



universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

**Wie kommt es zur Überbevölkerung der Erde?
Populationsdynamische Modelle im historischen Wandel**

Verfasserin

Alexandra Maria Keplinger

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat.)

Wien, im März 2012

Studienkennzahl lt. Studienblatt: A 190 406 313

Studienrichtung lt. Studienblatt: Lehramt UF Mathematik UF Geschichte,
Sozialkunde und Politische Bildung

Betreuer: Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith

Danksagung

Dieses Blatt soll mit ein paar dankenden Worten geschmückt werden, denn ohne tatkräftige Unterstützung einiger Menschen wären mein Studium und diese vorliegende Arbeit nicht möglich gewesen.

Zuerst einmal möchte ich mich bei Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith für die ausgesprochen gute Betreuung der Diplomarbeit bedanken.

Weiters gilt ein besonderer Dank meinen Freundinnen, die ich im Laufe des Studiums kennen und schätzen gelernt habe. Durch sie wird mir mein Studium immer in guter Erinnerung bleiben und ich weiß, an wen ich mich wenden kann, falls einmal mathematische oder auch außermathematische Probleme auftauchen sollten.

Der wohl größte Dank gebührt meinen Eltern, die mir nicht nur diese Ausbildung ermöglicht haben, sondern mich immer sehr hilfreich unterstützt und motiviert haben. Vielen Dank dafür!

Abschließend möchte ich mich noch bei meinem Freund Thomas recht herzlich bedanken, denn auch er half mir stets, wo er konnte und bestärkte mich in meinem Handeln.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Geschichte der Bevölkerungslehre	7
2.1	Die politischen Arithmetiker	8
2.2	Malthusianische Bevölkerungen	10
2.2.1	Vorläufermodelle	14
2.3	Weitere Beispiele für historische Bevölkerungslehren	15
3	Grundzüge der Bevölkerungsstruktur	18
3.1	LEXIS-Diagramm	19
3.1.1	Periode - Alter - Kohorte	20
3.2	Altersgliederung	21
3.2.1	Alterspyramiden	24
3.3	Bevölkerungsveränderung	27
4	Maßzahlen zum Bevölkerungswachstum	31
4.1	Mortalität	34
4.1.1	Sterbetafeln	35
4.2	Fertilität	41
4.2.1	Stabile Bevölkerung	47
5	Dynamik einer Population	49
5.1	Modellfunktionen für unbeschränktes Bevölkerungswachstum .	50
5.1.1	Lineare Wachstumsfunktion	52
5.1.2	Exponentielles Wachstum	53

5.1.3	Hyperbelfunktion	55
5.1.4	Potenzfunktion	56
5.1.5	Logarithmusfunktion	57
5.1.6	Lineare Approximation der Wachstumsrate	58
5.2	Beschränktes Wachstum	60
5.3	Klassische Modelle der Populationsdynamik	65
5.3.1	Das LESLIE-Modell	66
5.3.2	Das LOTKA-VOLTERRA-Modell	75
6	Entwicklungstrends und Aussichten für das 21. Jahrhundert	94
6.1	Das Modell der Statistik Austria	96
6.2	Entwicklungstrends	98
	Abbildungsverzeichnis	100
	Tabellenverzeichnis	101
	Literaturverzeichnis	102
	Kurzzusammenfassung	107
	Abstract	108
	Lebenslauf	109

1 Einleitung

Nach dem US-amerikanischen Population Reference Bureau (PRB) wächst die Weltbevölkerung pro Sekunde um 2.6 Menschen. Pro Tag steigt die Anzahl der Menschen um 227 252 Menschen, aufgerechnet auf ein Jahr sind das 82 947 000 Menschen. (vgl. [34])

Die Vereinten Nationen legten symbolisch das Datum für das Überschreiten der sieben Milliarden Grenzen auf den 31. Oktober 2011. Die Weltbevölkerung wächst und wächst und bereits um das Jahr 2030 könnten Engpässe bei der Nahrungsmittel-, Wasser- und Energieversorgung auftreten. Die Zukunft des Planeten Erde ist ungewiss und es können lediglich Prognosen mit gewissen Unsicherheitsfaktoren erstellt werden. Das Wachstum der Bevölkerung hat sich in den letzten Jahren wieder verlangsamt, wobei der zahlenmäßige Höhepunkt an Menschen noch nicht erreicht ist. Bereits vor mehr als 200 Jahren wurde unbegrenztes exponentielles Wachstum der Weltbevölkerung von Thomas Robert MALTHUS als problematisch angesehen. Seine Theorie beruht vereinfacht gesagt darauf, dass ein Gleichgewicht zwischen der Anzahl der Menschen und der Ressourcen durch Hungersnöte, Seuchen und Kriege wiederhergestellt wird, falls es zu einer Verknappung der Ressourcen bzw. zu einem zu starken Anstieg der Bevölkerung kommt. (vgl. [30])

Doch wie kommt es zur Überbevölkerung der Erde? Dieser Frage wird nun in der vorliegenden Diplomarbeit nachgegangen, wobei sie nicht in einem bevölkerungsgeographischen, sondern in einem mathematischen Kontext behandelt wird.

Zu Beginn der Arbeit werden historische Populationsmodelle präsentiert, ehe die Grundzüge der Bevölkerungsstruktur vorgestellt werden. Weiters werden

Maßzahlen zum Bevölkerungswachstum definiert, um mit Hilfe dieser Zahlen Aussagen über das Wachstum zu treffen. Schwerpunkt dieser Arbeit sind populationsdynamische Modelle. Neben den klassischen Modellen, dem bekannten LOTKA–VOLTERRA–Modell und dem LESLIE–Modell werden auch einige, sehr einfache Funktionen nach gewissen Kriterien untersucht, um demographische Aussagen formulieren bzw. ihre Sinnhaftigkeit in diesem Kontext überprüfen zu können. In einem abschließenden Kapitel wird ein Ausblick auf das 21. Jahrhundert gegeben und versucht, mögliche Trends bzw. zukünftige Entwicklungen zu beschreiben. Weiters wird ein Modell mit Migration vorgestellt, welches die Statistik Austria für Prognosenberechnungen verwendet. Ältere mathematische Populationsmodelle basieren auf geschlossenen Gesellschaften, d.h. Migration wird nicht berücksichtigt. Mittlerweile gibt es eine Vielzahl an Modellen mit Migration, wobei nur eines der Statistik Austria präsentiert wird.

Die mathematischen Inhalte dieser Arbeit werden mit Grafiken und Diagrammen veranschaulicht, welche von mir selbst mit Hilfe von *GeoGebra 4* bzw. mit *Wolfram Mathematica 6* erstellt wurden.

2 Geschichte der Bevölkerungslehre

Lange bevor die Demographie als wissenschaftliche Disziplin existierte, wurden bereits Bevölkerungsschätzungen wie zum Beispiel im römischen Reich von Kaiser Augustus durchgeführt. (siehe [27] S. 3) Die älteste Überlieferung einer Sammlung von demographischen Daten stammt aus China. Bereits 2255 v. Chr. fand dort nach einer Überschwemmungskatastrophe eine Volkszählung statt, um einen Überblick über die Bevölkerung zu gewinnen. Zählungen im moderneren Sinn fanden erst im 17. Jahrhundert in Französisch-Kanada statt. (vgl. [18])

Eine Wissenschaft zu definieren, erweist sich immer als schwierig, doch ist es zu Beginn dieser Arbeit sinnvoll, den Begriff „Demographie“ zu klären. Das Wort stammt aus dem Griechischen und setzt sich aus „demos“, dem Volk, und „grafe“, der Schrift, zusammen. Die Demographie beschäftigt sich also mit der menschlichen Bevölkerung und eine ihrer Aufgaben liegt darin, sie nach bestimmten Merkmalen zu klassifizieren. In [8] S. 3 findet man folgende Definition: *„Die Demographie untersucht die Zahl der Bevölkerung und deren Verteilung bezüglich gewisser relevanter Merkmale sowie die Veränderung von Umfang und Struktur aufgrund von Geburten, Sterbefällen, Wanderungen u.a. demographische Prozesse.“*

Grenzen zu benachbarten Disziplinen wie Ökonomie, Soziologie, Geographie oder Geschichte sind nicht eindeutig zu ziehen und die Demographie selbst ist eine formale Wissenschaft, in der mit Hilfe der Bevölkerungsmathema-

tik logische Beziehungen, Modelle, etc. entwickelt werden können. Die Daten bezieht die Demographie aus Beobachtungen, Dokumentationen und Registrierungen, nicht jedoch aus Laborexperimenten mit kontrollierbaren Bedingungen. (vgl. [8])

Bereits im 17. Jahrhundert wurden von den sogenannten „politischen Arithmetikern“ in England und in Deutschland Verfahren entwickelt, um Bevölkerungsdaten statistisch aufzuarbeiten. Ältere Vorstellungen und Meinungen werden hier nun außer Acht gelassen, da sie für die Gegenwart keine Bedeutung mehr haben. Die Verfahren der politischen Arithmetiker dienen als Basis für demographische Analysen und können somit als Wegbereiter der Demographie interpretiert werden. (vgl. [27] und [29]) Die Geschichte der Bevölkerungslehre bzw. einer systematischen Bevölkerungsmathematik geht über 250 Jahre zurück und soll nun in groben Zügen skizziert werden.

2.1 Die politischen Arithmetiker

Die ersten ernstzunehmenden Versuche einer wissenschaftlichen Auseinandersetzung mit den Vorgängen in der Bevölkerung findet man im 17. Jahrhundert in England. Als das historisch älteste Modell der demographischen Analyse können Sterbetafeln angesehen werden, auf deren Konzept beruhend die Lebenserwartung eines Neugeborenen ermittelt werden kann. Im Jahr 1662 wurde die *Bills of Mortality* (siehe Abb. 2.1) von John GRAUNT veröffentlicht, die, wie die für die Stadt Breslau von dem englischen Astronom Edmond HALLEY im Jahr 1693 entwickelte Sterbetafel, in die Geschichte der Bevölkerungslehre einging. Diese Verfahren zur Berechnung von Sterbetafeln wurden im Laufe der Jahrhunderte verfeinert und sind im Einzelnen recht kompliziert, wobei diese später genauer analysiert werden. (vgl. [4]) Die Sterbetafeln wurden etwa für den Abschluss von Lebensversicherungen erstellt. (vgl. [23]) Neben GRAUNT war auch Sir William PETTY in England tätig und gemeinsam entwickelten sie Statistik- und Zensusmethoden, die der modernen Demographie als Basis dienen.

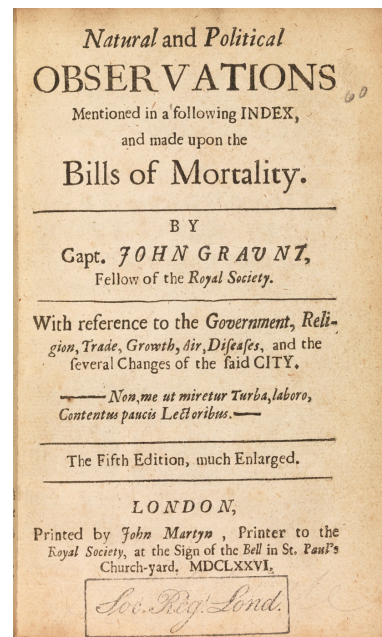


Abbildung 2.1: Bills of Mortality (1662), Quelle: [47]

In Deutschland zählten Kasper NEUMANN und Johann Peter SÜSSMILCH, ein evangelischer Oberkonsistorialrat, zum Kreis der politischen Arithmetiker. SÜSSMILCH, der oftmals als Begründer der Bevölkerungswissenschaft bezeichnet wird, widmete sich in seinem dreibändigen Werk „*Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts, aus der Geburt, dem Tode und der Fortpflanzung desselben erwiesen*“ (siehe Abb. 2.2) vielen zentralen Thematiken der Bevölkerungslehre, wie etwa der Geburtenintensität, Wahrscheinlichkeit von Zwillingsgeburten, Heiratsalter, Sterbeintensität, Kapazität der Welt, usw. (vgl. [46]) SÜSSMILCH schätzte die maximale Bevölkerungszahl auf sieben Milliarden Menschen und sorgte durch diese riesige Zahl für großes Aufsehen. (vgl. [13]) Die Besonderheit der neuen Entdeckungen der politischen Arithmetiker liegt darin, dass sie bestimmte Gesetzmäßigkeiten bei den Geburten und beim Sterben feststellten. Für die damalige christliche Weltanschauung galten diese Vorgänge als eine göttliche Vorsehung bzw. Domäne, d.h. diese Ereignisse waren nur göttlichen Gesetzen unterstellt. Trotz der erkannten Gesetzmäßigkeiten wurde die göttliche Weltordnung noch nicht in Frage gestellt.

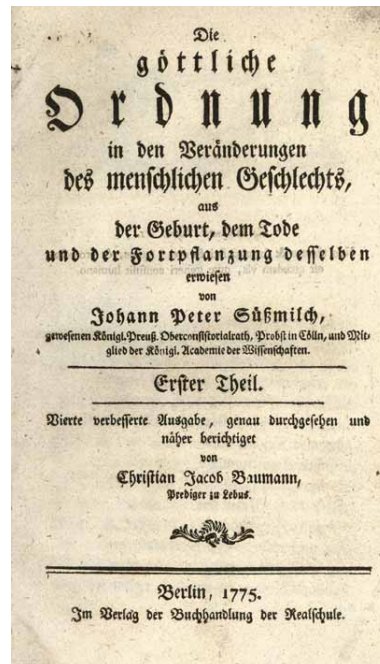


Abbildung 2.2: Die göttliche Ordnung (1775), Quelle: [21]

2.2 Malthusianische Bevölkerungen

Vor dem Hintergrund der beginnenden Industrialisierung in England begann, im späten 18. Jahrhundert und frühen 19. Jahrhundert, die wissenschaftliche Auseinandersetzung mit Fragen der Bevölkerungsentwicklung bzw. wurde versucht, die generativen Vorgänge aller Völker und Zeiten in einer einzigen Formel darzustellen. Nicht die erste, aber für die Folgezeit die bedeutendste Theorie stammt von Thomas Robert MALTHUS, ein anglikanischer Geistlicher und späterer Ökonom. MALTHUS wurde am 13. Februar 1766 in England geboren, wuchs in einem intellektuellen Familienmilieu rund um Jean-Jacques ROSSEAU und David HUME auf und studierte Mathematik. Ab 1788 war MALTHUS anglikanischer Pfarrer und erhielt im Jahr 1805 die erste Professur für Politische Ökonomie am College der East India Company in Haileybury, die er bis zu seinem Tod im Jahr 1834 inne hatte. (vgl. [41])

Im Jahr 1798 publizierte MALTHUS „*An Essay on the Principle of Population, as it Affects the Future Improvement of Society with Remarks on the*

Speculations of Mr. Godwin, M. Condorcet, and other Writers.“ Er hat damit ein Werk geschaffen, über das seit der Publikation lange und viel diskutiert wurde. Zum Beispiel wandte DARWIN die Lehre auf die gesamte Tier- und Pflanzenwelt an, MARX distanzierte sich hingegen von dieser Lehre, die er als „Sünde gegen die Wissenschaft“ bezeichnete. (vgl. [20])

Zusammengefasst postulierte MALTHUS in seinem Essay ein Gesetz, das den „natürlichen“ Zusammenhang zwischen der Entwicklung der Bevölkerungszahl und den zur Verfügung stehenden Unterhaltsmitteln beschreibt. In seinem zuerst anonym veröffentlichten Essay schrieb MALTHUS, in Anlehnung an William GODWIN und andere Autoren, über die neuen sozialen und politischen Utopien, die von der Französischen Revolution geprägt waren. MALTHUS unterstützte die Armutsbekämpfung nicht, denn seiner Meinung nach würden die bedürftigeren Menschen durch zusätzliche Hilfen mehr Kinder bekommen, als sie selbst ernähren könnten und somit würde die Verelendung zunehmen. Das Bevölkerungsgesetz (siehe Abb. 2.3), das zu einer wichtigen Basis für die gesamte Bevölkerungswissenschaft wurde, war Schwerpunkt seines Essays und beinhaltet, dass der Welt eine Überbevölkerung drohe, denn *„die Vermehrungskraft der Bevölkerung [ist] unbegrenzt größer als die Kraft der Erde, Unterhaltsmittel für den Menschen hervorzubringen“*. Weiters schrieb MALTHUS: *„Die Bevölkerung wächst, wenn keine Hindernisse auftreten, in geometrischer Reihe. Die Unterhaltsmittel nehmen nur in arithmetischer Reihe zu.“* (siehe [4] S. 230)

Malthus beschäftigte sich nicht mit der maximalen Bevölkerungszahl, er wollte nur vor dieser „drohenden“ Überbevölkerung warnen, denn er fürchtete durch das rapide Wachstum der ärmeren Menschen eine Zunahme an Armut und eine allgemeine Absenkung des Lebensstandards.

Für eine mathematische Formulierung fehlten ihm die statistischen Umfragen, obwohl er auf Reisen viele Erfahrungen sammelte. In seiner zweiten und dritten Auflage des Essays entkräftigte er sein Bevölkerungsgesetz, denn es sei im politischen und historischen Kontext entstanden und darin zu verstehen. (vgl. [4]) Die Grundlage für die Angaben waren einerseits die Daten von Adam SMITH, der die Bevölkerung der englischen Kolonien in Nordamerika analysierte und erkannte, dass sich innerhalb von 20 bis 25 Jahren die Anzahl

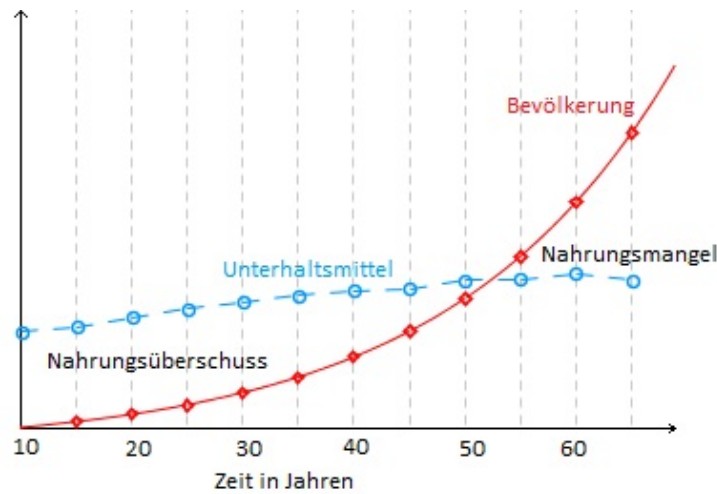


Abbildung 2.3: Graphische Darstellung des Malthusschen Bevölkerungsgesetzes

der Menschen ohne Einwanderung verdoppelte. Andererseits stützte er sich auf das „Gesetz des abnehmenden Bodenertrags“ von seinem Zeitgenossen David RICARDO (1772-1823). Dieses beinhaltet, dass ab einem bestimmten Punkt jeder Mehraufwand an Produktionsmitteln zu keiner Produktionssteigerung führt, sondern zu einem proportional geringeren Ertragszuwachs. Ist der Nahrungsspielraum wie etwa in „Neuländern“ unbegrenzt, dann führt konstantes Fortpflanzungsverhalten, d.h. die Fertilität entspricht der Mortalität, zu einem Wachstum der Bevölkerung und zwar wird sich die Anzahl innerhalb bestimmter und gleichbleibender Zeiträume potenzieren. Wird der Zeitraum, in dem sich die Bevölkerung verdoppelt, auf 25 Jahre angesetzt, so bildet sich folgende Reihe, wie in der Tabelle 2.1 gezeigt wird.

	Stand im Jahre				
	0	25	50	75	usw.
Bevölkerung	1	2	4	8	usw.
Nahrungsspielraum	1	2	3	4	usw.

Tabelle 2.1: Schematische Darstellung des Malthusschen Bevölkerungsgesetzes (Verdoppelungszeit 25 Jahre)

Das Bevölkerungswachstum nach MALTHUS entspricht im Wesentlichen einem exponentiellen Wachstum, wobei nach seinen Angaben eine Bevölkerungsexplosion drohe. Sei $P(t)$ die Anzahl der Personen in einem Staat im Zeitpunkt t , dann gilt für ein passendes $a > 0$ (für die folgende Differentialgleichung und ihre Lösung könnte man auch beliebige $a \in \mathbb{R}$ zulassen)

$$\dot{P} = aP.$$

Um diese Differentialgleichung zu lösen, formen wir sie durch Trennung der Variablen zu $\frac{\dot{P}}{P} = a$ um, und erhalten durch Integrieren $\ln P = at + b$. Indem wir die Exponentialfunktion darauf anwenden, erhalten wir

$$P(t) = ce^{at} = P(0)e^{at}. \quad (2.1)$$

Da sich die Bevölkerung nicht über die Grenzen ihres Nahrungsmittelspielraums hinaus vermehren kann, führte MALTHUS Korrekturfaktoren, sogenannte „checks“, ein, die das Gleichgewicht zwischen den beiden dynamischen Wachstumsreihen herstellen sollen. Die „checks“ können entweder *präventiv*, also vorbeugend etwa durch Spätehe, Enthaltbarkeit oder Geburtenbeschränkungen, oder *repressiv* wirken. „Repressive checks“ kommen infolge von erhöhter Sterblichkeit wie etwa durch Kriege, Seuchen, Hunger, etc. zustande. Obwohl es sich so nicht aus dem obigen Modell ergibt, wurde es von MALTHUS auf diese Art und Weise interpretiert, dass die Armut selbstverschuldet ist und das Elend eine absolut unausweichliche Folge wäre. Finanzielle Unterstützung der Armen würden das Wachstum weiter antreiben und sei seiner Ansicht nach sinnlos. Die Ansichten von MALTHUS sind konträr zu den aufklärerischen Gedanken einzuordnen, denn sein Gesetz widerspricht einer Existenz einer Gesellschaft, in der alle im Wohlstand und Glück leben. (vgl. [18] und [29]) Die Problemstellung von MALTHUS war bahnbrechend, dennoch sind seine Schlussfolgerungen für dieses Modell sehr gewagt. Stark beeinflusst wurde Charles DARWIN von MALTHUS. Er hat viele Aspekte seiner Theorie für die Entwicklung der Evolutionstheorie übernommen. Karl MARX distanzierte sich hingegen von diesem Modell und hat die Schlussfolgerungen von Malthus völlig zurecht kritisiert.

2.2.1 Vorläufermodelle

Oftmals wird MALTHUS als der „Erfinder“ des Bevölkerungswachstumsmodells mit geometrischer Progression bezeichnet. Eine Bevölkerung besitzt in diesem Modell eine konstante Wachstumsrate, dh. in der Gesellschaft gibt es konstante Mortalitäts- und Fertilitätsraten und sie ist geschlossen gegenüber Migration. Die Idee dieses Modells existierte allerdings schon vor MALTHUS. Zu Beginn des 18. Jahrhunderts stützte sich etwa SÜSSMILCH in seinen Arbeiten darauf, dass eine konstante Steigerungsrate für das Wachstum der Menschen charakteristisch sei. Ebenso hatte der große Schweizer Mathematiker Leonhard EULER (1707-1783) im Jahr 1760 aus den beiden Annahmen, konstante Mortalität und geometrisches Wachstum der Geburtenzahl, eine stabile Bevölkerung gewonnen. (vgl. [19])

Die Annahme, die – neben konstanter Mortalität und Geschlossenheit gegenüber Migration – auf eine stabile Bevölkerung führt, ist die exponentielle Geburtentrajektorie, die sich durch Lösen einer Differentialgleichung ergibt. Damit hat sich Alfred James LOTKA (1880-1949), ein österreichisch-amerikanischer Demograph, beschäftigt, indem er die Gedanken von EULER 150 Jahre später unabhängig weiterentwickelte. Er wurde besonders durch seine mathematischen Formulierungen von Populationsdynamikgesetzen bekannt, zum Beispiel durch das „Räuber-Beute-Modell“, wobei die Ideen von LOTKA, dem Schöpfer der modernen, formalen Demographie, später genauer erläutert werden. (vgl. [8])

Wenn die jährliche Bevölkerungszunahme r beträgt, also

$$P(t+1) - P(t) = rP(t)$$

gilt, dann wird die Bevölkerung im Sinne der bekannten Formel für die Zinsseszinsrechnung wachsen

$$P(t) = P(0)(1+r)^t, \tag{2.2}$$

wobei t die Anzahl der Jahre seit dem Zeitpunkt 0 angibt. Wird mit r die augenblickliche Steigerungsrate mit $r = \frac{P'(t)}{P(t)}$ etwa dargestellt, dann wird die Gleichung 2.2 durch Gleichung 2.3, die ein exponentielles Wachstum darstellt,

ersetzt, die wie folgt lautet

$$P(t) = P(0)e^{rt}. \quad (2.3)$$

Der numerische Unterschied zwischen der geometrischen Steigerung (2.2) und dem exponentiellen Wachstum (2.3) kann für r -Werte, die für die menschliche Bevölkerung zutreffen können, vernachlässigt werden. Keine menschliche Bevölkerung kann auf Dauer ein exponentielles Wachstum durchhalten und wird sich in der Praxis auch keiner stabilen Bevölkerung annähern. Geeignere Modelle werden in den folgenden Kapiteln aufgezeigt. (vgl. [19])

2.3 Weitere Beispiele für historische Bevölkerungslehren

Mit der Malthus'schen Bevölkerungstheorie hat R. MALTHUS einen entscheidenden Anstoß für weitere Diskussionen gegeben. In der Folgezeit kristallisierten sich Anhänger und Gegner dieser Lehre heraus, die viele Auseinandersetzungen bezüglich des ungleichen Wachstums von Bevölkerungen hatten. Anfänglich wurde nicht über die maximale Tragfähigkeit der Erde bzw. die maximale Anzahl an Menschen diskutiert, denn dazu fehlten die statistischen Daten etwa über Bevölkerungszahlen der diversen Länder. MACKENROTH beschäftigt sich in [29] mit diversen anderen Bevölkerungstheorien wie etwa mit dem Neomalthusianismus, mit biologischen Ansätzen, mit „sozialistischen“ Konzepten oder auch mit soziologischen Theorien, die sich im Anschluss an MALTHUS entwickelt haben. Diese Konzepte werden in dieser Arbeit allerdings nicht genauer analysiert.

Erwähnenswert sei noch ein Wachstumsmodell, welches man zu den Anfängen der Bevölkerungslehre zählen kann. Da keine Bevölkerung auf Dauer exponentiell wachsen kann, wird als eine Möglichkeit zur Verbesserung des Wachstumsmodells ein limitierender Faktor für die Population eingeführt und man erhält die sogenannte „logistische Funktion“. Das logistische Modell geht auf den belgischen Mathematiker Pierre-François VERHULST (1804 - 1849) zurück und verbindet das Modell des exponentiellen Wachstums mit

dem des beschränkten Wachstums. Bei dieser Funktion wird angenommen, dass die Wachstumsrate der Bevölkerung allmählich im Verhältnis zur Größe der Bevölkerung abnimmt, und zwar so, wie die Bevölkerung wächst. Nach VERHULST wird angenommen, dass

$$\dot{P} = a(P - bP^2), \quad (2.4)$$

wobei $a, b > 0$ Konstanten sind. Die Auflösung der Gleichung 2.4 folgt durch Lösen der Differentialgleichung, etwa mit Trennung der Variable, und man bekommt

$$P(t) = \frac{1}{b + de^{-at}}, \quad (2.5)$$

wobei d eine weitere Konstante darstellt.

