Diplomarbeit

Titel der Diplomarbeit

„Wittgenstein und die Geometrische Auffassung des Beweises“

Verfasser

Franz Schörkhuber

Angestrebter akademischer Grad

Magister der Philosophie (Mag.phil.)

Wien, im Februar 2012

Studienkennzahl lt. Studienbuchblatt:	A 296
Studienrichtung lt. Studienbuchblatt:	Philosophie
Betreuerin:	DDr. Esther Ramharter

WITTGENSTEIN UND DIE GEOMETRISCHE AUFFASSUNG DES BEWEISES

Wir sagen von zwei Menschen auf einem Bild nicht *vor allem* der eine erscheine kleiner als der andre, und *erst dann*: er erscheine weiter hinten zu sein. Es ist, kann man sagen, wohl möglich daß uns das kürzer sein gar nicht auffällt sondern *nur* das Hintenliegen. (Dies scheint mir mit der Frage der ‚geometrischen' Auffassung des Beweises zu tun zu haben.)

(MS 122, 75r)

Danke…

… Esther Ramharter für die eingehende Betreuung der Diplomarbeit

… Anja Weiberg für die umfangreiche Korrekturlektüre und das motivierende Vertrauen in mein Arbeiten schon während des Studiums

… Günther Eder, Federik Gierlinger und Sebastian Greve für Kritik am Text und gute Gespräche

… Alois Pichler, Wilhelm Krüger und Deirdre Smith für die freundliche Aufnahme am *Wittgenstein Archiv Bergen* im Winter 2010

… Meinen Eltern für die Finanzierung des Studiums

Wird eine Anzahl Striche (| | | | | | | | | |) durch eine Ziffer (10) ersetzt, so nehmen wir gemeinhin an, dass dies geschehe, um uns den Umgang mit jenem Muster zu *erleichtern*. Anstatt jedes Mal langwierig die Strichreihe anzuschreiben, können wir an ihre Stelle ein einfaches Zahlzeichen setzen, das sie nach allgemeiner Übereinkunft *bezeichnen* soll. Umgelegt auf das Rechnen im Dezimalsystem hieße das, dass eine Addition von, sagen wir, 200 und 200 *eigentlich* einer Operation mit Strichen entspräche. Dieser Gedanke scheint nicht nur verständlich zu machen, welcher Zusammenhang zwischen der Berechnung mathematischer Sätze und deren Applikation auf die Dinge der Erfahrungswelt besteht, sondern er leitet zugleich zu der Annahme, man müsse zu jenen primitiven und ursprünglichen Elementen zurückkehren, möchte man die Mathematik *wirklich* verstehen. Es erhebt sich das Bedürfnis nach einer Analyse, die den mathematischen Satz in seine Bestandteile zerlegt, deren jeweilige Bedeutung bestimmt, und so den Sinn des Ganzen zu rekonstruieren erlaubt. – Die Mathematik, wie wir sie tatsächlich betreiben, wird zu etwas Obskurem, das einer Befestigung bedarf: die eigentümlichen, genuin mathematischen Strukturen zeigen sich nicht in dem, was offen zutage liegt, sondern sind hinter der Oberfläche, hinter den Symbolen des Kalküls verborgen. Dies Verborgene gilt es sodann aufzudecken, will man sichergehen, dass die Weise, wie wir tagtäglich Mathematik treiben, auch die richtige ist.

Schaut man aber zu, was geschähe, wollten wir mit 200 und nochmals 200 Strichen tatsächlich zu rechnen beginnen, so stellt sich heraus, dass die Mathematik den Status des Notwendigen vollends verlöre. Das Ergebnis des Addierens etwa würde abhängig von der Konzentrationsfähigkeit des Zählenden sowie einer Reihe von Rahmenbedingungen, die das Zählen begleiten; das Kriterium für *richtiges* Rechnen löste sich in Nichts auf. – Von dieser Betrachtung kann man sich dahin leiten lassen, die Suche nach einer Bedeutung hinter dem mathematischen Symbolismus als in die Irre führend aufzugeben. Was einem nach Ausschluss solcher Verweisformen auf ein vorgeblich Zugrundeliegendes vor Augen bleibt, das ist der Kalkül, so wie *wir* mit ihm rechnen. An die Stelle seiner *Erklärung* tritt die *Beschreibung* unseres Umgangs mit seinen Zeichen. Dabei zeigt sich, dass Menschen auf gewisse zeichengeometrische Ordnungen angewiesen sind, wenn sie Mathematik betreiben wollen. Einem Kalkül, der einzig nur mit Strichen oder Einern arbeitet, können wir nicht sehr weit folgen: neue Symbole werden notwendig, die uns ihrer Vergleichbarkeit aus sich selbst heraus versichern. Wer diese anthropologischen Bedingungen der Mathematik sieht, für den ist kaum mehr nachvollziehbar, wieso jemand daran interessiert sein sollte, sämtliche mathematischen Operationen in weitläufiger Weise auf einen primitiven, bzw. dem Vorgeben nach „primäreren“ Kalkül zu reduzieren. Es ist einfach nicht länger klar, *wozu* das gut sein soll.

Ich hob hervor, dass man sich von der Betrachtung dessen, wie ein Rechnen mit Strichen aussehen *würde*, dahin führen lassen *könnte*, der Reduzierbarkeit der vielfältigen Phänomene mathematischen Denkens auf einen einheitlichen Kalkül wenig Wichtigkeit einzuräumen: denn von diesem, am *menschlichen* Operieren mit Zeichen orientierten Standpunkt aus gesehen, ist es gerade der spezifische Zeichenraum des jeweiligen Kalküls, dem mathematisches Interesse zukommt. Liegt einem am Verständnis der mannigfachen mathematischen Erscheinungen (oder Strukturen) als solcher, dann hilft ein sogenanntes allgemeines Prinzip nicht weiter, da durch dieses die einzelnen Kalküle ihrer zeichengeometrischen Eigentümlichkeiten gerade beraubt werden. Nun ist es aber nicht nur so, dass man – ist der geometrische Betrachtungsstandpunkt erst einmal eingenommen – das Motiv oder den Zweck für die Zurückführung all der mathematischen Formen auf einen einzigen, fundamentalen Kalkül kaum nachzuvollziehen vermag; vielmehr möchte man noch einen kleinen Schritt darüber hinaus tun und sagen, dass die mathematischen Ordnungen eines spezifischen Zeichensystems in einem ihm irgendwie korrespondierenden anderen gar nicht erst hergestellt werden *könnten*. Neben den Zweifeln über die *Zweckmäßigkeit* des reduktionistischen Vorhabens ergeben sich also konkrete Einsprüche gegen seine tatsächliche *Durchführbarkeit*. Es scheint ganz einfach kein mathematisches Vorgehen zu sein, wenn jemand 200 Striche und 200 Striche zählt und die beim letzten Strich ausgesprochene Zahl für die *errechnete* Summe beider Anzahlen ausgibt. – Solche Einsprüche provozieren jedoch Gegeneinwände, die sich auf das ihnen zugrundeliegende Verständnis der Mathematik beziehen. So kann man z. B. behaupten, dass zwar der Mensch beim Operieren mit Strichen in der Tat recht schnell die Übersicht verlöre, dass aber die davon unabhängige mathematische Ordnung deswegen nicht gleich durcheinandergerät: und um die allein sei es uns doch zu tun. Es wird also bestritten, dass die Mathematik etwas ist, das wir Menschen hervorbringen; vielmehr denkt man sie als etwas, das immer schon vorliegt und von uns nur noch entdeckt zu werden braucht.

Dies dialektische Spiel von Einsprüchen und Gegenkritik kann fortgeführt werden. Und das Anliegen meiner Arbeit ist es, genau das zu tun. Auf solche Weise erschließen sich nach und nach die Denkschemata, aus denen die vermeintlich konträr entgegenstehenden Meinungen zur Mathematik, zum beweisenden Vorgehen des Mathematikers, zu den Definitionen usw. erwachsen. Die divergenten Neigungen, über einen gegebenen Gegenstand entweder *das eine* oder *das andere* zu sagen, sollen also in ihrem jeweiligen Gedankenraum verortet werden. Dadurch wird es nicht nur möglich, bestimmte Überlegungen, die man vorher nicht begreifen konnte, in ihrer Stringenz und Folgerichtigkeit nachzuvollziehen; man vermag auch eher zu erkennen, dass sich das Gesicht der Dinge tatsächlich ändert, werden sie einmal von der einen, einmal von der anderen Seite her angegangen. Die Beschreibungen, die einander zuvor widersprachen, bleiben dann nebeneinander bestehen: als gleichberechtigte Manifestationen unterschiedlicher Perspektiven. Als Philosophen interessiert uns nämlich vorrangig gar nicht, welcher Betrachtungsstandpunkt der angemessene oder richtige ist (denn die Bewertung misst sich ja erst wieder an einem Maß, diesmal an einem individuellen: so *will ich* die Dinge sehen), aber die im Übergehen von einem Blickpunkt zum nächsten sich verändernde Optik kann Aufschluss über das Funktionieren und die Möglichkeitsverhältnisse unserer Sprache geben. — Das ist vielleicht die Lehre dessen, der das Philosophieren als Tätigkeit begreift.

1 MSs statt *BGM*

Spricht man über Wittgensteins nach-traktarianische Philosophie der Mathematik, bezieht man sich gemeinhin auf die *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* (BGM), eine 1956 von den damaligen Nachlassverwaltern G. E. M. Anscombe, R. Rhees und G. H. von

Wright erstellte Kompilation von Aufzeichnungen, die nach Angaben der Herausgeber in der Zeit von September 1937 bis April 1944 entstanden sind. Tatsächlich lässt sich nicht nur zeigen, dass etliche der darin aufgenommenen Bemerkungen bis in das Jahr 1929 zurückreichen; vergleicht man die acht Teile und drei Anhänge der zweiten Auflage mit den entsprechenden Manuskripten (MS) oder Typoskripten (TS), die diesen Auswahlen zugrunde liegen, so stellt man außerdem fest, dass die Editoren nicht selten Bemerkungen umgestellt, ausgelassen oder abgekürzt haben.[*] Davon abgesehen, dass der Sinn einzelner Gedankenteile zuweilen gehörig verändert wird, wenn das davor oder danach Gesagte verschwindet, ergibt sich die Schwierigkeit, dass unter Umständen spezifische methodische Aspekte des Verfassers untergraben werden. Bei Wittgenstein ist es besonders der dialektische, den eigenen Standpunkt stets von neuem hinterfragende Zugang, der sein Philosophieren kennzeichnet: ein fortwährendes Hin- und Her zwischen dem, was *er* „sagen möchte", und dem, was dagegen eingewendet werden könnte. Werden nun (aus publikationstechnisch womöglich sogar nachvollziehbaren Gründen) einzelne Momente aus einer solchen Diskursbewegung herausgenommen, stellt das nicht nur eine Verkürzung dar, sondern man verliert, wie ich meine, weit mehr. Verloren geht die für Wittgenstein so charakteristische Methode, ein Gedankengebiet auf allen nur gangbaren Wegen zu durchkreuzen (und das heißt auch auf jenen, die man nur ungern geht), um so ein besseres Verständnis davon zu erlangen, wie unsere Sprache arbeitet.

Als ich den dritten Teil der *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* (BGM III) die ersten Male las, wunderte ich mich über die häufigen Wiederholungen und Neuanläufe, die man darin finden kann. Mir war nicht klar, wieso Wittgenstein für gewisse Thesen oder Einwände, die dem Leser schon zuvor völlig berechtigt erschienen (z. B. seine Forderung nach Übersichtlichkeit des Beweisbildes), erneut Argumente anführte – so als hätte in der Zwischenzeit jemand einen schlagenden Gegenbeleg erbracht. Einerseits fußten diese Skrupel

---

[*] In seinen *Anmerkungen zu Wittgensteins Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* (2008) führt Michael Nedo diese Problematik eindrucksvoll vor Augen, indem er einzelne Textstellen der Buchausgabe (v. a. aus Teil IV) mit der Originalquelle vergleicht. Auch wenn Nedos Kritik zweifelsfrei dadurch motiviert ist, die Vorteile der von ihm konzipierten *Wiener Ausgabe* (die dem Original so gut als möglich nahe zu kommen sucht) gegenüber der *Suhrkamp*-Edition herauszustellen, so ist sie nichtsdestoweniger berechtigt.

In ihren *Source Catalogues* (1993) haben Alois Pichler und Michael Biggs dargelegt, aus welchen Manuskripten des Nachlasses die einzelnen Bemerkungen der veröffentlichen Bücher stammen. Gerade mit Blick auf die Quellenlage von Teil III der *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* (Teil II in der Erstausgabe von 1956) ist auffallend, wie überaus selektiv die Herausgeber bei der Zusammenstellung zu Werke gingen. So finden sich oft seitenlange Auslassungen von Textstellen aus dem Original (z. B. S. 1–9, 33–42, 43–52, 67–71, 123–128, 153–158, 159–164, 203–208 aus MS 122; 164–172, 197–204, 209–222, 260–267 aus MS 117) während wieder andere Paragraphen in die Buchedition mitaufgenommen wurden (u. a. §§ 8, 36, 42; 61–70, 89–90), ohne auch jene Bemerkungen zu berücksichtigen, die im Original ihren Kontext bilden. Das birgt die Gefahr, dass der Leser einzelne Aussagen auf eine Weise deutet, die nichts mit der Rolle zu tun hat, die sie bei Wittgenstein in Wirklichkeit spielen.

Meine eigene Konsequenz, aus den schon gemachten und den noch folgenden Erörterungen über das Verhältnis zwischen den in Buchform veröffentlichten Bemerkungen und dem Originaltext Wittgensteins, wird darin bestehen, dass ich mich im Rahmen dieser Arbeit hauptsächlich auf die Manuskripte beziehe. Möglich gemacht hat das die *Bergen Electronic Edition* (BEE, 2003), die alle philosophischen Aufzeichnungen Wittgensteins in verschiedentlich aufbereiteten Transkriptionen zur Verfügung stellt. Ich arbeite bevorzugt mit der „normalisierten" Version, obgleich ich in Fällen, bei denen es mir sinnvoll erscheint, auch die „diplomatische" Version (in der sämtliche Varianten des Wittgensteinschen Textes wiedergegeben werden) oder überhaupt die Faksimiles der Originale konsultiere.

gewiss auf einem Vorurteil, wie Philosophie betrieben werden müsse (klare Thesen, ausgewiesene Annahmen, streng nachvollziehbare Argumentationsketten etc.); andererseits konnte ich mich aber auch überzeugen, dass dies mit der eben angesprochenen Editionsproblematik zusammenhing. Speziell Teil III der *BGM* stellt nämlich eine von den Herausgebern stark redigierte Auswahl dar. Weit mehr als die Hälfte des ursprünglichen Textes, den Wittgenstein von Oktober 1939 bis März 1940 in die Manuskripte 122 und 117 (Teil 2) eingetragen hatte, wurde weggelassen. Und es ist in die Augen fallend, dass es sich dabei häufig gerade um solche Passagen handelt, in denen er bestimmte zuvor etablierte Thesen, Einsprüche und Überlegungen wieder revidiert oder als zu dogmatisch ausweist. Die nachfolgenden Selbstbezichtigungen sind nur eine kleine Auswahl der von den Herausgebern systematisch ausgesparten Bemerkungen, bei denen Wittgenstein seinen eigenen Standpunkt problematisiert.

