [10] O. Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Teubner Verlag (1913)
- [11] K.F. Roth, *Rational approximations to algebraic numbers*, Mathematika 2: 120, 168 (1955)
- [12] D. Roy, *Diophantine approximation in small degree*, Number theory, 269285, CRM Proc. Lecture Notes, 36, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004
- [13] W.M. Schmidt, *Norm form equations*, Annals of Mathematics. Second Series 96: 526551, (1972)
- [14] W.M. Schmidt, L. Summerer, *Parametric geometry of numbers and applications*, Acta Arithm. 140.1 (2009)
- [15] W.M. Schmidt, L. Summerer, *Geometric methods in simultaneous approximation*, wird erscheinen in Monatshefte der Mathematik
- [16] V.G. Sprindžuk, *A proof of Mahler's conjecture on the measure of the set of S-numbers*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser.Mat. 29(1965), 379-436. English translation in: Amer. Math. Soc. Transl. 51 (1966), 215-272
- [17] M. Waldschmidt, *Report on some recent advances in Diophantine approximation*,
- [18] E. Wirsing, *Approximation mit algebraischen Zahlen beschränkten Grades*, J. Reine Angew. Math. 206 1960 6777. # 79