Die Gleichung 2.5 entspricht nun einer s-förmigen Kurve und nach unten ist sie durch $t = 0$ beschränkt, woraus sich $P(0) = \frac{1}{b+d}$ ergibt. Abhängig von t ändert sich der Verlauf der Kurve. Wir gehen von einem kleinen Startwert $P(0)$ aus. Für sehr kleine t verläuft die Wachstumsrate $P(t)$ ähnlich wie die exponentielle Wachstumskurve, für sehr große t verlangsamt sich das Wachstum. Nach oben hin ist die Wachstumskurve durch die Asymptote $P(t) = \frac{1}{b}$ beschränkt. Eine genauere Analyse dieses Wachstumsmodells bzw. eine durchgeführte Rechnung wird in Kapitel 5.2 gegeben. (vgl. [11] und [19])

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts wurden Versuche unternommen, Aussagen über die Bevölkerungskapazität der gesamten Erdoberfläche zu treffen, die im Hinblick auf das wachsende statistische Material bzw. durch die beginnenden, regelmäßigen Volkszählungen „einfacher“ getroffen werden konnten. Die Malthussche Bevölkerungslehre kann als Wurzel eines ganzen Stammbaumes an Theorien gesehen werden; eine der neueren und bekannteren ist das „Weltmodell“ des „Club of Rome“. Die Theorien entstehen immer im politischen und historischen Kontext und können sich durch neuere Innovationen, Produktionsmöglichkeiten o.ä. sehr bald als falsch erweisen. WissenschaftlerInnen sind bis heute mit dieser Thematik beschäftigt und seit einigen Jahren gewinnen diese Überlegungen wieder mehr an Bedeutung, denn neben

dem Ernährungsproblem folgen auch Probleme der Energieversorgung, der Umweltbelastung, etc. Eine Unzahl an Schriften über Bevölkerungswachstum und eine teilweise unübersichtliche Diversität an Theorien liegen uns heute vor, dennoch lässt sich erkennen, dass bisher keine befriedigende Lösung gefunden wurde. (vgl.[18] und [23])

3 Grundzüge der Bevölkerungsstruktur

Die Bevölkerung im Sinne der Bevölkerungsmathematik zu analysieren, stellte sich in der Vergangenheit als schwieriges Unterfangen heraus. Erst durch regelmäßige Volkszählungen seit Ende des 19. Jahrhunderts können bevölkerungsgeographische Untersuchungen leichter durchgeführt werden. Es werden Aussagen über Bevölkerungszahlen, über mögliche Entwicklungen, über räumliche Verteilungen der Bevölkerung und auch über eine Reihe von Merkmalen der Bevölkerung wie etwa Alter, Geschlecht, etc. getroffen. In Österreich fanden etwa ab 1869 in 10 Jahresabständen Volkszählungen statt (1880, 1890, 1900, 1910), wobei es in der Zwischen- und Nachkriegszeit zu Unregelmäßigkeiten kam (1923, 1934, 1939), ehe dann ab 1951 wieder Zählungen im gewohnten 10-Jahres-Rhythmus durchgeführt wurden. 2001 fand die letzte Volkszählung im klassischen Sinne statt; am 31.10.2011 wurde erstmals die neue Registerzählung durchgeführt. (vgl. [40])

Volkszählungen fanden in der Vergangenheit nicht weltweit statt und wenn, dann meistens nicht zur selben Zeit. Wenn sie durchgeführt wurden, dann wie etwa in Österreich in sehr großen Zeitabständen, da sie mit einem enormen Aufwand verbunden sind. Ein Zensus hält den momentanen Zustand einer Bevölkerung fest und Entwicklungen lassen sich oft nur durch Vergleiche mit früheren Zählungen erkennen. (vgl. [23])

Die gesamte Bevölkerung wird von der Bevölkerungsstatistik nach natürlichen und sozialen Merkmalen gegliedert und für Vergleiche in Subpopula-

tionen unterteilt. Die demographisch wichtigsten natürlichen Merkmale sind Geschlecht und Alter, das demographisch wichtigste soziale Merkmal ist der Familienstand. Beruf, soziale Stellung und Haushaltszugehörigkeit spielen bei soziologischen Zusammenhängen eine Rolle. (vgl. [18] und [29]) In [4] findet man für die Charakterisierung der Bevölkerungsstruktur folgende Einteilung:

- demographische Merkmale (Alter, Geschlecht, Familienstand und Haushaltsstruktur)
- wirtschaftliche und soziale Merkmale (Erwerbsstruktur, Sozialstruktur)
- ethnisch-rassische und kulturelle Merkmale.

Die Geschlechterverteilung zählt neben dem Alter zum wichtigsten demographischen Merkmal einer Bevölkerung. Diese wird erstens durch das Verhältnis der Geschlechter bei Neugeborenen, zweitens durch unterschiedliche Absterbeordnung beider Geschlechter und drittens durch unterschiedliche Beteiligungen beider Geschlechter an Wanderungen bestimmt. In der Literatur stehen einige Maße zur Verfügung, wobei die Verwendung des Maßes der *Sexualproportion* am geläufigsten ist. Die Geschlechterproportion ist durch

$$\frac{M}{F} \cdot 100$$

definiert. Als Bezugswert der variablen Zahl der Männer wird das weibliche Geschlecht genommen, da für konventionelle Messungen der Fruchtbarkeit die Rolle des weiblichen Geschlechts mehr Bedeutung hat. In der Statistik werden in der Regel Beziehungen hergestellt, wie etwa „Zahl der Frauen auf 1000 Männer“, etc. (vgl. [29] und [30])

3.1 LEXIS-Diagramm

Aus mathematischer Sicht lassen sich diese bevölkerungskundlichen Grundfragen sehr gut mit Hilfe des LEXIS-Diagramms beantworten, wobei dieses Diagramm als graphische Darstellung der Lebensgeschichte eines Menschen

interpretiert werden kann. Wilhelm LEXIS(1837-1914), ein deutscher Mathematiker, Statistiker und Nationalökonom, entwickelte dieses Diagramm (siehe Abb. 3.1), wobei sich auf der horizontalen t -Achse, also der Kalenderzeitachse, irgendwo der Zeitpunkt t_B der Geburt der betrachteten Person befindet. Die Lebenszeitspanne reicht von t_B bis t_D , also von der Geburt bis zum Todeszeitpunkt, und die Länge $t_D - t_B$ entspricht dem Lebensalter. Jedem Zeitpunkt im Intervall (t_B, t_D) kann das entsprechende Alter der Person durch eine Ordinate zugeordnet werden, wobei der Endpunkt dieser Strecke auf der „Lebenslinie“ liegt. Aus diesem Diagramm können diverse demographische, wirtschaftliche, soziale und kulturelle Merkmale wie etwa Alter, Familienstand, Sozialstruktur, etc. abgelesen werden.

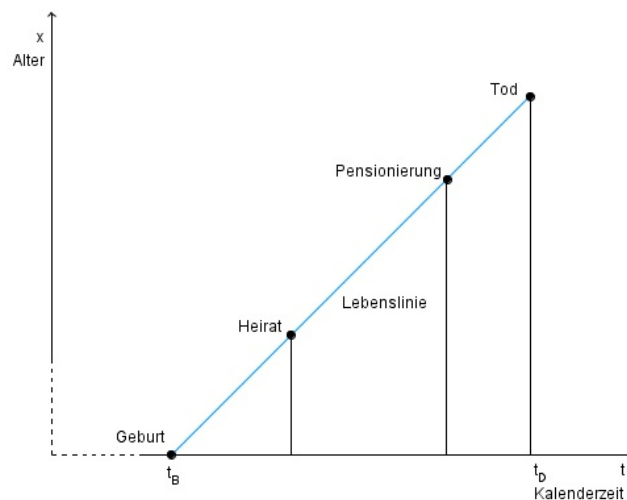


Abbildung 3.1: LEXIS-Diagramm für eine Person

Das LEXIS-Diagramm für eine einzelne Person ist allerdings für die Demographie nicht so interessant wie etwa ein Diagramm für die ganze Bevölkerung. Dazu sollen zuerst noch unterschiedliche Betrachtungsweisen demographischer Ereignisse geklärt werden. (vgl. [46])

3.1.1 Periode - Alter - Kohorte

Demographische Ereignisse wie etwa Geburt, Tod, Heirat, ... können auf drei unterschiedliche Arten zeitlich eingeordnet werden.

- **Kalenderzeit:** in einer bestimmten Periode, wie etwa einem Kalenderjahr, findet ein bestimmtes Ereignis statt.
- **Alter:** entspricht der Zeitspanne zwischen dem Datum der Geburt des Individuums und dem Ereignisdatum.
- **Kohorte:** alle Individuen, die sich ein bestimmtes „Startereignis“ wie etwa Geburt, Eheschließung in einem selben Zeitraum teilen. Anders ausgedrückt: Eine Geburtskohorte entspricht einem Geburtsjahrgang, also umfasst alle, die in demselben Kalenderjahr geboren sind.

Periode, Alter und Kohorte sind miteinander verbunden, vereinfacht kann man diesen Zusammenhang darstellen: $\text{Alter} = \text{Periode} - \text{Kohorte}$. Mit Hilfe des LEXIS-Diagramms lässt sich dieser Zusammenhang graphisch sehr gut veranschaulichen. (vgl. Abb. 3.2) Bei der Kohortenbetrachtung werden demographische Ereignisse prospektiv oder retrospektiv auf die jeweilige Kohorte bezogen, wodurch ein Nachteil entsteht, denn inhaltlich interpretierbare Aussagen können erst mit großer zeitlicher Verzögerung getroffen werden. Die tatsächliche durchschnittliche Lebensdauer der 2011 geborenen Mädchen kann frühestens 2111 berechnet werden. Andererseits liefert diese Betrachtungsweise inhaltlich korrekte und von „Periodeneffekten“ unbeeinflusste Informationen über demographische Sachverhalte. Werden einzelne Perioden verglichen, bekommt man immer aktuelle Informationen, da Maßzahlen auf Basis der demographischen Ereignisse und der durchschnittlichen Bevölkerungszahl in einem Kalenderjahr berechnet werden, allerdings werden implizit Annahmen über zukünftige Ereignisse, die von möglichen „Periodeneffekten“ gestört werden können, getroffen. (vgl. [24])

3.2 Altersgliederung

Das *Alter* ist die wichtigste Variable in der Bevölkerungsmathematik. Aussagen über die Größe einer Bevölkerung sind ohne Angaben über den Altersaufbau wenig wert, denn dieser ist neben der Geschlechtergliederung die

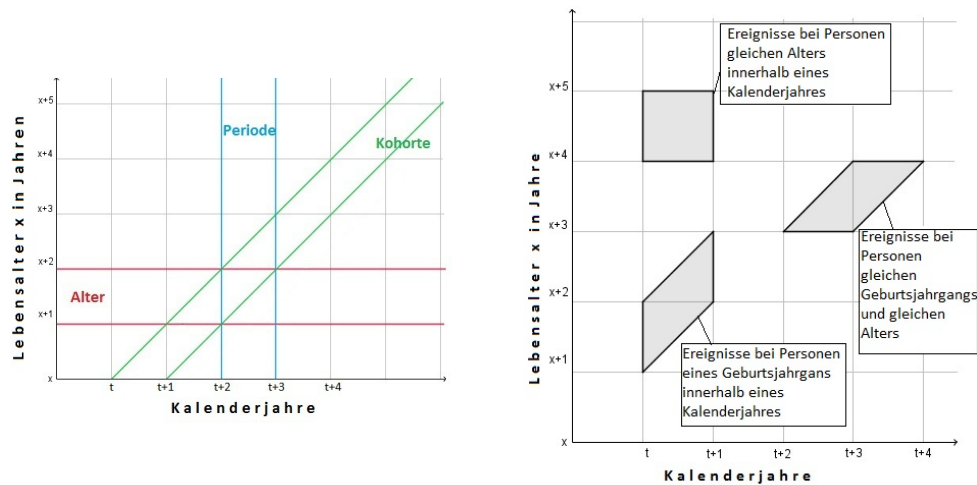


Abbildung 3.2: LEXIS-Diagramm mit Periode - Alter - Kohorte

wichtigste Gefügeeigenschaft einer Bevölkerung. Wirtschaftliche Leistungsfähigkeit, Konsumkraft oder etwa Fortpflanzungsfähigkeit des Menschen sind an gewisse Altersjahre gebunden, wodurch eben die Angaben des Alters von großer Bedeutung sind. Üblicherweise entspricht das Alter einer Person der Anzahl der seit ihrem Geburtstag verstrichenen Jahre. Meist wird die Bevölkerung in Altersklassen eingeteilt, geläufig sind je nach Fragestellung etwa 1-Jahresklassen oder 5-Jahresklasse. Bei kleinen Kindern sind Differenzierungen nach Monaten, Wochen und Tagen sinnvoll. (vgl. [29] und [30])

Um die Altersstruktur einer Bevölkerung beurteilen zu können, reicht es meist nicht, sich auf das „mittlere Alter“ oder auf den Median zu beziehen. Daher ist es international gebräuchlich, die Gesellschaft wie folgt zu unterteilen: Kinder und Jugendliche (0-14 oder 0-19 Jahre), Erwachsene bzw. Personen im erwerbsfähigem Alter (20-60) und alte Menschen (meist 60 bzw. 65 und älter). (vgl. [4])

Die Altersgliederung einer Bevölkerung an einem bestimmten Stichtag t_0 , etwa einer Volkszählung, lässt sich gut am LEXIS-Diagramm (Abb. 3.2) erklären:

Zeichnet man auf der Kalenderachse in t_0 eine senkrechte Gerade, dann schneidet diese die Lebenslinie all der Personen, die zum Stichtag leben. Die Anzahl dieser Schnittpunkte entspricht der Gesamtzahl $P(t_0)$ aller lebenden

Individuen zum Zeitpunkt t_0 . Weiters gleicht die Anzahl aller Schnittpunkte von Lebenslinien mit der Stichtagssenkrechten im Bereich des Intervalls $[A, B)$ der Anzahl $P(t_0, x)$ der Personen, die zum Stichtag t_0 schon x Jahre, aber noch nicht $x + 1$ Jahre alt sind, kurz: die x -jährigen Personen werden erfasst.

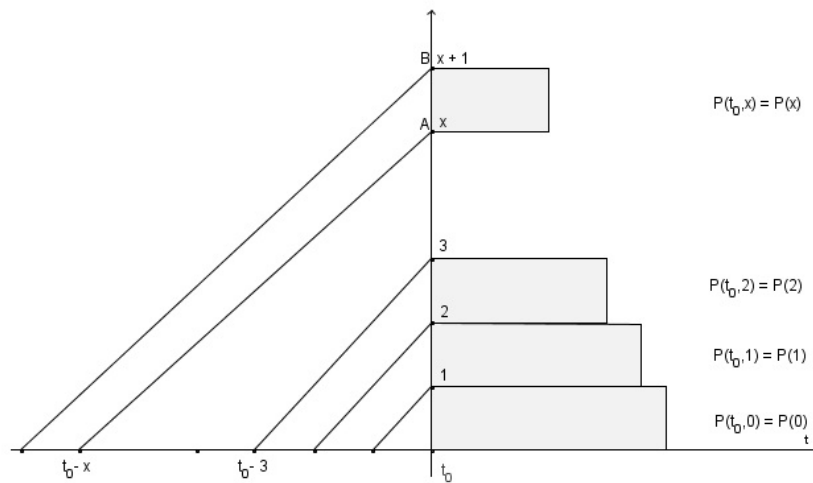


Abbildung 3.3: Vom Lexis-Diagramm zur Alterspyramide

Falls keine Missverständnisse auftreten, wird der Stichtag-Index t_0 weggelassen. $P(x)$ ist der Bestand der x -jährigen, die absolute Häufigkeit, mit der in der betrachteten Gesellschaft das Altersmerkmal x bis unter $x + 1$ Jahre auftritt. Die Gesamtanzahl an Menschen beträgt dann

$$P = P(0) + \dots + P(\omega) = \sum_{x=0}^{\omega} P(x),$$

wobei ω das maximale Alter ist.

$$\frac{P(x)}{P}$$

entspricht der relativen Häufigkeit der Merkmalsausprägung x bis unter $x + 1$ Jahre. Drückt man nun für alle Altersklassen $P(x)$ oder $\frac{P(x)}{P}$ durch Flächeninhalte (gleichbreiter) Rechtecke aus, so erhält man die Alterspyramide dieser

Bevölkerung. Wählt man $\frac{P(x)}{P}$, so entsteht ein „stehendes“ Histogramm der Altersverteilung. Die Summe der Flächeninhalte der Rechtecke ergibt natürlich 1. In der Literatur findet man oft „zweigeteilte“ Histogramme, in denen noch nach dem Geschlecht unterschieden wird.

Eine andere Art, die Altersstruktur einer Gesellschaft zu analysieren, wäre etwa, sich eine stetige Altersverteilung modellhaft zu bilden. Sei F eine Funktion mit

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R}_0^+ &\mapsto F(x), \\ F(0) &= 0, \quad F(\omega) = 1, \end{aligned}$$

d.h. $F(x)$ ordnet jedem Alter x die Anzahl $F(x)$ der lebenden Personen vom Alter $\leq x$ zu. Ist F noch differenzierbar, dann erhält man für $F' = f$ die Dichtefunktion der Altersverteilung und

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

entspricht dem Anteil der Personen vom Alter a bis b . $\Delta F(x) = f(x) \cdot \Delta x$ ist näherungsweise der Anteil der Personen vom Alter x bis $x + \Delta x$, wobei Δx klein ist. (vgl. [46])

3.2.1 Alterspyramiden

Die Alterspyramide ist die wohl bekannteste graphische Darstellung eines demographischen Sachverhaltes. Wie in Kapitel 3.2 bereits erwähnt, werden bei dieser Darstellung die Gliederung einer Bevölkerung nach dem Alter und nach dem Geschlecht kombiniert. Diese Pyramide entspricht einem modifiziertem Häufigkeitsdiagramm, wobei die Häufigkeiten nicht wie normalerweise auf der y -Achse, sondern auf der x -Achse aufgetragen werden. Das Häufigkeitspolygon baut sich so auf, dass jeder Altersjahrgang mit seiner Besetzung am Stichtag der Zählung in Form eines liegenden Rechtecks dargestellt wird, und zwar von einer Mittellinie für männliche Personen nach links, für weibliche nach rechts. Die einzelnen Blöcke übereinandergelegt ergeben unter gewissen Umständen eben eine Pyramide. Bleiben die Zahl der Geburten und die

Sterbewahrscheinlichkeiten in den einzelnen Altersklassen gleich, dann stellt diese kombinierte Alters- und Geschlechtsgliederung einer Bevölkerung genau diese Pyramide dar.

Aus der allgemeinen Form der Pyramide lassen sich wichtige Informationen über die Struktur und Dynamik einer Gesellschaft gewinnen. Für jeden Altersjahrgang lassen sich absolute Zahlen und auch relative Häufigkeiten ermitteln, die dann in das Diagramm meist in 5-Jahres-Klassen zusammengefasst, eingetragen werden. Die Form der Pyramide ergibt sich durch die realtiven Geburten-, Sterbe- und Wanderungszahlen in den einzelnen Altersklassen im Verlauf der Jahre. Das Häufigkeitsdiagramm kann im Wesentlichen drei Grundformen annehmen: die Pyramidenform, die Glocken- oder Bienenkorbform und die Urnen- oder Zwiebelform (siehe Abb. 3.4). Am unterschiedlichen Aufbau der Pyramide lassen sich die Bevölkerungsdynamik der Gesellschaft und deren Ursachen sehr gut ablesen. Werden Wanderungen nicht berücksichtigt, dann kann die Fertilität als eine entscheidende Bestimmungsgröße der Altersstruktur gelten. Die „demographische Alterung“ kann als Ergebnis eines Geburtenrückgangs interpretiert werden. Mortalität beeinflusst den Aufbau der Pyramide ebenfalls, jedoch nicht in dem Ausmaß wie die Fertilität.

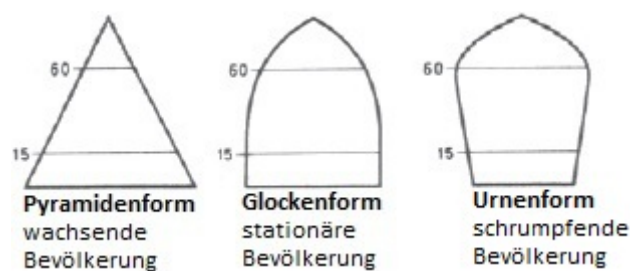


Abbildung 3.4: Die drei Grundformen des Altersaufbaus, Quelle: [18]

Die Pyramidenform wird in Ländern bzw. Gesellschaften mit hohen und über lange Zeit hinweg konstanten Geburten- und Sterberaten erreicht. Diese wachsen sehr langsam, obwohl die Anzahl der Geburten ständig zunimmt.

Die Zuspitzung zu einer Pyramide beruht einerseits darin, dass sich mit fortschreitendem Alter die Sterblichkeit vergrößert und andererseits die ältere Bevölkerung aus einer kleineren Ausgangsbevölkerung hervorgegangen ist. Gibt es allerdings niedrige Geburten- und Sterberaten in einer Gesellschaft, dann nähert sich die Pyramide einer Bienenkorbform. Die absoluten Zahlen an Geburten bleiben zwar gleich, doch die Sterblichkeit nimmt erst im hohen Alter zu, wodurch die Zuspitzung sehr spät einsetzt. Nähert sich die Bevölkerung dieser Darstellungsform, so spricht man von einer *stationären Bevölkerung*. Die dritte Grundform, die Urnenform, wird dann erreicht, wenn die Bevölkerung schrumpft, d.h. die Geburtenzahlen verringern sich laufend. (vgl. [4], [23], [29] und [30]). Abb. 3.5 zeigt die in Österreich momentane Altersstruktur. Die Form des Häufigkeitsdiagramms gleicht am ehesten der Urnenform.

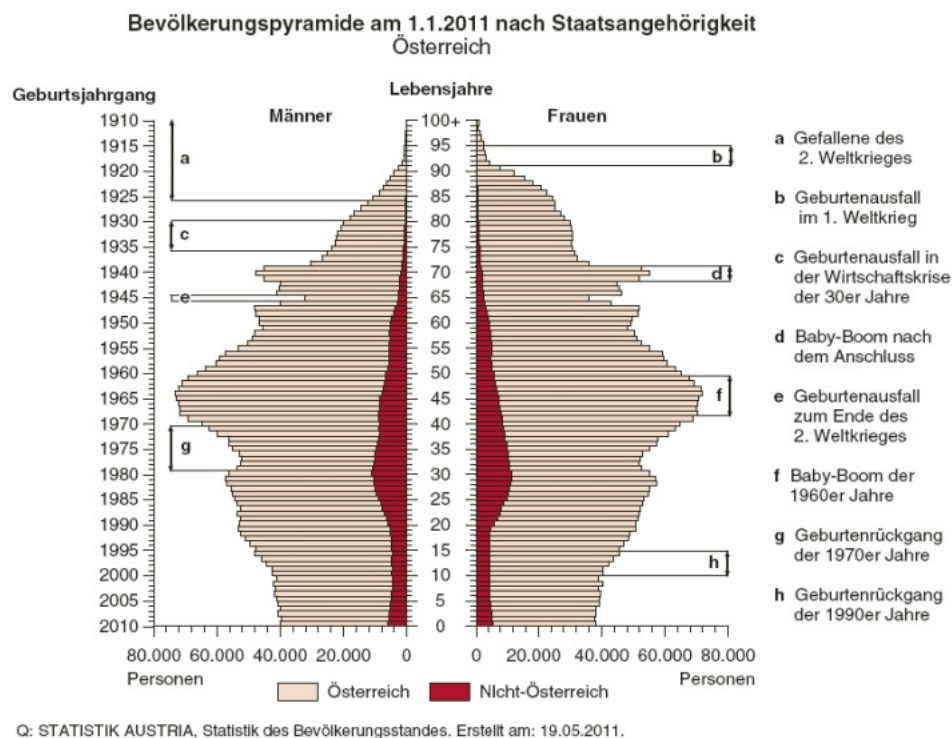


Abbildung 3.5: Österreichische Bevölkerung 2011, Quelle: Statistik Austria

3.3 Bevölkerungsveränderung

In Kapitel 3.2.1 wurde darauf aufmerksam gemacht, dass eine Veränderung der Geburtenbilanz maßgeblichen Einfluss auf die Altersstruktur einer Bevölkerung hat. Veränderungen werden so festgestellt, dass – ohne den genauen Verlauf der Entwicklung der Bevölkerung zu kennen – die zahlenmäßige Differenz zwischen Ausgangs- und Endbevölkerung analysiert wird. Bevölkerungszustände zweier Zeitpunkte werden verglichen und positive oder negative Veränderungen werden wahrgenommen. Im Vergleich dazu versteht man unter dem Begriff „Bevölkerungsentwicklung“ eine über einen längeren Zeitraum hinweg genaue Analyse eines Ablaufs der Veränderung der Bevölkerungszahl, welcher in Form einer Zeitreihe betrachtet wird.

Die relative Bevölkerungsänderung $v_{t,t+n}$ zwischen zwei Zeitpunkten t und $t + n$ lassen sich in Prozent der Ausgangsbevölkerung P_t

$$v_{t,t+n} = \left(\frac{P_{t+n}}{P_t} - 1 \right) \cdot 100 = \left(\frac{P_{t+n} - P_t}{P_t} \cdot 100 \right)$$

feststellen. Ist man an der durchschnittlichen jährlichen relativen Bevölkerungsveränderung zwischen zwei Zeitpunkten t und $t + n$ interessiert, so erhält man die Rate der durchschnittlichen jährlichen Bevölkerungsveränderung $r_{t,t+n}$ in Prozent mit folgender Formel, wobei P_t der Bevölkerungsanzahl zum Ausgangszeitpunkt, P_{t+n} der Bevölkerungszahl zum Endzeitpunkt des Beobachtungszeitraums entspricht:

$$r_{t,t+n} = \left(\sqrt[n]{\frac{P_{t+n}}{P_t}} - 1 \right) \cdot 100. \quad (3.1)$$

Dem Beobachtungszeitraum gleicht $t, t + n$ und n ist die Differenz in Jahren zwischen Ausgangs- und Endzeitpunkt.

Auf Basis der Gleichung 3.1 kann man sich durch Interpolation eine unbekannte Bevölkerungsanzahl für einen Zeitpunkt $t + y$ zwischen zwei bekannten Zeitpunkten t und $t + n$ berechnen, wobei angenommen wird, dass innerhalb dieses Zeitraums eine konstante Rate vorliegt. Dabei entspricht y der Differenz in Jahren zwischen dem Ausgangszeitpunkt t und dem Interpolationszeitpunkt $t + y$, wobei $y < n$ vorausgesetzt wird. Die Formel lautet

dann

$$P_{t+y} = P_t \cdot \left(1 + \frac{r_{t,t+n}}{100}\right)^y.$$

Einfache Vorausberechnungen für zukünftige Zeitpunkte $t + x$ mit $x > n$ können, wenn angenommen wird, dass die Rate $r_{t,t+n}$ auch bis zum Zeitpunkt $t + x$ konstant bleibt, ebenfalls auf Basis der Gleichung 3.1 berechnet werden. Die Variable x steht nun für die Differenz zwischen dem Ausgangszeitpunkt t und dem Vorausberechnungszeitpunkt $t + x$:

$$P_{t+x} = P_t \cdot \left(1 + \frac{r_{t,t+n}}{100}\right)^x. \quad (3.2)$$

Die Gleichung 3.2 beschreibt ein exponentielles Wachstumsmodell einer Bevölkerung auf Basis einer konstanten durchschnittlichen jährlichen Wachstumsrate und ist bereits aus Kapitel 2.2 bekannt. (vgl. [18])

Was bedeutet nun eine Wachstumsrate von 3 Prozent jährlich? Deutet das auf ein rasches oder eher ein geringes Wachstum hin? Die in Prozent angegebene durchschnittliche jährliche Wachstumsrate einer Bevölkerung erweist sich für Laien auf diesem Fachgebiet als schwer interpretierbare Maßzahl. Um die Wachstumsdynamik einer Bevölkerung anschaulicher zu gestalten, kann man die sogenannte *Doubling Time*, also die Verdoppelungsperiode, berechnen. Die Doubling Time wird als eine Zeitdauer definiert, in der sich eine gegebene Bevölkerungszahl verdoppeln würde. Allerdings wird angenommen, dass sich die durchschnittliche jährliche Wachstumsrate, die zum Berechnungszeitpunkt gegeben ist, auch in Zukunft konstant bleibt. Analogien kann man hier zur Halbwertszeit beim radioaktiven Zerfall ziehen, denn die Halbwertszeit entspricht ja der Zeit, in der sich ein exponentiell mit der Zeit abnehmender Wert halbiert.

Die exponentielle Funktion $P(t) = P(0) \cdot e^{rt}$, wobei eben r die durchschnittliche jährliche Wachstumsrate beschreibt, wird durch einen konstanten Zeitraum gekennzeichnet, in dem sich die Bevölkerung verdoppelt. Um sich für ein gegebenes r die Verdoppelungsperiode zu berechnen, setzen wir $\frac{P(t)}{P(0)} = 2$. Durch Einsetzen in die Gleichung, Kürzen, Anwendung des Logarithmus und passendem Umformen lässt sich für die Doubling Time mit der Wachstums-

rate r folgende Formel herleiten:

$$\begin{aligned}\frac{P(0) \cdot e^{rt}}{P(0)} &= 2, \\ e^{rt} &= 2 \\ r \cdot t &= \ln(2) \\ \text{DT} = t &= \frac{\ln(2)}{r}.\end{aligned}$$

Aus dieser Formel für die Doubling Time lässt sich folgende Tabelle 3.1 erstellen, wodurch die durchschnittliche jährliche Wachstumsrate in Prozent einfacher interpretierbar ist.

r in Prozent	Doubling Time
0.5	139 Jahre
1.0	69 Jahre
2.0	35 Jahre
3.0	23 Jahre

Tabelle 3.1: Doubling Time

Einer rasche, approximative Berechnungsmöglichkeit für die Doubling Time ist die sogenannte „Siebziger-Regel“ (engl. „Rule of 70“). Diese „Faustregel“ besagt, dass annähernd die Verdoppelungsperiode berechnet werden kann, wenn 70 durch die Wachstumsrate R in Prozent dividiert wird, also

$$\text{DT}_{\text{app}} = \frac{70}{R}.$$

Die Begründung der Formel erfolgt folgendermaßen. Sei R die Wachstumsrate in Prozent. Dann ist $r = \frac{R}{100}$ und wegen $dt = \frac{\ln 2}{r}$ ergibt sich daraus $dt = \frac{100 \ln 2}{R}$. Nun ist $100 \ln 2 \approx 69.314718056 \approx 70$.