> Und doch erscheint mir auch in dem, was ich sage, etwas falsches. (MS 122, 15v)
>
> (In dieser ganzen Untersuchung fühle ich mich nicht wohl: mir scheint ich bin dogmatisch.) (27r)
>
> Es wird mir schwer, hier gerecht zu sein. Es ist in der Philosophie schwer, nicht ungerecht zu sein, wenn man den *gerechten* Ausweg nicht sieht. (28r)
>
> Versuche nicht, recht zu behalten! Es ist fruchtbarer, zu trachten, das eigne Unrecht zu beweisen. Ich bin jetzt eigentlich sicher, ich habe mich geirrt. Aber de[n] Platz meines Irrtums und seine Reichweite weiß ich nicht. (39v)
>
> Immer bin ich hier zum Dogmatismus geneigt! (71v)
>
> Mir scheint es: ich will *zu viel* beweisen, und darum stocke ich. (80r)
>
> (Ich habe das bestimmte Gefühl, daß ich sehr unvorsichtig bin. Also irgendwie im seichten Wasser des Dogmatismus herumschwimme.) (84r)
>
> Ich schlage mich auf diesen Seiten mit einem bestimmten Teufel herum; und der Kampf ist noch unentschieden. (111v)
>
> Verbirg dir nie: daß du in Schwierigkeiten bist. (118v)

Man könnte einwenden, dass dergleichen selbstkritische Äußerungen nicht von wirklich philosophischem Interesse sind, da es ja – wie ich selbst oben sagte – vorrangig gar nicht darum geht, eine Position gegen die andere auszuspielen, sondern die jeweiligen Argumente nebeneinander auszubreiten, die einen zur einen oder zur anderen tendieren lassen. Die so vage gehaltenen, relativierenden Aussagen Wittgensteins über das, was er „sagen möchte", hätten dann höchstens biographische oder philosophiehistorische Relevanz, und die Herausgeber der *BGM* wären nicht genug dafür zu loben, dass sie dergleichen Bemerkungen, die den Leser höchstens in die Irre führen, ausgeschlossen haben. – Ich meine aber, dass diese philosophisch eher gehaltlosen Selbstreflexionen dennoch eine wichtige Rolle einnehmen; sofern einem daran gelegen ist, die tatsächlichen Entwicklungen und Umwendungen seiner Gedanken nachzuverfolgen. Wie der Schmied zuweilen leere Schläge macht, um im Takt zu bleiben, führen wir auch im Denken öfters Bewegungen durch, die nur dazu dienen, den Rhythmus nicht zu verlieren. (Vgl. BEE, MS 140, 23.) Das sind stilistische Momente, die für den tatsächlichen Inhalt des Gesagten nicht unbedingt bestimmend zu sein scheinen, die aber doch dafür sorgen, dass der Gedankenfluss nicht abbricht oder zu stocken beginnt. Die gegen sich selbst gewendeten Bezichtigungen, dogmatisch zu verfahren oder unvorsichtig zu sein, können nur in den seltensten Fällen auf konkrete, zuvor getätigte Aussagen bezogen werden. Daher begreife ich sie eher als methodische Phrasen, die für sich genommen zwar weitestgehend gehaltlos sind, die aber dennoch nicht leerlaufen, da sie gewissermaßen als Schwungscheiben fungieren, die einen Perspektivenwechsel ermöglichen. Jedenfalls fährt er nach Bemerkungen wie den eben zitierten häufig mit Betrachtungen fort, die den vorhergehenden gerade entgegenstehen. Darüber hinaus ist nicht zu verkennen, dass diese Aussagen, wenn ihnen auch kein genuin philosophischer Inhalt zukommt, dennoch eine gewisse Attitüde ausdrücken. Werden sie konsequent ausgespart, verliert man daher nicht nur Wittgensteins Emphase für ein dogmenfreies Philosophieren, sondern es eröffnet sich auch die Gefahr, den unterschiedlichen Status aufeinanderfolgender Bemerkungen zu verkennen, da das Mittelglied fehlt, das den Bruch zwischen ihnen markiert.

Es sind aber nicht nur diese kritischen Selbstreflexionen, die man in der Buchedition vergebens sucht. Auch ein Menge inhaltlich relevanten Materials, das mir für ein angemessenes Verständnis des Abgedruckten unentbehrlichen zu sein scheint, ist den undurchsichtigen (weil nirgendwo verlautbarten) Editionskriterien der Herausgeber zum Opfer gefallen. Wenn ich mich in meiner Arbeit vorrangig auf die Originalquellen beziehe, so geschieht das daher vor allem aus zwei Gründen. Einerseits bin ich überzeugt, dass viele Bemerkungen, die in den *BGM* nicht abgedruckt worden sind, für sich genommen schon großartige Überlegungen darstellen. Zum anderen ist es mir aber ganz einfach darum zu tun, die wirklichen Gedankenbewegungen Wittgensteins nachzuzeichnen; und zu diesem Zweck sind mir sämtliche seiner Zwischenschritte wichtig, auch wenn manche davon belanglos oder irrelevant zu sein scheinen, betrachtet man sie nur für sich selbst. Letztlich ist der Anspruch nicht so sehr, einzelne Bemerkungen nachzuliefern, die dem Leser der *BGM* entgehen mussten. Eher will ich zeigen, dass sich Wittgensteins Philosophieren als ungemein diffizil, bewegungsreich, und in letzter Konsequenz auch immer als unabgeschlossen erweist. Es gibt bei ihm nicht *die* Philosophie der Mathematik, sondern nur partikuläre philosophische Untersuchungen, die Begriffe zum Gegenstand haben, die *in* und im Zusammenhang *mit* der Mathematik im Gebrauch sind. Ich behaupte keineswegs, dass das zu sehen von der posthumen Edition seiner *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* verunmöglicht wird, glaube aber doch, dass der systematische Ausschluss gegenläufiger, selbstkritischer Gedankenströme eine gewisse Tendenz zur Glättung und Einebnung von Differenzen offenbart, die nicht im Sinne Wittgensteins ist.

2 Zur Sekundärliteratur

Ich möchte immer gerade dort die Brüche in Wittgensteins Überlegungen markieren, wo sie eine vorrangig auf Kohärenz bedachte Interpretation nicht sehen will. Dabei sage ich allerdings nichts, was sich nicht bei ihm selbst auch finden ließe. Mein eigener Beitrag besteht also nur darin, diese gegenläufigen Bewegungen in seinem Denken besonders stark zu betonen. Diese Herangehensweise, die es sich zu einem ihrer obersten Prinzipien macht, möglichst nahe am Originaltext zu bleiben, führt zu gewissen Konsequenzen. Eine ist zunächst, dass etwaige Brüche, die sich in den Aufzeichnungen finden, gewahrt bleiben. Ich werde zwar an manchen Stellen darzulegen versuchen, was mögliche Gründe dafür sind, dass die Überlegungen nun in eine andere Richtung gehen. Die einebnenden, und meist etwas spekulativen

Glättungen sollen aber gerade nicht darüber hinwegtäuschen, dass derartige Zäsuren ganz einfach bestehen. Es kann sich natürlich nicht darum handeln, die Bemerkungen eins zu eins wiederzugeben. Wenn diese Arbeit einen Zweck hat, so liegt er im Gegenteil gerade darin, bestimmte Gedankenbögen in den Fokus zu rücken, die man erst sieht, wenn man sich ein klein wenig vom Text entfernt. Zugleich möchte ich aber doch ein Spezifikum von Wittgensteins Philosophieren bewahren, das verloren zu gehen droht, wenn an die Stelle seiner „bemerkungshaften" Methode – bei der dieselben, oder ähnliche Gegenstände aus den verschiedensten Blickpunkten betrachtet werden – die gegenläufige Methodik tritt, bei der eine kohärente, gleichbleibende Sichtweise eingefordert wird und die eher vereinheitlicht anstatt die Unterschiede zu zeigen. Das heißt, ich möchte seine Bemerkungen nicht reproduzieren, wohl aber einem Teil der durch sie ermöglichten Vielfalt gerecht werden. Daher das Bekenntnis zur Bruchstelle, zum Sprung in der Betrachtung – obwohl es gleichzeitig schon auch darum geht, auf großräumigere Bewegungen hinzuweisen, die den Gehalt einzelner Aussagen modifizieren können und unter Umständen das Motiv für den Übergang zwischen ihnen zu rekonstruieren erlauben.

Nun ist es eine simple Tatsache, dass sich die Literatur zu Wittgensteins Kritik am logizistischen Begründungsprojekt in der Regel auf jene ausgewählten Bemerkungen stützt, wie sie seit 1956 in Form der *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* vorliegen. Meine Herangehensweise hat daher die weitere Konsequenz, dass ich mich über weite Strecken mit einem anderen Text beschäftige als jenem, auf den sich das Gros der bisherigen Sekundärliteratur bezieht. Eine Ausnahme stellen hierbei sicherlich die Schriften von Felix Mühlhölzer dar, der in etlichen seiner Publikationen auf die Originalmanuskripte zurückzugreift, um so die Rolle derjenigen Bemerkungen zu elaborieren, die zwar den Weg in die Buchedition gefunden haben, deren genauer Sinn aber verzerrt oder unklar bleibt, weil der jeweilige Kontext ihres Auftauchens ausgespart wurde. In seinem, für das Verständnis der Kritik Wittgensteins an Russell/Whitehead so ungemein wichtigen, Kommentarband zu Teil III der *BGM* (*Braucht die Mathematik eine Grundlegung?*, 2010) bemüht sich Mühlhölzer ganz besonders, all jene Bemerkungen aus dem Nachlass nachzuliefern, die es braucht, um den Status und den Sinn der einzelnen in Buchform publizierten Bemerkungen besser verstehen zu können. Was die Interpretation solcher Passagen anbelangt, die auch in den *BGM* abgedruckt worden sind, halte ich Mühlhölzers Buch daher für absolut vorbildlich; und in strittigen Fällen dient es mir immer wieder als aufschlussreiches Nachschlagewerk. Obwohl er im Vorwort selbst betont, aufgrund der Editionsproblematik zuweilen sogar erwogen zu haben, „BGM einfach nur noch als Relikt der Vergangenheit zu behandeln und gleich die Manuskriptbände selbst zu kommentieren" (Mühlhölzer 2010, S. x), bildet jedoch auch für ihn der Text der Buchausgabe zuletzt den eigentlichen Referenzpunkt des Kommentars. Die plausible Begründung für ein solches Vorgehen lautet, „daß BGM in der vorliegenden Form über viele Jahre der maßgebliche Text gewesen ist, aus dem man das Bild der Philosophie der Mathematik des späten W. gewonnen hat, und daß sich an dieser herausgehobenen Funktion von BGM wohl auch nichts ändern wird, solange der Nachlaß nicht in einer textkritischen Druckfassung vorliegt." (ebd.) Da das Anliegen meiner Diplomarbeit ein anderes ist (ich nämlich keinen Kommentar der *BGM*, sondern eine Aufarbeitung der zugrundeliegenden MSs beabsichtige), erlaube ich mir allerdings diese interpretationsgeschichtlichen Zwänge zu ignorieren. Damit wird ersichtlich, inwiefern mir Mühlhölzers Buch als Interpretationshilfe für einzelne Bemerkungen dienen kann, obgleich es nicht den Leitfaden an die Hand gibt, an dem sich meine Arbeit ausrichten könnte.

Weil es mir vorrangig auf die Wandlungen, die das Übergehen von einem Standpunkt zum nächsten begleiten, und weniger darauf ankommt, die jeweils erreichten Endpunkte gegeneinander auszuspielen, wird auch erklärbar, weshalb ich, wo immer es ging, darauf verzichtet habe, Sekundärliteratur heranzuziehen, in der nicht zumindest versucht wurde, den in den Manuskripten verfolgten Gedankengängen nachzugehen. Zudem verspreche ich mir von einer weitestgehend selbstständigen Interpretation ganz einfach eine leichtere Fasslichkeit der Arbeit. Die je anderen Zugänge zu dem in Frage stehenden Problem (bzw. zu dem zu interpretierenden Textstück) müssten schließlich, will man sie angemessen erfassen, ihrerseits erörtert werden: wozu mir schlicht der Platz fehlt. Andererseits muss klar gesagt werden, dass ich nicht unvoreingenommen an Wittgensteins Manuskripte herangegangen bin. Da es mir jedoch nicht möglich ist, die genauen Einflusslinien zu beschreiben, möchte ich in der Folge ganz einfach jene Autoren, Bücher und Artikel anführen, von denen ich glaube, entscheidend profitiert zu haben.

Zuallererst ist hier V. Klenks Buch *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics* (1976) zu nennen, in dessen erstem Hauptteil sie Wittgenstein als Kritiker unterschiedlichster „Ismen“ (Platonismus, Intuitionismus, Formalismus, Empirismus, Konventionalismus) vorstellt, und worin sie den dispositiven, *re*aktiven Charakter seines Philosophierens vielleicht so gut wie kaum jemand anders zum Ausdruck bringt. Eine weitere, von mir oft konsultierte Einführung ist E. Ramharters und A. Weibergs Buch *Die Härte des Logischen Muss* (2006), wo sämtliche in den *BGM* verhandelte Themen kumulativ und überschaubar aufbereitet werden. Eine Einleitung, die besonders das Verhältnis der späteren Überlegungen der *BGM* zum Frühwerk, der *Logisch-philosophischen Abhandlung* (1922), ins Auge nimmt, ist V. Rodychs längerer Text *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics* (2011). Auf Übereinstimmungen zwischen Früh- und Spätwerk hat Rodych bereits in dem früher erschienen Paper *Wittgenstein's Critique of Set Theory* (2000) hingewiesen, das neben F. Mühlhölzers Aufsatz *„A mathematical proof must be surveyable“ What Wittgenstein meant by this and what it implies* (2005) vielleicht einen der wichtigsten Texte darstellt, was die konkrete Kritik an Russell/Whitehead betrifft. B. Strouds Artikel *Wittgenstein and Logical Necessity* (1965) sowie die Kapitel über logische Notwendigkeit in D. Pears' Buch *Paradox and Platitude in Wittgenstein's Philosophy* (2006, S. 65–95) als auch in R. J. Fogelins Büchern *Wittgenstein* (1976, S. 190–205) und *Taking Wittgenstein at His Word* (2009, S. 83–115) hatten sicherlich nachhaltigen Einfluss darauf, wie ich Wittgensteins Charakterisierung mathematischer Sätzen begreife. Wie ihm zufolge das Verhältnis zwischen reiner Mathematik und ihren möglichen Anwendungen zu denken ist, glaube ich allerdings erst seit F. Mühlhölzers *On Live and Dead Signs in Mathematics* (2012) halbwegs zu verstehen. Ein Text, der speziell Wittgensteins geometrisches Beweisverständnis zum Gegenstand hat, und in dem spannende Bezüge zu analogen Auffassungen bei Blaise Pascal, René Descartes und Immanuel Kant hergestellt werden, ist R. Heinrichs Essay *Bedeutungslose Offenbarung: Philosophiegeschichtliche Anmerkungen zu Wittgensteins Gödel-Notizen* (2008). A. Weibergs Aufsatz *Rechnung versus Experiment* (2008) hat mir besonders geholfen, die Verwandtschaften und Unterschiede klarer zu sehen, auf die uns Wittgenstein mit seiner Gegenüberstellung von Beweis und Experiment aufmerksam machen will. In diesem Zusammenhang konsultierte ich zudem A. Ambrose' Paper *Wittgenstein on Mathematical Proof* (1982), C. Wrights Essay gleichen Namens (1991), A. Nordmanns *Proof as Experiment in Wittgenstein* (2010), sowie das achte Kapitel in M. Marions Buch *Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics* (1998, S. 213–236).