Eine Bevölkerung mit einer konstanten durchschnittlichen jährlichen Wachstumsrate von einem Prozent würde sich etwa innerhalb von 70 Jahren verdoppeln, wie man aus Tabelle 3.1 ablesen kann. Nimmt man für die momentane

Wachstumsrate der Bevölkerung (2000-2008) 1.2 Prozent¹ an, dann würde Folgendes für die Doubling Time bzw. für die „Siebziger-Regel“ gelten

$$DT = \frac{\ln(2)}{0.012} = 57.76 \text{ Jahre, bzw.}$$
$$DT_{\text{app}} = \frac{70}{1.2} = 58.33 \text{ Jahre.}$$

Man sieht, dass die zwei Werte annähernd gleich sind.

¹Quelle: DER FISCHER WELTALMANACH 2011, Zahlen, Daten, Fakten; Fischer Taschenbuch Verlag, Frankfurt am Main, 2010.

4 Maßzahlen zum Bevölkerungswachstum

In jedem von uns Menschen bewohnten Raum unserer Erde vollzieht sich eine stetige Veränderung des Bevölkerungsstandes. Täglich werden Kinder geboren; alte, aber auch junge Menschen sterben und Menschen wandern zu oder ab. Dadurch wird einerseits die Entwicklung der Bevölkerungszahl beeinflusst, andererseits die Zusammensetzung und Verteilung der Bevölkerung. Wie sich nun die Bevölkerungszahl verändert, hängt vom Zusammenwirken zweier Größen ab:

- Erneuerung der Generationen durch Geburten- und Sterbefälle
- Zu- und Abwanderungen über die Gebietsgrenzen.

Diese Veränderung lässt sich mit der *demographischen Grundgleichung* darstellen, mit der die wesentlichen Inhalte aller Bevölkerungsstudien erklärt werden können:

$$P_{t+n} = P_t + B_{t,t+n} - D_{t,t+n} + I_{t,t+n} - E_{t,t+n}, \quad (4.1)$$

wobei P_t die Bevölkerung zum Zeitpunkt t , P_{t+n} die Bevölkerung zum Zeitpunkt $t + n$, $B_{t,t+n}$ die Zahl der Geburten zwischen t und $t + n$, $D_{t,t+n}$ die Zahl der Sterbefälle zwischen t und $t + n$, $I_{t,t+n}$ die Zuwanderung zwischen t und $t + n$ und $E_{t,t+n}$ die Abwanderung zwischen t und $t + n$ entspricht.

Die Gleichung 4.1 ermöglicht, dass die Bevölkerungszahl für den Zeitpunkt $t + n$ bei gegebenem Bevölkerungsstand zum beliebigen Zeitpunkt t aus dem Zuwachs durch Geburten und Zuwanderung bzw. durch Sterbefälle und Abwanderungen berechnet werden kann.

In unserer heutigen Zeit ist besonders das Wachstum der gesamten Erdbevölkerung interessant. Veränderungen der Gesamtzahl, der Neugeborenen, der Sterbefälle, usw. können mit Hilfe statistischer Kennzahlen festgestellt werden und werden über Jahre verfolgt, um Prognosen erstellen zu können. Wir betrachten nun eine Funktion $P : (t, x) \mapsto P(t, x)$ mit $P(t, x)$ = Anzahl der x bis unter $x + 1$ -jährigen zur Kalenderzeit t . Untersucht man die Größe der Gesamtbevölkerung zur Zeit t , erhält man die Funktion

$$P : t \mapsto P(t),$$

wobei $P(t)$ die Größe der Gesamtbevölkerung zur Zeit t entspricht. Die Funktion P beschreibt die Veränderung einer Population als Gesamtheit im Laufe der Zeit t und kann somit als Wachstumsfunktion interpretiert werden. Um Aussagen über die Bevölkerung zu treffen, kann man P nach dem Monotonieverhalten untersuchen, also liegt eine streng wachsende, eine stagnierende oder doch eine schrumpfende Bevölkerung vor. Weiters ist die Änderungsrate zu einem Zeitpunkt t , ergo die Wachstumsgeschwindigkeit, mit

$$\frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t}$$

und vor allem Wachstumsintensität, auch genannt Wachstumssatz, mit

$$\frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t \cdot P(t)}$$

interessant. (vgl. [46])

Untersucht man das Wachstumsverhalten der Gesamtbevölkerung der Erde, reicht es, die *natürliche Bevölkerungsbewegung*, also *Fertilität* und *Mortalität* zu betrachten. Die Bevölkerungsveränderung durch Geburten- und Sterbefälle werden als natürliche Bevölkerungsbewegung bezeichnet, denn durch die Geburt tritt ein Mensch in eine Bevölkerung ein, mit dem Tod aus. Für die zwei Teilprozesse werden die Begriffe *Fruchtbarkeit* (*Fertilität*) und *Sterblichkeit* (*Mortalität*) verwendet, wobei in der Literatur – besonders im Falle der Fruchtbarkeit – die Sprachregelung nicht einheitlich ist. Der Oberbegriff *Natalität* wird von manchen Autoren benutzt und es wird weiter zwischen

Geburten- (Erfassung von Lebendgeborenen) und Fertilitätsstatistiken (Erfassung und Beurteilung der Reproduktionsleistung) differenziert. (vgl. [4]) Bei der Untersuchung der Bevölkerungsveränderung eines Landes oder eines bestimmten Gebietes der Erde, müsste man zusätzlich noch die *Migration*, die die räumliche Wanderbewegung beschreibt, betrachten. In prähistorischer Zeit spielte Migration eine ganz bedeutende Rolle, denn so wurde die ganze Erde besiedelt. Dennoch basieren die meisten historischen Wachstumsmodelle ohne Einbeziehung der Migration. Vorerst wird daher Migration weggelassen, im Kapitel 6 wird ein Modell mit Migration analysiert.

Bei der statistischen Untersuchung der natürlichen Bevölkerungsbewegung ist es aus didaktisch-methodischen Gründen sinnvoll, sich entgegen der natürlichen Reihenfolge zuerst mit den Maßzahlen der Mortalität zu beschäftigen. MACKENROTH schreibt in [29], dass das Sterben ein in jedem Leben mit Sicherheit eintretendes Ereignis sei, während nicht jede Frau Kinder zu Welt bringt. Weiters argumentiert MACKENROTH, dass jeder nur einmal sterben kann, eine gebärfähige Frau kann allerdings mehrere Kinder bekommen.

Diese Argumentation ist in dieser Form allerdings sehr seltsam, denn jeder kann nur einmal sterben, aber auch nur einmal geboren werden. Dass eine Frau mehrere Kinder bekommen kann, passt eher zu dem ersten Argument, weil nicht jede Frau ein Kind bekommen muss. Weiters würde ein „Eine Frau=ein Kind“-Modell zum Aussterben führen, denn – gehen wir vom Modell gleich viele Männer wie Frauen aus (jedes andere Verhältnis würde ganz analog funktionieren – und selbst bei keinem fixen Verhältnis könnte man zeigen, dass die Bevölkerung ausstirbt) – in der nächsten Generation ist die Bevölkerungszahl gleich der Anzahl der Frauen der Vorgängergeneration, also die Hälfte der Bevölkerungszahl der Vorgängergeneration. Nach n Generationen ist dann die Bevölkerungszahl auf $(\frac{1}{2})^n$ der Anfangsbevölkerung gesunken, und somit geht die Bevölkerungszahl gegen 0.

4.1 Mortalität

Die Sterblichkeit bildet die negative Komponente in der Entwicklung einer Gesellschaft. Als Folge des Rückgangs der Sterblichkeit infolge medizinischer Fortschritte, besserer ökonomischen Bedingungen und ein langsamerer Rückgang der Fertilität herrscht heute weltweit ein Ungleichgewicht zwischen Geburten und Todesfällen. Die absolute Zahl der jährlichen Todesfälle ist vielleicht für den ersten Einblick in das Sterblichkeitsniveau einer Bevölkerung interessant, allerdings für raumzeitliche Vergleiche ungeeignet, da sie von der Größe der jeweiligen Bevölkerung abhängt.

Die *rohe Todesrate* $d(t)$ bezieht die Anzahl $D(t)$ der Sterbefälle im Jahr t auf den Bevölkerungsstand $P(t + 0.5)$ zur Mitte des Jahres t . Somit ergibt sich für $d(t)$ folgende Gleichung:

$$d(t) := \frac{D(t)}{P(t + 0.5)}. \quad (4.2)$$

Wird die Gleichung 4.2 mit 1000 multipliziert, so erhält man die rohe Todesrate pro 1000 Personen. Die *allgemeine (rohe) Sterbeziffer* bzw. *Todesrate* (englisch: *crude death rate*) wird wie folgt berechnet und in der Literatur oft durch die englische Abkürzung CDR angegeben:

$$\text{CDR} = \frac{D(t)}{P(t + 0.5)} \cdot 1000.$$

Wenn eine Gesellschaft einen größeren Anteil an alten Menschen hat, dann werden mehr Menschen einem größeren Todesrisiko ausgesetzt, da diese einem höheren Sterblichkeitsrisiko ausgesetzt sind als etwa Jugendliche. Die rohe Todesrate ist also stark vom Altersaufbau abhängig. Um diese Abhängigkeit zu verhindern, betrachtet man *altersspezifische Todes- bzw. Sterberaten*. (englisch: *age-specific death rates*; ASDR) Durch

$$m_x = m(t, x) := \frac{D(t, x)}{P(t + 0.5, x)}, \quad \text{bzw.} \quad m_x = \frac{D(t, x)}{P(t + 0.5, x)} \cdot 1000, \quad (4.3)$$

definiert man die Sterberate der x -ten Altersklasse m_x , wobei $D(t, x)$ die Anzahl der Gestorbenen vom Alter x im Jahr t und $P(t + 0.5)$ die Anzahl der Personen des Alters x in der Jahresmitte von t beschreibt. In ein oder fünf

Jahrgängen werden die Altersklassen angegeben. Die altersspezifische Sterblichkeitsrate oder kurz ASDR zeigen einen typischen Verlauf in Abhängigkeit vom Alter – eine idealisierte U-Form, der in allen Bevölkerungen zu finden ist. (vgl. [9])

Weitere Maßzahlen zur Mortalität wären die *standardisierte Sterberate* (englisch: *standardized death rate*; SDR), die sich ergibt, wenn man die beobachteten altersspezifischen Sterberaten auf den Altersaufbau der „Standardbevölkerung“ (z.B. des Gesamtstaates) bezieht und die *Säuglingssterblichkeit* (englisch: *infant mortality rate*; IMR). Bei der Berechnung dieser Rate wird die Zahl der in einem Kalenderjahr gestorbenen Säuglinge D_0 bezogen auf 1000 der im gleichen Kalenderjahr Lebendgeborenen B^* .

$$\text{IMR} := \frac{D_0}{B^*} \cdot 1000$$

In der Literatur findet man noch feinere Differenzierungen bei der Säuglingssterblichkeit, die in dieser Arbeit aber nicht erwähnt werden. (vgl. [18])

4.1.1 Sterbetafeln

Eine weitere Maßzahl für die Sterblichkeit einer Bevölkerung ist die Lebenserwartung bei der Geburt, wobei für die Konstruktion dieser Maßzahl auf das historisch älteste Modell der demographischen Analyse – auf Sterbetafeln – zurückgegriffen wird. Die Verfahren zur Berechnung der Sterbetafeln haben sich im Laufe der Zeit sehr verfeinert und sind im Allgemeinen recht kompliziert. Prinzipiell kann man zwischen zwei Arten von Sterbetafeln differenzieren. Einerseits gibt es *Generationen- oder Kohortensterbetafeln*, andererseits *Periodensterbetafeln*. Die zwei möglichen Zugänge präsentieren ihre Ergebnisse identisch, denn sie dokumentieren beide, wie sich eine Bevölkerung mit einem fest vorgegebenen Bestand Neugeborener mit fortschreitender Zeit reduziert. Die Datengrundlage der Kohorten- und Periodenanalyse ist jedoch wie der jeweilige zeitliche Bezugsrahmen, aus dem die Informationen für die Erstellung der Sterbetafeln gewonnen werden, verschieden.

Kohortenanalyse ist die eigentlich logisch richtige Methode, da diese auf Sterblichkeitsverhältnisse einer einzelnen Generation oder Geburtsjahrgangsgruppe während ihres gesamten Lebensablaufs beruht. Daher handelt es sich hier um eine Längsschnittanalyse, da die betrachtete Bevölkerung in ihrer vollständigen Entwicklung entlang der Kalenderzeit beobachtet wird. Die Kohortensterbetafel beschreibt folglich die tatsächlichen Überlebensverhältnisse, welchen eine einst real existierende Generation im Lauf ihres gesamten Lebens ausgesetzt war. Probleme entstehen bei der Konstruktion dieser Kohortensterbetafeln, denn Individuen einer gegebenen Kohorte können unregistriert versterben oder etwa durch Abwanderung verloren gehen. Weiters kann eine solche Tafel erst dann vollständig erstellt werden, wenn alle Mitglieder der betrachteten Generation verstorben sind. Kohortensterbetafeln sind für gegenwartsnahe Beschreibungen der Sterblichkeitsverhältnisse ungeeignet. In der historischen Demographie sowie in der Versicherungsmathematik finden Kohortensterbetafeln allerdings ihre Verwendung.

Auf Grund dieser Probleme werden meist Periodensterbetafeln konstruiert, wobei diese einen Querschnittblick auf die Mortalitätsverhältnisse einer Bevölkerung während eines Kalenderjahres oder einer mehrjährigen Periode wirft. Mit Hilfe dieser Tafeln wird der Absterbeprozess einer imaginären Kohorte unter den altersspezifischen Sterberisiken eines relativ kurzen Beobachtungszeitraums (1–3 Jahre) betrachtet. Solche Tafeln werden getrennt für die männliche und weibliche Bevölkerung ausgehend von 100.000 Personen berechnet. Sie bringen zum Ausdruck, in welcher Weise gleichzeitig Geborene im Laufe ihrer Lebensjahre allmählich „absterben“, wenn sie in den einzelnen Altersjahren den Sterblichkeitsverhältnissen unterlegen sind, wie sie zum Zeitpunkt des Erstellens der Tafel gegeben sind. Anders ausgedrückt, es kann durch die Periodensterbetafel veranschaulicht werden, welche Konsequenzen die in einem bestimmten Zeitabschnitt beobachtete Sterblichkeit auf die fiktive Bevölkerung hat. Diese Bevölkerung besteht allerdings aus völlig homogenen Mitgliedern und ist frei von jeglichen zusätzlichen Effekten (z.B. Bevölkerungsgröße, -struktur, äußere Einflüsse). (vgl. [4], [28] und [30])

Sterbetafel spielen für die Konstruktion von Bevölkerungsmodellen und für Vorausschätzungen eine entscheidende Rolle und Fragen wie etwa „Wie kann die Wahrscheinlichkeit abgeschätzt werden, ausgehend von irgendeinem Alter, mindestens ein höheres Alter zu erreichen?“, „Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit einer k -jährigen Person, innerhalb des nächsten Altersjahres zu sterben?“, „Wie viele Jahre kann eine k -jährige Person erwarten, durchschnittlich noch am Leben zu sein?“ oder etwa „Wie groß ist die durchschnittliche Lebenserwartung eines Neugeborenen?“. (vgl. [18])

Die aus Sterbetafel gewonnenen Mortalitätsmaße können nicht nur für raumzeitliche Vergleiche zwischen verschiedenen Ländern oder anderen räumlichen Einheiten verwendet werden, sondern auch zur Beurteilung der Sterblichkeitsunterschiede zwischen einzelnen Bevölkerungsgruppen (z.B. rassisch-ethnische Gruppierungen). (vgl. [4] und [30])

Interessant ist nun, wie man Sterbetafel mathematisch berechnen bzw. erstellen kann. Ausgangspunkt zur Berechnung sind die altersspezifischen Sterberaten (ein- oder fünfjährig) und sie werden getrennt für Männer und für Frauen erstellt. Die altersspezifischen Sterbeziffern basierend auf einer fiktiven Bevölkerung von 100.000 Personen bestimmen die Zahl der Sterbefälle pro Altersklasse und damit die bis zu einem bestimmten Altersjahr überlebenden Personen. Die Sterbetafel besteht aus den in Tabelle 4.1 gegebenen Spalten.

x (Alter)	$q(x)$	$l(x)$	$d(x)$	$L(x)$	$T(x)$	$e(x)$
-------------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

Tabelle 4.1: Spalten einer Sterbetafel

Die folgende Herleitung für die Erstellung einer Sterbetafel orientiert sich an [8]: Für die Berechnung der Mortalität einer Kohorte von $l(0)$ eines Geschlechts (z.B. der Frauen) gehen wir nach John GRAUNT von der Existenz einer Funktion $l(x)$ aus, welche angibt, wie viele von $l(0)$ ursprünglich vorhandenen Personen im Alter x noch am Leben sind. Die stetige Variable x gibt das exakte Lebensalter an und eigentlich könnte die Überlebensfunktio-

on $l(x)$ – interpretiert als Personenzahl – nur ganzzahlige Werte annehmen. Falls $l(x)$ groß ist, dann erhält man durch

$$\frac{l(y)}{l(x)}$$

einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit vom Alter x (mindestens) bis zum Alter y zu überleben, wobei $x \leq y$ gilt. Am Ausgangspunkt der Analyse stehen die Überlebenswahrscheinlichkeiten und daher normieren wir $l(0)$ mit eins. Die Überlebensfunktion $l(x)$ gibt dann die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Neugeborenes das Alter x erreicht. In den folgenden Überlegungen wird vorausgesetzt, dass die monoton fallende Funktion $l(x)$ differenzierbar ist. Sei Δ eine beliebige Zeitspanne. Wenn Δ unbeschränkt kleiner wird, dann wird die Anzahl der Todesfälle im Altersintervall $(x, x+\Delta)$, also $l(x) - l(x+\Delta)$ verschwindend klein. Daher eignet sich für kleine Δ die Größe

$$1 - \frac{l(x+\Delta)}{l(x)}$$

nicht zur Messung der Sterbeneigung, da sie gegen Null strebt. Um das Mortalitätsrisiko zu berechnen, betrachtet man nicht nur die Sterbefälle in $(x, x+\Delta)$ auf $l(x)$, sondern auch die Länge des zugrundegelegten Intervalls. Anders ausgedrückt untersucht man die Todesfälle pro Kopf und pro Zeiteinheit. Aus der altersspezifischen Sterberate (vgl. Gleichung 4.3) kann man sich die Sterbeintensität $\mu(x)$ durch folgende Grenzwertbildung berechnen:

$$\mu(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{l(x) - l(x+\Delta)}{l(x)\Delta} = -\frac{1}{l(x)} \frac{dl(x)}{\Delta x} = -\frac{d \ln l(x)}{\Delta x}. \quad (4.4)$$

Da die beiden Funktionen $\mu(x)$ und $l(x)$ in Abhängigkeit voneinander stehen, können sie wechselseitig voneinander berechnet werden, wobei wegen $l(0) = 1$ gilt

$$l(x) = e^{-\int_0^x \mu(t) dt}.$$

Im Intervall $I = (x, x+dx)$ kommt es nach der Gleichung 4.4 zu $l(x) \cdot \mu(x) dx$ Todesfällen und es gilt $\pi(x) = l(x) \cdot \mu(x)$, wobei $\pi(x)$ als die Anzahl der Ereignisse, die pro Person des Ausgangsbestandes in I passieren, interpretiert werden kann. Da für das maximale Lebensalter ω $l(\omega) = 0$ gelten muss und

wegen Gleichung 4.4 folgt, dass die Intensität P gleich Eins sein muss. Die Intensität P gibt an, wieviele Ereignisse pro Kopf eintreten. Es gilt also

$$P = \int_0^{\omega} l(x) \cdot \mu(x) dx = - \int_0^{\omega} dl(x) = l(0) - l(\omega) = 1 - 0 = 1.$$

Für die Lebenserwartung eines Neugeborenen $e(0)$ ist das durchschnittliche Sterbealter

$$e(0) = \int_0^{\omega} x \cdot l(x) \cdot \mu(x) dx = \int_0^{\omega} l(x) dx \quad (4.5)$$

bzw. entspricht $e(0)$ der durchschnittlichen Lebensdauer eines Neugeborenen. Diese Gleichung 4.5 beweist man, indem man die angegebene Beziehung $l(x) \cdot \mu(x) dx = -dl(x)$, die sich aus Gleichung 4.4 ergibt, betrachtet und mittels partieller Integration löst. Die Anzahl der im Intervall $(x, x+1)$ verlebten Personenjahre beträgt

$$L(x) = \int_0^1 l(x+t) dt, \quad (4.6)$$

wobei angenommen wird, dass die Todesfälle im Altersintervall $(x, x+1)$ gleichverteilt sind. Die Spalte $T(x)$ aus Tabelle 4.1 gibt die Summe der von den Überlebenden im Alter x insgesamt noch zu durchlebenden Personenjahre an und für $T(x)$ gilt

$$T(x) = \int_x^{\omega} l(y) dy. \quad (4.7)$$

Die fernere Lebenserwartung $e(x)$ einer x -jährigen ist die mittlere Anzahl an Jahren, welche ein überlebendes Individuum im Alter x noch zu erleben hat und ergibt sich als:

$$e(x) = \frac{T(x)}{l(x)} = \frac{1}{l(x)} \int_0^{\omega-x} t \cdot l(x+t) \cdot \mu(x+t) dt, \quad (4.8)$$

wobei diese Formel mittels Teilintegration bewiesen wird.

Bei der Erstellung der Sterbetafeln werden in der Praxis die Überlebensfunktion $l(x)$ und die daraus entstehenden Sterbetafelfunktionen angepasst. Wie oben schon erwähnt, basiert die Rechnung auf einer fiktiven Kohorte mit $l(0) = 100000$ Personen eines Geschlechts, die etwa in einem gleichen

Kalenderjahr geboren wurden. Das Alter wird in vollendeten Jahren gemessen, also $x = 0, 1, 2, \dots, w$, wobei der maximal erreichbare Geburtstag w die nächstkleinere Zahl von ω ist.

Die Zahl $d(x)$ entspricht der Anzahl der im Altersintervall $(x, x + 1)$ auftretenden Sterbefälle. Die Überlebenden im Alter x , also $l(x)$, gruppieren sich in die Todesfälle x und in jene, die noch in $x + 1$ am Leben sind. Daher gilt

$$l(x + 1) = l(x) - d(x), \quad x = 0, 1, \dots, w. \quad (4.9)$$

Da alle Menschen sterblich sind, gilt $l(w + 1) = 0$ bzw.

$$l(x) = \sum_{y=x}^w d(y).$$

$q(x)$ ist die Sterbewahrscheinlichkeit einer x -jährigen im Altersintervall $(x, x + 1)$ und kann einerseits durch

$$q(x) = \frac{d(x)}{l(x)},$$

andererseits durch

$$q(x) = \frac{D_x}{P_x + \frac{D_x}{2}}$$

berechnet werden, wobei die zweite Formel wie die altersspezifische Sterberate (4.3) berechnet wird; zur Bevölkerung P wird die Hälfte der Gestorbenen D dazugezählt. (vgl. [8] und [30])

Zusammenfassend kann die Berechnung einer Sterbetafel kurz so beschrieben werden: die drei Spalten x , $l(x)$ und $q(x)$ sind vorgegeben, wobei $l(0) = 100000$ angenommen wird. Die Gestorbenen $d(x)$ im Altersintervall $(x, x + 1)$ ergeben sich aus dem Produkt $l(x) \cdot q(x)$; die Überlebenden im Alter 1 kann man dann durch $100000 - d(0) = l(1)$ berechnen; usw. Da $L(x)$ die Anzahl der von x -jährigen im Altersintervall $(x, x + 1)$ verlebten Personenjahre bezeichnet, gibt $T(x)$ die Summe der von den Überlebenden im Alter x insgesamt noch zu durchlebenden Personenjahre an, also

$$T(x) = \sum_{y=x}^w L(y).$$

$q(x)$ und $d(x)$ sind (diskrete) Ereignisse, $l(x)$ ist hingegen ein Zustandsmaß. Diese drei Funktionen zählen zu den elementaren Funktionen einer Sterbetafel und daraus lassen sich die drei weiteren Tafelfunktionen $L(x)$, $T(x)$ und $e(x)$ ableiten. Zu beachten ist, dass die Altersklassen exakte Altersklassen, d.h. von Geburtstag zu Geburtstag sind und nicht Kalenderjahre darstellen. (vgl. [30])

In der Demographie wird die in der Sterbetafel dargestellte fiktive Bevölkerung als *stationäre Bevölkerung* bezeichnet und bedeutet, dass sie stationär, also unveränderlich ist. Die Sterbetafel wird ausgehend von 100 000 Neugeborenen, die alle in den nächsten (meist 100) Jahren in unterschiedlichem Alter sterben, konstruiert. In der Sterbetafelbevölkerung stehen dann den 100 000 Geburten auch 100 000 Sterbefälle gegenüber, also es sterben ebensoviele Personen wie geboren werden. Ein Wachstum ist nicht möglich, da die Geburtenanzahl $l(0)$ Jahr für Jahr genau der Zahl der Sterbefälle $\sum d(x)$ entspricht. Durch die stationäre Bevölkerung wird ein demographisches Modell dargestellt, dessen Aufgabe darin besteht, eine exakte Sterblichkeitsmessung zu ermöglichen. Die Sterbeziffer für eine stationäre Bevölkerung S^{stat} lautet dann:

$$S^{\text{stat}} = \frac{\text{Zahl der Sterbefälle}}{\text{Bevölkerungszahl}} = \frac{\sum d}{\sum l(x)} = \frac{1}{e(0)}.$$

(vgl. [42])

In der Abbildung 4.1 ist ein kleiner Ausschnitt aus der Sterbetafel von 2010, erstellt von STATISTIK AUSTRIA, zu sehen. Die Sterbetafel wurde noch bis zum 95. Geburtstag erstellt, aus Platzgründen wird sie aber nicht vollständig gezeigt.