Aus der Lektüre all dieser Autoren konnte ich starken Profit ziehen, obwohl – oder besser: gerade weil – ich nicht immer einer Meinung mit ihnen bin. Meine skeptische Haltung gegenüber einzelner Texte (v. a. gegenüber den vier zuletzt genannten) rührt vor allem daher, dass mir Wittgenstein darin als zu revisionistisch erscheint, indem er als jemand dargestellt wird, der die Tätigkeiten des Mathematikers beeinsprucht und die Mathematik revidieren möchte. Dass aber die Philosophie den Sprachgebrauch, die tatsächlich gepflogene mathematische Praxis „in keiner Weise" antasten *darf* (weil sie sie „auch nicht begründen" *kann*) (PU, § 124), ist meines Erachtens ein Grundsatz, auf dem all sein Philosophieren fußt, und den er – trotz der während seines Philosophierens immer wiederkehrenden Neigung, dies oder jenes gegen unsere alltägliche Sprechweisen einzuwenden – niemals umstößt. Die Ursache dafür ist, dass wir „schon die volle Sprache (nicht etwa eine vorbereitende, vorläufige) anwenden" müssen, wollten wir die Sprache erklären oder hinterfragen. (PU, § 120)

Kein Revisionist im angedeuteten Sinne zu sein, ist aber nicht gleichbedeutend damit, dass Wittgenstein ein reaktionärer Denker wäre, der alle Gepflogenheiten der Zeit gutheißt. Er ist jedoch der Ansicht, dass eine Änderung der Praktiken auch praktisch vollzogen werden muss, und nicht, indem man theoretische Spekulationen anstellt. Was die Philosophie leisten kann, das ist, den „Grund der Sprache" (PU, § 118) so weit freizulegen, dass man die Rolle einzelner Sprachpraktiken klar vor Augen hat – um dann sein praktisches Tun und Handeln an dieser Einsicht auszurichten. Wenn also Wittgenstein etwas einer Revision unterzieht, so ist es unser *Interesse* für gewisse sprachliche Erscheinungen, nicht aber diese Praktiken selbst. Auf beeindruckende Weise zeigt sich dies in P. Stekeler-Weithofers Essay *Philosophie der Mathematik nach Wittgenstein* (2003), in dem dieser als Gesellschafts- und Kulturkritiker erscheint, der die Rollen eruieren möchte, welche die Naturwissenschaften und die Mathematik in unserem Leben spielen: um so den metaphysischen Glitzer zu zerstäuben, mit dem der Szientismus unserer Zeit die Wissenschaften gerne umgibt. Das scheint mir eine angemessene Darstellung dessen zu sein, was Wittgenstein (u. a.) tut. Sein Philosophieren *kann* die Einstellung seines Lesers zu gewissen gesellschaftlichen Phänomenen verändern; was sie *nicht* kann, das ist, Sprachgebräuche als falsch auszuweisen – und daher *darf* sie es auch nicht. Dass die immer schon praktizierte Sprache des Alltags die letzte Instanz ist, deren er sich bedient, um Aussagen auf ihren Gehalt hin zu überprüfen, bedeutet eben nicht, dass alles beim alten bleiben muss; es heißt nur, dass die Veränderungen handelnd, nicht durch leerlaufendes Theoretisieren zu vollziehen sind. Und *eine* Art des Handelns besteht darin, gewissen Praktiken schlicht keine Aufmerksamkeit mehr zu schenken, nachdem man aufgrund einer philosophischen Untersuchung zu der Einsicht gelangte, dass es sich dabei um leere Gesten handelt.

Ich begreife Wittgensteins Philosophieren als eine wesentlich dispositionelle Angelegenheit. Damit will ich sagen, dass seine Bemerkungen beinahe immer in Relation zu anderen Aussagen stehen, die er entweder selber zuvor machte oder von anderen Philosophen vertreten worden sind. Man denke etwa daran, wie die *Philosophischen Untersuchungen* von ihm eröffnet werden: Er stellt ein langes Augustinus-Zitat an den Anfang und problematisiert dann das dabei zum Ausdruck kommende Verständnis vom Funktionieren der menschlichen Sprache. (PU, § 1 ff.) Im weiteren Verlauf werden die Bezüge zu Augustinus zwar seltener und die Bemerkungen beziehen sich vermehrt auf Dinge, die er selbst im Zuge seiner Kritik am referenztheoretischen Bild der Sprache geäußert hat. Aber stets bleibt das dialektische Moment spürbar, welches erfordert, neben den jeweils in Frage stehenden Bemerkungen auch jene zu konsultieren, auf die sie sich abgrenzend, relativierend oder bestärkend beziehen. Gerade am Fall der *PU* wird aber ebenso deutlich, dass sich der Gegenstand der Kritik durch diese selbst erst in der jeweiligen Weise manifestiert: die Art, in der Wittgenstein die von Augustinus gegebene Beschreibung des Spracherwerbes charakterisiert, scheint zwar nicht allzu weit hergeholt; wirklich ausgesprochen hat Augustinus aber z. B. nicht, dass jeder Satz aus Namen zusammengesetzt sei, die Gegenstände benennen. Das heißt, einerseits stößt sich Wittgenstein in seinem Philosophieren von gegebenen Positionen ab, um sie zu dekonstruieren, andererseits aber konstituiert er sie durch diese Abstoßbewegung allererst selbst. *Was* kritisiert wird, bleibt zuletzt immer abhängig von der tatsächlich vorgebrachten Kritik daran.

Wenn ich zu Beginn der vorliegenden Arbeit dennoch eine kohärente und in sich geschlossene (wenngleich detailarme) Darstellung des logizistischen Standpunktes zu geben versuche, so geschieht das vor allem deshalb, damit sich der Leser gleich vorweg ein besseres Bild jener allgemeinen Auffassung machen kann, aus der Wittgenstein dann immer wieder einzelne Aspekte herausgreift, um sie genauer zu betrachten, zu problematisieren, bzw. hinsichtlich ihres spezifischen Geltungsbereiches zu verorten. Von daher rührt es, dass TEIL II – in dem ich die Logizisten zu Wort kommen lasse – eine gewisse Sonderstellung einnimmt: hier findet man klare Thesen und eng umrissene Theoriefelder, während in den Abschnitten III bis VII – in denen Wittgensteins kritische Auseinandersetzungen mit dieser Position dargestellt werden – vor allem das für sein Philosophieren so charakteristische, dialektische und probeweise, Überlegen in den Vordergrund tritt. Um dem Leser einen ungefähren Eindruck des Bevorstehenden zu geben, beschließe ich die Einleitung mit einem Überblick über die einzelnen Kapitel, bzw. einem Abriss der darin verhandelten Themen oder Probleme.

3 Gliederung

Die Arbeit gliedert sich in sieben Teile mit ihren jeweiligen Unterkapiteln. Alle sieben Teile beginnen mit einer kurzen Einleitung oder Übersicht, in denen ich den Leser an jene Gedanken heranführe, welche in den darauf folgenden Unterkapiteln genauer aufbereitet werden.

In TEIL II werden unter Heranziehung der Schriften von Frege, Russell, Whitehead, Ramsey und Carnap die Hauptgesichtspunkte der logizistischen Position umrissen. Besonderes Augenmerk liegt auf den *Motiven* für die von diesen Autoren intendierte Grundlegung der Mathematik. Es soll also herausgearbeitet werden, was einen überhaupt veranlasst, die Arithmetik auf formale Logik zurückführen zu wollen. Da Frege vielleicht am eindringlichsten formuliert, wieso gerade die Logik das Fundament der Mathematik darstellen soll, werde ich mich zu Beginn besonders auf ihn beziehen. Die Anwendung der Mathematik auf die Tatsachen der täglichen Erfahrung kann demnach nur sichergestellt werden, wenn ihren Sätzen ein bestimmter Sinn zukommt; wir also wissen, *wovon* sie handeln. Die Logik könne, so Frege, genau das leisten. (Kap.1) Im Rahmen der logischen Analyse werden die einzelnen Bestandteile des mathematischen Satzes nämlich hinsichtlich ihrer Wahrheitsmöglichkeiten bestimmt, wodurch zugleich festgelegt wird, in welchen Zusammenhängen bzw. auf welche Gegenstände der gesamte Satzkomplex angewendet werden kann. Ein wesentliches Motiv des logizistischen Grundlegungsprojekts ist es also, für die Mathematik – die andernfalls ein bloß willkürliches Spiel mit Zeichen bliebe – ein Fundament bereitzustellen, das ihre unzweideutige Anwendbarkeit garantiert. (Kap. 2) (Ich hebe diesen Aspekt vor allen Dingen deshalb hervor, um später zeigen zu können, dass sich ein entscheidendes Motiv für die logizistische Grundlegung der Mathematik ganz einfach in Luft auflöst, sobald man die Rolle mathematischer Sätze, d. h. ihre tatsächliche Funktion in der Praxis der Sprache, genauer unter die Lupe nimmt. Das Problem, wie ihre Anwendbarkeit zu sichern sei, scheint sich für den nicht mehr zu stellen, der die Mathematik als Grammatik ihrer Zeichen begreift.)

Zur Vorstellung der konkreten Argumente, die zur Plausibilisierung der logizistischen These dienen, beziehe ich mich hauptsächlich auf Russell. Das Primat der intensionalen Begriffsdefinition (Kap. 3), die Erklärung der Anzahlengleichheit zweier Begriffe durch die Methode eindeutiger Zuordnung ihrer Elemente (Kap. 4), die Identifizierung der Addition mit dem logischen Disjunkt (Kap. 6): das alles sind von Russell aufbereitete Themen und Thesen, die Wittgenstein in den folgenden Kapiteln beeinspruchen, zurückweisen, oder in ihrer Reichweite spezifizieren wird. Die größte Aufmerksamkeit räumt er jedoch derjenigen These ein, die von sämtlichen der hier erwähnten Logizisten gleichermaßen geteilt wird: die Erklärung von innerhalb eines Kalküls explizierten Definitionen als bloße Abkürzungen der Schreibweise. Bezugnehmend auf die in den *Principia Mathematica* gebrauchte Notation werde ich diese Auffassung daher relativ ausführlich besprechen. (Kap. 5) Der erste Hauptteil schließt mit Betrachtungen, die Wittgensteins Deutung des in den *PM* entworfenen Kalküls als eines Rechnens mit Strichen rechtfertigen sollen. (Kap. 7)

TEIL III fungiert als eine Art Bindeglied zwischen der Darstellung des logizistischen Standpunkts und den Kritikbewegungen Wittgensteins, wie ich sie ab TEIL IV kontinuierlich nachzeichnen werde. Unter Bezugnahme auf die Anfangspassage von Manuskript 122 führe ich erste Einsprüche gegen die Privilegierung der intensionalen Definition an, ausgehend wovon dann die Identifikation von Addition und Disjunktion problematisiert wird. (Kap. 1) Die dabei vorgebrachten Argumente werden zwar von Wittgenstein nicht weiterverfolgt (bzw. es finden sich Anzeichen dafür, dass er sie aus Gründen der Dogmatik bewusst fallen lässt), ich gebe sie aber v. a. deshalb wieder, weil es mir auf diesem Wege möglich wird, den Perspektivenwechsel zu verdeutlichen, der mit seiner Kritik einhergeht. Statt mit der Erklärung des *einen Wesens* der Addition aufwarten zu wollen, werden wir aufgefordert, die *unterschiedlichen Techniken* des Addierens zu betrachten. (Kap. 2) Die Rolle des mathematischen Satzes in der Praxis der Sprache soll eingesehen werden, um von der Vorstellung loszukommen, die Mathematik sei eine Art Quasi-Physik immaterieller Dinge. In Kontrast zu Bemerkungen von

Frege, Russell, Hardy und Mill (Kap. 3) ziehe ich diese anfänglichen Überlegungen heran, um das Bild zu umreißen, das sich Wittgenstein von der Mathematik macht. Im Gegensatz zu den späteren Teilen dieser Arbeit, wo es eines meiner größten Anliegen sein wird, möglichst nah am Text der Manuskripte zu bleiben, erlaube ich mir hier, zuweilen auch auf andere Stellen zu verweisen. (*Philosophische Untersuchungen*, *Lectures on the Foundations of Mathematics*, *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* und Passagen aus dem Nachlass, d. h. der *Bergen Electronic Edition*.)

Die Betrachtung der Mathematik als eines Gemischs von Beweistechniken, die Auffassung mathematischer Sätze als Paradigmen der Darstellungsweise, die Ablehnung referentialistischer Deutungen in der Mathematik, die Charakteristik des Mathematikers als eines Erfinders – all das wird in diesem dritten Teil (v. a. Kap. 4) zumindest angedeutet und mit den Gedanken zum Regelfolgen in Beziehung gesetzt. Ich möchte zeigen, dass die vom Logizisten als so drückend empfundene Frage, wie die Anwendbarkeit der Arithmetik (bei gleichzeitiger Wahrung ihrer Notwendigkeit) gesichert werden könne, auf einem Verständnis mathematischer Sätze fußt, das diese nicht als (präskriptive) Paradigmen korrekten Vorgehens, sondern als (deskriptive) Aussagen über mathematische Entitäten fasst. (Kap. 3) Begreift man arithmetische Sätze hingegen als Regeln, die unsere Weisen des Beschreibens, Schließens und Urteilens lenken, so verliert die vom Logizisten erhobene Frage gehörig an Gewicht. Die Anwendung des mathematischen Satzes ist dann gerade das, weshalb wir ihn annehmen: wir sehen in ihm die Regel, die es zu befolgen gilt, wollen wir beim Darstellen von Sachlagen nicht mit bereits bestehenden grammatischen Normen in Konflikt geraten.

Einerseits stellen wir diese allgemeinen, von den Manuskripten wegführenden Betrachtungen an, um die groben Unterschiede zur logizistischen Position besser in den Blick zu bekommen, andererseits aber auch, um Wittgensteins starkes Interesse für Beweisstrukturen zu erklären. Wenn nämlich der mathematische Satz seinen Sinn nicht daher ziehen kann, dass er mit einer wie immer gearteten Realität übereinstimmt, dann liegt es nahe jene Kontexte zu betrachten, in denen er tatsächlich auftaucht. Und da dies v. a. im Rahmen von Beweisen geschieht, wird nachvollziehbar, wieso er sich gerade ihnen zuwendet. (Kap. 5)

TEIL IV. Die Typisierung der Mathematik als normative, unser Beschreiben, Deuten und Urteilen, Schließen und Vorgehen regulierende Wissenschaft, provoziert die Frage, woher mathematische Sätze ihren Sinn ziehen. Wenn der Mathematiker kein Entdecker neuer Gebiete im Reich der gottgegebenen Zahlen sein soll, sondern ein Erfinder von Begriffsbahnen, in welchen sich bewegend man funktionierende Darstellungen der Welt vornimmt, dann kann der Sinn mathematischer Sätze (weshalb wir sie verstehen: wissen, was mit ihnen anzufangen ist) auch in keinem *Dahinter* liegen, auf das sie verweisen. Das führt Wittgenstein zu der bekannten These, der Sinn eines mathematischen Satzes sei aus seinem Beweis zu entnehmen, d. h. daraus, wie er erhalten wird. Da aber dazu keine Untersuchung notwendig werden darf (weil damit erst wieder ein Deutungsstandard vorausgesetzt bliebe), geht diese These mit der ebenfalls oft zitierten Forderung einher, ein Beweis müsse übersichtlich sein. Den Anspruch und die Reichweite dieser Forderung, die sich daran anschließenden Überlegungen zur Identität und Reproduzierbarkeit von Beweisen sowie die Kritik an der logizistischen Erklärung von Definitionen versuche ich in den Kapiteln 1 und 2 darzulegen. Es folgt eine eingehende Diskussion der Frage, inwiefern man durchs Zählen von Variablen die Anzahl eines Begriffs bestimmen könne, ohne auf Techniken zurückzugreifen, die bereits ein ganzes Zahlsystem voraussetzen. (Kap. 3) Anhand des Ausdrucks vom „einprägsamen Bild" wird schließlich auf die Schwierigkeit aufmerksam gemacht, dass Wittgenstein im Zuge seiner Kritik zuweilen Begriffe verwendet, die sich (schon dem bloßen Versuch) einer genaueren Explizierung entziehen (Kap. 4); was zum Anlass genommen wird, seine permanenten Selbstvorwürfe, dogmatisch zu verfahren, erneut aufzugreifen und von dieser Seite her zu betrachten. (Kap. 6)

Die vielleicht eindringlichste Konfrontation der zuvor skizzierten Standpunkte (Erfinder vs. Entdecker, Regelgenese vs. Regelbefolgung, Schaffen neuer Beschreibungsstandards vs. Beschreibung mathematischer Tatsachen) findet sich in Kapitel 5 des vierten Abschnitts, wo die einander konträr gegenüberstehenden Erklärungen der mathematischen Definition (Begriffskonstitution vs. Darstellungsabkürzung) in der Frage münden, inwiefern unser Zählen etwas ist, das uns von der Empirie, von den Tatsachen der täglichen Erfahrung aufgezwungen wurde. Spätestens an dieser Stelle kann es als gewagtes Unternehmen erscheinen, Wittgensteins synthetische Deutung mathematischer Kalküle mitzugehen. Letztlich sagt er hier nämlich, dass jede neue Rechnung im Dezimalkalkül als eine Erweiterung bzw. Adaption betrachtet werden könne, die nicht selbst wieder auf etwas gegründet sei, als allein die im Zuge unserer Ausbildung (Abrichtung) erworbene Neigung, auf Zeichen übereinstimmend *so* und *so* zu reagieren.