4.2 Fertilität

Bereits im Kapitel 4.1.1 wurde mit Hilfe der Sterbetafel die Lebenserwartung eines Neugeborenen berechnet. Folglich ist interessant, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass überhaupt ein Kind geboren wird. *Fertilität* –

Genaueres Alter (am x-ten Geburtsstag) in Jahren	Männliches Geschlecht					Weibliches Geschlecht					Genaueres Alter (am x-ten Geburtsstag) in Jahren
	Sterbe- wahrschein- lichkeit im Alters-intervall x bis x+1	Über- lebende im Alter x	Gestorbene im Alters- intervall x bis x+1	Von den Überlebenden im Alter x		Über- lebende im Alter x	Gestorbene im Alters- intervall x bis x+1	Von den Überlebenden im Alter x		Fernere Lebens- erwartung im Alter x in Jahren	
				insgesamt	noch zu durch- lebende Jahre			insgesamt	noch zu durch- lebende Jahre		
x	q(x)	l(x)	d(x)	L(x)	T(x)	l(x)	d(x)	L(x)	T(x)	e(x)	x
0	0,004391	100.000	434	99.686	7.769.665	100.000	344	99.751	8.315.668	83,16	0
1	0,0003493	99.566	35	99.549	7.669.979	99.656	34	99.639	8.215.917	82,44	1
2	0,0001979	99.531	20	99.521	7.570.430	99.622	16	99.614	8.116.278	81,47	2
3	0,0001957	99.512	20	99.502	7.470.909	99.607	15	99.599	8.016.664	80,48	3
4	0,0000733	99.492	7	99.488	7.371.407	99.591	5	99.589	7.917.065	79,50	4
5	0,0000240	99.485	2	99.483	7.271.919	99.586	18	99.577	7.817.476	78,50	5
6	0,0000000	99.482	0	99.482	7.172.436	99.586	8	99.568	7.717.899	77,51	6
7	0,0000717	99.482	7	99.479	7.072.953	99.561	5	99.558	7.618.334	76,52	7
8	0,0001449	99.475	14	99.468	6.973.475	99.556	13	99.550	7.518.776	75,52	8
9	0,0000716	99.461	7	99.457	6.874.007	99.543	8	99.539	7.419.226	74,53	9
10	0,0000703	99.454	7	99.450	6.774.550	99.536	5	99.533	7.319.687	73,54	10
11	0,0000461	99.447	5	99.444	6.675.100	99.531	7	99.527	7.220.154	72,54	11
12	0,0001117	99.442	11	99.436	6.575.656	99.524	2	99.522	7.120.626	71,55	12
13	0,0001059	99.431	11	99.426	6.476.219	99.521	7	99.518	7.021.104	70,55	13
14	0,0001466	99.420	15	99.413	6.376.794	99.515	20	99.510	6.921.586	69,55	14
15	0,0004120	99.406	41	99.385	6.277.381	99.495	17	99.486	6.822.081	68,57	15
16	0,0003178	99.365	32	99.349	6.177.996	99.478	23	99.466	6.722.595	67,59	16
17	0,0005022	99.333	50	99.308	6.078.647	99.455	20	99.445	6.623.129	66,59	17
18	0,0005709	99.283	57	99.255	5.979.338	99.434	8	99.430	6.523.684	65,61	18
19	0,0008547	99.227	85	99.184	5.880.083	99.426	22	99.416	6.424.253	64,61	19
20	0,0009785	99.142	97	99.093	5.780.898	99.405	30	99.390	6.324.838	63,63	20
21	0,0010656	99.045	100	99.995	5.681.806	99.375	37	99.357	6.225.448	62,65	21
22	0,0010399	99.945	103	99.894	5.582.811	99.338	27	99.325	6.126.091	61,67	22
23	0,0009134	99.842	90	99.797	5.483.917	99.311	13	99.305	6.026.766	60,69	23
24	0,0007706	99.752	61	99.721	5.385.120	99.296	21	99.288	5.927.462	59,69	24
25	0,0007063	99.691	76	99.653	5.286.399	99.277	18	99.268	5.828.174	58,71	25
26	0,0007455	99.615	74	99.578	5.187.746	99.259	20	99.249	5.728.906	57,72	26
27	0,0006776	99.541	67	99.508	5.089.168	99.239	37	99.220	5.629.657	56,73	27
28	0,0006136	99.475	60	99.444	4.990.660	99.202	24	99.189	5.530.437	55,75	28
29	0,0006507	99.414	64	99.382	4.892.215	99.177	28	99.163	5.431.248	54,76	29
30	0,0006602	99.350	65	99.318	4.793.633	99.149	26	99.136	5.332.085	53,78	30
31	0,0007917	99.285	78	99.246	4.695.515	99.123	19	99.114	5.232.949	52,79	31
32	0,0006124	99.207	60	99.177	4.597.269	99.104	52	99.078	5.133.835	51,80	32
33	0,0008031	99.147	79	99.108	4.499.092	99.052	25	99.040	5.034.757	50,83	33
34	0,0011139	99.068	109	99.014	4.400.984	99.028	35	99.010	4.935.717	49,84	34
35	0,0010780	99.969	106	99.906	4.302.970	99.993	35	99.975	4.836.706	48,86	35
36	0,0007847	97.854	77	97.815	4.205.054	98.969	59	98.928	4.737.731	47,88	36
37	0,0011027	97.777	108	97.723	4.107.248	98.899	60	98.869	4.638.802	46,90	37
38	0,0011856	97.669	116	97.611	4.009.525	98.839	65	98.806	4.539.933	45,93	38
39	0,0012122	97.553	118	97.484	3.911.914	98.774	54	98.747	4.441.127	44,96	39
40	0,0011074	97.435	108	97.381	3.814.421	98.720	52	98.694	4.342.380	43,98	40
41	0,0011688	97.327	158	97.248	3.717.040	98.668	65	98.635	4.243.686	43,01	41
42	0,0014419	97.169	140	97.099	3.619.792	98.603	83	98.561	4.145.051	42,04	42
43	0,0015275	97.029	187	96.936	3.522.693	98.520	89	98.476	4.046.490	41,07	43
44	0,0015801	96.842	153	96.786	3.425.757	98.431	109	98.377	3.948.014	40,11	44
45	0,0021401	96.689	207	96.596	3.328.992	98.322	128	98.258	3.849.638	39,15	45
46	0,0024123	96.482	233	96.396	3.232.406	98.194	147	98.121	3.751.379	38,20	46
47	0,0030285	96.249	291	96.104	3.136.040	98.048	139	97.978	3.653.258	37,26	47
48	0,0028470	95.968	273	95.821	3.039.937	97.909	155	97.831	3.555.280	36,31	48
49	0,0036912	95.666	353	95.508	2.944.115	97.754	184	97.662	3.457.449	35,37	49
50	0,0039323	95.331	375	95.144	2.848.607	97.569	192	97.473	3.359.787	34,43	50

Abbildung 4.1: Sterbetafel 2010, Quelle: STATISTIK AUSTRIA

der zweite Bestandteil der natürlichen Bevölkerungsbewegung – lässt sich wie alle demographischen Prozesse aus Perioden- und Kohortenperspektive betrachten. Periodenmaße beschreiben wieder eine Querschnittsanalyse und geben an, wie viele Kinder Frauen im Durchschnitt zur Welt bringen würden, wenn im Laufe ihres Lebens – also im Zeitraum bis zum Ende ihrer Reproduktionsfähigkeit – dieselben altersspezifischen Fertilitätsverhältnisse herrschen würden wie in dem betreffenden Untersuchungsjahr in den verschiedenen Altersgruppen der Frauen. Die Kinderzahlen sind hypothetisch; trotzdem sind die meisten Maßzahlen Periodenmaßzahlen.

Kohortenmaße differenzieren sich hingegen nach dem Geburtsjahrgang der Mütter und dienen für die Längsschnittanalyse. Kohortenfertilitätsraten können als die tatsächliche durchschnittliche Kinderzahl einer real existierenden Geburtskohorte interpretiert werden. (vgl. [18])

Eine weit verbreitete Maßzahl zur Messung der Fruchtbarkeit ist die *rohe Geburtenrate* (englisch: *crude birth rate*; CBR). Die Kennzahl CBR gibt die Zahl der in einem Kalenderjahr t Lebendgeborenen $B(t)$ bezogen auf 1000 Personen des Bevölkerungsstandes $P(t + 0.5)$ zur Jahresmitte an und kann daher definiert werden als

$$\text{CBR} = b(t) := \frac{B(t)}{P(t + 0.5)} \cdot 1000.$$

Aufgrund der Multiplikation mit 1000 erfolgen die Angaben der Rate in Promille. Diese Kennzahl ist sehr einfach zu berechnen und ist daher weit verbreitet, allerdings wird der Anteil der Frauen, die sich im reproduktionsfähigen Alter befinden, nicht berücksichtigt und es ist somit schwierig auf das generative Verhalten einer Bevölkerung zu schließen. Weiters wird zwischen der weiblichen rohen Geburtenrate, also der Anzahl der weiblichen Lebendgeborenen eines Kalenderjahres bezogen auf den Frauenbestand zur Jahresmitte, und der rohen Geburtenrate oftmals nicht differenziert. (vgl. [9] und [25])

Um die Beeinflussung des Geschlechterverhältnisses und der Altersstruktur auszuschalten, schränkt sich die folgende Maßzahl auf die potentiellen Mütter ein. Die *allgemeine Fruchtbarkeitsrate* (englisch: *general fertility rate*;

GFR) bezieht die Anzahl der Geborenen im Jahr t , also $B(t)$, auf 1000 Frauen P_k^f im gebärfähigen Alter k zur Mitte des Jahres t . Die Abgrenzung des gebärfähigen Alters ist sehr unterschiedlich. In älteren Werken wird das Reproduktionsalter zwischen 15 und 44 Jahren festgesetzt, für UNO-Statistiken wird üblicherweise die Zeitspanne von 15 bis 49 Jahren verwendet, Statistik Austria verwendet die Zeitspanne 15-50. Für die allgemeine Fruchtbarkeitsrate ergibt sich also

$$\text{GFR} = F(t) := \frac{B(t)}{P_k^f(t + 0.5)} \cdot 1000,$$

wobei die Angaben wieder in Promille sind. (vgl. [18] und [46])

Die *altersspezifische Ferilitätsrate* f_k (englisch: *age-specific fertility rate*; ASFR _{k}) wird durch

$$\text{ASFR}_k = f_k := \frac{B(t, k)}{P_k^f(t + 0.5, k)}$$

definiert, wobei $B(t, k)$ die Anzahl der in einem Kalenderjahr t von Frauen der k -ten Altersklasse lebendgeborener Personen ist. Mit P_k^f wird die Anzahl der Frauen beschrieben, die sich zur Jahresmitte in der k -ten Altersklasse befinden. Oft wird f_k auf 1000 Frauen bezogen, so dass

$$f_k = \frac{B(k)}{P_k^f} \cdot 1000$$

gilt. Man gibt f_k in Promille an und häufig werden für die Berechnung von f_k fünfjährige Altersklassen verwendet. Einen typischen Verlauf weist f_k der Kurve auf. Die Funktion gleicht einer rechtsschiefen Kurve mit scharfem Anstieg vom 15. bis etwa zum 22. Lebensjahr und erreicht ihren Maximalwert zwischen dem 22. und dem 28. Lebensjahr. Bis zum Ende der Reproduktionsperiode zeigt f_k einen flachen Abfall. Die Form ist für alle Bevölkerungen ziemlich ähnlich, die Höhe und die Lage des Gipfels unterscheidet sich allerdings gravierend im internationalen, regionalen und zeitlichen Vergleich. (vgl. [8], [9] und [18])

Für die Berechnung der *totalen Fertilitätsrate* (englisch: *total fertility rate*; TFR) müssen die altersspezifischen Fertilitätsraten f_k für einjährige Altersklassen einer Bevölkerung gegeben sein. TFR folgt durch Summation aller f_k und kann definiert werden als

$$\text{TFR} := \sum_k f_k = \sum_{k=1}^N \frac{B(k)}{P_k^f},$$

wobei $k = 1, \dots, N$ die Zahl der Altersklassen darstellt. Die TFR ist wie die ASFR_k eine Periodenmaßzahl und kann als kumulatives Fertilitätsmaß interpretiert werden, denn sie gibt die Zahl der Lebendgeborenen an, die eine hypothetische Kohorte von 1000 Frauen von ihrer Geburt an bis zum Abschluss der Reproduktionstätigkeit ohne änderndes Fertilitätsverhältnis im Durchschnitt auf die Welt bringt. Vereinfacht ausgedrückt gibt die TFR die durchschnittliche Kinderzahl, die 1000 Frauen einer fiktiven Kohorte nach Abschluss der Reproduktionstätigkeit aufweisen, an. Die Sterblichkeit der 1000 Frauen wird nicht berücksichtigt. (vgl. [9] und [18])

Die *Bruttoreproduktionsrate* (englisch: *gross reproduction rate*; GRR), die der durchschnittlichen Anzahl an weiblich Geborenen pro Frau bzw. pro 1000 Frauen einer hypothetischen Kohorte im Verlaufe ihres Lebens entspricht, ist eine weitere Kennzahl der Fertilität. Von der Sterblichkeit der Frauen der Kohorte wird abgesehen und angenommen, dass die gegenwärtigen Fertilitätsverhältnisse konstant bleiben. Die GRR ist die Summe aller einjährigen altersspezifischen Fruchtbarkeitsraten für Mädchen

$$\text{GRR} := \sum_{k=1}^N \frac{B_k^f}{P_k^f},$$

wobei B_k^f die Gesamtanzahl der in einem Kalenderjahr von Frauen der k -ten Altersklasse lebendgeborenen Mädchen entspricht.

Wird zusätzlich die Sterblichkeit der Frauen berücksichtigt, kann man die *Nettoreproduktionsrate* (englisch: *net reproduction rate*; NRR) wie folgt

definieren

$$\text{NRR} := \sum_{k=1}^N \frac{B_k^f}{P_k^f} \cdot w_k,$$

wobei w_k die Überlebenswahrscheinlichkeit einer Frau vom Zeitpunkt ihrer Geburt bis in die Mitte der Altersklasse k ausdrückt. Die NRR ist die zentrale Maßzahl für die Reproduktionskraft einer Bevölkerung und misst die Anzahl an Töchtern, durch die eine Frau ersetzt würde, wenn die unterstellten altersspezifischen Fertilitäts- und Sterblichkeitsverhältnisse konstant blieben. Je nachdem ob die altersspezifischen Fertilitätsraten pro 1000 Frauen oder pro Frau gemessen werden, erhält man auch die NRR pro 1000 Frauen bzw. pro Frau. Wenn man von Wanderungen absieht, dann gilt für NRR, dass

- eine wachsende Bevölkerung für $\text{NRR} > 1$ bzw. $\text{NRR} > 1000$,
- eine gleichbleibende Bevölkerung für $\text{NRR} = 1$ bzw. $\text{NRR} = 1000$ bzw.
- eine schrumpfende Bevölkerung für $\text{NRR} < 1$ bzw. $\text{NRR} < 1000$

vorliegt.

Die *natürliche Wachstumsrate* r der Bevölkerung bzw. die Geburtenüberschussrate erhält man aus der Differenz der rohen Geburten- und der rohen Sterberate

$$r(t) = b(t) - d(t) = \frac{B(t) - D(t)}{P(t + 0.5)}.$$

Also bezieht r das natürliche Bevölkerungswachstum durch Fertilität und Mortalität eines Jahres auf den Bevölkerungsbestand der Jahresmitte und falls $r > 0$ wächst eine Bevölkerung für eine längere Zeit, für $r < 0$ schrumpft sie und für $r = 0$ stagniert sie. Die Zuwachsrates r kann positiv sein, obwohl die NRR kleiner als 1000 ist und somit auf lange Sicht auf ein Schrumpfen der Bevölkerung deutet. Dieses Paradoxon lässt sich dadurch begründen, da die NRR nicht vom Altersaufbau abhängt, sondern von den altersspezifischen Fertilitäts- und Sterblichkeitsverhältnissen! (vgl. [9])

Es gibt viele weitere Möglichkeiten für die Berechnung von Fertilitätsraten, etwa werden mit Hilfe der eben definierten Kennzahlen neue gebildet, es kann berücksichtigt werden, ob die Mutter verheiratet ist, welche Staatsbürgerschaft Mutter bzw. Vater besitzen usw..

4.2.1 Stabile Bevölkerung

Das statistische Modell der stationären Bevölkerung ist durch Unveränderlichkeit, also gleichbleibende jährliche Geburtenzahlen und gleich große Anzahl an Sterbefällen, gekennzeichnet. Die Bevölkerungsgröße ist konstant und jegliches Entwicklungsmoment fehlt. Es lässt sich allerdings auch ein statistisches Modell bilden, in dem die Fruchtbarkeitswerte unabhängig variabel sind, wobei zusätzliche Annahmen über bestimmte Sterbewerte gemacht werden müssen. Eine solche Bevölkerung nennt man *stabile Bevölkerung*. Je nachdem wie sich die Fruchtbarkeits- und Sterbewerte zueinander verhalten, kann eine stabile Bevölkerung wachsen oder schrumpfen. In der Realität würde dieser Modelltyp einer Population entsprechen, die in ihrem Aufbau nur vom Geburtenvorgang mit den immer konstanten Fertilitätswerten und mit der Absterbeordnung mit gleichbleibenden Sterbewerten beeinflusst würde; Wanderungen, Kriege oder Fruchtbarkeit- bzw. Sterblichkeitsmaße aus früheren Zeiten spielen hingegen keine Rolle. (vgl. [29])

Der Unterschied zwischen einer stationären und einer stabilen Bevölkerung lässt sich mit der folgenden Tabelle 4.2 verdeutlichen. Bei einer stationären

Alter	Stationäre Bevölkerung	Stabile Bevölkerung
0	$l(0)$	$l(0)$
1	$l(1)$	$l(1) \cdot [e^k]^1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x	$l(x)$	$l(x) \cdot [e^k]^x$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
100	$l(100)$	$l(100) \cdot [e^k]^{100}$

Tabelle 4.2: Altersaufbau der stabilen und stationären Bevölkerung

Bevölkerung folgen die Lebenden in den einzelnen Altersjahren aus den jeweils gleich großen Geburtsjahrgängen und unterscheiden sich lediglich durch das Einwirken der Sterblichkeit voneinander, also $l(x) > l(x+1)$. Im Vergleich dazu kommt bei der stabilen Bevölkerung zur Differenzierung der Lebenden der Faktor e^k ins Spiel, der Ausdruck für die jährliche Entwicklung der Geborenenzahl, also für die unterschiedlich großen Geburtsjahrgänge, aus denen die Lebenden der einzelnen Altersjahre entstammen. Diese beiden Modelle repräsentieren zwei Populationen mit verschiedenem Altersaufbau.

Der Faktor e^k bildet nicht nur den Wachstumsfaktor der Geborenen von Jahr zu Jahr, sondern – mit umgekehrten Vorzeichen der Potenzzahl – den Wachstumsfaktor der stabilen Bevölkerung. Die stabile Bevölkerung ist daher Grundlage für die Bevölkerungsreproduktion, wobei die Nettoreproduktionsziffer eine wesentliche Rolle für diese Analyse einnimmt. Das Modell dient der methodischen Grundlage für die Untersuchung abgelaufener und gegenwärtiger sich vollziehender Prozesse der Bevölkerungsreproduktion. (vgl. [42])

5 Dynamik einer Population

Sieben Milliarden Menschen - so viele Menschen lebten noch nie auf dieser Erde. Die Vereinten Nationen determinierten für den 31. Oktober 2011 das symbolische Datum, an dem jene Grenze überschritten wurde. Die Weltbevölkerung wächst momentan um rund 80 Millionen Menschen pro Jahr, doch das Wachstum schwächt sich ab und zwar seit Jahrzehnten. Ab Mitte des Jahrhunderts wird das zu einem Bevölkerungsrückgang führen. Nur zwölf Jahre hat es von der sechsten bis zu siebten Milliarde gedauert; die Bevölkerung benötigt wahrscheinlich 18 Jahre von der achten auf die neunte Milliarde. Der Höhepunkt des Wachstums lag in den sechziger Jahren des 20. Jahrhunderts mit einer Wachstumsrate um zwei Prozent. Die weltweite Geburtenrate lag bei über fünf Kindern pro Frau, heute entspricht $b(t) = 2.45$ und wird weiter sinken; wahrscheinlich bis zu jener magischen Grenze von 2.1 Kindern pro Frau, bei der sich eine Spezies nicht mehr vermehrt. Wissenschaftler glauben sogar, dass sich die Geburtenrate zwischen 1.5 und 2.0 einpendelt. Die sinkende Fertilitätsrate hat einerseits mit dem Faktor der höheren Bildung zu tun, andererseits mit der *Theorie des demographischen Übergangs*. Alle Populationen werden früher oder später diesen Prozess durchlaufen und es geht im Wesentlichen darum, dass in einer entwickelten Gesellschaft zuerst die Lebenserwartung steigt und die Sterberate sinkt. In einer ersten Phase führt dies zu einem Bevölkerungswachstum; ein Geburtenrückgang folgt, da die Elterngeneration davon ausgeht, dass mehr ihrer Kinder überleben und sie daher weniger auf die Welt bringen müssen, um ihre Altersversorgung zu sichern. Viele Erwerbstätige stehen wenigen Versorgungspflichtigen gegenüber, wodurch die Bevölkerung schrumpft und überaltert. In Österreich

fand dieser Prozess in Zeiten des Wirtschaftswunders statt, also gegen Ende des 19. Jahrhunderts und Anfang des 20. Jahrhunderts. Der demographische Übergang ist in Asien bereits weit fortgeschritten, Afrika befindet sich mitten im Prozess. (vgl. [31])

5.1 Modellfunktionen für unbeschränktes Bevölkerungswachstum

In den Medien findet man immer wieder Prognosen über das zukünftige Wachstum der Weltbevölkerung. Doch wie lassen sich solche Prognosen erstellen? Die Differenz zwischen Geburten und Todesfällen, also die natürliche Wachstumsrate $r(t) = b(t) - d(t)$, ist ausschlaggebend dafür, wie stark sich eine Population ändert. Migration spielt zwar auch eine Rolle, doch wir betrachten nur eine Bevölkerung, in der es weder Ab- noch Einwanderung gibt. In der Demographie wird so eine Bevölkerung als *geschlossen* bezeichnet. Die Zahl der Geburten variiert in den einzelnen Ländern und hängt von der in der Gesellschaft herrschenden Fortpflanzungspräferenz ab. Die Zahl der Todesfälle ist einerseits von der Altersstruktur einer Bevölkerung und andererseits von der Gesamtmortalität in Folge von Krankheiten und anderen Ursachen abhängig. Für die Entwicklung einer Bevölkerung sind folglich Geburten, Todesfälle und Wanderungsbewegungen kombiniert mit der Altersstruktur verantwortlich. (vgl. [14])

Das US Census Bureau¹ hat Daten bezüglich der auf der Erde lebenden Menschen veröffentlicht, wobei die Daten vor 1940 auf Schätzungen beruhen, die ab 1950 dann auf Zählungen basieren. Ausgehend von diesen Zahlen lässt sich die Grafik 5.1 erstellen, die die Dynamik der Weltbevölkerung zeigt. Wie sich erkennen lässt, ist das Bevölkerungswachstum anfänglich sehr langsam, ehe das Wachstum rasant zunimmt.

¹www.census.gov

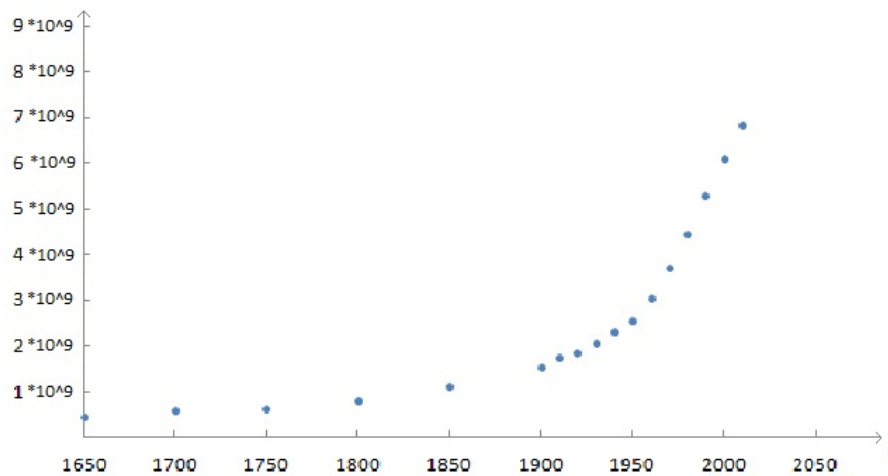


Abbildung 5.1: Entwicklung der Weltbevölkerung 1650-2010

Wir suchen nun eine mindestens zweimal stetig differenzierbare Funktion

$$w(t) : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+,$$

mit der das Wachstum der Weltbevölkerung während eines Zeitabschnitts modelliert werden kann. Damit wir die Funktion demographisch deuten können, müssen einige elementare Überlegungen zur Modellierung des Wachstums getroffen werden.

Unsere Funktion $w(t)$ gibt die Größe der Weltbevölkerung zum Zeitpunkt t an und folgende Gleichung lässt sich damit aufstellen

$$w(t + \Delta t) = w(t) + B(t, t + \Delta t) - D(t, t + \Delta t) = w(t) + Z(t, t + \Delta t), \quad (5.1)$$

wobei t ein beliebiger Zeitpunkt ist, $\Delta t > 0$ eine Zeispanne, $B(t, t + \Delta t)$ die Anzahl der Geburten und $D(t, t + \Delta t)$ die Anzahl der Sterbefälle im Intervall $[t, t + \Delta t]$. Für das Wachstum kommt es auf die Differenz

$$B(t, t + \Delta t) - D(t, t + \Delta t) =: Z(t, t + \Delta t),$$

also den Überschuss der Geburten über die Sterbefälle an. $Z(t, t + \Delta t)$ kann mit der natürlichen Wachstumsrate $r(t) = b(t) - d(t)$ gleichgesetzt werden und daher auch negativ sein. Wir definieren weiters die *durchschnittliche Geschwindigkeit*, mit der die Weltbevölkerung im Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$ wächst

durch

$$\frac{w(t + \Delta t) - w(t)}{\Delta t} = \frac{Z(t, t + \Delta t)}{\Delta t}.$$

Der Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ liefert die erste Ableitung $\dot{w}(t)$ von $w(t)$ und diese kann als *Momentangeschwindigkeit* interpretiert werden, mit der die Weltbevölkerung zum Zeitpunkt t wächst:

$$\dot{w}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{w(t + \Delta t) - w(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Z(t, t + \Delta t)}{\Delta t} =: z(t).$$

Diese Gleichung kann nun so verstanden werden, dass auf der rechten Seite die durch Geburten und Sterbefälle induzierte Wirkung steht, auf der linken Seite sieht man den Effekt, den sie auf das Wachstum der Population hat. Analog kann nun die *Wachstumsbeschleunigung* $\ddot{w}(t)$ definiert werden:

$$\ddot{w}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\dot{w}(t + \Delta t) - \dot{w}(t)}{\Delta t}.$$

Der *momentane Wachstumsumsatz* gibt die durchschnittliche momentane Änderungsrate pro Individuum an und ist die wichtigste Größe von Wachstumsvorgängen. Der Wachstumsumsatz kann durch

$$s(t) = \frac{\dot{w}(t)}{w(t)}$$

definiert werden. Für die *Verdoppelungszeit* t_v gilt

$$w(t + t_v) = 2w(t).$$

(vgl. [13] und [33])

5.1.1 Lineare Wachstumsfunktion

Die erste und einfachste Funktion, die wir betrachten, ist die *lineare Wachstumsfunktion* $w(t) = at + b$ mit $a, b > 0$. Bildet man die erste Ableitung, erkennt man, dass die Wachstumsgeschwindigkeit konstant ist

$$\begin{aligned} w(t) &= at + b \\ \dot{w}(t) &= a = z, \end{aligned}$$

anders ausgedrückt kann gesagt werden, dass der Zuwachs heute derselbe ist wie gestern und auch der gleiche ist wie morgen. Die Wachstumsbeschleunigung ist folglich $\ddot{w}(t) = 0$. Der Wachstumssatz $s(t)$ lässt sich für diese Funktion sehr leicht berechnen; er ist indirekt proportional zur Zeit und konvergiert für $t \rightarrow \infty$ gegen 0. Er lautet dann

$$s(t) = \frac{\dot{w}(t)}{w(t)}$$

$$s(t) = \frac{a}{at + b}.$$

Untersucht man noch die Verdoppelungszeit t_v , dann erhält man

$$w(t + t_v) = 2w(t)$$

$$a(t + t_v) + b = 2 \cdot (at + b)$$

$$at + at_v + b = 2at + 2b$$

$$at_v = 2at + 2b - at - b = at + b$$

$$t_v = t + \frac{b}{a},$$

und erkennt, dass t_v proportional zur Zeit ist. Die lineare Wachstumsfunktion ist für längere Zeitintervalle nicht geeignet, denn die konstante Wachstumsgeschwindigkeit würde auf lange Sicht bedeuten, dass die Hinzugekommenen nicht zur Vermehrung beitragen würden. Der Zuwachs wäre unabhängig von der Gesamtpopulation. Dieses Modell kann höchstens für sehr kleine Zeitspannen an das Wachstum approximiert werden. (vgl. [13] und [33])

5.1.2 Exponentielles Wachstum

Eine weitere mögliche Modellfunktion für das Bevölkerungswachstum ist die Exponentialfunktion $w(t) = ab^t$ mit $a > 0$ und $b > 1$. Für die Wachstumsgeschwindigkeit $\dot{w}(t)$ erhält man

$$\dot{w}(t) = ab^t \cdot \ln b,$$

$$\dot{w}(t) = w(t) \cdot \ln b.$$

$\dot{w}(t)$ ist proportional zu ihrem Bestand und daher lässt sich feststellen, dass $\dot{w}(t)$ auch exponentiell wächst. Die Wachstumsbeschleunigung $\ddot{w}(t)$ ergibt sich durch erneutes Ableiten von $\dot{w}(t)$

$$\begin{aligned}\ddot{w}(t) &= ab^t \cdot \ln b \cdot \ln b, \\ \ddot{w}(t) &= w(t) \cdot \ln^2(b),\end{aligned}$$

und sie ist auch proportional zum Bestand und verläuft ebenfalls exponentiell. Die Verdoppelungszeit t_v kann man durch Einsetzen in die Formel schnell berechnen:

$$\begin{aligned}w(t + t_v) &= 2w(t) \\ ab^{t+t_v} &= 2 \cdot (ab^t) \\ ab^t \cdot b^{t_v} &= 2ab^t \\ b^{t_v} &= 2 \\ t_v &= \frac{\ln(2)}{\ln(b)}.\end{aligned}$$

Die Verdoppelungszeit t_v ist also konstant. Bei der Exponentialfunktion ist der Wachstumssatz $s(t)$ ebenfalls konstant, denn

$$s(t) = \frac{\dot{w}(t)}{w(t)} = \ln(b).$$

Ausgehend von diesen Ergebnissen kann man sagen, dass sich diese Funktion für die Approximation des Bevölkerungswachstums eignet. Es wäre möglich, dass im Mittel alle Menschen gleichermaßen zur Fortpflanzung beitragen, d.h. dass jeder Mensch zu jeder Zeit dieselbe Wachstumsintensität bzw. denselben Wachstumssatz hat. Diese Idee „basiert“ auf Thomas R. MALTHUS und wurde mit Gleichung 2.1 im Kapitel 2.2 bereits gezeigt. Mit der Annahme, dass die durchschnittliche jährliche Wachstumsrate r konstant ist, ist das Wachstumsmodell der Exponentialfunktion mit der Gleichung 2.3, $P(t) = P(0) \cdot e^{rt}$, angemessen, allerdings wird diese unabhängig von Umwelteinflüssen entwickelt. Es ist daher logisch, dass eine Bevölkerung nicht durchwegs exponentiell wachsen kann, denn dies würde schnell zu einer Überfüllung der Erde führen. Begrenzungsfaktoren wie Krankheiten, Nahrungsmangel, etc. verhindern unbegrenztes exponentielles Wachstum. (vgl. [33])