TEIL V folgt Wittgenstein in eine andere gedankliche Richtung, die zunächst von der Frage nach dem Status von Definitionen wegführt. Es wird nun die Rede vom Beweis als Vorbild der Darstellungsweise einer Prüfung unterzogen. Die Forderung nach Überblickbarkeit des Beweises gründet sich darin, dass der Beweis nur dann als Richtschnur zur Beurteilung einer Lage dienen kann, wenn er uns anschaulich vorliegt: wir also bedingungslos bereit sind, die ihn ihm zum Ausdruck kommende Bewegung zum Paradigma dessen zu erheben, wie wir vorgehen *sollen*. Dies Verhältnis zwischen dem synthetischen Vorgang im Kalkül und unserem Gebrauch desselben als eines sinnstiftenden Vorbildes sprachlichen Ausdrucks wird eingehender untersucht. (Kap. 1) Es gilt das Moment des Umschlagens vom zeitlichen Beweisvorgang hin zum paradigmatischen Gebrauch des bewiesenen Satzes zu verstehen und zu bestimmen. Die Aufforderung, den Beweis als *Bild* zu betrachten, ist Wittgensteins Versuch, die beiden ambivalenten Phänomene der Begriffskonstitution (Verwendung eines *synthetischen* Konstruktionsvorgangs als einer *grammatischen* Regel) miteinander in Einklang zu bringen. Die hier bereits wiederholt anklingende Abhebung des Beweises vom wissenschaftlichen Experiment (ein Unterschied, der in TEIL VII, Kap. 3 eingehender behandelt wird) ist wieder dadurch motiviert, den eigentümlichen Status mathematischer Sätze – deren Rolle eine fundamental andere ist als diejenige empirischer Aussagesätze (oder sonst funktionierender Darstellungen) – ins rechte Licht zu rücken. (Kap. 2)

Allerdings sieht sich Wittgenstein mit dem Problem konfrontiert, dass die von ihm unternommene Identifizierung des bewiesenen Satzes mit dem Beweis, an dessen Ende er steht, der tatsächlichen Praxis insofern widerspricht, als mathematische Sätze meistens ohne das Anhängsel ihrer Beweise in Verwendung sind. Und eine ganz ähnliche Schwierigkeit ergibt sich, wenn man die Charakteristik des Beweises als Paradigma richtigen Begriffsgebrauchs auf logische Beweisketten anwenden möchte. Auch hier erweist es sich als eine keineswegs leichte Aufgabe, seine Überlegungen mit den tatsächlich gepflogenen Praktiken in Übereinstimmung zu bringen. Ich denke, es ist daher kein Zufall, wenn er in der Folge sein Verständnis des Beweises auch für logische Beweise erproben möchte und sich die Frage stellt, wofür denn der logische Beweis einer Formel wie $\vdash p \supset q . p . \supset . q$ das *Vorbild* abgeben soll. (Kap. 3) Die philosophische Kritik am Logizisten darf schließlich nicht dahin führen, dass man vorschreibt, was noch als Mathematik zu gelten hat und was nicht mehr zu ihr zählt. Was über Beweise im *Allgemeinen* gesagt wird, muss entsprechend auch auf logische Beweise im *Speziellen* passen. Diese bilden zwar nicht das Fundament, wohl aber einen berechtigten *Teil* der Mathematik. Obwohl er zunächst Argumente liefert, die seine Beweischarakteristik auch für logische Beweisformen fruchtbar machen könnten, gelangt Wittgenstein zuletzt doch immer mehr dahin, die spezifische Perspektivität seines eigenen Standpunkts herauszuarbeiten. Er stellt seiner *geometrischen* Auffassung (Mathematik als Grammatik ihrer Zeichen) eine *arithmetische* gegenüber, die im Beweis hauptsächlich ein nach gewissen Regeln ablaufendes Vehikel zur begründeten Annahme von mathematischen Sätzen sieht. Zwar blitzen all die Probleme einer solchen Zugangsweise sofort wieder auf (welchem Standard folgt die korrekte Regel*anwendung* im Zuge des Beweisens? welchen Kriterien entspricht die Anwendung des so erhaltenen Satzes?), sie vermag aber dem Interesse des Mathematikers – das häufig nur die Tatsache, dass sich gewisse mathematische Fakten beweisen lassen, und weniger das *Wie des Beweisens* betrifft – weit besser gerecht zu werden. (Kap. 4) Der Gegenüberstellung beider Standpunkte folgt zuletzt aber doch wieder die Frage, ob nicht eines der dadurch zur Geltung gebrachten Phänomene dem anderen primär ist: überzeugt uns der induktive Beweis (z. B. der Dreiteilbarkeit) vielleicht nur deshalb von der *arithmetischen* Tatsache, weil seine einzelnen Beweisschritte bestimmte *geometrische* Fakten vor Augen führen? (Kap. 5)

TEIL VI. Nachdem wir im vorherigen Hauptstück vor allem der Frage nachgingen, in welchen Bereichen unserer sprachlichen Praxis der vorbildliche Charakter mathematischer Sätze und Beweise verortet werden kann, folgen wir Wittgenstein nun wieder zu dem Problem zurück, welche Rolle die Definitionen im Zuge des Beweisens spielen. Im Vergleich zu den bereits in TEIL IV, Kap. 2 dargestellten Einsprüchen gegen die logizistische Erklärung der expliziten Definitionen ist bei den nun erhobenen Einwänden allerdings noch mehr Sensibilität für den selbst erhobenen Anspruch zu spüren, wonach der logische Kalkül der *PM* als *mathematische Konstruktion* nicht in Frage gestellt werden soll. Daher wird die Frage nach dem Status von Definitionen dahin gewendet, was es heißt, von *Entsprechungen* zwischen Beweissystemen zu sprechen. Auf diese Weise wird es möglich, den Kalkül der *PM* als eines eigenständigen Beweissystems unangetastet zu lassen, während die davon geschiedene *philosophische These*, dass dieser Kalkül das eigentliche *Fundament* der Arithmetik bilde, für sich behandelt werden kann. Geleitet sind diese Betrachtungen von dem Unbehagen, wie eine Beweistechnik das *Wesen* einer anderen erklären kann, wo doch die jeweilige Technik (des Vergleichs der Zeichen untereinander, der korrekten Ableitung eines Symbols aus gegebenen anderen, der Anwendung des induktiven Schemas auf die Symbole des Kalküls etc.) gerade das ist, worauf es ankommt. Insoweit die durch definitorische Setzungen vollzogene Veränderung des Zeichenraums spezifische Vergleichsmöglichkeiten eröffnet, die ohne diese Substitutionen nicht gegeben wären, stellt schließlich das Definieren selbst die entscheidende mathematische Operation dar, die es genauer zu begutachten gilt. Den Fokus auf die Geometrie des Beweissystems gerichtet, fragt sich Wittgenstein daher, ob es nicht angemessener wäre, anstatt das Auftauchen neuer Vergleichsstrukturen innerhalb eines bestehenden Kalküls als die Entdeckung verborgener *Aspekte* zu deuten, darin eher die Etablierung von neuen *Begriffen* zu sehen. (Kap. 1) Die sich daran anschließende Frage, was als Kriterium dafür anzusehen ist, trotz gehöriger Zeichenadaptionen – die man immerhin so auffassen könnte, dass durch sie der Kalkül als solcher ein anderer geworden sei – vom *gleichen* Kalkül zu sprechen, wird zwar nicht eingehender (bzw. in dem dieser Frage zweifelsohne gebührendem Umfange) behandelt; insofern Wittgenstein die Notation des jeweiligen Beweissystems als wesentliches Erkennungsmerkmal herausstellt, ist der noch ausstehenden Untersuchung aber zumindest die Richtung gewiesen.

Die vom Logizisten hierauf zu erwartende Erwiderung, wonach doch abermals logisch bewiesen werden könne, dass eine Entsprechung zwischen dem primitiven Kalkül und der mit Dezimalziffern praktizierten Arithmetik besteht, leiten wieder hin auf den Gegensatz zwischen Beweis und Experiment. (Kap. 2) Im dritten Kapitel werde ich ein Argument aufbereiten, welches zeigen soll, dass die rekursiven Definitionen, mittels derer eine Entsprechung zwischen dem Strich- und dem Dezimalsystem etabliert werden könnte, durch eben diesen Brückenschlag ein neues Kriterium für die Gleichheit von Zeichen einführen. Damit wird deutlich, dass man zwar sehr wohl eine *mathematische* Entsprechung zwischen mathematischen Systemen herstellen kann; dieses Vorgehen jedoch Techniken der Zeichentransformation verlangt (bzw. selbst hervorbringt), die der formallogische Kalkül keineswegs bereithält. Dem in Kapitel 4 formulierten Gedanken, wonach die Entsprechung zwischen zwei Beweissystemen mit Blick auf die praktischen Anwendungen ihrer Sätze außerhalb der Mathematik sichergestellt werden könne, kann Wittgenstein zwar einiges abgewinnen; die Identität mathematischer Sätze einzig dadurch verbürgen zu wollen, greife aber insofern zu kurz, als eine wesentliche Applikation mathematischer Sätze stets die auf den eigenen Beweis bleiben müsse. Daher plädiert er für eine Deutung mathematischer Sätze, wonach deren Sinn auch davon abhängt, wie man sie erhielt, d. h., am Ende welcher Beweise sie stehen.

Neben der Schwierigkeit, dass er hier mit der tatsächlichen Sprachpraxis (die von verschiedenen Beweisen *desselben* Satzes spricht) in Konflikt zu geraten droht, sieht sich Wittgenstein damit konfrontiert, dass viele, ja die meisten induktiven Beweise über die Kardinalzahlen zwar nicht im Dezimalsystem geführt werden, die bewiesenen Sätze aber dennoch auch in diesem gelten. Das scheint ein eindeutiger Beleg zu sein, der die Identifizierung des Strichkalküls mit dem Dezimalkalkül rechtfertigt und folglich die logizistische These stützt. Als Beispiel bespricht er die Grundgesetze der Algebra, die Thoralf Skolem mittels rekursiver Definitionen im Strichkalkül bewiesen hat und die wir beim alltäglichen Rechnen im Dezimalsystem gebrauchen. (Kap. 5)

Mit dem Übergang zu TEIL VII wird das Manuskript gewechselt. MS 122 wird von MS 117 abgelöst, in dem Wittgenstein seine Überlegungen fortsetzt. Verglichen mit den vorangegangen Kapiteln rücke ich hier in größere Distanz zum Text: einerseits um den gedanklichen Bogen besser vor Augen zu führen, den ich zu sehen glaube; andererseits aus Gründen des

Umfangs. Meiner Ansicht nach gelangt Wittgenstein zu der Überzeugung, dass die geometrische Betrachtung des Beweises zwar auf wichtige empirische oder anthropologische Voraussetzungsbedingungen der Mathematik aufmerksam macht; dass sie dabei aber in der Gefahr steht, den eigentümlich paradigmatischen Status mathematischer Sätze zu übersehen. Erkennt man im Beweis nicht nur den Beleg für die Wahrheit des bewiesenen Satzes, sondern zugleich den Grund, weshalb wir ihn als ein in der Praxis der Sprache brauchbares Vorbild annehmen – dann scheint damit zwar ein Brückenschlag vom Beweisvorgang hin zur praktischen Anwendung erbracht; zugleich aber wird es erheblich schwieriger die empirisch beobachtbare Tatsache, dass Mathematik betreibende Menschen für gewöhnlich in gleicher Weise auf Zeichen reagieren, klar von der Mathematik selbst zu trennen. (Kap. 1) Die eingehende Beschäftigung mit der Frage, was einen Beweis vom Experiment unterscheidet, deute ich daher als Versuch, den im Fokus der geometrischen Betrachtungsweise stehenden konstruktiven Beweis*vorgang* so auszulegen, dass dieser nicht als kontingenter Reflex von Menschen, sondern als die vorbildliche Genese eines Maßstabs erscheint, die zugleich Auskunft über seinen Gebrauch gibt. (Kap. 2 & 3) Die allegorische Rede vom Beweis als eines Wegs, durch den man neue Beziehungen zwischen mathematischen Sätzen kennenlernt, mag durchaus brauchbar sein, wenn einem daran liegt, die allgemeine Rolle von Beweisen innerhalb eines mathematischen Kalküls zu beschreiben. Letztlich unterschlägt sie aber die Frage, was die genaue Beziehung zwischen dem Beweisbild und jenem Vorgehen ist, durch welches wir belegen, *wie* uns der Beweis von dem ihn abschließenden Satz überzeugt hat. Mit Blick auf die tatsächliche Praxis ist schließlich nicht zu übersehen, dass es sich um zwei verschiedene Sprachspiele handelt, wenn man entweder einen Satz beweist oder ihn zum Vorbild des Beschreibens nimmt.

Die Kluft zwischen der Paradigmengenese und dem Paradigmengebrauch ist somit auch von der geometrischen Betrachtungsweise nicht vollends zu schließen: wo zwei Sprachspiele gesondert am Werken sind – die Konstruktion eines Satzes, das seinen Status belegende Vorgehen –, dort kann der Hinweis auf grob bestimmbare Zusammenhänge zuweilen dem Verständnis dienen; um aber nicht zu geheimnisvollen Mythen anzuregen (diese Gefahr ist durchaus gegeben, wenn man die Mathematik als ein Land schildert, in dem Satzortschaften durch Beweiswege verbunden sind), ist es fast noch wichtiger den Unterschied klar vor Augen zu stellen, der die eine Praktik von der anderen unterscheidet. Die angedeutete Ambivalenz zeigt sich ebenso darin, dass einem Mathematiker in einer Vielzahl der Fälle ganz einfach nicht daran gelegen ist, *wie* er von einem mathematischen Satz überzeugt wird, sondern allein daran, *dass* es einen Beweis gibt, der jenen Satz als wahr ausweist. Weshalb sich auch der gegen den geometrischen Standpunkt erhobene Einwand, wonach es doch mehrere Beweise *desselben* Satzes gebe, als durchaus wesentlich erweist: das Interesse, das uns einen Beweis führen lässt, lieg ganz oft nur darin, die Beweisbarkeit des Satzes zu zeigen, wobei das Wie des Beweisens weitestgehend nebensächlich bleibt.

All diese negativen, einschränkenden Verortungen des geometrischen Betrachtungsstandpunkts, die vor allem dazu dienen, dessen eigene Perspektivität in den Blick zu bekommen, stoßen ihn aber deswegen nicht um. Ich werde zum Schluss zeigen, dass gerade diese Einsicht in die Perspektivität dem Prinzip gerecht wird, wonach der Philosoph nicht die *Richtigkeit* mathematischer Sätze, sondern höchstens unser *Interesse* dafür einer Prüfung unterziehen darf/kann. (Kap. 4) Wittgensteins Herangehensweise an die Mathematik ist dadurch motiviert, ihre Nützlichkeit für uns Menschen und ihre Rolle innerhalb unserer Praktiken (sei es in den Wissenschaften oder im alltäglichen Leben) zu begreifen. Wenn man diesen grundsätzlichen Impetus teilt, können einen seine Betrachtungen, die folglich den tatsächlichen Umgang des Menschen mit den Zeichen eines Kalküls im Auge haben, dahin führen, das Interesse für Unternehmungen, wie das von Russell/Whitehead verfolgte, zu verlieren. Man kann die Dinge *auch so* ansehen – jedem bleibt es aber selbst überlassen, ob er bei dieser Anschauungsweise verharrt, eine andere wählt, oder weiter unentschlossen von einer zur anderen übergeht.

Es soll hier die generelle Argumentationsstruktur für die These des Logizismus, wie er von Bertrand Russell (1872–1970) vertreten wurde, dargestellt werden. Um die ursprünglichen Motive der logischen Grundlegung der Mathematik besser herausstellen zu können, wird auch auf seinen Vorgänger, Gottlob Frege (1848–1925), einzugehen sein. An dieser Stelle ist allerdings keine erschöpfende Diskussion ihrer Standpunkte zu erwarten. Der Fokus liegt vielmehr auf jenen logizistischen Grundannahmen, die Wittgenstein in den für die vorliegende Arbeit herangezogenen Manuskripten (MS 122 & 117-II) problematisiert. Während sich nämlich die gängigen Haupteinwände gegen den Logizismus in der Regel auf Probleme mit seiner formallogischen Stringenz beziehen (motiviert u. a. durch Gödels Unvollständigkeitssatz), setzt die Kritik Wittgensteins bereits wesentlich früher an, oder auch: sie ist grundsätzlicher. Er stellt den Wert des reduktionistischen Programms selbst in Frage, und kümmert sich weniger um technische Details, die sich bei der formalen Durchführung ergeben. (Die Betonung liegt hier auf *formal*; die Frage nach der tatsächlichen Durchführbarkeit des logizistischen Anspruchs im Sinne des „Rechnens mittels Logik“, wird sich sehr wohl als zentraler Teil der Kritik erweisen.)

Aus diesem Grund wird es weder notwendig sein explizit auf die von Russell zur Vermeidung der logischen Antinomien entworfene Typentheorie einzugehen noch auf die sich daran anschließenden Probleme mit dem Unendlichkeits- und dem Reduzibilitätsaxiom. Damit ist nicht gesagt, dass Wittgenstein selbst sich nicht sehr eingehend mit dem vorgeblichen Problem eines sich innerhalb eines Axiomensystems ergebenden Widerspruchs und auch mit Russells diesbezüglichen Lösungsversuchen auseinandergesetzt hätte.[*] In der vorliegenden Arbeit sollen diese Fragen aus Gründen des Umfangs bewusst zurückgehalten werden. Wer mit der Materie vertraut ist, wird allerdings erkennen, dass die problematisierte Undeutlichkeit Russells bezüglich des Verhältnisses von Begriff und Gegenstand gerade in der mittels des Reduzibilitätsaxioms vollzogenen Egalisierung der zuvor durch die Typentheorie aufgestellten Restriktionen, wie auch am Schillern des von ihm entworfenen Klassenbegriffs, zum Ausdruck kommt.[†]

[*] Siehe hierzu insbesondere seine Besprechung des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes in *BGM* I, Anhang III; aber auch seine expliziten Kritiken an der Typentheorie und dem Unendlichkeitsaxiom in *LPA* 5. ff. Auch in dem hier im Fokus stehenden Manuskript 117 (Basis für den zweiten Teil von *BGM* III) gelangt Wittgenstein zu Fragen hinsichtlich der Konsistenz von Beweiskalkülen und problematisiert die von Mathematikern und Grundlagentheoretikern oft erhobene Forderung nach entsprechenden Beweisen. (Eine Forderung die seines Erachtens auf der irreführenden Vorstellung fußt, wonach die Konstruierbarkeit eines Widerspruchs den ganzen Kalkül zunichtemacht.) Obwohl ich überzeugt bin, dass ein enger Zusammenhang zu der hier behandelten Kritik an Russell und Whitehead ausgemacht werden könnte, werde ich mich nicht in dieses Problemfeld begeben, sondern die Darstellung der Wittgensteinschen Gedankenbewegung schon vorher abschließen.

[†] Worauf ich hier anspiele, ohne aber näher darauf eingehen zu wollen, ist die an ein Chamäleon erinnernde Rolle der „Klasse“ in den Schriften Russells (v. a. nach den *Principles of Mathematics*. 1903), indem das Wort einmal so gebraucht wird als bezeichne es eine Ansammlung von Elementen, dann wieder so als sei es die, obgleich unabhängig vom prädizierenden Begriff subsistierende, Eigenschaft, die jene Elemente zum gemeinsamen Merkmal haben. (Die Klasse einmal als *Vielheit*, einmal als *Gesamtheit* gedacht.) – Ich bin also der Ansicht, dass der Russellsche Begriff der Klasse einen Unterschied verwischt, der in Freges Trennung von Begriff und Begriffsumfang (siehe GGA I, § 3, § 9, § 20) in voller Schärfe zum Ausdruck kommt. Und während Frege im fünf-

1 Freges Anfang

Die Idee des von Frege in der hier relevanten Form begründeten Logizismus ist, dass alle Sätze der Arithmetik in logischer Terminologie beweisbar sind und demzufolge die Arithmetik auf Logik zurückgeführt werden kann. Entgegen der Kantischen Auffassung, wonach mathematische Urteile synthetisch a priori seien (KrV B, S. 14 ff.), versucht Frege deren analytischen Charakter darzulegen. Die Analytizität einer mathematischen Wahrheit besteht seinem Verständnis nach darin, dass sie ohne Zuhilfenahme empirischer Tatsachen oder psychologischer Bedingungen zu rechtfertigen ist, zumal „auch ein scheinbar eigentümlich mathematischer Schluss wie der von n auf n + 1 auf den allgemeinen logischen Gesetzen beruht“ und es sonach „besondrer Gesetze des aggregativen Denkens nicht bedarf.“ (GLA, S. iv) A priori ist eine solche Wahrheit dann, wenn der geführte Nachweis allein auf logischen Grundsätzen beruht, „die selber eines Beweises weder fähig noch bedürftig sind.“ (GLA, S. 4)

Frege meint den Begriff der Anzahl, auf dem gemäß einer gängigen Ansicht die Arithmetik beruht, mittels rein logischer Begriffe definieren zu können. Gelingt es letzteres zu zeigen, gilt das als Wahrscheinlichkeitsbeleg dafür, „dass die arithmetischen Gesetze analytische Urteile und folglich a priori sind.“

> Demnach würde die Arithmetik nur eine weiter ausgebildete Logik, jeder arithmetische Satz ein logisches Gesetz, jedoch ein abgeleitetes sein. Die Anwendungen der Arithmetik zur Naturerklärung wären logische Bearbeitungen von beobachteten Thatsachen; Rechnen wäre Schlussfolgern. (GLA, S. 99)[*]

Nachdem er in den *Grundlagen der Arithmetik* (1884) den Begriff der Anzahl durch logische Terme definiert und damit die logizistische These plausibel gemacht hatte, lieferte Frege in seinen *Grundgesetzen der Arithmetik* (1893, 1903) mittels einer bereits in der *Begriffsschrift* (1879) entwickelten Formelsprache scheinbar auch den formalen Nachweis für diese These, indem er die wichtigsten mathematischen Sätze über die natürlichen Zahlen mittels entsprechender Einsetzungs- und Umformungsregeln aus fünf logischen Grundgesetzen ableitete. Allerdings wies ihn Bertrand Russell kurz vor Erscheinen des zweiten Bandes der *Grundgesetze* in einem Brief vom 16. 06. 1902 (WB, S. 211 f.) darauf hin, dass das von Frege selbst bereits als nicht vollkommen sattelfest gekennzeichnete Grundgesetz V (GGA I, § 20, S. 35) zu einem Widerspruch führt. Nachdem er einen zunächst unternommenen, dem zweiten Band der *Grundgesetze* angefügten Versuch zur Ausschließung der logischen Antinomien als fehlgeleitet erkennen musste, betrachtete Frege sein Lebensprojekt, die Mathematik mit einem festen und einheitlichen Fundament auszustatten, als gescheitert.[†]

---

ten Grundgesetz (GGA I, S. 35) die Allgemeinheit einer Gleichheit von Begriffen und die Gleichheit ihrer Wertverläufe explizit miteinander identifiziert – und insoweit auch die Möglichkeit offenlässt, den vermeintlichen Brückenschlag vom Begriff zum Gegenstand zu beeinspruchen – vollzieht er sich bei Russell in einem stillschweigenden Wechsel der Gebrauchsweise des Begriffs der Klasse, – die von einer extensionalen Vielheit zur intensionalen Einheit wird, sobald er den Schritt zu Klassen zweiter Ordnung macht, die aus solchen erster Ordnung bestehen.

[*] Auf den hier vorausgesetzten Zusammenhang, der zwischen der Rückführung der Arithmetik auf Logik und ihrer Anwendung auf die Tatsachen der täglichen Erfahrung besteht, wird im nächsten Kapitel einzugehen sein.

[†] In den beiden Nachlasstexten *Logik in der Mathematik* (1914) und *Neuer Versuch der Grundlegung der Arithmetik* (1924/25) kann man Freges Bemühen erkennen, den Zusammenhang zwischen Logik und Arithmetik

Nicht so jedoch Russell, der das von ihm selbst aufgestellte Paradox schließlich als das Resultat einer missbräuchlichen, weil von einer imprädikativen Definition Gebrauch machenden Begriffsbildung auszuweisen können glaubte, die mittels entsprechender Typenrestriktionen zu vermeiden wäre. Hier wird aber weder auf die von Russell und Whitehead in den *Principia Mathematica* (1910, 1911, 1913) entwickelte Typentheorie noch auf die in weiterer Folge notwendig werdenden Axiome einzugehen sein. Denn diese zusätzlichen Theorien sind im Grunde nur Ausbesserungsversuche einer sich an manchen Stellen lückenhaft erweisenden Auffassung, deren Betrachtung keineswegs dieselbe philosophische Relevanz zukommen kann, wie der prinzipiellen Frage nach der Plausibilität eben dieser Auffassung selbst. Wobei nicht ausgeschlossen sein soll, dass im Falle von Whitehead und Russell gerade deren zweischneidiger Umgang mit diesen sich auftuenden Lücken (Typentheorie und Reduzibilitätsaxiom) ein gutes Erkennungszeichen für die prinzipielleren Schwierigkeiten ihres Standpunkts abgeben kann. An dieser Stelle ist vorerst nur wichtig, dass Russell der Fregeschen Ansicht über die Anzahl im Wesentlich zustimmt und es in der folgenden Darstellung der Russellschen Position zulässig sein wird, zuweilen auf Frege zurückzukommen. Davon abgesehen, dass er z. B. nicht wie Frege von Begriffen und unter sie fallenden Gegenständen, sondern von Klassen und den sie konstituierenden Elementen spricht, erinnern Russells Formulierungen und Definitionen häufig an die seines Vorgängers. Und selbst wenn durch das Einfließen Fregescher Termini die dargestellte Position nicht mehr ganz derjenigen von Russell entspricht, muss dies nicht unbedingt als folgenschweren Fehler gewertet werden. Denn diese Arbeit hat sich nicht zum Ziel gesetzt, den Autor Russell des philosophischen Irrtums zu überführen. Der Anspruch ist vielmehr, eine in mancherlei Hinsicht sehr naheliegende Auffassung vom mathematischen Beweis als problematisch auszuweisen, sowie die Probleme zu schildern, die sich ergeben, sobald man eine solche Auffassung zu kritisieren beginnt. Und zur Darstellung dieser Position ist es hilfreich, beide Autoren heranzuziehen. Zudem ist zu bemerken, dass sich Wittgensteins Bemerkungen zwar namentlich meist nur auf Russell beziehen (er spricht etwa vom „Russellschen Beweis“, von „Russells Methode“ oder „Russells Kalkül“), die gewählten Termini (z. B. „Begriff“ und „Gegenstand“) erinnern aber häufig an Freges Theorien und Formulierungen.

---

nochmals herauszustellen, obgleich er die Meinung aufgibt, wonach „die Arithmetik ein Zweig der Logik sei und daß demgemäß in der Arithmetik alles rein logisch bewiesen werden müsse.“ (NS, S. 298) Das letzte dieser beiden Fragmente ist, vor allem in Hinblick auf die vorliegende Arbeit, deswegen höchst interessant, weil Frege die allgemeine These, dass die Arithmetik keinen Beweisgrund aus der Erfahrung nehmen dürfe, fallen lässt, und eine, allerdings von der Sinneswahrnehmung unterschiedene, *ursprüngliche* Anschauung als Erkenntnisquelle mathematischer Axiome geltend macht.

> Das ist dadurch bedeutsam, weil damit Arithmetik und Geometrie, also die gesamte Mathematik einer und derselben, nämlich der geometrischen Erkenntnisquelle entfließt, die damit zum Range der eigentlichen mathematischen Erkenntnisquelle aufsteigt, wobei natürlich die logische Erkenntnisquelle immer mitbeteiligt ist. (NS, S. 299)

Diese leider sehr spärlichen Bemerkungen zeigen das unermüdliche Streben Freges nach Klarheit betreffs des allgemeinen erkenntnistheoretischen Fundaments der Mathematik. Dass er in den letzten Jahren seines Lebens sogar der von ihm zuvor oft so heftig kritisierten Idee eines synthetischen Charakters mathematischer Sätze (siehe beispielsweise seine Kant-Kritik in den *Grundlagen*) Raum gibt, ist dafür ein beeindruckender Beleg. In gewisser Weise nimmt er hier Gedanken vorweg, wie sie Wittgenstein ausgehend von seiner Kritik am logizistischen Begründungsunternehmen dann im Detail entwickeln wird.