5.1.3 Hyperbelfunktion

Als weitere Funktion betrachten wir die Hyperbelfunktion $w(t) = \frac{a}{b-t}$ mit $a, b > 0$. Um die Wachstumsgeschwindigkeit $\dot{w}(t)$ zu berechnen, differenzieren wir $w(t)$ nach t mit Hilfe der Kettenregel:

$$\begin{aligned}w(t) &= \frac{a}{b-t} = a \cdot (b-t)^{-1} \\ \dot{w}(t) &= -a \cdot (b-t)^{-2} \cdot (-1) \\ \dot{w}(t) &= \frac{a}{(b-t)^2} = \frac{1}{a} (w(t))^2.\end{aligned}$$

Die Wachstumsgeschwindigkeit nimmt folglich mit dem Quadrat des Bestandes zu und für die Wachstumsbeschleunigung $\ddot{w}(t)$ erhält man

$$\begin{aligned}\ddot{w}(t) &= \frac{2a}{(b-t)^3} \\ \ddot{w}(t) &= \frac{2}{a^2} \cdot (w(t))^3,\end{aligned}$$

und diese nimmt kubisch mit dem Bestand zu. Für den Wachstumssatz $s(t)$ folgt

$$s(t) = \frac{\frac{a}{(b-t)^2}}{\frac{a}{b-t}} = \frac{a \cdot (b-t)}{a \cdot (b-t)^2} = \frac{w(t)}{a},$$

wobei dieser proportional zum Bestand ist. Für die Verdoppelungszeit gilt

$$\begin{aligned}w(t+t_v) &= 2w(t) \\ \frac{a}{b-(t+t_v)} &= 2 \frac{a}{b-t} \\ a \cdot (b-t) &= (b-t-t_v) \cdot 2a \\ \frac{b-t}{2} &= b-t-t_v \\ t_v &= -\frac{b-t}{2} + b-t = -\frac{b-t}{2} + \frac{2(b-t)}{2} = \frac{b-t}{2}.\end{aligned}$$

Die Hyperbelfunktion kann nun mit den berechneten Kenngrößen für das Bevölkerungswachstum demographisch interpretiert werden. Auffallend ist,

dass sie ein extremes, überexponentielles Wachstum beschreibt. Die Wachstumsgeschwindigkeit, die Beschleunigung und der Wachstumssatz sind proportional zu Potenzen ihres Bestandes. Bei dieser Funktion ist die Wachstumsrate nicht konstant, sondern sie ist linear abhängig. Diese Eigenschaft kann so gedeutet werden, dass einerseits die Partnerfindung bei größerer Siedlungsdichte leichter wird, andererseits sinkt die Sterblichkeit durch bessere medizinische Versorgung bzw. durch höheren Zivilisationsgrad. Mit Hilfe der Hyperbelfunktion könnte somit die Bildung von Megastädten erklärt werden. Für zukünftige Prognosen eignet sich dieses Modell allerdings nicht, da ähnlich wie bei der Exponentialfunktion die Bevölkerung in endlicher Zeit nicht ins Unendliche wachsen wird und kann. (vgl. [13])

5.1.4 Potenzfunktion

Mit der Potenzfunktion $w(t) = at^b$ mit $a, b > 0$ versuchen wir erneut eine Approximation an das Bevölkerungswachstum zu bilden. Die erste Ableitung, also die Wachstumsgeschwindigkeit, erhalten wir durch Differenzieren:

$$\dot{w}(t) = a \cdot b \cdot t^{b-1} = a \cdot b \cdot t^b \cdot t^{-1} = \frac{b}{t} w(t).$$

Die Wachstumsgeschwindigkeit wird durch den Faktor $\frac{1}{t}$ mit wachsendem t immer langsamer als $w(t)$. Die Wachstumsbeschleunigung $\ddot{w}(t)$ liefert Folgendes:

$$\ddot{w}(t) = a \cdot b \cdot (b-1) \cdot t^{b-2} = \frac{b(b-1)}{t^2} \cdot w(t);$$

in Worten ausgedrückt deutet das für $b > 1$ auf ein beschleunigtes, für $b < 1$ auf ein verzögertes Wachstum hin. Der Wachstumssatz $s(t)$ lautet

$$s(t) = \frac{\frac{b}{t} \cdot w(t)}{w(t)} = \frac{b}{t}$$

und ist indirekt proportional zur Zeit, außerdem konvergiert er für $t \rightarrow \infty$ gegen 0. Für die letzte Kenngröße, die Verdoppelungszeit, ergibt sich dann

$$\begin{aligned}w(t + t_v) &= 2w(t) \\ a(t + t_v)^b &= 2at^b \\ (t + t_v)^b &= 2t^b \\ t_v &= \sqrt[b]{2t^b} - t = \sqrt[b]{2} \cdot t - t = (\sqrt[b]{2} - 1)t,\end{aligned}$$

d.h. t_v wächst linear mit dem Steigungsfaktor $\sqrt[b]{2} - 1$. Demographisch interpretiert eignet sich die Potenzfunktion nicht für eine Approximation, denn bis jetzt wurden weder sinkende Wachstumsgeschwindigkeiten noch wachsende Verdoppelungszeiten in den bisherigen statistischen Daten beobachtet. (vgl. [13])

5.1.5 Logarithmusfunktion

Die letzte unbeschränkte Funktion, die wir als Modellfunktion untersuchen, ist die Logarithmusfunktion mit $w(t) = a \cdot \ln(t + b)$. Zu Beginn werden die erste und die zweite Ableitung gebildet

$$\begin{aligned}\dot{w}(t) &= \frac{a}{t + b} \\ \ddot{w}(t) &= \frac{-a}{(t + b)^2};\end{aligned}$$

die Wachstumsgeschwindigkeit $\dot{w}(t)$ ist monoton abnehmend. Für den Wachstumssatz $s(t)$ folgt

$$s(t) = \frac{\frac{a}{t+b}}{a \cdot \ln(t + b)} = \frac{1}{(t + b) \cdot \ln(t + b)}$$

und er strebt für wachsende t sehr schnell gegen Null. Die Verdoppelungszeit t_v ergibt sich durch

$$\begin{aligned}w(t + t_v) &= 2w(t) \\ a \cdot \ln((t + t_v) + b) &= 2 \cdot a \cdot \ln(t + b) \\ \ln((t + t_v) + b) &= \ln(t + b)^2 \\ t + t_v + b &= (t + b)^2 \\ t_v &= t^2 + 2bt + b^2 - t - b = t^2 + (2b - 1)t - b + b^2,\end{aligned}$$

dass sie quadratisch mit der Zeit wächst und erreicht ihren minimalen Wert für $t_v = \frac{1}{2} - b$. Die Logarithmusfunktion ist aus demselben Argument wie die Potenzfunktion nicht für eine Modellfunktion geeignet. (vgl. [13])

5.1.6 Lineare Approximation der Wachstumsrate

Bisher haben wir noch keine geeignete unbeschränkte Funktion gefunden, die die Dynamik der Weltbevölkerung auf lange Sicht hin gut modelliert. Um eine bessere Annäherung an das Wachstum zu finden, nehmen wir an, dass die Wachstumsrate nicht wie etwa bei der Exponentialfunktion konstant, sondern von der Zeit abhängig ist und definieren sie durch $\alpha(t)$. Wir gehen nun also von folgender Differentialgleichung aus:

$$\dot{w}(t) = \alpha(t) \cdot w(t). \quad (5.2)$$

Um die Differentialgleichung zu lösen, wenden wir die Methode der Trennung der Variablen an. Dazu formen wir die Differentialgleichung um und erhalten dann

$$\alpha(t) = \frac{\dot{w}(t)}{w(t)}, \quad (5.3)$$

wobei wir $\dot{w}(t)$ schreiben können als $\frac{dw}{dt}$. Somit ergibt sich

$$\alpha(t)dt = \frac{dw}{w(t)}. \quad (5.4)$$

Integrieren wir nun beide Seiten der Gleichung 5.4, dann erhalten wir, bezogen auf einen Referenzzeitpunkt t_0 und eine Anfangsbedingung $w(t_0) = w_0$, folgende Lösung

$$\beta(t) := \int_{t_0}^t \alpha(s)ds = \ln w(t) - \ln w_0; \quad (5.5)$$

nach einigen Umformungen kommen wir zur eindeutig bestimmten Lösung der Differentialgleichung 5.2 mit Anfangsbedingung $w(t_0) = w_0$

$$\begin{aligned} \ln w(t) &= \beta(t) + \ln w_0 \\ w(t) &= e^{\beta(t) + \ln w_0} \\ w(t) &= w_0 \cdot e^{\beta(t)}. \end{aligned}$$

Der Sonderfall $\alpha(t) = \alpha$, also eine konstante Wachstumsrate, führt mit $\beta(t) = \alpha \cdot (t - t_0)$ zum exponentiellen Wachstumsmodell mit $w(t) = w_0 e^{\alpha(t-t_0)}$. Ist man nun an der tatsächlichen Entwicklung der Wachstumsrate interessiert, dann erkennt man, dass $\beta(t)$ bis auf eine additive Konstante mit $\ln w(t)$ übereinstimmt. Auch für $\alpha(t)$ können Näherungen bestimmt werden und zwar so, dass in Gleichung 5.3 der Differentialquotient durch den Differenzenquotienten ersetzt wird. Somit ergibt sich

$$\alpha\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right) \approx \frac{\ln w(t_{i+1}) - \ln w(t_i)}{t_{i+1} - t_i}.$$

Diese Formel erhält man ebenso, indem man in jedem Intervall (t_i, t_{i+1}) die Wachstumsrate $\alpha(t) = \alpha_i$ als konstant festsetzt, sodass

$$w(t_{i+1}) = w(t_i) e^{\alpha_i(t_{i+1}-t_i)}$$

gilt bzw. folgt dann für $t \in (t_i, t_{i+1})$

$$\alpha(t) = \alpha_i = \frac{\ln w(t_{i+1}) - \ln w(t_i)}{t_{i+1} - t_i}.$$

Da in unserem Fall angenommen wird, dass die Wachstumsrate $\alpha(t)$ nicht konstant ist, werden nun für $\alpha(t)$ und $\beta(t)$ andere Ansätze als den des exponentiellen Wachstums gemacht. Es soll $\alpha(t)$ eine lineare und $\beta(t)$ eine quadratische Funktion der Zeit sein. Diese Annahme ist zwar willkürlich und nur damit zu rechtfertigen, dass sie die nächst einfache Annahme ist, nachdem das Modell des exponentiellen Wachstums verworfen wurde. Nun können $\alpha(t)$ und $\beta(t)$ durch zwei verschiedene Methoden berechnet werden. Einerseits kann $\alpha(t)$ aus den Daten und $\beta(t)$ durch Integration von $\alpha(t)$ gewonnen werden. Andererseits kann $\beta(t)$ aus den Daten und $\alpha(t)$ durch Differentiation von $\beta(t)$ gewonnen werden. Diese zwei Möglichkeiten führen allerdings zu unterschiedlichen Ergebnissen.

Verwendet man nun die erste genannte Option, dann sei $\alpha(t) = c + dt$ eine lineare Funktion und mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate, also der Minimierung des Ausdrucks

$$\sum_i \left(\alpha\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right) - \frac{\ln w(t_{i+1}) - \ln w(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \right)^2,$$

kann man $\alpha(t)$ berechnen. Dann erhält man $\beta(t)$, indem man $\int_{t_0}^t \alpha(s) ds$ integriert.

Bei der zweiten Methode definiert man $\beta(t) = b + ct + dt^2$ als eine in t quadratische Funktion und durch die Methode der kleinsten Quadrate, also durch Minimierung des Ausdrucks

$$\sum_i \left(\beta(t_i) - \ln(w(t_i)) + \ln(w(t_0)) \right)^2$$

können $\alpha(t)$ und $\beta(t)$ berechnet werden.

Setzt man in beide Modelle Zahlenwerte ein, dann erkennt man, dass die Ergebnisse leicht voneinander abweichen. Trotzdem erreicht man mit den zwei Methoden eine bessere Approximation des Wachstums der Weltbevölkerung als durch ein Modell mit einer konstanten Wachstumsrate. Die historische Entwicklung der Weltbevölkerung lässt sich somit durch

$$w(t) = w(t_0)e^{at^2+bt+c}$$

sehr gut beschreiben und kann leicht durch Einsetzen der Weltbevölkerungszahlen des US Census Bureau nachgeprüft werden. Wir haben allerdings dadurch „nur“ ein *deskriptives Modell* erstellt. Durch diese gefundene Funktion wurde die historische Entwicklung der Weltbevölkerung mit Hilfe von drei Parametern zufriedenstellend beschrieben, aber keine Aussagen darüber getroffen, wie es zu diesen Daten, also z.B. Bevölkerungszuwachs, kam. Fraglich ist somit, ob aufbauend auf die historischen Zahlen eine richtige Prognose erstellt werden kann. Nichtsdestotrotz werden die meisten Prognosen auf Basis eines deskriptiven Modells entwickelt. (vgl. [33])

5.2 Beschränktes Wachstum

Mit dem Titel „The Limits to Growth“, also „die Grenzen des Wachstums“, wurde im Jahr 1972 eine Studie über die Weiterentwicklung der Bevölkerung vom Club of Rome veröffentlicht. Dieser Bericht löste weltweit kontroversielle Debatten aus und erstmals entstand ein öffentlicher Diskurs über die Zukunft

der Menschen bzw. über die Begrenztheit des Planeten Erde. (vgl. [43])

Wie viel Platz ist auf unserer Erde? Dauerhaftes Bevölkerungswachstum führt zu schwerwiegenden Problemen, denn auf unserem Planeten gibt es begrenzte Land- und Wasservorkommen, endliche Rohstoffreserven, etc. Die genaue Anzahl, wie viele Menschen tatsächlich gleichzeitig leben können, ist nicht exakt bestimmbar; sicher ist allerdings, dass das Bevölkerungswachstum nach oben hin limitiert ist. Mathematisch kann die Endlichkeit der Erde so modelliert werden, dass ein limitierender Faktor K für die Bevölkerung angenommen wird. Weiters ist die schrittweise Zunahme proportional zum derzeitigen Bestand $N(t)$ und zum noch vorhandenen Freiraum $K - N(t)$. Das Wachstum der Bevölkerung wird rückläufig sein, falls die Größe der Population $N(t)$ über K hinaus geht; andererseits wächst sie, falls $N(t) < K$. Dieser mathematische Sachverhalt wird mit dem Modell des logistischen Wachstums beschrieben. 1837 wurde erstmals von dem belgischen Mathematiker Pierre-François VERHULST die logistische Gleichung formuliert, die das Modell des exponentiellen und des begrenzten Wachstums verbindet. Von manchen wird diese Gleichung als Beginn der mathematischen *Chaostheorie* bezeichnet. (vgl. [1] und [13]) Das ist allerdings aus mehreren Gründen nicht ganz richtig. Einerseits war nicht ein einzelnes Modell der Ausgangspunkt für die Behandlung von Chaos, neben dem angesprochenen logistischen Modell spielten auch die (voneinander unabhängigen) Arbeiten von FATOU und JULIA über rationale Funktionen, sowie das von LORENZ behandelte meteorologische Modell eine entscheidende Rolle. Andererseits waren solche Effekte bereits früher bekannt.

Die aus dem logistischen Wachstum resultierende Differenzengleichung lautet

$$N_{t+1} = N_t + r \cdot N_t \cdot (K - N_t).$$

Man betrachtet nun aber die logistische Differentialgleichung, denn diese liefert im Gegensatz zur Differenzengleichung eine explizite Lösung, die in einfacher Form angegeben werden kann. Weiters lässt sich der Grenzwert für t gegen $+\infty$, unabhängig von der Anfangsbedingung, bestimmen und das ist bei der Differenzengleichung nicht immer möglich. Für die logistische Diffe-

rentialgleichung gilt dann

$$\dot{N}(t) = r \cdot N(t) \cdot (K - N(t)), \quad (5.6)$$

mit $r, K > 0$ und konstant. Die Variable r beschreibt in dieser Gleichung die Wachstumsrate und K entspricht der Kapazitätsgrenze. Die Differentialgleichung kann mit Hilfe der Methode der Trennung der Variablen gelöst werden. Zuerst ersetzen wir $\dot{N}(t)$ durch $\frac{dN}{dt}$ und multiplizieren auf der linken Seite N mit der Klammer:

$$\frac{dN}{dt} = r \cdot (NK - N^2).$$

Im nächsten Schritt werden die Variablen getrennt und dazu dividieren wir die linke Seite durch $(NK - N^2)$ und formal multiplizieren wir die rechte Seite mit dt . Es folgt also

$$\frac{dN}{(NK - N^2)} = r dt.$$

Weiters werden beide Seiten integriert

$$\int \frac{dN}{(NK - N^2)} = \int r dt, \quad (5.7)$$

wobei das Integral auf der linken Seite mittels Partialbruchzerlegung gelöst werden muss. Die Nullstellen des Nenners lassen sich mit dem Produktnullsatz leicht ablesen und es folgt für $NK - N^2 = N(K - N) = 0$, dass die Nullstellen $N_1 = 0$ und $N_2 = K$ sind. Als Ansatz für die Partialbruchzerlegung erhält man folglich

$$\frac{1}{NK - N^2} = \frac{A}{N - K} + \frac{B}{N}. \quad (5.8)$$

Multipliziert man die Gleichung mit dem gemeinsamen Nenner $N(K - N)$, so ergibt sich daraus

$$1 = A \cdot (-N) + B \cdot (K - N) = -AN + BK - BN.$$

Die unbekannten Variablen A und B werden mittels Koeffizientenvergleich ermittelt und folgendes Gleichungssystem lässt sich daher bilden

$$0 = -A - B \quad (\text{I})$$

$$1 = BK, \quad (\text{II})$$

wobei man für $A = -\frac{1}{K}$ und für $B = \frac{1}{K}$ erhält. Setzt man die ermittelten Koeffizienten in Gleichung 5.8 ein, dann lässt sich die Gleichung 5.7 so darstellen

$$\int \frac{-\frac{1}{K}}{N-K} dN + \int \frac{\frac{1}{K}}{N} dN = \int r dt.$$

Bevor man integriert, hebt man auf der linken Seite noch den Faktor $\frac{1}{K}$ heraus. Zu beachten ist, dass man die Integrationskonstante $\tilde{c}$ hinzufügt.

$$\frac{1}{K} \left(\int \frac{-1}{N-K} dN + \int \frac{1}{N} dN \right) = \int r dt$$

$$\frac{1}{K} (-\ln |N-K| + \ln |N|) = rt + \tilde{c}.$$

Die Gleichung kann mit dem Faktor K multipliziert werden und nach den Rechenregeln des Logarithmus folgt dann

$$\ln \left| \frac{N}{N-K} \right| = Krt + K\tilde{c},$$

woraus sich zunächst

$$\left| \frac{N}{N-K} \right| = e^{Krt + K\tilde{c}}$$

ergibt, und man durch Setzen von $c := e^{K\tilde{c} \operatorname{sgn}\left(\frac{N}{N-K}\right)}$ die Gleichung

$$\frac{N}{N-K} = c \cdot e^{Krt}$$

erhält. Mit Hilfe der Anfangsbedingung $N(0) = N_0$ kann die Integrationskonstante c berechnet werden und c ist dann

$$\frac{N_0}{N_0-K} = c \cdot e^0 = c.$$

Setzt man die ermittelte Konstante c ein, so erhält man

$$\frac{N}{N-K} = e^{Krt} \cdot \frac{N_0}{N_0-K}.$$

Zu Beginn der Äquivalenzumformungen wird der linke Bruch durch den Faktor N dividiert und die Gleichung mit dem neuen Nenner multipliziert:

$$\begin{aligned}\frac{N}{N-K} &= e^{Krt} \cdot \frac{N_0}{N_0-K} \\ \frac{1}{1-\frac{K}{N}} &= e^{Krt} \cdot \frac{N_0}{N_0-K} \\ 1 &= e^{Krt} \cdot \frac{N_0}{N_0-K} \cdot \left(1 - \frac{K}{N}\right).\end{aligned}$$

Im Folgenden werden die restlichen Umformungen notiert, ehe die exakte Lösung der logistischen Differentialgleichung angegeben werden kann:

$$\begin{aligned}1 &= e^{Krt} \cdot \frac{N_0}{N_0-K} \cdot \left(1 - \frac{K}{N}\right) \\ 1 &= \frac{e^{Krt} \cdot N_0}{N_0-K} - \frac{e^{Krt} \cdot K N_0}{N(N_0-K)} \\ \frac{e^{Krt} \cdot K N_0}{N(N_0-K)} &= \frac{e^{Krt} N_0 - N_0 + K}{N_0-K} \\ \frac{1}{N} &= \frac{e^{Krt} N_0 - N_0 + K}{N_0-K} \cdot \frac{N_0-K}{K N_0 e^{Krt}}.\end{aligned}$$

Um nun noch N explizit ausdrücken zu können, bildet man den Kehrwert und wir erhalten die gesuchte Lösung der Differentialgleichung durch

$$N(t) = \frac{K N_0 e^{Krt}}{K - N_0 + N_0 e^{Krt}}. \quad (5.9)$$

Ist die Wachstumsrate $r > 0$, dann können wir drei mögliche Fälle für die Gleichung 5.9 betrachten:

1. Fall: $N > K$, $\frac{dN}{dt} < 0$:

Ist die Gesamtgröße der Population N größer als die mögliche Kapazität K , dann minimiert sich ihre Größe.

2. Fall: $N = K$, $\frac{dN}{dt} = 0$:

Entspricht die Populationsgröße der Kapazitätsgrenze, dann bleibt N langfristig konstant.

3. Fall: $N < K$, $\frac{dN}{dt} > 0$:

Ist die Gesamtgröße der Bevölkerung kleiner als die mögliche Kapazität, dann wächst die Bevölkerung.

Der Grenzwert der Gleichung 5.9 lässt sich sehr einfach berechnen, indem man zuerst die Gleichung ein wenig umformt und dann t gegen Unendlich laufen lässt:

$$\begin{aligned} N(t) &= \frac{KN_0e^{Krt}}{K - N_0 + N_0e^{Krt}} = \frac{Ke^{Krt}}{\frac{K}{N} - 1 + e^{Krt}} = \\ &= \frac{K}{\frac{K}{N} \cdot e^{-Krt} - e^{-Krt} + 1} = \frac{K}{1 + \frac{K-N}{N} \cdot e^{-Krt}}. \end{aligned}$$

Der Grenzwert der logistischen Funktion ist somit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = K,$$

d.h. die Population nähert sich ihrer Kapazitätsgrenze, wobei dies bereits durch die obige Fallunterscheidung deutlich gemacht wurde.

Das Modell des logistischen Wachstums könnte nun noch nach den Merkmalen für die demographische Deutung untersucht werden und man erkennt, dass dadurch die Entwicklung der Bevölkerung recht gut beschrieben werden könnte. Allerdings ist dieses Modell für Prognosen unbrauchbar, denn die Parameter können willkürlich gewählt werden. Die Kapazitätsgrenze ist etwa eine unbekannte Größe. (vgl. [2] und [13])

5.3 Klassische Modelle der Populationsdynamik

Ist man an einer zukünftigen Entwicklung der Bevölkerung interessiert, so muss man die dynamische Entwicklung von Bevölkerungsstrukturen unter der Einwirkung von Fertilität und Mortalität untersuchen. Bei realistischen

Modellen der Bevölkerungsdynamik müsste auch der Einfluss der Migration berücksichtigt werden, doch der wird in den klassischen Modellen der Populationsdynamik, also im LESLIE- und im LOTKA-Modell vernachlässigt. Die Theorie der stabilen Bevölkerung hat sich dennoch für viele demographische Problemstellungen als sehr nützlich erwiesen. (vgl. [9])

Der Ergodensatz von LOTKA über asymptotische Stabilität (ab 1911), auch als 1. Fundamentalsatz der Populationsdynamik bezeichnet, gilt als zentrales Ergebnis der beiden Modelle und der Satz lässt eine bemerkenswerte Verallgemeinerung auf zeitabhängige Vitalitätsraten zu.

Satz 1 (Ergodensatz von LOTKA). *Eine Bevölkerung, welche zeitlich konstanten altersspezifischen Sterblichkeits- und Fruchtbarkeitsverhältnissen p_x bzw. m_x unterworfen ist, nähert sich unter sehr allgemeinen, in der Praxis stets erfüllten Bedingungen asymptotisch einem stabilen Altersaufbau $\mathbf{u}$, der nur von diesen Vitalitätsverhältnissen abhängig ist. Die stabile Bevölkerung ist unabhängig vom ursprünglich vorherrschenden Altersaufbau $\mathbf{n}_0$.*

Die Bedeutung der stabilen Bevölkerung liegt darin, dass sie die Struktur repräsentiert, die eine Bevölkerung schließlich erreichen würde, falls die gerade beobachteten Vitalitätsraten fortwährend herrschen würden.

Wie im folgenden Modell noch genauer erklärt wird, wird durch $\mathbf{u}$ eine stabile Altersverteilung festgelegt, wobei $\mathbf{u}$ ein Eigenvektor der LESLIE-Matrix ist.

5.3.1 Das LESLIE-Modell

Ab den späten 30-iger Jahren beschäftigte sich der Mathematiker Patrick H. LESLIE mit demographischen Themen. Er befasste sich mit Sterbetafeln und den Altersstrukturen in der Bevölkerung. Dafür verwendete er Methoden der Matrixalgebra und setzte somit die Arbeit von LOTKA fort. Die nach ihm benannte LESLIE-Matrix ist eines der bekanntesten mathematischen Modelle zur Analyse des Bevölkerungswachstums. Die Bevölkerung wird in diesem Modell in zwei oder mehrere gleich breite Altersklassen unterteilt. Will man sich etwa den nächsten Generationenbestand ausrechnen, multipliziert man die LESLIE-Matrix mit einem Vektor, der die Startpopulation beschreibt.

Wir betrachten nun den weiblichen Teil der Bevölkerung, der in einjährige Altersklassen $x = (x, x+1)$ gegliedert ist. Die Altersvariable x läuft von 0 bis w , wobei w das maximal erreichbare Alter darstellt und somit gibt es $w+1$ Altersklassen. Die Zeitskala t nimmt die Werte $t = 0, 1, 2, \dots$ an. Um die Matrix aufstellen zu können, müssen über eine Population gewisse Informationen vorhanden sein. Es sei p_x die Wahrscheinlichkeit, dass eine x -jährige Frau mindestens $x+1$ Jahre alt wird. Weiters sei m_x die durchschnittliche Anzahl an Mädchen, welche von einer zur Zeit t x -jährigen Frau im Zeitraum $(t, t+1)$ zur Welt gebracht werden und welche im Zeitpunkt $t+1$ noch leben. Die Zählvariable $n_{x,t}$ bezeichnet die Zahl der Frauen zum Zeitpunkt t in der Altersklasse x . Wir setzen $q_x = 1 - p_x$ als den Anteil der im Zeitraum $(x, x+1)$ Sterbenden fest. Die Sterberate q_x und die Fruchtbarkeitsrate m_x werden also unabhängig von der Zeit t angenommen, die Altersabhängigkeit ist allerdings zugelassen. Implizit wird vorausgesetzt, dass das Geburten- und Sterblichkeitsgeschehen einer jeden Frau von übrigen Entwicklungen unbeeinflusst verlaufen soll.

Es gelten nun aufgrund der gegebenen Definitionen folgende Beziehungen, die die altersgegliederten Bestände einer geschlossenen Bevölkerung zu zwei aufeinander folgenden Zeitpunkten verknüpfen:

$$\begin{aligned} n_{0,t+1} &= \sum_{x=0}^w m_x \cdot n_{x,t} \\ n_{1,t+1} &= p_0 \cdot n_{0,t} \\ n_{2,t+1} &= p_1 \cdot n_{1,t} \\ &\vdots \\ n_{w,t+1} &= p_{w-1} \cdot n_{w-1,t}. \end{aligned}$$

Sowohl mit Hilfe des LEXIS-Diagramms als auch in Matrizenform können diese linearen Beziehungen dargestellt werden.

Für die Matrizenschreibweise werden die Vitalitätsraten m_x und p_x in eine quadratische Matrix $\mathbf{L}$ der Ordnung $w+1$, in der alle Elemente gleich Null sind mit Ausnahme der ersten Zeile und der Subdiagonalen, geschrieben. Zwischen 0 und 1 sollen die p_x liegen; über die Matrixelemente m_x , die aus

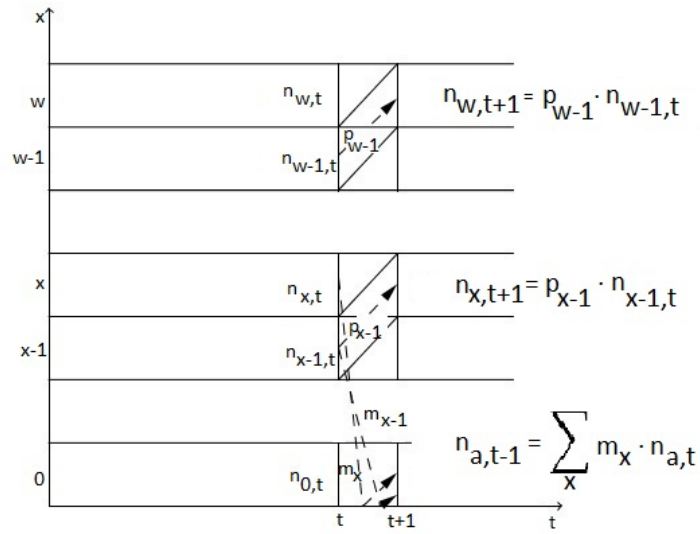


Abbildung 5.2: Beziehung im LEXIS-Diagramm

der Sterbetafel entnommen sind, kann zunächst nur gesagt werden, dass sie nicht negativ sein sollen.

$$\begin{bmatrix} n_{0,t+1} \\ n_{1,t+1} \\ n_{2,t+1} \\ \vdots \\ n_{w,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_0 & m_1 & m_2 & \dots & m_{w-1} & m_w \\ p_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & \dots & & \\ \vdots & 0 & p_2 & \dots & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & & \\ 0 & \dots & & p_{w-1} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_{0,t} \\ n_{1,t} \\ n_{2,t} \\ \vdots \\ n_{w,t} \end{bmatrix}.$$

Weiters können die linearen Beziehungen in abgekürzter Schreibweise durch

$$\mathbf{n}_{t+1} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}_t \quad (5.10)$$

dargestellt werden. Durch wiederholte Anwendung von (5.10) ergibt sich

$$\mathbf{n}_t = \mathbf{L}^t \cdot \mathbf{n}_0. \quad (5.11)$$

Die Entwicklung einer Population wird durch die Gleichung 5.10 beschrieben, insbesondere das Fertilitäts- und Mortalitätsverhältnis durch die LES-

LESLIE-Matrix $\mathbf{L}$. Wächst bzw. schrumpft eine Bevölkerung mit einem konstanten Faktor von einem Zeitpunkt zum darauffolgenden und ändert sich der Anteil der einzelnen Altersklassen an der Gesamtbevölkerung nicht, dann wird eine Bevölkerung als stabil bezeichnet. (Wachstum kann hier auch negativ sein, die Bevölkerung schrumpft also.) Liegt eine stabile Bevölkerung vor, dann gilt eben die Gleichung 5.10 auch $\mathbf{n}_{t+1} = \lambda_1 \mathbf{n}_t$, wobei λ_1 der konstante Faktor ist. Die Multiplikation mit der Matrix $\mathbf{L}$ hat den gleichen Effekt wie die Multiplikation mit λ_1 . Der Bestandsvektor $\mathbf{n}_{t+1}$ muss ein Eigenvektor der Matrix $\mathbf{L}$ sein und λ_1 der dazugehörige Eigenwert, damit eine Bevölkerung stabil wächst.

Um die Dynamik einer Population bestimmen zu können, betrachtet man also die Eigenvektoren und zugehörigen Eigenwerte der LESLIE-Matrix. Das Langzeit-Wachstumsverhalten sowie die, in der Regel stabile, Altersverteilung ergeben sich aus dem komplexen Betrag des größten Eigenwertes bzw. als dessen Eigenvektor. Um das Eigenwertproblem lösen zu können, brauchen wir einige Resultate aus der Matrizen Theorie.

Zuerst wird die LESLIE-Matrix $\mathbf{L}$ durch eine Aufspaltung nach der $(b+1)$ -ten Zeile und Spalte in vier Submatrizen zerlegt in

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{bmatrix},$$

wobei $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ folgende Gestalt haben

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} m_0 & m_1 & \dots & m_b \\ p_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_1 & & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & p_{b-1} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & p_b \\ 0 & \dots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ p_{b+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_{b+2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & p_{w-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Die Matrix $\mathbf{A}$ hat Dimension $(b+1) \times (b+1)$, die Matrix $\mathbf{B}$ hat $(w-b) \times (b+1)$ und die Matrix $\mathbf{C}$ $(w-b) \times (w-b)$. Weiters ist $\mathbf{0}$ eine Nullmatrix mit Dimension $(b+1) \times (w-b)$.

Definition 1 (nichtnegativ). Eine Matrix $\mathbf{A}$ heißt nichtnegativ bzw. positiv, wenn alle Einträge nichtnegativ bzw. positiv sind.

Definition 2 (positiv regulär). Eine quadratische, nichtnegative Matrix $\mathbf{A}$ heißt positiv regulär, falls eine positive natürliche Zahl N existiert, sodass $\mathbf{A}^N$ positiv ist.

Positiv reguläre Matrizen sind jene nichtnegativen unzerlegbaren Matrizen, die zusätzliche Eigenschaften der Primitivität besitzen. Für solche Matrizen gilt der folgende Satz von Frobenius, der allerdings hier nicht bewiesen wird und weiters werden die Begriffe der Zerlegbarkeit und der Primitivität einer Matrix nicht näher erläutert.

Satz 2 (FROBENIUS). *Eine positiv reguläre Matrix $\mathbf{A}$ besitzt einen positiven Eigenwert λ_1 von der algebraischen Vielfachheit Eins, der dem Absolutbetrag nach jeden andern Eigenwert echt übertrifft. Einen Eigenwert mit diesen Eigenschaften wollen wir dominant nennen. Die zu λ_1 gehörigen rechten und linken Eigenvektoren besitzen ausschließlich positive Komponenten.*

Ferner gilt für beliebige quadratische Matrizen mit einem dominanten Eigenwert der folgende Satz.

Satz 3 (POLLARD). *Es sei $\mathbf{L}$ eine quadratische Matrix mit der Ordnung $w + 1$ und einem dominanten Eigenwert λ_1 . Die durch λ_1 bekanntlich nur bis auf skalare Vielfache bestimmten rechten und linken Eigenvektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}'$ können normiert werden, wenn man für ihr Skalarprodukt*

$$\mathbf{v}'\mathbf{u} = 1$$

fordert. (Der Strich deutet die Transponierung zu einem Zeilenvektor an.) Die Matrix $\mathbf{u}\mathbf{v}'$ ist dann dadurch eindeutig bestimmt, und es gilt für große Werte von t

$$\mathbf{L}^t = \lambda_1^t \mathbf{u}\mathbf{v}' + \mathcal{O}(t^{w-1}|\lambda_2|t),$$

wobei λ_2 jener Eigenwert von $\mathbf{L}$ ist, der nach λ_1 den zweitgrößten Absolutbetrag besitzt.

Unter gewissen, in der Praxis stets erfüllten, Voraussetzungen ist die linke obere Submatrix $\mathbf{A}$ positiv regulär. Eine hinreichende Bedingung für die positive Regularität von $\mathbf{A}$ ist, dass mindestens zwei aufeinanderfolgende Altersklassen positive Fruchtbarkeitsraten haben müssen. Da es sich hier um ein demographisches Modell handelt, ist diese hinreichende Bedingung erfüllt.

Nach dem Satz von FROBENIUS und aus den obigen Überlegungen folgt nun, dass die linke obere Submatrix $\mathbf{A}$ der LESLIE-Matrix einen dominanten positiven Eigenwert λ_1 besitzt. Die gesamte LESLIE-Matrix hat ebenfalls λ_1 als dominanten Eigenwert. Dies folgt aus folgenden Überlegungen: zum Berechnen möglicher weiterer Eigenwerte bildet man die charakteristische Gleichung der LESLIE-Matrix mit

$$|\mathbf{L} - \lambda \mathbf{I}_{w+1}| = \begin{vmatrix} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_{b+1} & 0 \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}_{w-b} \end{vmatrix} = 0.$$

Nach dem LAPLACE'schen Determinatensatz folgt dann

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_{b+1}| |\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}_{w-b}| = 0.$$

Wegen der speziellen Gestalt der Submatrix $\mathbf{C}$ gilt

$$|\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}_{w-b}| = (-\lambda)^{w-b}$$

und die Matrix $\mathbf{C}$ besitzt nur den Eigenwert 0. Wir wissen bereits, dass λ_1 dominanter Eigenwert der Submatrix $\mathbf{A}$ ist und somit folgt nun, dass λ_1 auch dominanter Eigenwert der ganzen LESLIE-Matrix ist.

Für die Ermittlung der Eigenvektoren der LESLIE-Matrix brauchen wir nun den Satz von POLLARD. Es seien $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}'$ die normierten rechten und linken Eigenvektoren mit $\mathbf{v}'\mathbf{u} = 1$. Aus dem Satz folgt dann

$$\mathbf{L}^t = \lambda_1^t \mathbf{u} \mathbf{v}' + \mathbf{O}(\lambda_1^t). \quad (5.12)$$

Die zum dominanten Eigenwert λ_1 gehörenden rechten und linken Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ seien $\mathbf{u}_b$ und $\mathbf{v}'_b$ und es gilt $\mathbf{v}'_b \mathbf{u}_b = 1$. Für den Rechtseigenvektor $\mathbf{u}_b$ gilt bzw. für den Linkseigenvektor $\mathbf{v}'_b$

$$\mathbf{A} \mathbf{u}_b = \lambda_1 \mathbf{u}_b \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{v}'_b \mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{v}'_b.$$

Weiters gilt

$$[\mathbf{v}'_b, \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{bmatrix} = [\mathbf{v}'_b \mathbf{A}, \mathbf{0}] = \lambda_1 [\mathbf{v}'_b, \mathbf{0}] \quad (5.13)$$

und

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_b \\ \mathbf{u}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \mathbf{u}_b \\ \mathbf{B} \mathbf{u}_b + \mathbf{C} \mathbf{u}^* \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} \mathbf{u}_b \\ \mathbf{u}^* \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

wobei $\mathbf{u}^* = (\lambda_1 \mathbf{I}_{w-b} - \mathbf{C})^{(-1)} \mathbf{B} \mathbf{u}_b$ ist. Folglich sind die Vektoren $\mathbf{v}' = [\mathbf{v}'_b, \mathbf{0}]$ und $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_b, \mathbf{u}^*]$ linker bzw. rechter Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 von $\mathbf{L}$ mit der Eigenschaft

$$\mathbf{v}' \mathbf{u} = [\mathbf{v}'_b, \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_b \\ \mathbf{u}^* \end{bmatrix} = \mathbf{v}'_b \mathbf{u}_b = 1.$$

Um die Eigenvektoren von der Submatrix $\mathbf{A}$ zu berechnen, setzt man die Vektoren

$$\mathbf{u}_b = [u_0, u_1, \dots, u_b], \quad \mathbf{v}_b = [v_0, v_1, \dots, v_b].$$

Sei $u_0 = 1$ und wir erhalten durch Auflösen des Gleichungssystem 5.14

$$u_i = P_{0i} \lambda_1^{-i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, b, \quad (5.15)$$

wobei die Überlebenswahrscheinlichkeit P_{ij} definiert ist durch

$$P_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ \prod_{k=i}^{j-1} p_k & \text{für } i < j \end{cases}$$

(und $P_{i,i+1} = p_i$ gilt). Da wir $u_0 = 1$ gesetzt haben, folgt aus Gleichung 5.14

$$\sum_{i=0}^b m_i u_i = \lambda_1. \quad (5.16)$$

Den rechten Eigenvektor $\mathbf{v}_b$ kann man eindeutig bestimmen durch die Normierungsbedingung und die Wahl $u_0 = 1$. Aus der Gleichung 5.13 folgt daher

$$v_i = \frac{\sum_{j=i}^b m_j u_j}{u_i \sum_{j=0}^b (j+1) m_j u_j}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, b. \quad (5.17)$$

Die Eigenvektoren von der LESLIE-Matrix müssen nun noch dimensionsmäßig angepasst werden, wobei einige Rechnungen dahinterstecken, die hier

allerdings nicht genauer ausgeführt werden. Der rechte Eigenvektor

$\mathbf{u} = \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_w\}$ von $\mathbf{L}$ lautet dann

$$u_i = P_{0i} \lambda_1^{-1}, \quad i = 0, 1, \dots, w; \quad (5.18)$$

für den linken Eigenvektor $\mathbf{v}$ gilt dann

$$v_i = \begin{cases} 0 & \text{für } i = b+1, b+2, \dots, w \\ \frac{\sum_{j=i}^b m_j u_j}{u_i \sum_{j=0}^b (j+1) m_j u_j} & \text{für } 0 \leq i \leq b. \end{cases}$$

Somit haben wir den stabilen Bestandsvektor $\mathbf{u}$ und den stabilen Zuwachsfaktor λ_1 in Abhängigkeit von der LESLIE-Matrix $\mathbf{L}$ ermittelt. Jede LESLIE-Matrix $\mathbf{L}$ beschreibt also eine stabile Bevölkerungsstruktur und einen Zuwachsfaktor. Die Bedeutung der stabilen Bevölkerung beruht auf LOTKA und dessen Satz, denn falls die in der LESLIE-Matrix $\mathbf{L}$ stehenden altersspezifischen Fertilitäts- und Mortalitätsraten unverändert bleiben, so entsteht auf lange Sicht eine stabile Bevölkerung. Anders gesagt, der Bestandsvektor $\mathbf{n}_t$ wächst asymptotisch exponentiell mit dem Zuwachsfaktor λ_1 und die stabile Altersstruktur ist von der ursprünglichen Struktur unabhängig. Diese Struktur ist weiters durch den rechten Eigenvektor $\mathbf{u}$ der Matrix $\mathbf{L}$, der zum dominanten Eigenwert λ_1 gehört, bestimmt. Die Ausgangsbevölkerung $\mathbf{n}_0$ wirkt sich also nicht auf die Struktur aus, sondern nur auf die absoluten Bestände. Formal lautet das Ergebnis von LOTKA dann:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{n}_t}{\lambda_1^t} = (\mathbf{v}' \mathbf{n}_0) \mathbf{u}.$$

Die im Kapitel 4.2 definierte natürliche Zuwachsrate r einer Bevölkerung wurde als Differenz zwischen Geburten- und Todesfällen im Zeitraum $(t, t+1)$ bezogen auf den Durchschnittsbestand im selben Zeitraum festgesetzt. Sinnvoll ist es nun, die Bevölkerungsveränderung zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten t und $t+1$ auf den Ausgangsbestand zu beziehen, da wir dann für das LESLIE-Modell ebenfalls Aussagen treffen können. Sei nun N_t der Bestand zum Zeitpunkt t , dann kann man die natürliche Zuwachsrate

wie folgt definieren:

$$r = \frac{\text{natürlicher Zuwachs}}{\text{Ausgangsbestand}} = \frac{N_{t+1} - N_t}{N_t}.$$

Der Unterschied zwischen den beiden eingeführten natürlichen Zuwachsraten ist numerisch sehr gering und sie wird daher mit dem gleichen Buchstaben eingeführt. Für das LESLIE-Modell gilt dann

$$r = \frac{\sum_{x=0}^w n_{x,t+1} - \sum_{x=0}^w n_{x,t}}{\sum_{x=0}^w n_{x,t}} = \frac{(\lambda_1 - 1) \sum_{x=0}^w n_{x,t}}{\sum_{x=0}^w n_{x,t}} = \lambda_1 - 1;$$

d.h. $\lambda_1 = r + 1$.

Bei einer stationären Bevölkerung, also im Fall $\lambda_1 = 1$, ist die Zuwachsrates gleich Null. Ist der Eigenwert λ_1 der LESLIE-Matrix $\mathbf{L}$ verschieden von 1, dann wächst bzw. schrumpft die Bevölkerung mit dem Faktor $\lambda_1 > 1$ bzw. $\lambda_1 < 1$. Die Zuwachsrates beträgt dann $r = \lambda_1 - 1 > 0$ bzw. $r = \lambda_1 - 1 < 0$. Die absoluten Besetzungszahlen der einzelnen Altersklassen ändern sich hier im Vergleich zum stationären Modell um den Faktor λ_1 . Interpretiert man die Eigenvektoren von $\mathbf{L}$, dann benötigt man einige Überlegungen von vorhin. Wir wissen, dass $\mathbf{L}$ einen dominanten Eigenwert λ_1 besitzt. Somit können wir den Satz von POLLARD anwenden und nach den Gleichungen 5.11 und 5.12 gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_t &= \mathbf{L}^t \mathbf{n}_0 = \lambda_1^t (\mathbf{u} \mathbf{v}') \mathbf{n}_0 + \mathbf{O}(\lambda_1^t) = \\ &= \lambda_1^t (\mathbf{v}' \mathbf{n}_0) \mathbf{u} + \mathbf{O}(\lambda_1^t) = \\ &= \lambda_1^t \sum_{i=0}^w v_i N_{i,0} \mathbf{u} + \mathbf{O}(\lambda_1^t) \end{aligned} \quad (5.19)$$

bzw.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{n}_t}{\lambda_1^t} = (\mathbf{v}' \mathbf{n}_0) \mathbf{u} = \sum_{i=0}^w v_i N_{i,0} \mathbf{u}. \quad (5.20)$$

In dieser Form ist durch den Spaltenvektor $\mathbf{n}_0 = \{N_{i,0}\}_{i=0}^w$ der altersgegliederte Ausgangsbestand gegeben. Der Altersaufbau einer Bevölkerung strebt nach (5.20) gegen ein konstantes Vielfaches des Eigenvektors $\mathbf{u}$ der LESLIE-Matrix $\mathbf{L}$. Durch $\mathbf{u}$ ist somit die stabile Altersverteilung festgelegt. Aus

Gleichung 5.19 folgt wegen $u_0 = 1$

$$N_{0,t} \approx \lambda_1^t \sum_{i=0}^b v_i N_{i,0}. \quad (5.21)$$

Durch diese Approximation sieht man, dass die Geburtenentwicklung und damit das gesamte Bevölkerungswachstum im Wesentlichen als Produkt zweier Effekte aufgefasst werden kann. Der erste Faktor λ_1^t beschreibt den natürlichen exponentiellen Bevölkerungszuwachs, während sich im totalen reproduktiven Wert $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_0 = \sum_{i=0}^b v_i N_{i,0}$ der Einfluss der ursprünglichen Bevölkerungsstruktur niederschlägt. Durch diesen Wert wird das Niveau des exponentiellen Wachstums erst festgelegt. (vgl. [9] und [10])

5.3.2 Das LOTKA–VOLTERRA–Modell

Stetige Modelle sind für analytische Zwecke brauchbarer und daher soll als nächstes Modell das LOTKA–VOLTERRA–Modell vorgestellt werden. Alfred James LOTKA (1880-1949), ein österreichisch-amerikanischer Demograph, Chemiker und Versicherungsstatistiker wurde bekannt durch seine mathematische Formulierung von Populationsdynamikgesetzen. Unabhängig von seinen Ergebnissen stieß Vito VOLTERRA (1860-1940), ein römischer Mathematiker und Physiker, auf die selben Differentialgleichungen und formulierte gleiche Gesetze der Populationsdynamik. Die von ihnen entdeckten Gesetze können in einer idealisierten Räuber-Beute-Beziehung, die anzahlmässige Entwicklung der beiden Arten berechnen und voraussagen.

Bevor dieses Modell nun vorgestellt werden kann, wird ein theoretischer Überblick über Fixpunkte gegeben, denn diese spielen in dynamischen Systemen eine wichtige Rolle. Besonders wenn man ein dynamisches System auf lange Sicht betrachtet, weisen Fixpunkte ein besonderes Verhalten auf, das nun zuerst geklärt werden soll, ehe die Stabilitätsanalyse dynamischer Systeme konkret auf das LOTKA–VOLTERRA–Modell angewendet wird.

In diskreten dynamischen Systemen wird die Existenz und die Eindeutigkeit von Fixpunkten mit Hilfe des BANACH'schen Fixpunktsatzes bewiesen.

Bevor dieser Satz formuliert und bewiesen werden kann, werden einige wichtige Definitionen angeführt.

Definition 3 (Metrik). Sei M die Menge, $M \neq \emptyset$ und $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. (M, d) heißt metrischer Raum, falls d folgende Eigenschaften für alle $x, y, z \in M$

1. $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in M$,
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
3. $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in M$,
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in M$

erfüllt. Die Funktion d wird Metrik auf M genannt.

Diese Definition findet man etwa in [37] S. 34, die nachstehende in [36] S. 227.

Definition 4 (Häufungspunkt). Sei (M, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq M$ eine Menge. Ein Punkt $x \in M$ heißt Häufungspunkt von A , falls in jeder Umgebung von x Punkte aus A liegen, die von x verschieden sind, also $\forall \epsilon > 0 \exists y \in A$ mit $y \neq x$ und $d(y, x) < \epsilon$.

Definition 5 (Fixpunkt). Sei $T : M \rightarrow M$ eine Funktion. Dann heißt x Fixpunkt, falls $T(x) = x$ gilt. Der Punkt x wird auf sich selbst abgebildet.

Die Definition eines Fixpunktes besagt also, dass sich der Wert von x bei der Anwendung einer Funktion nicht ändert und weiters bleibt das dynamische System, falls man in diesem Fixpunkt gestartet ist, stets auf dem Fixpunkt.

Definition 6 (Periodischer Punkt). Ein Punkt $x \in X$ heißt periodischer Punkt, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $T^n(x) = x$.

Die Definition eines periodischen Punktes kann bei [45] S. 211 nachgelesen werden.

Definition 7 (Periode). Die Periode von x wird durch das kleinste n mit obiger Eigenschaft, also $n = \min \{k \in \mathbb{N} : T^k(x) = x\}$ beschrieben. Dabei heißt x Punkt der Periode n . Ein Fixpunkt ist ein Punkt der Periode 1.

Definition 8 (Lipschitz-Stetigkeit). Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine nicht leere Menge und $T : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt T Lipschitz-stetig auf M , falls eine Lipschitz-Konstante K existiert ($\exists K \in \mathbb{R}$), sodass $|T(x) - T(y)| \leq K|x - y|$ $\forall x, y \in M$.

Die folgende Definition der Kontraktion, etwa nach [37] S. 257, entspricht der eben definierten Lipschitz-Stetigkeit, wobei für die Lipschitz-Konstante $K < 1$ gilt.

Definition 9 (Kontraktion). Eine Abbildung einer Menge M in sich selbst, $T : M \rightarrow M$, heißt Kontraktion, falls es ein $q < 1$ gibt, sodass für alle $x, y \in M$ gilt

$$d(T(x), T(y)) \leq qd(x, y).$$

Die Menge M wird bei mehrfacher Anwendung der Kontraktion in sich kontrahiert.

Nach diesen zahlreichen Definitionen kann nun der BANACH'sche Fixpunktsatz formuliert und bewiesen werden. Dieser Satz ist nach dem polnischen Mathematiker Stefan BANACH (1892-1945) benannt und gibt Auskunft über die Existenz und Eindeutigkeit von Fixpunkten in diskreten Systemen. Der nachfolgende Beweis ist ein Standardbeweis, den man zum Beispiel bei Heuser (vgl. [16]) nachlesen kann. In diesem Beweis werden einige Behauptungen aufgestellt, die anschließend bewiesen werden.

Satz 4 (Banach'scher Fixpunktsatz). *Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und $T : M \rightarrow M$ eine Kontraktion. Dann besitzt T einen eindeutig bestimmten Fixpunkt x_0 . Weiters gilt für alle $x \in M$, dass*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x) = x_0$$

die Näherung an den Fixpunkt beschreibt. Zusätzlich gibt die Fehlerabschätzung

$$\forall x \in M \forall n \in \mathbb{N} : d(T^n(x), x_0) \leq \frac{q^n}{1 - q} d(T(x), x)$$

die Entfernung vom Fixpunkt an.

Beweis.

Behauptung: Falls es einen Fixpunkt gibt, ist dieser eindeutig bestimmt.

Beweis der Behauptung: Betrachte Fixpunkte x_0 und y_0 . Wegen $T(x_0) = x_0$ und $Ty_0 = y_0$ ist

$$d(x_0, y_0) = d(T(x_0), T(y_0)) \leq qd(x_0, y_0).$$

Da $q < 1$ ist, muss $d(x_0, y_0) = 0$ und daher $x_0 = y_0$ gelten. $\diamond$

Behauptung: Für jedes $x \in M$ konvergiert die Folge $(T^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$.

Beweis der Behauptung: Sei $\epsilon > 0$. Dann gilt

$$\exists N : \forall n \geq N : \frac{q^n}{1-q} d(T(x), x) < \epsilon. \quad (5.22)$$

Seien $n, m \geq N$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $n < m$. Wir wenden die Dreiecksungleichung an und erhalten daher

$$\begin{aligned} d(T^n(x), T^m(x)) &\leq d(T^n(x), T^{n+1}(x)) + d(T^{n+1}(x), T^{n+2}(x)) + \\ &\quad \dots + d(T^{m-1}(x), T^m(x)). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Für den zweiten Summanden ergibt sich durch Anwenden der Kontraktionseigenschaft

$$d(T^{n+1}(x), T^{n+2}(x)) = d(T \circ T^n(x), T \circ T^{n+1}(x)) \leq qd(T^n(x), T^{n+1}(x)),$$

für den dritten Summanden

$$d(T^{n+2}(x), T^{n+3}(x)) \leq qd(T^{n+1}(x), T^{n+2}(x)) \leq q^2 d(T^n(x), T^{n+1}(x))$$

usw. für den letzten Summanden

$$d(T^{m-1}(x), T^m(x)) \leq q^{m-n-1} d(T^n(x), T^{n+1}(x)).$$

Wir heben den Ausdruck $d(T^n(x), T^{n+1}(x))$ heraus und es ergibt sich daher für die Gleichung 5.23

$$\dots \leq d(T^n(x), T^{n+1}(x))(1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{m-n-1}) = \dots$$

Der verbleibende Ausdruck ist eine endliche geometrische Reihe. Daher folgt

$$\dots = d(T^n(x), T^{n+1}(x)) \frac{1 - q^{m-n}}{1 - q} \leq d(T^n(x), T^{n+1}(x)) \frac{1}{1 - q}.$$

Weiters gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - q} d(T^n(x), T^{n+1}(x)) &\leq \frac{1}{1 - q} q d(T^{n-1}(x), T^n(x)) \leq \\ &\leq \frac{1}{1 - q} q^2 d(T^{n-2}(x), T^{n-1}(x)) \leq \dots \leq \frac{1}{1 - q} q^n d(T(x), x). \end{aligned}$$

Laut Gleichung 5.22 gilt

$$\frac{q^n}{1 - q} d(T(x), x) < \epsilon.$$

Somit ist $(T^n x)$ eine Cauchyfolge in M . Nachdem M vollständig ist, konvergiert $(T^n x)$. $\diamond$

Zusatz: Es gilt $d(T^n(x), \lim_{k \rightarrow \infty} T^k(x)) \leq \frac{q^n}{1 - q} d(T(x), x)$.

Beweis des Zusatzes: Definiere $y := \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x)$. Sei $\epsilon > 0$. Es gibt ein N mit $\forall k \geq N : d(T^k(x), y) < \epsilon$. Wähle $k > \max\{N, n\}$. Es ist

$$d(T^n(x), y) \leq d(T^n(x), T^k(x)) + d(T^k(x), y).$$

Weiters ist $d(T^n(x), T^k(x)) \leq \frac{q^n}{1 - q} d(T(x), x)$ und $d(T^k(x), y) < \epsilon$. Somit folgt $d(T^n(x), y) \leq \frac{q^n}{1 - q} d(T(x), x)$. $\diamond$

Behauptung: Es sei $x \in M$. Dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n x$ ein Fixpunkt von T , also gilt $T(\lim_{n \rightarrow \infty} T^n x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n x$.

Beweis der Behauptung: Wir setzen $y := \lim_{n \rightarrow \infty} T^n x$. Wähle ein beliebiges $\epsilon > 0$. Wegen $y := \lim_{n \rightarrow \infty} T^n x$ gibt es ein N , sodass $d(T^n x, y) < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq N$ gilt. Fixiere ein $n \geq N$. Dann ist auch $n + 1 \geq N$ und es gilt

$$d(Ty, y) \leq d(Ty, T^{n+1}x) + d(T^{n+1}x, y).$$

Da $d(Ty, T^{n+1}x) \leq q d(y, T^n x) < \frac{\epsilon}{2}$ und $d(T^{n+1}x, y) < \frac{\epsilon}{2}$ ist, ergibt sich

$$d(Ty, y) \leq d(Ty, T^{n+1}x) + d(T^{n+1}x, y) < 2 \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Weil $\epsilon > 0$ beliebig war, muss $d(Ty, y) = 0$ sein und somit $Ty = y$ gelten. $\diamond$

Es wurde also gezeigt, dass $T^n(x)$ konvergiert und $x_0 := \lim_{n \rightarrow \infty} T^n x$. Weiters wurde gezeigt, dass x_0 ein Fixpunkt ist. Da zu Beginn des Beweises gezeigt wurde, dass der Fixpunkt eindeutig ist, ergibt sich, dass $T^n(x)$ für alle $x \in M$ gegen x_0 konvergiert. $\square$

Der BANACH'sche Fixpunktsatz sagt auch, dass x_0 ein stabiler Fixpunkt ist.