2 Die Bedingung der Anwendbarkeit arithmetischer Sätze

Russells Ausgangspunkt ist die von Giuseppe Peano (*Arithmetices principia, nova methodo exposita*, 1889) begründete Axiomatik der natürlichen Zahlen, in der mit Hilfe der als bekannt vorausgesetzten Grundbegriffe „0“, „Zahl“ und „Nachfolger“, sowie den daraus gebildeten Axiomen, das gesamte System der natürlichen Zahlen abgeleitet wird. Das Problem dieser mathematischen Theorie sieht Russell darin, dass die drei erwähnten Grundbegriffe undefiniert vorausgesetzt bleiben. Nur wenn bereits ein allgemeines, aus dem Alltag genommenes Verständnis der Terme „0“, „Zahl“ und „Nachfolger“ gegeben sei, könnten die Sätze über die natürlichen Zahlen, und damit die gesamte reine Mathematik abgeleitet werden. Da aber die drei Begriffe für sich genommen viele Auslegungen erlauben, kann die Begründung, so Russell, nicht auf diese Weise erfolgen.

> This point, that “0” and “number” and “successor” cannot be defined by means of Peano’s five axioms, but must be independently understood, is important. We want our numbers not merely to verify mathematical formulæ, but to apply in the right way to common objects. We want to have ten fingers and two eyes and one nose. A system in which “1” meant 100, and “2” meant 101, and so on, might be all right for pure mathematics, but would not suit daily life. We want “0” and “number” and “successor” to have meanings which will give us the right allowance of fingers and eyes and noses. We have already some knowledge (though not sufficiently articulate or analytic) of what we mean by “1” and “2” and so on, and our use of numbers in arithmetic must conform to this knowledge. (IMP, S. 9)

Daraus erwächst für Russell die Forderung, eine Definition der bei Peano undefiniert vorausgesetzten Grundbegriffe zu geben. Erst wenn der Sinn der Zahlbegriffe eindeutig bestimmt ist, kann die Anwendung, die wir von ihnen tagtäglich machen, gerechtfertigt werden. Um in seinem Bild zu sprechen: wenn wir die Zahl 5 auf die Finger an unserer Hand anwenden, setzt dies voraus, dass wir eine spezifische Kenntnis vom Sinn dieses Terms haben; da wir im Alltag die 5 tatsächlich in dieser Weise gebrauchen, muss es daher auch möglich sein, das dabei angewandte Wissen zu explizieren. – In dieser Argumentation geht der Anwendungsmöglichkeit von Zahlen die Kenntnis ihres Sinns logisch voraus. Das ist vor allem deshalb bemerkenswert, weil in der noch zu gebenden Definition zwar das Primat einer intensionalen Auffassung der Zahl betont wird, diese Definition aber zugleich die Anwendung der Zahl auf Gegenstände sicherstellen soll, indem die letzteren als die, zunächst noch unbestimmt gelassenen, Elemente einer Klasse gefasst werden. Das heißt, die Sinnbestimmung scheint einerseits dem tatsächlichen Rechnen vorhergehen zu müssen, kommt aber gleichzeitig nicht ohne dasjenige aus, worauf der durch sie spezifizierte Ausdruck später anzuwenden sein wird. An dieser Stelle zeigt sich sehr gut, was Wittgenstein als eine wesentliche Motivation des logizistischen Projekts identifizieren wird – nämlich, die Anwendbarkeit der Mathematik eigens rechtfertigen zu wollen – und die sich bei Frege folgendermaßen äußert:

> Und doch kann man wohl von der Arithmetik verlangen, dass sie die Anknüpfungspunkte für jede Anwendung der Zahl bieten muss, wenn auch die Anwendung selbst nicht ihre Sache ist. Auch das gewöhnliche Rechnen muss die Begründung seines Verfahrens in der Wissenschaft finden. (GLA, S. 26)

3 Das Primat der Intension

Wir wollen aber nicht vorgreifen und vorerst Russells Argumente dafür vorlegen, weshalb die intensionale, d.i. die vom Begriffsinhalt ausgehende, Definition der Zahl der durch Aufzählung erfolgenden extensionalen Definition vorzuziehen sei. Im Rahmen der in der *Introduction to Mathematical Philosophy* (1919) präsentierten Auffassung rekurriert er dabei auf Frege, der in seinen *Grundlagen* (1884) eine stichhaltige, zuweilen auch stark polemische Kritik an der von John Stuart Mill u. a. in *A System of Logic Ratiocinative and Inductive* (1843) vertretenen Theorie liefert, wonach mathematische Sätze das Bestehen einer physikalischen Tatsache behaupten. (Mill 1843, Book II, S. 252–261; Book III, S. 604–621) Freges Vorwurf ist bezeichnenderweise der, dass Mill dabei die mögliche Anwendung eines mathematischen Satzes mit diesem selbst verwechselt. So könne zwar der mathematische Satz ‚5+7=12' seine Applikation darin finden, „dass wenn man zu 5 Raumtheilen Flüssigkeit 2 Raumtheile Flüssigkeit giesst, man 7 Raumtheile Flüssigkeit erhalte." (GLA, S. 13) Diese Tatsachenbehauptung, die nur Gültigkeit hat, „wenn nicht infolge etwa einer chemischen Einwirkung eine Volumänderung eintritt", dürfe aber deswegen nicht mit dem mathematischen Satz ‚5+7=12' verwechselt werden, dem eine von aller Erfahrungswirklichkeit ganz unabhängige, und damit gleichsam ewige, Wahrheit zukommt.

Dieser Fregeschen Kritik entsprechend betont nun Russell, dass z. B. jedes Männertrio eine Instanziierung der Zahl drei sei, dass aber kein spezifisches Männertrio mit der Zahl drei gleichgesetzt werden dürfe. Die Zahl drei sei vielmehr etwas, das alle Trios dieser Welt gemeinsam haben, und wodurch sie von anderen Auswahlen (Duos, Quartetten, etc.) unterschieden sind. Russell bezeichnet solche Auswahlen als Klassen und die sie konstituierenden Gegenstände (hier beispielsweise die drei Männer Brown, Jones und Robinson) als deren Elemente. Er zeigt nun zwei Wege, eine Klasse zu definieren. Entweder zählt man ihre Elemente auf, wie im Falle des angesprochenen Trios, wo wir sagten, die gemeinte Auswahl bestünde aus Brown, Jones und Robinson. Oder aber es wird die, wie Russell es nennt, *definierende Eigenschaft* der Klasse angegeben; dies ist etwa der Fall, wenn wir von „der Menschheit" oder „den Einwohnern Londons" sprechen. (IMP, S. 12) Von diesen beiden Alternativen der Klassenbestimmung glaubt Russell nun sagen zu können, dass die zweite die logisch fundamentalere sei, weil zwar (1.) jede extensionale Definition (Aufzählung) auf eine intensionale Definition zurückgeführt werden könne, wohingegen (2.) der umgekehrte Fall nicht immer zuträfe. Betrachten wir die von Russell angeführte Begründung etwas genauer.

(1.) Zuvor definierten wir das Männertrio, indem wir dessen Teilnehmer aufzählten. Man kann aber die aus Brown, Jones und Robinson zusammengesetzte Klasse auch auf andere Weise bestimmen, nämlich durch die Angabe der Eigenschaft, entweder Brown oder Jones oder Robinson zu sein. Diese Eigenschaft („… ist entweder Brown oder Jones oder Robinson") kommt nun genau den drei Elementen der zuvor durch Aufzählung definierten Klasse zu und kann deswegen als eindeutige Definition dieser Klasse dienen. Russell versucht damit zu zeigen, dass jede Aussage über Gegenstände ersetzt werden kann durch eine Aussage über die unbestimmt gelassenen Elemente jener Klasse, unter die sie fallen. Anstatt von Brown und Jones und Robinson zu reden, können wir von jenen Variablenwerten (x_1, x_2, x_3) sprechen, die den Begriff „*x* ist Brown oder Jones oder Robinson" sättigen.

(2.) Der zweite Grund, den Russell für seine These vom Primat der intensionalen Definition nennt, besteht in der Tatsache, dass wir häufig mit Bestimmtheit von Klassen reden, ohne doch ihre Elemente anführen zu können. Mit den Ausdrücken „Menschheit" oder „Einwohner Londons" verbindet wir in der Regel einen Sinn, obschon kaum jemand all die Einwohner Londons, geschweige denn der Welt aufzuzählen vermöchte. Russell nimmt dies als Beleg dafür, dass wir ein Wissen von Klassen haben können, ohne deren Elemente genauer zu kennen, d. h., ohne in der Lage zu sein, die Klasse durch Aufzählung der einzelnen Glieder zu definieren. Erwartungsgemäß geht er schließlich noch ein Stück weiter und führt die unendliche Anzahl der natürlichen Zahlen als Beleg für seine These ins Feld: denn wie sonst sollte der sterbliche Mensch ein Wissen von unendlichen, und daher realiter nicht abzählbaren, Mengen erlangen können, wenn nicht durch Definitionen, die vom Begriff ausgehen! – Worin dies Wissen genau besteht, das unterschlägt Russell ebenso, wie Frege keine klare Charakteristik des Sinns gibt; von dem man sagen könnte, dass er zur Erfüllung derselben Absicht dient, wie sie Russell bei der Sicherstellung des Primats der intensionalen Definition von Klassen verfolgt. Es geht darum, die Identität eines Begriffs zu gewährleisten noch bevor der Schritt zu den tatsächlich unter ihn fallenden Gegenständen gemacht wird.[*]

4 Anzahlengleichheit basierend auf eindeutiger Zuordnung

Die Zahl wird bei Russell nun dadurch erhalten, dass all jene Klassen, die die gleiche Anzahl an Elementen aufweisen, in einer gemeinsamen Klasse höherer Ordnung untergebracht werden. Auf diese Weise sei es möglich, alle Paare (als Klassen zweier Elemente) in der einen, alle Trios (als Klassen dreier Elemente) in der nächsthöheren Klasse, usf., zusammenzufassen. Man kommt so zu verschiedenen Klassen, die ihrerseits Klassen mit je gleich vielen Elementen enthalten, ohne dass doch die Anzahl dieser letztgenannten Klassen selbst wieder bestimmt sein müsse; ja Russell hält es sogar für sehr wahrscheinlich, dass beispielsweise die Zahl aller Trios unendlich sei. (Wobei der Grund für sein Dafürhalten mit dem Willen zum Unendlichkeitsaxiom zusammenhängt.) Die zu beantwortende Frage ist dann, wie zu entscheiden sei, dass zwei gegebene Klassen einer solchen höherer Ordnung als deren Elemente angehören.

> How shall we decide whether two collections are to belong to the same bundle? The answer that suggests itself is: "Find out how many members each has, and put them in the same bundle if they have the same number of members." But this presupposes that we have defined numbers, and that we know how to discover how many terms a collection has. We are so used to the operation of counting that such a presupposition might easily pass unnoticed. In fact, however, counting, though familiar, is logically a very complex operation; moreover it is only available, as a means of discovering how many terms a collection has, when the collection is finite; and we cannot in any case, without a vicious circle, use counting to define

[*] In Abgrenzung zu Frege und Russell entwickelte Frank P. Ramsey (*Mathematical Logic*, 1925) eine Theorie, der eine strikt extensionale Auffassung des Begriffes zugrundeliegt. Wie sich im nächsten Hauptkapitel zeigen wird, schlägt sich Wittgenstein weder auf die eine oder die andere Seite, sondern erkennt beiden Betrachtungsweisen ihre (allerdings beschränkte) Gültigkeit zu.

> numbers, because numbers are used in counting. We need, therefore, some other method of deciding when two collections have the same number of terms. (IMP, S. 14)

Wir können also nicht einfach zwei Klassen zählen und dann mittels der jeweils erreichten Endzahl ihre Zahlengleichheit überprüfen. Eine solche Prozedur würde den Begriff der Anzahl voraussetzen und wäre daher nutzlos, wenn es darum geht ihre Definition zu liefern. Allgemeiner ausgedrückt besteht das Problem darin, dass ein Begriff der Gleichheit benötigt wird, mittels dem zwei ihrem Inhalt nach wesentlich unbestimmt gelassene Klassen als unter eine bestimmte Zahl (als der ihnen gemeinsamen Klasse höherer Ordnung) fallend festgestellt werden können, ohne aber dabei auf den Begriff der Zahlengleichheit zurückzugreifen. Als eine denkbare Lösung für dieses Problem nennt Frege das mittlerweile berühmt gewordene Prinzip Humes: „Wenn zwei Zahlen so combinirt werden, dass die eine immer eine Einheit hat, die jeder Einheit der andern entspricht, so geben wir sie als gleich an." (GLA, S. 73) Dieses Prinzip, das die „Gleichheit der Zahlen mittels der eindeutigen Zuordnung" (GLA, S. 95) erklärt, wird von Russell im Wesentlichen übernommen, wenn er schreibt:

> … that two classes have the same number of terms when they are 'similar,' i.e. when there is a one-one relation whose domain is the one class and whose converse domain is the other. In such a case we say that there is a 'one-one correlation' between the two classes. (IMP, S. 52; PM, S. 476)

Als Beispiel nennt Russell das Verhältnis von Ehemännern und Ehefrauen innerhalb einer polygamiefreien Gesellschaft (wobei er an die Möglichkeit gleichgeschlechtlicher Ehen nicht gedacht zu haben scheint). Ohne die einzelnen Menschen zählen zu müssen, können wir in einem solchen Fall dennoch mit Zuverlässigkeit behaupten, dass die Zahl der Ehemänner und die Zahl der Ehefrauen gleich sind. Von $1 \rightarrow 1$ Korrelation wäre also dann zu sprechen, wenn jedem x genau ein y zugeordnet werden kann, während weder ein anderer Term x' dieselbe Relation zu y, noch x dieselbe Relation zu einem Term y' aufweist. (IMP, S. 15) Die hier als eine reflexive, symmetrische und transitive Beziehung zwischen Klassen ausgewiesene Ähnlichkeitsrelation („similarity relation") ist laut Russell aus logischer Perspektive einfacher („logically simpler" oder „more primitive") als der Zahlbegriff, wie er bei der gebräuchlichen Operation des Zählens seine Anwendung findet. Deshalb genüge die dargebotene Idee der $1 \rightarrow 1$ Korrelation um die Zahl hinreichend zu bestimmen. D. h., der ordinale Aspekt des Zählens sei aus logischer Perspektive vernachlässigbar, selbst wenn er im Alltag ein nützliches Additiv des Zahlbegriffes darstellt. Denn bei der Feststellung der Zahlengleichheit komme es letztlich nur darauf an, dass wir jedem Element der einen Klasse je ein Gegenstück in der anderen zuweisen. Zwar schließt der ‚Common Sense' von der bei diesem Durchkorrelieren zuletzt gebrauchten Zahl auf die Anzahl der solcherart einander zugeordneten Elemente; das ist aber, so Russell, vom logischen Standpunkt aus betrachtet, gar nicht nötig.

> The notion of similarity is logically presupposed in the operation of counting, and is logically simpler though less familiar. In counting, it is necessary to take the objects counted in a certain order, as first, second, third, etc., but order is not of the essence of number: it is an irrelevant addition, an unnecessary complication from the logical point of view. The notion of similarity does not demand an order: for

> example, we say that the number of husbands is the same as the number of wives, without having to establish an order of precedence among them. (IMP, S. 17)

Wir sind demnach in der Lage, die Elemente zweier Klassen als gleichzahlig auszuweisen, ohne zählen zu müssen. Auf die oben gestellte Frage, wie zu entscheiden sei, dass zwei Klassen derselben Klasse angehören, gibt Russell also die Methode der 1→1 Zuordnung als Antwort. Die einzelnen Zahlen erklärt er dann folgenderweise: Da einem Begriff die Zahl 0 nur dann zukommt, wenn kein Gegenstand unter ihn fällt, ist die „0" selbst als jene Klasse zu denken, die alle gegenstandsleeren Klassen unter sich fasst. Da alle gegenstandsleeren Klassen einander identisch sind, entspricht die Zahl 0 genau derjenigen Klasse (es gibt nur eine), die als Elemente all jene Dinge enthält, die nicht mit sich selbst identisch sind. (IMP, S. 18; GLA, S. 87 f.) Die 1 ist die Klasse der Klassen mit nur einem Element, d. h. der Einerklassen; die 2 ist die Klasse aller Klassen mit zwei Elementen, d.i. die Klasse aller Paare, usw.… Für jede Klasse kann auf diese Weise eine Klasse höherer Ordnung definiert werden, der sie als eines ihrer Elemente angehört und zu deren anderen Elementen sie in der Relation steht, jeweils gleich viele Elemente unter sich zu fassen; wobei dies letztere durch die Methode des 1→1 Abgleichs feststellbar ist. Zum Beispiel formt die Klasse all der Klassen, die einer gegebenen Klasse mit drei Elementen gleich sind, die Klasse der Trios. Und wie groß auch die Zahl der unter eine Klasse fallenden Elemente sein mag: immer könne man allein durch eindeutige Zuordnung belegen, ob ihr eine andere Klasse diesbezüglich gleicht oder nicht. Die Erklärung der Zahl einer Klasse lautet bei Russell daher:

> *The number of a class is the class of all those classes that are similar to it.* (IMP, S. 18)

Russell definiert die Zahlen als Klassen von ähnlichen Klassen. Zahlen sind also jene Klassen höherer Ordnung, die den durch die eindeutige Zuordnung ihrer Elemente als gleichzahlig ausgewiesenen Klassen übergeordnet sind. Eine einzelne Zahl ist dann eine Menge an Klassen, die einander hinsichtlich der Anzahl der unter sie fallenden Elemente gleichen; wobei aber ihre Identität nicht durch Zählung, sondern durch bloßen 1→1 Abgleich garantiert ist:

> *A number is anything which is the number of some class*. (IMP, S. 19)

Russell merkt selbst an, diese Definition würde so aussehen, als wäre sie zirkulär. Der seiner Überzeugung nach falsche Schein rühre aber nur daher, dass man üblicherweise annimmt, man müsse die möglichen Anwendungen eines Begriffs bereits kennen, ehe man in der Lage ist, seinen Sinn zu verstehen. Dass gerade das nicht der Fall ist, meint er mit seinen zuvor schon dargelegten Argumenten für das Primat der intensionalen Definition ausreichend untermauert zu haben. Der Begriff der Anzahlengleichheit, wie er durch eindeutiges Zuordnen etabliert werden kann, sei logisch fundamentaler als der Begriff der Zahl selbst und tauge deswegen zu seiner Definition.

5 Definitionen als Abkürzungen

Bei den bisherigen Darlegungen, die den der logizistischen Argumentation zu Grunde liegenden philosophischen Hauptgedanken veranschaulichen sollten, kamen wir ganz ohne formale

Zeichen aus. Vieles der später einsetzenden Kritik Wittgensteins bezieht sich auf diese grundsätzlichen Überlegungen und wäre ausgehend von dem bisher Gesagten verständlich; anderes wieder betrifft konkrete Details der „Darstellung des logischen Gebäudes“ (PM^{de}, S. 22) und ist nur nachvollziehbar, wenn man eine ungefähre Vorstellung von diesem Aufbau hat. Daher gehen wir kurz auf die formale Umlegung der eben charakterisierten Ideen ein.

In den *Principia Mathematica* werden Sätze bewiesen, indem man zeigt, dass sie das Substitutionsprodukt vorausgesetzter Axiome („primitive propositions“) bzw. solcher Sätze sind, deren Ableitbarkeit bereits nachgewiesen wurde. Der Beweisvorgang besteht demnach allein im Substituieren von Konstituenten wahrer (d.i. als wahr vorausgesetzter oder aber von solchen bereits abgeleiteter) Sätze, um auf diesem Wege den zu beweisenden Satz als eine Folgerung der Axiome auszuweisen. Lässt sich von einem Satz zeigen, dass er mittels entsprechender Ersetzungen auf die primitiven Ausdrücke zurückgeführt werden kann, so sagt man, er folge aus ihnen.

Russell und Whitehead gebrauchen die beiden aussagenlogischen Grundbegriffe der Negation („~p“) und Disjunktion („p ∨ q“) von Sätzen, die zwei prädikatenlogischen Grundoperatoren der Existenz („∃“) und der Allgemeinheit („∀“), den Urteilsstrich („⊢“), sowie sieben Ausgangsaxiome. Diese Ausgangsaxiome sind die inhaltlichen Materialien (die gleichzeitig eine Anleitung enthalten, wie sie zu gebrauchen sind), aus denen unter deduzierender Anwendung der genannten Grundbegriffe, sowie anhand geeigneter Umformungen und Definitionen, der arithmetische Bau aufgeführt wird. (PM, S. 95 ff.)

Der für die gleich am Anfang des Aufbaus stehende Deduktionstheorie zentrale Gedanke der Implikation, wie er in „was aus wahren Prämissen folgt, ist wahr“ zum Ausdruck kommt, wird mittels der eben genannten Grundbegriffe der Negation und Disjunktion definiert:

*1.01 p ⊃ g .=. ~p ∨ q Df (PM, S. 98)

Logisches Produkt und Äquivalenz werden ebenso auf Oder und Nicht, bzw. auf die durch sie definierte Implikation zurückgeführt. So bleibt die Zahl der Grundterme („∨“, „~“, „⊢“) klein.

*3.01 p . q .=. ~(~p ∨ ~q) Df (PM, S. 116)
*4.01 p ≡ q .=. p ⊃ g . q ⊃ p Df (PM, S. 120)

Definitionen dieser Art nehmen im System der *Principia Mathematica* einen zentralen Stellenwert ein, sind laut den Verfassern, vom theoretischen Standpunkt aus betrachtet, jedoch völlig überflüssig. Denn obzwar die Einführung eines neuen Symbols, das man durch bereits bekannte Terme erklärt (definiert), dem Leser eine bessere Handhabung des Kalküls erlaubt, könne doch die gesamte Deduktionsarbeit prinzipiell in Termen der Definientia geführt werden. Darum bezeichnen Russell/Whitehead in der Einleitung zur zweiten Auflage der *Principia* den von H. M. Sheffer (*A Set of Five Independent Postulates for Boolean Algebra*, 1912) eingeführten ‚stroke‘ („p | q“, gesprochen: „p ist inkompatibel mit q“), mit dem eine Reduktion der Grundbegriffe auf nur *ein* Symbol möglich wird, als die weitreichendste der seit dem ersten Erscheinen ihres Buches auf logischem Gebiete gemachten Entdeckungen. (PM^{nd}, S. xiii) Dementsprechend fallen die Bemerkungen zum Charakter von Definitionen aus.

> It is to be observed that a definition is, strictly speaking, no part of the subject in which it occurs. For a definition is concerned wholly with the symbols, not with

> what they symbolise. [...] Theoretically, it is unnecessary ever to give a definition: we might always use the *definiens* instead, and thus wholly dispense with the *definiendum*. Thus although we employ definitions and do not define "definition", yet "definition" does not appear among our primitive ideas, because the definitions are not part of our subject, but are, strictly speaking, mere typographical conveniencies. Practically, of course, if we introduced no definitions, our formulæ would very soon become so lengthy as to be unmanageable; but theoretically, all definitions are superfluous. (PM, S. 11)

In der Folge wird zwar angemerkt, dass Definitionen zuweilen sogar doppelt belehrend seien, als sie nicht nur die Aufmerksamkeit auf das Definiens lenken und so dessen begründungstechnische Wichtigkeit in den Vordergrund rücken, sondern zudem das häufig aus dem Alltag bereits vage bekannte Definiendum (wie hier die Idee der Implikation) exakter bestimmen. Nichtsdestoweniger besäßen sie diesen Wert nur relativ zu den beschränkten Fähigkeiten des Menschen und dienten also vor allem seiner Bequemlichkeit. Der hierbei zu Grunde liegenden Idee, die den Mathematiker als Erforscher der gleichsam hinter der Notation liegenden Wahrheiten denkt, gibt Frege auf die ihm eigene, eindrucksvolle Weise Ausdruck:

> Es kommt hier darauf an, sich klar zu machen, was Definieren ist und was dadurch erreicht werden kann. Man scheint ihm vielfach eine schöpferische Kraft zuzutrauen, während doch dabei weiter nichts geschieht, als dass etwas abgrenzend hervorgehoben und mit einem Namen bezeichnet wird. Wie der Geograph kein Meer schafft, wenn er Grenzlinien zieht und sagt: den von diesen Linien begrenzten Theil der Wasserfläche will ich Gelbes Meer nennen, so kann auch der Mathematiker durch sein Definieren nichts eigentlich schaffen. Man kann auch nicht einem Dinge durch blosse Definition eine Eigenschaft anzaubern, die es nun einmal nicht hat, es sei denn die eine, nun so zu heissen, wie man es etwa benannt hat. (GGA I, S. xiii)

Rudolf Carnap schließlich, der in seinem Vortrag *Die logizistische Grundlegung der Mathematik* (1931) einige Hauptgedanken aus den *PM* vorstellt, verbindet die eben charakterisierte Auffassung der Definition mit dem reduktionistischen Begründungsanspruch selbst:

> Die mathematischen Begriffe sind durch explizite Definitionen eingeführt. Eine explizite Definition ist nichts anderes als die Festsetzung einer neuen, meist abkürzenden Schreibweise; gemäß dieser Festsetzung kann die Schreibweise stets wieder eliminiert werden. Daher kann jeder mathematische Satz rückübersetzt werden in einen Satz, in dem nur noch die früher genannten Hauptbegriffe der Logik vorkommen. Die zweite These [des Logizismus] kann deshalb so formuliert werden: jeder beweisbare mathematische Satz ist rückübersetzbar in einen Satz, der nur aus logischen Termen besteht und in der Logik beweisbar ist. (Carnap 1931, S. 95)

Abgesehen von der Ersetzung singulärer Aussagefunktionen („propositional functions") durch andere, finden sich in den *PM* aber auch Abkürzungen ganzer Schlussweisen oder -muster, wie dies etwa am Beweis zweier Formen des Transpositionsprinzips gezeigt werden kann. Man betrachte dazu die allgemeine Struktur der folgenden Ableitung. (Auf Einzelheiten kommt es hierbei nicht an, weshalb die restlichen, zum vollen Nachvollzug nötigen Sätze nicht mitgeliefert werden.)

$$*2{\cdot}15. \quad \vdash : \sim p \supset q \,.\supset .\, \sim q \supset p$$

Dem.

$$\left[*2{\cdot}05 \,\frac{\sim p,\ \sim(\sim q)}{p,\quad r}\right] \quad \vdash :. \, q \supset \sim(\sim q) \,.\supset :\, \sim p \supset q \,.\supset .\, \sim p \supset \sim(\sim q) \qquad (1)$$

$$\left[*2{\cdot}12 \,\frac{q}{p}\right] \quad \vdash .\, q \supset \sim(\sim q) \qquad (2)$$

$$[(1).(2).*1{\cdot}11] \quad \vdash : \sim p \supset q \,.\supset .\, \sim p \supset \sim(\sim q) \qquad (3)$$

$$\left[*2{\cdot}03 \,\frac{\sim p,\ \sim q}{p,\quad q}\right] \quad \vdash : \sim p \supset \sim(\sim q) \,.\supset .\, \sim q \supset \sim(\sim p) \qquad (4)$$

$$\left[*2{\cdot}05 \,\frac{\sim q,\ \sim(\sim p),\ p}{p,\quad q,\quad r}\right] \vdash :. \sim(\sim p) \supset p \,.\supset :\, \sim q \supset \sim(\sim p) \,.\supset .\, \sim q \supset p \qquad (5)$$

$$[(5).*2{\cdot}14.*1{\cdot}11] \quad \vdash : \sim q \supset \sim(\sim p) \,.\supset .\, \sim q \supset p \qquad (6)$$

$$\left[*2{\cdot}05 \,\frac{\sim p \supset q,\ \sim p \supset \sim(\sim q),\ \sim q \supset \sim(\sim p)}{p,\qquad q,\qquad r}\right] \vdash ::$$

$$\sim p \supset \sim(\sim q) \,.\supset .\, \sim q \supset \sim(\sim p) :\supset :.$$

$$[(3).(8).*1{\cdot}11] \quad \vdash : \sim p \supset q \,.\supset .\, \sim q \supset \sim(\sim p) \qquad (9)$$

$$\left[*2{\cdot}05 \,\frac{\sim p \supset q,\ \sim q \supset \sim(\sim p),\ \sim q \supset p}{p,\qquad q,\qquad r}\right] \vdash :: \sim q \supset \sim(\sim p) \,.\supset .\, \sim q \supset p :$$

$$\supset :. \sim p \supset q \,.\supset .\, \sim q \supset \sim(\sim p) :\supset : \sim p \supset q \,.\supset .\, \sim q \supset p \qquad (10)$$

$$[(6).(10).*1{\cdot}11] \vdash :. \sim p \supset q \,.\supset .\, \sim q \supset \sim(\sim p) :\supset :$$

$$\sim p \supset q \,.\supset .\, \sim q \supset p \qquad (11)$$

$$[(9).(11).*1{\cdot}11] \vdash : \sim p \supset q \,.\supset .\, \sim q \supset p$$

(PM, S. 106–7)

Russell und Whitehead heben hervor, dass die Sätze (3), (4), (6) von der Form p1⊃p2, p2⊃p3, p3⊃p4 sind, und die Satzform p1⊃p4 (mit Antezedens „~p⊃q“ aus (3) und Sukzedens „~q⊃p“ aus (6)) genau der des zu beweisenden Satzes entspricht. Um sich die langen Zwischenschritte (5)–(11) in Zukunft ersparen zu können und so dem Leser die Lektüre durch leichtere Nachvollziehbarkeit der Beweise bequemer zu machen, werden die verwendeten Umformungsprozesse (die den Sätzen *1.11 und *2.05 gehorchen) nur mehr durch ein Kürzel ([Syll]) angedeutet und schlicht mittels des gemeinhin als „Barbara“ bezeichneten Schlussschemas die jeweiligen Übergänge gemacht. Da dann außerdem die explizite Angabe der Implikation, aufgrund welcher ein Satz aus einem anderen folgt, als vernachlässigbar ausgewiesen wird – da man anstatt von „⊢p1“, „⊢p1⊃p2“, „⊢p2“ vereinfachend „⊢p1.⊃.⊢p2“ (plus einem kurzen Verweis auf den die Implikation rechtfertigenden Satz in Klammer) schreiben kann – schrumpft der ganz analog zu führende Beweis des Komplements obigen Satzes zu einem beträchtlich kürzeren zusammen.

$$*2{\cdot}16. \quad \vdash : p \supset q \,.\supset .\, \sim q \supset \sim p$$

Dem.

$$[*2{\cdot}12] \quad \vdash .\, q \supset \sim(\sim q) \,.\supset$$

$$[*2{\cdot}05] \quad \vdash : p \supset q \,.\supset .\, p \supset \sim(\sim q) \qquad (1)$$

$$\left[*2{\cdot}03 \,\frac{\sim q}{q}\right] \vdash : p \supset \sim(\sim q) \,.\supset .\, \sim q \supset \sim p \qquad (2)$$

$$[\text{Syll}] \quad \vdash .\, (1) \,.\, (2) \,.\supset \vdash : p \supset q \,.\supset .\, \sim q \supset \sim p$$

(PM, S. 107)

Die Idee ist hier, dass in den Reihen (5)–(11) von *2.15 der Nachweis für die Ableitbarkeit des Syllogismus „Barbara“ aus den angenommenen Prinzipien erbracht wurde, und man daher diese Schlussform für weitere Beweise heranziehen darf, ohne jedes Mal auf die ihr zugrundeliegenden Axiome zurückgreifen zu müssen. Während bei den zuvor gegebenen Definitionen zumindest noch eingeräumt wurde, dass sie, zusätzlich zu der durch sie erwirkten kürzeren Schreibweise, auch den Zweck hätten, den Leser auf wichtige Zusammenhänge aufmerksam zu machen, dienen die Abkürzungen ganzer Schlussprozesse mittels einfacherer Symbole einzig dem Zweck, den Leser nicht durch unnötige Ausführlichkeit zu ermüden. Man braucht ja bloß an die entsprechende Stelle zu blättern, um den Nachweis für die Richtigkeit des Schemas zu erhalten.