Sei nun T unsere Funktion, die wir nach Fixpunkten untersucht haben. In einem weiteren Schritt kann die Stabilität der Fixpunkte analysiert werden. Dazu brauchen wir erneut ein paar Definitionen.

Definition 10 (hyperbolisch). Sei x ein Punkt der Periode n . Wenn

$$|(T^n)'(x)| \neq 1$$

ist, dann heißt der Punkt x hyperbolischer Punkt.

Definition 11 (Attraktor/Repellor). Der Punkt x wird anziehender periodischer Punkt oder Attraktor genannt, falls x ein hyperbolischer Punkt der Periode n ist und $|(T^n)'(x)| < 1$. Der Punkt x wird abstoßender periodischer Punkt oder Repellor genannt, falls x ein hyperbolischer Punkt der Periode n ist und $|(T^n)'(x)| > 1$.

Die obigen für eindimensionale dynamische Systeme gültigen Definitionen findet man etwa in [7] S. 24–26. Jetzt wollen wir uns ähnlichen Definitionen für mehrdimensionale dynamische Systeme zuwenden. Man findet die nachstehende Definition in [35] S. 3,8.

Definition 12 (Jacobi-Matrix). Sei $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Dann ist die Jacobi-Matrix $\mathbf{J}(x)$ an der Stelle x gegeben durch

$$\mathbf{J}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial T_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial T_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial T_n}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial T_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Man nennt einen Fixpunkt x hyperbolisch, falls alle Eigenwerte der Jacobi-Matrix an der Stelle x Betrag ungleich 1 haben. Die Stabilität von Fixpunkten in diskreten Systemen kann etwa so nach [35] S. 10 klassifiziert werden.

Definition 13. Je nach Lage der Eigenwerte λ_j mit $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ der Jacobi-Matrix eines Fixpunktes einer differenzierbaren Abbildung $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ können Fixpunkte wie folgt unterschieden werden.

- Der Fixpunkt ist stabil und wird Senke oder Attraktor genannt, wenn für alle Eigenwerte $|\lambda_j| < 1$ gilt. In der Gauß'schen Zahlenebene bedeutet das, dass alle Eigenwerte im Inneren des Einheitskreises liegen.
- Der Fixpunkt ist instabil und wird Quelle oder Repellor genannt, wenn alle Eigenwerte außerhalb des Einheitskreises liegen, also $|\lambda_j| > 1$ für alle Eigenwerte gilt.
- Ein Fixpunkt ist instabil und wird Sattelpunkt genannt, wenn mindestens ein Eigenwert außerhalb und mindestens ein Eigenwert innerhalb des Einheitskreises liegt. Es ist somit $|\lambda_j| > 1$ für $j = 1, 2, \dots, m < n$ und $|\lambda_k| < 1$ für $k = m + 1, \dots, n$.
- Falls für einen Eigenwert $|\lambda_j| = 1$ ist, dann kann mit dieser Linearisierungsmethode keine Aussage getroffen werden.

Die bisherigen Definitionen gelten für diskrete dynamische Systeme, doch wir sind auch an kontinuierlichen Systemen interessiert. Hat man etwa ein nichtlineares Differentialgleichungssystem gegeben, so kann man Lösungswerte oft nur durch numerische Verfahren ermitteln, denn es gibt keine einfachen Lösungsverfahren. Reicht es allerdings aus, das Lösungsverhalten des Systems zu kennen, so kann dies anhand einer qualitativen Analyse erfolgen. (vgl. [15]).

Definition 14 (Autonome Differentialgleichung). Eine Differentialgleichung der Form $\dot{x} = T(x)$, die nicht von t abhängt, wird autonome Differentialgleichung genannt.

Diese Definition findet man in [45] S. 7, die nachstehende, die nur der zweidimensionale Spezialfall der obigen Definition ist, in [3] S. 117f.

Definition 15. Seien $\dot{x}_1 = T(x_1, x_2)$ und $\dot{x}_2 = F(x_1, x_2)$ jeweils autonome Differentialgleichungen. Dann wird

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= T(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= F(x_1, x_2)\end{aligned}$$

ein System autonomer Differentialgleichungen erster Ordnung genannt.

In kontinuierlichen Systemen werden Fixpunkte wie folgt definiert. (vgl. [45] S. 11)

Definition 16 (Fixpunkt). Ein Punkt x_0 heißt Fixpunkt von $\dot{x} = T(x)$, falls $T(x_0) = 0$ ist.

Proposition 1. Der Punkt x_0 ist genau dann ein Fixpunkt von $\dot{x} = T(x)$, wenn $x(t) = x_0 \forall t$ eine Lösung von $\dot{x} = T(x)$ ist.

Beweis.

($\Rightarrow$) Man betrachte $x(t) = x_0$. Dann gilt $\dot{x}(t) = 0 = T(x_0) = T(x(t))$.

($\Leftarrow$) $T(x_0) = T(x(t)) = \dot{x}(t) = 0$. □

In der Literatur findet man für die Bezeichnung Fixpunkt x_0 auch kritischer Punkt, stationärer Punkt, singulärer Punkt, Ruhelage oder Gleichgewichtspunkt. Die Lösung $\dot{x}(t) = T(x)$ wird als stationäre Lösung bezeichnet. Um Aussagen über die Stabilität von Fixpunkten zu machen, wendet man die Theorie von linearen Gleichungen bei der Untersuchung von Systemen nichtlinearer Differentialgleichungen an.

Definition 17 (Systemmatrix). Ein linearer Operator im n -dimensionalen Raum $\mathbb{R}^n$ sei durch $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben, wobei $\mathbf{A}$ die Systemmatrix genannt wird. Dann wird durch die sogenannte Linearisierung $\dot{x} = \mathbf{A}x$ ein System von n linearen homogenen gewöhnlichen Differenzialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten beschrieben.

Diese Definition ist nach [3] S. 157f. und [12].

Die Differenzialgleichung $\dot{x} = ax$ hat als Lösung $x(t) = ce^{at}$. Grob gesagt muss man also, um von der Differenzialgleichung zur Lösung zu gelangen, die Exponentialfunktion anwenden. Es entspricht daher einem „Eigenwert λ der Matrix der Differenzialgleichung“ der „Eigenwert e^λ der Matrix der Lösung“. Wie wir oben im diskreten Fall besprochen haben, kommt es bei der Lösung darauf an, ob der Betrag des Eigenwerts gleich 1, kleiner 1 oder größer 1. Da $|e^{a+bi}| = |e^a||e^{bi}|$, $e^a > 0$ und $|e^{bi}| = 1$ gelten, ist $|e^{a+bi}| = e^a$. Somit ist für eine komplexe Zahl z die Eigenschaft $|e^z| < 1$ genau dann gültig, wenn $\operatorname{Re}(z) < 0$, $|e^z| > 1$ ist äquivalent zu $\operatorname{Re}(z) > 0$ und $|e^z| = 1$ ist äquivalent zu $\operatorname{Re}(z) = 0$. Das motiviert die folgende Definition, die auch bei [17] S. 66 nachzulesen ist.

Definition 18 (hyperbolisch). Ist der Realteil aller Eigenwerte einer Matrix $\mathbf{A}$ ungleich Null, also liegt kein Eigenwert auf der imaginären Achse, so wird die Matrix hyperbolisch genannt. Ein System von Differentialgleichungen heißt genau dann hyperbolisch, wenn die Matrix $\mathbf{A}$ des linearisierten Systems $\dot{x} = \mathbf{A}x$ hyperbolisch ist.

Ist man am Verhalten in der Nähe eines Fixpunktes interessiert, dann muss man die Jacobi-Matrix des Systems ermitteln. Das Lösungsverhalten wird durch die Eigenwerte der entsprechenden Jacobi-Matrix am Fixpunkt bestimmt.

Die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = T(x(t))$ lautet in Komponentenschreibweise

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ T_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ T_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{pmatrix}.$$

Es sei x_0 ein Fixpunkt. Die Jacobi-Matrix von T an der Stelle x_0 ist

$$\mathbf{J}(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} T_1(x_0) & \frac{\partial}{\partial x_2} T_1(x_0) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} T_1(x_0) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} T_2(x_0) & \frac{\partial}{\partial x_2} T_2(x_0) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} T_2(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} T_n(x_0) & \frac{\partial}{\partial x_2} T_n(x_0) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} T_n(x_0) \end{pmatrix}.$$

Durch die Differenzialgleichung $\dot{x} = \mathbf{J}(x_0)x$ ist das linearisierte System bei x_0 gegeben.

Als nächstes soll der Satz von HARTMAN und GROBMAN formuliert werden, den ich nicht beweisen werde. Dieser Satz sagt im Wesentlichen aus, dass sich die Lösungen der autonomen Differentialgleichungen in der Nähe des Fixpunktes wie die des linearisierten Systems verhalten.

Satz 5 (Satz von HARTMAN und GROBMAN). *Sei $\dot{x} = T(x)$ ein autonomes System nichtlinearer Differentialgleichungen und x_0 ein hyperbolischer Fixpunkt von $\dot{x} = T(x)$. Dann ist in einer Umgebung des Fixpunktes das nichtlineare System $\dot{x} = T(x)$ und seine Linearisierung $\dot{x} = \mathbf{A}x$ lokal topologisch konjugiert. Dies bedeutet, dass es lokal eine umkehrbare, eindeutige, stetige Abbildung mit stetiger Inversen, also einen lokalen Homöomorphismus gibt.*

Qualitativ hängt das langfristige Verhalten der Lösungen eines autonomen, homogenen linearen Systems $\dot{x} = \mathbf{A}x$ vom Vorzeichen der Realteile der relevanten Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ ab. Entsprechende Eigenräume E^S und E^U können nach dem qualitativen Langzeitverhalten der in ihnen enthaltenen Lösungen zusammengefasst werden. Folgender Satz kann daher, etwa nach [12] S. 93, formuliert werden.

Satz 6 (Stabilitätskriterium). *Es sei $\mathbf{A}$ eine reelle $n \times n$ Matrix und $\dot{x} = \mathbf{A}x$. Die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ werden mit λ_j bezeichnet. Dann gibt es stabile Unterräume E^S und instabile Unterräume E^U von $\mathbb{R}^n$ mit den Eigenschaften:*

1. *Für $x_0 \in E^S \setminus \{0\}$ erfüllt die Lösung x von $\dot{x} = \mathbf{A}x$, $x(0) = x_0$, dass $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ und $\limsup_{t \rightarrow -\infty} |x(t)| = +\infty$ ist.*
2. *Für $x_0 \in E^U \setminus \{0\}$ erfüllt die Lösung x von $\dot{x} = \mathbf{A}x$, $x(0) = x_0$, dass $\limsup_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = +\infty$ und $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$ ist.*

Die Dimension von E^S ist die Anzahl (mit algebraischer Vielfachheit) der Eigenwerte mit negativem Realteil, also $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$. Das qualitative Verhalten der in dem Unterraum E^S enthaltenen Lösungen ist stabil. Im Unterraum E^U sind jene Lösungen enthalten, deren qualitatives Verhalten instabil ist.

Die Dimension dieses Teilraums ist die Anzahl (mit algebraischer Vielfachheit) der Eigenwerte mit positivem Realteil $\operatorname{Re}(\lambda_j) > 0$. Ist der Realteil genau Null, so kann mit Hilfe dieses Satzes keine Aussage getroffen werden.

Nach [35] S. 45 können hyperbolische Fixpunkte dynamischer System wie folgt klassifiziert werden. In Abbildung 5.3 werden hyperbolische Fixpunkte graphisch dargestellt.

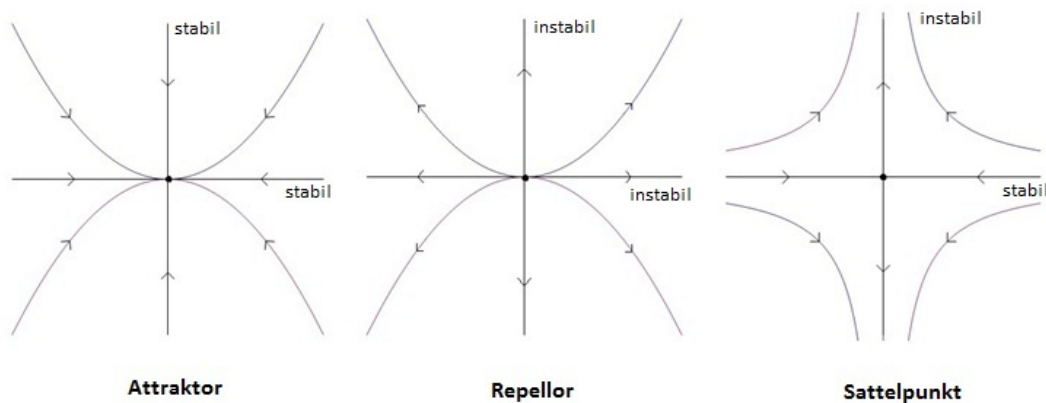


Abbildung 5.3: Hyperbolische Fixpunkte

Definition 19 (Attraktor/Repellor/Sattelpunkt). Sei x_0 ein hyperbolischer Fixpunkt eines dynamischen Systems.

- Sind die Realteile aller Eigenwerte negativ, so ist der Fixpunkt stabil und wird Senke oder Attraktor genannt.
- Sind die Realteile aller Eigenwerte positiv, so ist der Fixpunkt instabil und wird Quelle oder Repellor genannt.
- Hat ein Teil der Eigenwerte positive Realteile und ein Teil negative, so ist der hyperbolische Fixpunkt instabil und wird Sattelpunkt genannt. Bei dem Teil der Eigenwerte mit positiven Realteil herrscht Instabilität. Die Phasenkurven werden vom Fixpunkt abgestoßen. Andererseits herrscht bei dem Teil der Eigenwerte mit negativem Realteil Stabilität. Die Phasenkurven werden vom Fixpunkt angezogen.

Die soeben beschriebene Klassifizierung zur Untersuchung der Stabilität kann nicht angewendet werden, falls die Realteile der Eigenwerte Null sind, denn dann handelt es sich um kein hyperbolisches System. Für diesen Fall wird die LYAPUNOV-Funktion definiert, etwa nach [15] S. 547. Diese Funktion, die nach dem russischen Mathematiker Alexander M. LYAPUNOV (1857-1918) benannt ist, dient dazu, die Stabilität eines Fixpunkts in einem dynamischen System zu beschreiben.

Definition 20 (LYAPUNOV-Funktion). Sei $\dot{x} = T(x)$ ein autonomes System und x_0 sei ein Fixpunkt dieses Systems. Dann heißt eine Funktion $L(x)$ LYAPUNOV-Funktion, falls sie in einer offenen Umgebung U von x_0 folgende Eigenschaften besitzt:

1. L ist stetig differenzierbar,
2. L verschwindet im Fixpunkt und ist außerhalb des Fixpunkts positiv und
3. $\sum_{j=1}^n T_j \frac{\partial L}{\partial x_j}$ verschwindet im Fixpunkt und ist außerhalb des Fixpunkts ≤ 0 .

Proposition 2. Sei $\dot{x} = T(x)$ eine autonome Differentialgleichung, T stetig differenzierbar. Falls L eine LYAPUNOV-Funktion ist und x eine Lösung von $\dot{x} = T(x)$, dann ist $t \mapsto L(x(t))$ monoton fallend.

Beweis.

Betrachte $g(t) := L(x(t))$. Dann ist wegen der (mehrdimensionalen) Kettenregel

$$\dot{g}(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_j}(x(t)) \cdot \dot{x}_j(t) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial x_j} \cdot T_j \right)(x(t)) \leq 0,$$

also ist g monoton fallend. □

Nach diesem theoretischen Exkurs können wir uns dem LOTKA-VOLTERRA-Modell widmen, bei dem wir auf ein nichtlineares System stoßen. Dieses Modell beschreibt die Wechselwirkung zweier Populationen, wobei die einen Prädatoren (Räuber) R , die anderen Beutetiere B sind. Weiters wird davon

ausgegangen, dass sich die Raubtiere ausschließlich von diesen Beutetieren ernähren und dass diese Beutetiere nur von dieser einen Räuberspezies gefressen werden. Die Größe der jeweiligen Populationen ist von der Zeit abhängig, wodurch $R(t)$ und $B(t)$ folglich gilt.

Dieses „einfache“ LOTKA–VOLTERRA–Modell spiegelt die Wirklichkeit auf Grund der Konstruktion dieses Modelles nur sehr vereinfacht wider. Es werden unrealistische Annahmen getroffen, etwa dass die gesamte Nahrung der Räuber die Beutepopulation ist oder dass die Beutepopulation unbeschränkte Nahrungsressourcen hat. Wären also keine Räuber vorhanden, so könnten sich die Beutetiere ohne Hindernisse vermehren. Dies könnte man durch das Modell des exponentiellen Wachstums beschreiben. Sei nun a die Reproduktionsrate der Beutetiere. Dann kann man die Differentialgleichung

$$\dot{B} = aB$$

mit $a > 0$ aufstellen, wobei diese Gleichung die Geschwindigkeit der Vermehrung beschreibt. Die Größe der Beutepopulation zu einem Zeitpunkt t lässt sich dann durch $B(t) = B_0 e^{at}$ berechnen, falls die Räuberpopulation gleich Null ist. Existieren allerdings Räuber, dann entspricht das Produkt RB der Anzahl der Begegnungen zwischen den Räubern und den Beutetieren. Der Bestand der Beutetiere nimmt dann in Abhängigkeit von der Anzahl der Zusammentreffen ab und dies wird durch cBR mit $c > 0$ im Modell dargestellt. Die neue Differenzialgleichung für die Beutepopulation, welche die Änderungsrate der Anzahl der Beutetiere beschreibt, lautet somit

$$\dot{B} = aB - cBR.$$

Bei Abwesenheit der Beutetiere würde hingegen die Anzahl der Räuber exponentiell zurückgehen und daher lässt sich folgende Differentialgleichung aufstellen

$$\dot{R} = -sR,$$

wobei $s > 0$ der Sterberate der Prädatorenpopulation entspricht. Für die Größe der Population folgt dann $R(t) = R_0 e^{-st}$ und bei langfristiger Betrachtung stirbt diese Population aus. Können sich die Räuber ernähren,

also falls Beutetiere existieren, dann nimmt die Population je nach Anzahl der Zusammentreffen zu. Die Zuwachsrates der Räuber wird durch pBR mit $p > 0$ beschrieben. Die neue Differentialgleichung, die die Geschwindigkeit der Vermehrung beschreibt, lautet dann

$$\dot{R} = -sR + pBR.$$

(vgl. [1], [3], [12] und [17])

Sind die Größen der beiden Populationen $R, B \geq 0$ und $a, c, p, s > 0$, so lässt sich die Wechselwirkung zwischen diesen beiden Populationen durch das Räuber–Beute–Modell in Form eines autonomen Systems von zwei nicht linearen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{aligned}\dot{B} &= \frac{\partial B}{\partial t} = aB - cBR = B(a - cR) \\ \dot{R} &= \frac{\partial R}{\partial t} = -sR + pBR = R(-s + pB)\end{aligned}\tag{5.24}$$

beschreiben. Dieses System von Differentialgleichungen ist nicht geschlossen lösbar und daher wird eine qualitative Analyse durchgeführt. Um die Fixpunkte des Differentialgleichungssystems berechnen zu können, werden $\dot{B}$ und $\dot{R}$ jeweils Null gesetzt. Wir erhalten folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned}B(a - cR) &= 0 \\ R(-s + pB) &= 0\end{aligned}$$

und lösen diese mit Fallunterscheidung. Wir bekommen zwei Fixpunkte, der eine liegt im Ursprung mit $(B, R)_1 = (0, 0)$, der andere hat die Koordinaten $(B, R)_2 = (\frac{s}{p}, \frac{a}{c})$. Wir sind nun an der Stabilität der Fixpunkte interessiert und dazu brauchen wir das linearisierte System der Differenzialgleichungen. Dies lautet

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} a - cR & -cB \\ pR & -s + pB \end{pmatrix} x$$

Wir bilden nun die Jacobi–Matrix wie folgt

$$\mathbf{J}(B, R) = \begin{pmatrix} a - cR & -cB \\ pR & -s + pB \end{pmatrix}$$

und setzen den ersten Fixpunkt $(B, R)_1 = (0, 0)$ in die Jacobi-Matrix ein. Folglich erhalten wir

$$\mathbf{J}(0, 0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -s \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte können von dieser Matrix direkt abgelesen werden, da es sich hier um eine Dreiecksmatrix handelt. Die Elemente der Hauptdiagonale entsprechen den Eigenwerten, also sind die Eigenwerte $\lambda_1 = a$ und $\lambda_2 = -s$. Der Realteil von λ_1 ist positiv, der von λ_2 negativ. Nach dem Satz über das Stabilitätskriterium gilt $\dim E^S = 1$ und $\dim E^U = 1$. Somit ist der erste Fixpunkt ein Sattelpunkt, der hyperbolisch instabil ist.

Als nächsten Schritt setzen wir den zweiten Fixpunkt $(B, R)_2 = (\frac{s}{p}, \frac{a}{c})$ in die Jacobi-Matrix ein und erhalten

$$\mathbf{J}(B, R) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{cs}{p} \\ \frac{ap}{c} & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte können hier nicht direkt abgelesen werden und wir müssen zum Bestimmen der Eigenwerte das charakteristische Polynom Null setzen, wobei wir dieses durch die Berechnung der Determinante $|\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}|$ erhalten. Wir stoßen auf die quadratische Gleichung $\lambda^2 = -as$ und bekommen somit rein imaginäre Eigenwerte $\lambda_1 = i\sqrt{as}$ und $\lambda_2 = -i\sqrt{as}$. Über die Stabilität dieses Fixpunktes kann nach den oben genannten Sätzen keine Aussage getroffen werden.

Daher betrachten wir den Verlauf der Lösungskurven, wobei wir dazu eine neue Definition, die man in [5] S. 194 findet, einführen.

Definition 21 (Phasenportrait). Sei $\dot{x} = T(x)$ ein autonomes System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung. Alle Lösungskurven im Phasenraum, die durch die Zuordnung $t \rightarrow (x_1(t), x_2(t))$ entstehen, werden Phasenportrait des Systems genannt. Die Phasenkurven heißen Trajektorien oder Orbits.

Auskunft über den Verlauf der Lösungskurven geben vor allem Isoklinen, also Kurven gleicher Steigung $k = T(x)$ der Differentialgleichung $\dot{x} = T(x)$.

Die erste Isokline $R = \frac{a}{c}$ erhalten wir aus der Lösung von $\dot{B} = aB - cBR = 0$, die zweite $B = \frac{s}{p}$ aus $\dot{R} = -sR + pBR = 0$. Der Schnittpunkt der beiden Isoklinen entspricht genau dem zweiten Fixpunkt $(B, R)_2 = (\frac{s}{p}, \frac{a}{c})$. Wie die Lösungskurven tatsächlich aussehen, kann jetzt noch nicht bestimmt werden. Durch die berechneten Isoklinen wird der Definitionsbereich $B, R \geq 0$ in vier Bereiche unterteilt, wie in Abbildung 5.4 gezeigt wird. Verfolgt man

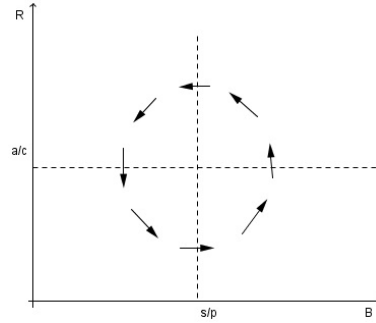


Abbildung 5.4: Analyse der Lösungskurven im LOTKA-VOLTERRA-Modell

den Verlauf der Pfeile, dann sieht man, wie sich die Beute- bzw. die Räuberpopulation entwickelt, also ob sie wächst, schrumpft oder konstant bleibt. (vgl. [3], [15], [17] und [22])

Um den Verlauf der Trajektorien näher bestimmen zu können, wird die LYAPUNOV-Funktion mit der Methode der Trennung der Variablen ermittelt. Sei $L(B, R)$ die LYAPUNOV-Funktion, so gilt dann

$$\dot{L}(B, R) = \frac{\partial L(B, R)}{\partial t} = \frac{\partial L(B, R)}{\partial B} \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial L(B, R)}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial t}. \quad (5.25)$$

Statt $\frac{\partial B}{\partial t}$ und $\frac{\partial R}{\partial t}$ kann man die Gleichungen von 5.24 einsetzen und erhält

$$\dot{L}(B, R) = \frac{\partial L(B, R)}{\partial B} B(a - cR) + \frac{\partial L(B, R)}{\partial R} R(-s + pB).$$

Wir setzen nun $\dot{L} = 0$, dann erkennt man, dass

$$\frac{\partial L(B, R)}{\partial B} \frac{B}{-s + pB} = \frac{\partial L(B, R)}{\partial R} \frac{R}{-a + cR}$$

konstant ist. Setzt man diese Konstante gleich 1, so folgen die zwei Gleichungen

$$\frac{\partial L(B, R)}{\partial B} = \frac{-s + pB}{B} = \frac{-s}{B} + p = p - \frac{s}{B}, \quad (5.26)$$

$$\frac{\partial L(B, R)}{\partial R} = \frac{-a + cR}{R} = \frac{-a}{R} + c = c - \frac{a}{R}. \quad (5.27)$$

Setzt man die beiden Gleichungen 5.26 und 5.27 in die LYAPUNOV-Funktion (5.25) ein, dann erhält man

$$\begin{aligned} \dot{L}(B, R) &= \left(p - \frac{s}{B}\right) \frac{\partial B}{\partial t} + \left(c - \frac{a}{R}\right) \frac{\partial R}{\partial t} = \\ &= p \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{s}{B} \frac{\partial B}{\partial t} + c \frac{\partial R}{\partial t} - \frac{a}{R} \frac{\partial R}{\partial t} \end{aligned}$$

und integriert dann, so erhält man für die LYAPUNOV-Funktion

$$L(B, R) = pB - s \ln B + cR - a \ln R$$

mit $B, R > 0$. Um nun eine Aussage über den zweiten Fixpunkt zu treffen, führen wir nun eine Definition für den Begriff „stabil“ ein, der von der bereits eingeführten Bezeichnung abweicht, aber sehr gebräuchlich ist. Nachzulesen etwa bei [15] S. 547.

Definition 22 (LYAPUNOV-stabil). Sei

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= T(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= F(x_1, x_2) \end{aligned}$$

ein autonomes System mit dem Fixpunkt x_0 . Man nennt den Fixpunkt x_0 LYAPUNOV-stabil (d.h. eine Lösung, die nahe bei x_0 startet, bewegt sich nicht „zu weit“ von x_0 weg), falls es eine LYAPUNOV-Funktion L gibt. Der Fixpunkt x_0 heißt LYAPUNOV-asymptotisch stabil, falls es eine strikte LYAPUNOV-Funktion L gibt.

Nach dieser Definition ist also der Fixpunkt $(B, R)_2 = (\frac{s}{p}, \frac{a}{c})$ LYAPUNOV-stabil.

Die Entwicklung der beiden Populationen kann nun noch graphisch in einem Phasen- und in einem Zeitdiagramm dargestellt werden. Die konstante LYAPUNOV-Funktion

$$L(B, R) = pB - s \ln B + cR - a \ln R$$

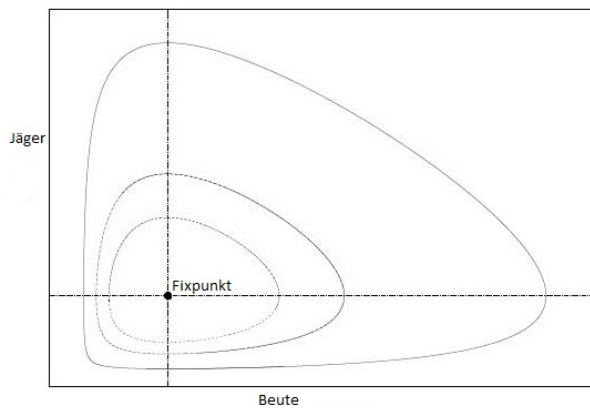


Abbildung 5.5: Phasendiagramm des LOTKA–VOLTERRA–Modells, Quelle: [26]

beschreibt die Phasenkurven. Die Lösungskurven bewegen sich um den zweiten Fixpunkt $(B, R)_2 = (\frac{s}{p}, \frac{a}{c})$, der somit die durchschnittliche Größe der beiden Populationen bestimmt wie in Abbildung 5.5 dargestellt ist. Unabhängig von der Größe der Ausgangspopulation kommt es weder zum Aussterben noch zu einem unbeschränkten Wachstum einer Spezies. Die beiden Populationen schwanken zyklisch und zeitlich versetzt.

Die beiden Populationen unterliegen periodischen Änderungen und es kommt zu einer ungedämpften Schwingung, einer Oszillation. Im Zeitdiagramm 5.6 erkennt man die Entwicklung der Räuber bzw. der Beutetiere in Abhängigkeit der Zeit t . (vgl. [17])

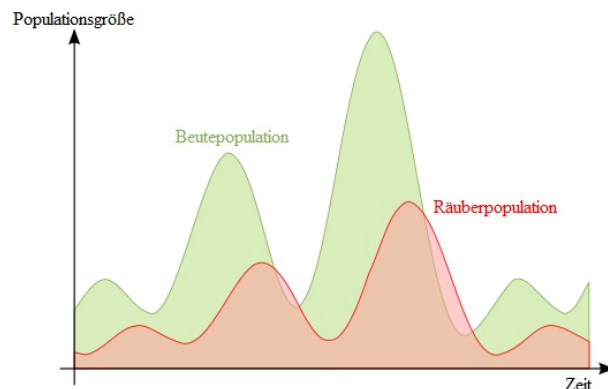


Abbildung 5.6: Zeitdiagramm des LOTKA–VOLTERRA–Modells, Quelle: [26]

Dieses einfache LOTKA–VOLTERRA–Modell kann durch das logistische Wachstum erweitert werden, denn in dem beschriebenen Modell fehlen etwa Einflüsse von intraspezifischer Konkurrenz. Im erweiterten Modell ist das Wachstum innerhalb der beiden Populationen selbst nach oben begrenzt. Dieses Modell spiegelt die Wirklichkeit besser wider. In dieser Arbeit wird es allerdings nicht näher erläutert. Nachzulesen ist darüber etwas in [44] oder vielen anderen Werken.

6 Entwicklungstrends und Aussichten für das 21. Jahrhundert

Die Menschheit ist im letzten Jahrhundert so stark gewachsen wie noch nie in der Geschichte. Die Einwohnerzahl hat sich zwischen 1900 und 2000 vervierfacht und es gab deutlich mehr Geburten als Sterbefälle. Das 21. Jahrhundert steht allerdings vor anderen Herausforderungen. Das Bevölkerungswachstum verlangsamt sich wieder, doch die Menschen werden immer älter. Die Gesellschaft befindet sich mitten in einem Veränderungsprozess. (vgl. [32])

Die Entwicklung der Bevölkerungsanzahl kann mit Hilfe von Modellrechnungen abgeschätzt werden. Bevölkerungsvorausberechnungen sagen demnach aus, wie sich der Bevölkerungsstand und die Struktur in Zukunft verändert. Diese Berechnungen werden unter bestimmten Annahmen zur Geburtenhäufigkeit, zur Sterblichkeit und zum Wanderungsverhalten durchgeführt, wobei die Entwicklungen nach Geschlecht und Alter unterteilt vorausberechnet werden. Weitere Unterteilungen nach Familienstand, Staatsangehörigkeit oder nach ethnischer Zugehörigkeit können ebenfalls getroffen werden. Ist man an einer zukünftigen Entwicklung interessiert, so können nur „wahrscheinliche“ Aussagen getroffen werden, daher wird von Bevölkerungsprognosen gesprochen. Allerdings werden diese meist nur für eine Zeitspanne von 10-15 Jahren erstellt, da mit zunehmender zeitlicher Distanz große Unsicherheiten auftreten.

Ein mögliches Modell zur Bevölkerungsvorausberechnung ist die Kohorten-Überlebensmethode, die auf einem Makromodell basiert. Bei Makromodellen

wird der Bevölkerungsstand und die Struktur durch Anwendung von Übergangswahrscheinlichkeiten wie etwa altersspezifische Geburtenraten, Sterbewahrscheinlichkeiten oder durch Vorgaben von absoluten Größen von Jahr zu Jahr summarisch fortgeschrieben. Bei der Kohorten-Überlebensmethode oder auch „cohort survival method“ geht man von einzelnen Geburtenjahrgängen, die Jahr für Jahr durch Anwendung der Überlebenswahrscheinlichkeit fortgeschrieben und gleichzeitig nach Maßgabe altersspezifischer Geburtenraten um jeweils einen Jahrgang ergänzt werden, aus. Die früheste Formulierung eines Projektionsmodells geht auf SHARPE und LOTKA (1911) zurück. Als Ergebnisse von Geburten früherer Jahre von Frauen im Alter α bis β werden die Geburten $B(t)$ der Periode t interpretiert (z.B. 15-50 Jahre). Die Neugeborenen früherer Jahre $B(t - a)$ haben die Wahrscheinlichkeit $l(a)$, bis zum nächsten Jahr zu überleben. Für diejenigen, die überleben, gilt, dass sie mit Wahrscheinlichkeit $m(a) \cdot da$ im Zeitintervall a bis $a + da$ ein Kind zur Welt bringen. Die Zahl der Geburten im Zeitpunkt t ergibt sich dann durch

$$B(t) = \int_{\alpha}^{\beta} B(t - a) \cdot l(a) \cdot m(a) \cdot da.$$

Allgemein wird der Ausdruck $l(a) \cdot m(a)$ als die „Mutterschaftsfunktion“ oder „maternity function“ bezeichnet. Durch $l(a) \cdot m(a)$ ist die Wahrscheinlichkeit für ein neugeborenes Kind gegeben, ein weiteres Kind in der Alterszeitspanne $a + da$ zu bekommen.

Das heute allgemein gebräuchliche Projektionsmodell wurde von LESLIE in den Jahren 1945 und 1948 entwickelt und wurde in Kapitel 5.3.1 bereits beschrieben. In diesem Modell „überlebt“ die Bevölkerung entlang von Kohortenlinien. LESLIE als auch LOTKA haben jeweils Modelle für ein Geschlecht (Frauen) entwickelt und nach dem Alter gegliedert. Auch heute werden Vorusberechnungen meist nur für Frauen durchgeführt und für die Männer dann entsprechend einer relativ konstanten Sexualproportion geschätzt. Modelle dieser Art werden in der Literatur als „Modelle mit weiblicher Dominanz“ bezeichnet. (vgl. [6])

6.1 Das Modell der Statistik Austria

Um Bevölkerungsprognosen erstellen zu können, verwendet Statistik Austria genau die klassische Kohorten-Komponentenmethode, bei der die einzelnen Altersjahrgänge (Geburtskohorten) mit Hilfe der Komponenten Fertilität (zur Ermittlung der künftigen Geburtsjahrgänge), Mortalität (Sterbefälle) und Migration (Zu- und Abwanderung) in die Zukunft fortgeschrieben werden. Die Prognoseannahmen werden in regelmäßigen Abständen, meist alle drei Jahre, neu diskutiert und falls nötig revidiert. Dazwischen wird eine Neudurchrechnung auf Basis der aktuellen Bevölkerungsentwicklung durchgeführt. Der Bevölkerungsstand zum 1. Jänner eines Basisjahres (im aktuellen Fall 1.1.2007), der nach einjährigem Alter (0 bis 99+ Jahre) und nach dem Geschlecht gegliedert ist, ist Basis dieser Bevölkerungsprognose. Die Ausgangsbevölkerung wird dann pro Prognosejahr um ein Jahr gealtert. (vgl. [39])

Die Bevölkerung eines bestimmten Altersjahres zum Ende eines bestimmten Kalenderjahres lässt sich wie folgt errechnen

$$B_{a,j} = p_{a-1,j-1}B_{a-1,j-1} + \frac{1}{2}(1 + p_{a-1,j-1})W_{a,j}$$

mit $B_{a,j}$ als männliche bzw. weibliche Bevölkerung mit vollendetem Lebensalter a am 31.12. des Jahres j , mit $p_{a,j}$ als Überlebenswahrscheinlichkeit für die männliche bzw. weibliche Bevölkerung vom Alter a bis $a + 1$ im Jahr j und $W_{a,j}$ geben die Wandernden (männlich bzw. weiblich) im Alter von a Jahren im Jahr j an. Beschreibt man die Formel verbal, dann wird die jeweilige Bevölkerung $B_{a-1,j-1}$ des Vorjahres mit der zutreffenden Überlebenswahrscheinlichkeit $p_{a-1,j-1}$ des Vorjahres multipliziert und um den Wanderungssaldo erhöht bzw. reduziert. Bei den Wanderungen wird unterstellt, dass sie sich gleichförmig auf das Kalenderjahr verteilen. Daher wird die Sterbewahrscheinlichkeit q_{a-1} des Altersjahrgangs $a - 1$ nur zur Hälfte in den Ansatz gebracht und es ergibt sich die Überlebenswahrscheinlichkeit der Wanderer

$$1 - \frac{q_{a-1,j-1}}{2} = 1 - \frac{1 - p_{a-1,j-1}}{2} = \frac{1}{2}(1 + p_{a-1,j-1}).$$

(vgl. [6]) Die jährlichen Geburtenzahlen werden mit altersspezifischen Fertilitätsraten berechnet, die mit den entsprechenden Frauenzahlen im gebärfä-

higen Alter verknüpft werden. Diese Raten werden entsprechend angepasst bzw. verändert, um steigende bzw. sinkende Fertilitätsraten bzw. ein sich veränderndes Fertilitätsalter zu berücksichtigen. Mit Hilfe von alters- und geschlechtsspezifischen Sterbewahrscheinlichkeiten werden die jährlichen Sterbefälle subtrahiert. Diese Sterbewahrscheinlichkeiten leiten sich aus vorausgeschätzten Sterbtafeln ab. Die dritte Komponente der Bevölkerungsprognose sind die Zu- und Abwanderungen, bzw. bei einer regionalisierten Prognose auch die Binnenwanderungsströme. Bei Wanderungsdaten ist es im Vergleich zur Fertilität und Mortalität allerdings nicht möglich, Änderungsfaktoren gegenüber dem Ausgangsjahr anzuwenden. Abwanderungsströme werden wie bei der Mortalität mit Hilfe von alters- und geschlechtsspezifischen Raten berechnet. Wird die Binnenwanderung berücksichtigt, dann werden alters-, geschlechts- und richtungsspezifische Abwanderungsraten benötigt. Die internationale Zuwanderung wird in Form von nach Alter, Geschlecht und Region differenzierten Absolutzahlen vorgegeben.

Die Zahl der Wandernden $W_{a,j}$ (männlich und weiblich) in der l -ten Altersgruppe im Jahr j lässt sich durch die Matrix

$$\mathbf{W}_{l,j} = \frac{v_{l,k}}{\sum_{i=1}^L v_{i,k}} \mathbf{S}_j$$

berechnen, wobei $v_{l,k}$ der Anteil der Altersgruppe l am Gesamtsaldo im Kalenderjahr k ist und $\mathbf{S}_j$ die Matrix mit den jährlichen Wanderungssalden für das Simulationsjahr j darstellt. Ist man an der Zahl der Wandernden je Altersjahrgang interessiert, dann erhält man diese durch

$$W_{a,j} = \frac{\mathbf{W}_{l,j}}{a_{l+1,k} - a_{l,k}}.$$

(vgl. [6] und [39])

Aus der in Abbildung 6.1 dargestellten aktuellen Prognose aus dem Jahr 2007 wird die Bevölkerungszahl Österreichs bis 2050 auf 9.5 Millionen Menschen ansteigen. Erstellt man ein geschlossenes Modell, also ohne Migration, dann würde die Anzahl der Menschen auf 7.3 Millionen sinken. Bei verstärkter Zuwanderung, steigender Fertilität und stark zunehmender Lebenserwar-

Variante	Prognosejahr					
	2006	2010	2020	2030	2040	2050
Hauptszenario	8,281.948	8,395.315	8,689.447	8,978.511	9,280.413	9,514.363
Wachstumsszenario	8,281.948	8,405.088	8,907.798	9,655.958	10,496.628	11,293.729
Alterungsszenario	8,281.948	8,387.348	8,576.619	8,656.584	8,607.053	8,478.058
Hohe Wanderungsvariante	8,281.948	8,395.293	8,776.148	9,288.857	9,845.250	10,328.652
Niedrige Wanderungsvariante	8,281.948	8,386.215	8,603.752	8,775.686	8,840.044	8,819.956
Fertilitätsvariante	8,281.948	8,400.324	8,774.686	9,227.445	9,726.458	10,179.103
Hohe Lebenserwartungsvariante	8,281.948	8,400.050	8,735.275	9,088.151	9,459.373	9,763.780
Niedrige Lebenserwartungsvariante	8,281.948	8,390.213	8,640.044	8,856.758	9,072.810	9,214.068
Hauptvariante ohne Wanderung	8,281.948	8,300.072	8,233.144	8,060.039	7,736.911	7,273.042

Abbildung 6.1: Prognose für die Bevölkerung in Österreich

tung wächst die Population in Österreich bis ins Jahr 2050 auf 11.3 Millionen an. Diese Annahme stellt ein Wachstumsszenario dar. (vgl. [39])

6.2 Entwicklungstrends

Was wird uns die Zukunft bringen? Wie viele Menschen werden wohl 2100 auf dem Planeten Erde leben? Wie viele haben überhaupt Platz? Gerhard HEILIG, UN-Bevölkerungsexperte sagte dazu in einem Interview: „*Wir gehen davon aus, dass im Jahr 2100 zehn Milliarden Menschen auf der Welt leben und die Zahl ab diesem Zeitpunkt leicht zurückgeht. Dieser voraussichtliche Höhepunkt von zehn Milliarden Menschen setzt aber voraus, dass die Fertilitätsrate in Afrika und Asien dramatisch zurückgeht. Wenn die Geburtenraten auf dem heutigen Level bleiben – wovon man nicht ausgehen kann –, dann haben wir im Jahr 2100 etwa 27 Milliarden Menschen.*“ (siehe [31] S. 60)

In einigen Entwicklungsländern sinkt die Fertilitätsrate bereits, bei vielen anderen Ländern der Dritten Welt ist allerdings dieser Trend noch nicht absehbar. Einerseits erklärt sich der Rückgang der Fertilität durch den sich verbreitenden Zugang zur Bildung, der allmählich auch in den Entwicklungsländern spürbar ist, andererseits durch die „Theorie des demographischen Übergangs“. Im Iran sank etwa die Geburtenrate seit 1984 von sieben Kindern pro Frau auf 1.9 Kinder im Jahr 2006. (vgl. [31])

Können überhaupt auf Grundlage der heute vorliegenden Daten und Erkenntnisse Aussagen über zukünftige Entwicklungen der Weltbevölkerung getroffen werden? Wahrscheinlich bleiben in Europa und Nordamerika die Geburten-

zahlen sehr niedrig, in den Entwicklungsländern wird sich das Bevölkerungswachstum allerdings fortsetzen. Die Anzahl der Migranten wird weiterhin steigen. Solange die wirtschaftliche Lage im eigenen Land katastrophal ist bzw. bleibt und Industrieländer mit einem „besseren“ Leben werben, wird sich dieser Trend nicht ändern. Steigende Migration führt allerdings auch dazu, dass über die Einwanderungspolitik in vielen Ländern debattiert wird. Großer Unsicherheitsfaktor ist die Krankheit AIDS, denn in der jüngeren Geschichte konnte keine andere Krankheit die Bevölkerungsentwicklung so stark beeinflussen bzw. gefährden. Können rechtzeitig geeignete Medikamente gefunden und Maßnahmen zur Bekämpfung dieser Epidemie getroffen werden? (vgl. [14])

Die Frage nach der Begrenztheit der Erde bzw. wie sich die Population entwickelt, kann mit Hilfe der heutigen Ergebnisse aus der Demographie bzw. Bevölkerungsstatistik nicht eindeutig beantwortet werden. Mögliche Prognosen mit Unsicherheitsfaktoren können erstellt werden, doch Probleme wie Klimawandel, Ressourcenknappheit, Umweltzerstörung, usw. werden wesentlich größere Herausforderungen für die Menschheit in den kommenden Jahrzehnten darstellen.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Bills of Mortality (1662), Quelle: [47]	9
2.2	Die göttliche Ordnung (1775), Quelle: [21]	10
2.3	Graphische Darstellung des Malthusschen Bevölkerungsgesetzes	12
3.1	LEXIS-Diagramm für eine Person	20
3.2	LEXIS-Diagramm mit Periode - Alter - Kohorte	22
3.3	Vom Lexis-Diagramm zur Alterspyramide	23
3.4	Die drei Grundformen des Altersaufbaus, Quelle: [18]	25
3.5	Österreichische Bevölkerung 2011, Quelle: Statistik Austria	26
4.1	Sterbetafel 2010, Quelle: STATISTIK AUSTRIA	42
5.1	Entwicklung der Weltbevölkerung 1650-2010	51
5.2	Beziehung im LEXIS-Diagramm	68
5.3	Hyperbolische Fixpunkte	85
5.4	Analyse der Lösungskurven im LOTKA-VOLTERRA-Modell	90
5.5	Phasendiagramm des LOTKA-VOLTERRA-Modells, Quelle: [26]	92
5.6	Zeitdiagramm des LOTKA-VOLTERRA-Modells, Quelle: [26]	92
6.1	Prognose für die Bevölkerung in Österreich	98

Tabellenverzeichnis

2.1	Schematische Darstellung des Malthusschen Bevölkerungsge- setzes (Verdoppelungszeit 25 Jahre)	12
3.1	Doubling Time	29
4.1	Spalten einer Sterbetafel	37
4.2	Altersaufbau der stabilen und stationären Bevölkerung	47

Literaturverzeichnis

- [1] C. ABLEITINGER, *Biomathematische Modelle im Unterricht*. Fachwissenschaftliche und didaktische Grundlagen mit Unterrichtsmaterialien, Vieweg+Teubner, 2010.
- [2] R. ANGROSCH, „Überall Chaos! Dynamische Systeme in der Biologie“, Diplomarbeit, Wien, 2009.
- [3] V. ARNOLD, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2001.
- [4] J. BÄHR, *Bevölkerungsgeographie*, Verlag Eugen Ulmer, Stuttgart, 2004.
- [5] H.-A. BRAUNSS, H. JUNEK, T. KRAINER, *Grundkurs Mathematik in den Biowissenschaften*, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2007.
- [6] M. BRETZ, *Methoden der Bevölkerungsvorausberechnung*, In: U. MUELLER, B. NAUCK, A. DIEKMANN, *Handbuch der Demographie 1*. Modelle und Methoden, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2000, 643–681.
- [7] R. DEVANEY, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Benjamin/Cummings, California, 1986.
- [8] G. FEICHTINGER, *Demographische Analyse und populationsdynamische Modelle*. Grundzüge der Bevölkerungsmathematik, Springer Verlag, Wien, 1979.
- [9] G. FEICHTINGER, *Stationäre und schrumpfende Bevölkerungen*. Demographisches Null- und Negativwachstum in Österreich, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1977.

-
- [10] G. FEICHTINGER, *Stochastische Modelle demographischer Prozesse*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.
- [11] P. M. GRUBER, *Mathematik 2 für MB (inkl. WI-MB) und VT*, 2009.
- [12] L. GRÜNE, O. JUNGE, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2009.
- [13] N. HAAS, A. MÜLLER, *Weltbevölkerung - Wachstum ohne Grenzen?*, In: *Mathematik lehren* **70**, (1995), 56–62.
- [14] C. HAUB, *Dynamik der Weltbevölkerung 2002*, Berlin, 2002.
- [15] H. HEUSER, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Teubner, Wiesbaden, 2006.
- [16] H. HEUSER, *Lehrbuch der Analysis Teil 2*, Teubner, Stuttgart, 1981.
- [17] M. HIRSCH, S. SMALE, R. DEVANEY, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, Elsevier, Amsterdam, Boston, Heidelberg, 2004.
- [18] K. HUSA, H. WOHLSCHLÄGL, *Proseminar „Grundzüge der Bevölkerungsgeographie“*, 2007.
- [19] E. HOFSTEN, *Bevölkerungsgröße und Bevölkerungswachstum*, In: P. KHALATBARI, *Die Demographie und ihre Methode*, Akademie-Verlag, Berlin, 1977, 33–48.
- [20] P. KHALATBARI, *Thomas Robert Malthus im Widerstreit der Wissenschaften*, Berlin, 1991.
- [21] Kiefer, online unter http://www.kiefer.de/auktion_artikel_details.aspx?KatNr=702 (13.03.2012).
- [22] M. KOTH, *Mathematische Modelle aus Biologie und Ökologie*, In: *Didaktikhefte der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft* **19**, (1991) 129–150, online unter

- <http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/1991%20Band%2019/Koth1991.pdf> (21.02.2012).
- [23] W. KULS, F.J. KEMPER, *Bevölkerungsgeographie*, Eine Einführung, B.G. Teubner Stuttgart, Leipzig, 2000.
- [24] J. KYTIR, S. MARIK-LEBECK, A. WISBAUER, *Bevölkerungsgeographie Österreichs*. Ausgewählte Probleme- und Themenbereiche, 2011.
- [25] U. LERCHER, *Projektartige Unterrichtsbeispiele mit DERIVE*, Diplomarbeit, Wien, 1996.
- [26] LOTKA–VOLTERRA–GLEICHUNGEN, online unter <http://de.wikipedia.org/wiki/Lotka-Volterra-Gleichungen> (13.03.2012).
- [27] I. LUENSTROTH, *Zu den Ursprüngen der Demographie*. Wann und wo liegen die Ursprünge der Demographie, welches waren ihre Begründer und welche Paradigmen herrschten zu jener Zeit vor?, GRIN-Verlag, Norderstedt, 2009.
- [28] Marc LUY, *Perioden- und Kohortenanalyse*, online unter <http://www.lebenserwartung.info/index-Dateien/perikoho.htm> (29.12.2011).
- [29] G. MACKENROTH, *Bevölkerungslehre*. Theorie, Soziologie und Statistik der Bevölkerung, Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1953.
- [30] U. MUELLER, *Die Maßzahlen der Bevölkerungsstatistik*, In: U. MUELLER, B. NAUCK, A. DIEKMANN, *Handbuch der Demographie 1*. Modelle und Methoden, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2000, 1–91.
- [31] G. MÜLLER, M. STAUDINGER, *Nummer 7.000.000.000*, In: *Profil - Das unabhängige Nachrichtenmagazin Österreichs* **44**, (31. 10. 2011), 58–62.
- [32] R. MÜNZ, A. F. REITERER, *Wie schnell wächst die Zahl der Menschen? Weltbevölkerung und weltweite Migration*, Fischer-Taschenbuch-Verlag, Frankfurt/ Main, 2007.

-
- [33] C. P. ORTLIEB, C.v. DRESKY, I. GASSER, S. GÜNZEL, *Mathematische Modellierung. Eine Einführung in zwölf Fallstudien*, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2009.
- [34] ÖSTERREICHISCHE STIFTUNG FÜR WELTBEVÖLKERUNG UND INTERNATIONALE ZUSAMMENARBEIT, online unter <http://www.swi-austria.org/weltbevoelkerung/> (12.03.2012).
- [35] P. PLASCHKO, K. BROD, *Nichtlineare Dynamik, Bifurkation und Chaotische Systeme*, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1995.
- [36] V. REITMANN, *Reguläre und chaotische Dynamik*, Teubner, Stuttgart, 1996.
- [37] W. RUBIN, *Analysis*, Oldenbourg Verlag, München, 2005.
- [38] STATISTIK AUSTRIA, online unter http://www.statistik.at/web_de/statistiken/bevoelkerung/demographische_masszahlen/sterbetaefeln/index.html (30.12.2011).
- [39] STATISIK AUSTRIA, online unter http://www.statistik.at/web_de/statistiken/bevoelkerung/demographische_prognosen/index.html (22.02.2012).
- [40] STATISTIK AUSTRIA, online unter http://www.statistik.at/web_de/statistiken/bevoelkerung/volkszaehlungen_registerzaehlungen/index.html (09.12.2011).
- [41] G. STEINMANN, *Thomas Robert Malthus (1766-1834)*, In: P. KHALATBARI, *Thomas Robert Malthus im Widerstreit der Wissenschaften*, Berlin, 1991, 44–65.
- [42] E. STROHBACH, *Methodische Grundlagen der Analyse der Bevölkerungsreproduktion*, In: P. KHALATBARI, *Die Demographie und ihre Methode*, Akademie-Verlag, Berlin, 1977, 11–32.
- [43] THE CLUB OF ROME, online unter <http://www.clubofrome.at/about/index1.html> (13.01.2012).

- [44] K. G. TROITZSCH, *Dynamik interagierender Bevölkerungen*, In: U. MÜLLER, B. NAUCK, A. DIEKMANN, *Handbuch der Demographie 1. Modelle und Methoden*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2000, 135–183.
- [45] F. VERHULST, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical System*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1990.
- [46] H. WINTER, *Leben und Sterben - mathematisch gesehen*, In: *Mathematik lehren* **70**, (1995), 4–9.
- [47] YAHOO!, online unter
http://tech.groups.yahoo.com/group/hps_review/message/63
(13.03.2012).

Kurzzusammenfassung

Überbevölkerung, Bevölkerungsexplosion, Ressourcenknappheit, Klimawandel usw. sind Schlagwörter, die heute ständig in den Medien kursieren. Wie sich die Anzahl der Bevölkerung in den nächsten Jahrzehnten wirklich entwickeln wird, bleibt ungewiss.

Bereits im 17. Jahrhundert beschäftigten sich die ersten „Wissenschaftler“ mit den Veränderungen der Bevölkerung und bis heute wird an diesem Thema geforscht. In dieser Arbeit wird zuerst ein historischer Überblick über die Anfänge der Bevölkerungslehre gegeben. Weiters werden die Grundzüge der Bevölkerungsstruktur beschrieben und um das Bevölkerungswachstum zu bestimmen, werden statistische Maßzahlen eingeführt. Der Schwerpunkt der Arbeit basiert auf der Dynamik der Bevölkerung. Kann das Bevölkerungswachstum mit Hilfe von Funktionen bzw. von Modellen beschrieben werden? Einige Funktionen werden daher nach bestimmten Kriterien analysiert und anschließend demographisch gedeutet. Ferner werden zwei sehr bekannte Modelle, das LOTKA–VOLTERRA–Modell und das LESLIE–Modell vorgestellt. Am Abschluss der Arbeit wird ein neueres Modell für Prognosenberechnung vorgestellt, das auch Migration berücksichtigt und sehr allgemein werden Entwicklungstrends formuliert.

Ziel dieser Arbeit ist es, Begriffe wie Überbevölkerung, Bevölkerungsexplosion, usw. in einen mathematischen Kontext zu stellen und in diesem zu beantworten. Wie sich die Bevölkerung nun wirklich entwickelt, kann nicht genau abgeschätzt werden. Weiters wird das Wachstum der Bevölkerung von vielen äußeren Faktoren wie etwa Kriege, Krankheiten, Klimawandel, etc. beeinflusst, sodass Entwicklungstrends ebenfalls sehr unsicher sind.

Abstract

How many people can live on our planet? When do we reach overpopulation? Climate change, depletability of resources, population boom, etc. are just some words but the consequences of these terms are quite vague. In the seventeenth century people already tried to understand demographic change and did research on that topic. A historical review about the beginnings of demography can be found about in this diploma thesis. Furthermore the basics of demographic structure are characterized and if you are interested in population growth, you have to know something about important statistical indexes. That's why many statistical numbers are defined. The focus of the diploma project is on functions and models and they are used to describe population growth but can you describe population growth with functions? To find an answer, the functions are analysed and the results are interpreted demographically. Moreover two classic models, the LOTKA–VOLTERRA–model and the LESLIE–model, are presented. Finally a new model which considers migration is introduced and development trends are phrased.

The aim of this thesis is to express terms like overpopulation, population boom and population growth in a mathematical way. Since future trends of population growth are highly uncertain it is very difficult to create prognoses. Many other reasons like wars, climate change, diseases, etc. have also effects on population growth and development, so all statements are rather vague.

LEBENS LAUF

PERSÖNLICHE DATEN

Name:	Alexandra Maria Keplinger
Geburtsdatum:	30.09.1988
Geburtsort:	Linz
Staatsbürgerschaft:	Österreich
Familienstand:	ledig
Religion:	römisch-katholisch
Eltern:	OStR. Mag. Hermann und Claudia Keplinger
Geschwister:	DI Dr. Christoph Keplinger

AUSBILDUNG

1994 - 1995:	Vorschule Wilhering
1995 - 1999:	Volksschule Wilhering
1999 - 2007:	Stiftsgymnasium Wilhering
WS 2007 - SS 2012:	Studium Lehramt Mathematik und Geschichte, Sozialkunde und Politische Bildung, Universität Wien

BERUFSERFAHRUNG

- SS 2011: Tutorin an der Fakultät für Mathematik der
Universität Wien
- WS 2011: Tutorin an der Fakultät für Mathematik der
Universität Wien
Tutorin am Institut für Mathematik der Uni-
versität für Bodenkultur
- SS 2012: Tutorin an der Fakultät für Mathematik der
Universität Wien
Tutorin am Institut für Geschichte der Uni-
versität Wien