6 Addieren mit den *Principia Mathematica*

Da die Kritik Wittgensteins an der von Russell/Whitehead präsentierten Auffassung dessen, wie die Addition eigentlich funktioniere, ansetzt, wird es nicht unnütz sein, kurz auf die in den *Principia Mathematica* verfolgte Idee zur Konstruktion der Summe zweier Zahlen einzugehen. Wir sahen in der weiter oben gegebenen Charakteristik, dass Russell die Zahl als eine Klasse von gleichzahligen Klassen definiert, deren Gleichzahligkeit allerdings nicht durch jeweiliges Abzählen der Elemente, sondern an Hand eines 1→1 Abgleichs festgestellt wird. Der Gedanke von der eindeutigen Zuordenbarkeit findet sich in den *PM* unter dem Namen der „similarity relation“, die ihrerseits auf den Begriff der formalen Äquivalenz zurückgeführt wird. Zwei Aussagefunktionen gelten dabei als formal äquivalent, wenn dieselben Gegenstände, die der einen genügen, auch die andere zu einer wahren Proposition (als der auf diese Weise gesättigten Aussagefunktion) machen. (PM, S. 21) Weil man eine Klasse als die Menge derjenigen Gegenständen denken kann, die einer bestimmten Funktion genügen, wird die formale Äquivalenz zwischen zwei Aussagefunktionen herangezogen, um die Elemente derjenigen Klassen, die durch diese beiden Funktionen definiert sind, als gleichzahlig auszuweisen. Die Menge der Gegenstände, die dem einen Begriff genügen, genügen auch dem anderen, wenn die beiden Begriffe äquivalent sind.

> The characteristics of a class are that it consists of all the terms satisfying some propositional function, so that every propositional function determines a class, and two functions which are formally equivalent (*i.e.* such that whenever either is true, the other is true also) determine the same class, while conversely two functions which determine the same class are formally equivalent. When two functions are formally equivalent, we shall say that they have the same *extension*. (PM, S. 196)

Die Definition ist von der Begriffsäquivalenz hin zur Gleichzahligkeit von Klassen gerichtet, d. h., es wird nicht die formale Äquivalenz zwischen Begriffen mittels der Identität von Klassen bestimmt, sondern die formale Äquivalenz wird herangezogen, um ihrerseits die Ähnlichkeit von Klassen zu etablieren. Für den Logizisten ist schließlich der Begriff primär, weshalb er ausgehend von intensionalen Zusammenhängen (Äquivalenz der Begriffe) die auf empirische Größenverhältnisse anwendbare Mathematik erklären will. Entsprechend ist es auch nicht die Gleichzahligkeit der sie enthaltenden Terme, mittels welcher zwei Klassen als die gleiche Anzahl habend bestimmt werden. Vielmehr wird die Anzahl der Elemente, die zwei Klassen konstituieren, dadurch eruiert, dass man auf die durch eindeutige Zuordnung erhaltene Ähnlichkeitsrelation zurückgreift und schaut, durch welchen Zahlbegriff eine der beiden Klassen definiert wurde. Auf diese Weise sei die Zahl jeder beliebigen Menge allein mit Blick auf jene Funktion feststellbar, durch die eine beliebige andere Menge, die jedoch mit jener ersteren in einem Verhältnis der möglichen 1→1 Korrelation steht, definiert ist.

Mit der bloßen Identifikationsmöglichkeit der Anzahlen von Klassen ist freilich noch wenig anzufangen, sie dient aber als der Ausgangspunkt zur Definition grundlegender mathematischer Operationen. Um etwa die arithmetische Addition zu erklären, wird die aus der Satzlogik genommene Disjunktion nun auf Klassen angewandt. Wie nämlich die Disjunktion („p∨q“) zweier Sätze nur dann gilt, wenn mindestens eine der beiden Aussagen wahr ist, gilt die auf Klassen angewandte Oderverknüpfung nur für den Fall, dass die durch sie definierte Klasse einzig Elemente enthält, die Elemente des einen oder des anderen Disjunktes sind. Die so erhaltene Menge entspräche nun genau der Summe der durch die beiden Disjunkte bestimmten Gegenstände. Da die Kardinalzahlen als Klassen von Klassen definiert werden (den ungefähren Gedankengang dazu haben wir vorhin bereits skizziert), muss die Summe zweier Zahlen als jene Menge begriffen werden, von der gezeigt werden kann, dass sie das Resultat eines 1→1 Abgleichs der Elemente derjenigen Klassen ist, die definiert sind durch die beiden disjunktiv miteinander verbundenen Zahlbegriffe.

> Thus in cardinal arithmetic, if no two members of [the class of classes] κ have any term in common, the arithmetical sum of the numbers of members possessed by the various members of κ is the number of members possessed by $s'\kappa$. (PM, S. 317)

Entscheidend ist hier, dass es immer ein Begriff höherer Ordnung ist, der die Summe der unter ihm sich befindlichen Elemente bestimmt (gleichgültig ob sie nun selbst wieder Klassen oder Klassen von Klassen etc. sind); dass also die Identitätsmacht nicht von den Gegenständen, sondern vom Begriff herrührt; dass aber dennoch die Gegenstände insofern das letzte Wort behalten, als der Nachweis der Zuordenbarkeit zweier Gegenstandsmengen, d. i. das Feststellen der Ähnlichkeitsrelation („similarity-relation“ *sm*), allererst der Garant dafür ist, dass sie tatsächlich Elemente von Klassen sind, die ein- und derselben Aussagefunktion genügen.

> In order to prove that two classes α and β have the same cardinal number of terms, it is generally necessary, in the fundamental arithmetical propositions with which we are concerned, actually to construct a relation $\mathcal{R}$ such that $\mathcal{R} \in \alpha(sm)\beta$. (PM, S. 476)

In letzter Konsequenz hängt es demnach immer von der tatsächlichen Etablierbarkeit einer solchen Zuordnung zwischen den Elementen der durch den jeweiligen Zahlbegriff definierten Klasse ab, wenn es darum geht den Wert einer Addition zu bestimmen.

Zur Erklärung der Addition von Kardinalzahlen bedient man sich in den *PM* also des Begriffes der Vereinigungsmenge zweier Klassen, die keines ihrer Elemente gemeinsam haben, d. h., disjunkt sind. Die arithmetische Summe zweier Klassen $\alpha + \beta$ wird daher mittels der logischen Summe $\alpha \cup \beta$ definiert (*110.01), die ihrerseits auf das Disjunkt der die Elemente der beiden Klassen definierenden Aussagefunktionen zurückzuführen ist (*22.03). Die Definition der Addition sieht dann folgendermaßen aus; wobei ich – aus Gründen, die gleich deutlich werden – derjenigen Darstellung folge, die Ramharter und Rieckh in Anlehnung an heute übliche Standards in ihrem Buch *Principia Mathematica auf den Punkt gebracht* (2006) gebrauchen:

*110.01 $\alpha + \beta \coloneqq \{(x, \Lambda \cap \alpha) | x \in \iota''\alpha\} \cup \{(\Lambda \cap \alpha, y) | y \in \iota''$

(Ramharter/Rieckh 2006, S. 54)

Nun ist es erstaunlich, dass in dem Definiens kein einziges ‚~‘ oder ‚∨‘ vorkommt, sondern lauter Zeichen, die ihrerseits einer Erklärung bedürfen. Solche Erklärungen finden sich auch; und zwar dort, wo diese Zeichen durch ihre Definitionen eingeführt wurden. Ich werde nicht versuchen den obigen Ausdruck in diejenigen Bestandteile auseinanderzunehmen, denen er nach Russell/Whitehead eigentlich entspräche. Ramharter und Rieckh haben diese Arbeit für einen seiner Bestandteile durchgeführt, indem sie ‚$\vdash \alpha \cap \Lambda = \Lambda$‘ rückübersetzten. Das Ergebnis (ich gebe die Kopie wieder) sieht so aus:

$$\vdash \forall\phi(\neg(\exists\chi(\forall z\neg(\neg(\neg(\neg(\neg(\chi!z) \vee (\neg(\neg(\psi z) \vee \neg(\neg(\forall\phi(\neg\phi!z \vee \phi!z)))))) \vee \neg(\neg(\neg(\neg(\psi z) \vee \neg(\neg(\forall\phi(\neg\phi!z \vee \phi!z))))) \vee (\chi!z)))) \vee \neg(\phi!(\chi!x))))) \vee (\exists\psi(\neg(\neg(\forall x(\neg(\neg(\neg\psi!x \vee \neg(\forall\chi(\neg\chi!x \vee \chi!x))) \vee \neg(\neg(\neg(\forall\chi(\neg\chi!x \vee \chi!x))) \vee \psi!x)))) \vee \neg(\phi!(\neg(\forall\chi(\neg\chi!x \vee \chi!x)))))))$$

(Ramharter/Rieckh 2006, S. 81)

Man erahnt vielleicht, welch ungeheure Länge das rein in primitiven Ausdrücken (d. h. ‚~‘, ‚∨‘, ‚∃‘, ‚∀, den damit verknüpften „propositional functions“ sowie den Klammern bzw. Punkten) abgefasste Korrelat zu Satz *110.01 annehmen würde, wollte man eine derartige Rückübersetzung für die gesamte Formel in Angriff nehmen. Bedenkt man außerdem, dass der Zweck von Ausdrücken wie dem obigen darin liegt, im Rahmen von Beweisen als Zwischenschritt (bzw. Substitutionsanleitung) zu fungieren, wird klar, dass wohl selbst ein ganzes Menschenleben kaum hinreichte, um ein den *PM* analoges Buch – ohne Abkürzungen – niederzuschreiben. Um nochmals mit Frege zu sprechen:

> Wenn demnach die Definitionen, logisch betrachtet, eigentlich ganz unwesentlich sind, so haben sie doch grosse Wichtigkeit für das Denken, wie es bei uns Menschen wirklich abläuft. (NS, S. 226)

7 Die Strichnotation

Zum Schluss dieses Abschnittes möchte ich nun noch zeigen, dass Wittgenstein keine selbstgeschaffenen Geister attackiert, wenn er die Russellsche Idee der Addition zuweilen mit der Strich- (| | | | | | |) oder der Einer-Notation (((((((1)+1)+1)+1)+1)+1)+1) gleichsetzt und dieses Bild als für die Erklärung unserer Zahlen unzureichend problematisiert. Ich will keineswegs behaupten, dass sich dergleichen – sozusagen manifest – in den *PM* findet; glaube aber wahrscheinlich machen zu können, inwiefern den Verfassern etwas Ähnliches vorgeschwebt haben muss. Zugleich muss ich vorausschicken, hier keine erschöpfende Behandlung dieser These liefern zu können, da dies einer eingehenderen (und den Rahmen sprengenden) Begutachtung der einzelnen Argumentationsschritte bedürfte.

Die Grundlage für den Aufbau der Kardinalzahlen stellen die Einheitsklassen dar, das sind jene Klassen, die aus nur einem Element bestehen. (PM, S. 356) Solche Einheitsklassen („unity classes“) sind durch die Identitätsrelation charakterisiert, die die unter sie fallenden Elemente als sich selbst identisch ausweist und damit belegt, dass sie aus nur einem Element bestehen. Im nächsten Schritt definiert man nun die „1“ als diejenige Klasse, die alle Einheitsklassen enthält – um allerdings gleichzeitig zu betonen, dass der Nachweis dafür, dass es sich bei dem so definierten Ausdruck um eine *Kardinalzahl* handelt, erst möglich werde, wenn dieser Begriff (der Kardinalzahl) aus den logischen Grundkonzepten gefolgert worden ist. (PM, S. 363) Gerechtfertigt wird dieses Vorgehen damit, dass zwar die rein *logischen* Merkmale der Eins (etwa dass alle Elemente der von ihr enthaltenen Klassen sich selbst identisch sind) „für den methodischen Aufbau der Kardinalzahlen notwendig“ sind (Ramharter/Rieckh 2006, S. 49), dass aber ihre *arithmetischen* Eigenschaften (z. B. ihre Rolle im Rahmen von Addition und Multiplikation) erst später entwickelt würden.

Die logische Eigenschaft der Identität der die Einheitsklasse konstituierenden Elemente wird herangezogen, um die Klasse der Bijektionsrelationen und mittels jener die Idee der Gleichmächtigkeit zweier Klassen zu erklären – wobei dieser Begriff der Gleichmächtigkeit dann zur Bildung des Kardinalzahlenbegriffes dient. Einer solchen Vorgehensweise liegt der weiter oben bereits hervorgehobene Gedanke zugrunde, dass zur Bestimmung der Anzahlengleichheit zweier Klassen die Ordinalität ihrer Elemente nicht von Interesse ist; man müsse vielmehr nur zeigen, dass zwischen ihren Elementen eine Bijektion existiert. Demgemäß wird die Kardinalzahl einer Klasse α als die Klasse all jener Klassen definiert, die zu α in der Relation eindeutiger Zuordenbarkeit ihrer Elemente stehen. (PM, Vol. 2, S. 4ff.)

Die Definition der Kardinalzahlen als Äquivalenzklassen setzt die Eins damit insofern voraus, als dem Begriff der Gleichmächtigkeit ihrer Klassen das Konzept der eindeutigen Zuordnung (Bijektion) vorausgeht, und diesem wiederum jenes der Einheitsklassen, als denjenigen Gegenständen zwischen denen die Bijektionsrelation besteht. Damit soll nicht auf einen Zirkel im Argument hingewiesen werden, sondern einzig darauf, dass das Rechnen mit den Kardinalzahlen nach Russell/Whitehead letztlich als Operation mit Einheitsklassen, deren Bestand ihrerseits durch die Identität ihrer Elemente sichergestellt wird, zu denken ist. – Und es scheint der Strichkalkül dabei herauszukommen, wenn man diese Idee darzustellen versucht, ohne den formalen Aufbau selbst nachzeichnen zu wollen.

In Kapitel 3 des vorigen Abschnitts habe ich Russells Argumente für den begründungstheoretischen Vorzug der intensionalen, d.i. der vom Begriff ausgehenden, gegenüber der extensionalen Definition von Klassen vorgestellt, die er dann bei seiner Erklärung der Zahl geltend machte. Bevor ich (in Abschnitt IV) auf die von Wittgenstein eingeforderte Übersichtlichkeit von Beweisen – als dem eigentlichen Ausgangspunkt seiner Einsprüche gegen das logizistische Begründungsprojekt – zu sprechen komme, möchte ich Bemerkungen aufgreifen, in denen er das Verhältnis zwischen Addition und Disjunktion explizit thematisiert und auf diesem Wege das Primat der intensionalen Definition problematisiert. Diese Bemerkungen (MS 122, 9r–11r, 15r–16r, 17r–21v) wurden von den Herausgebern zum größten Teil nicht in die *BGM*-Edition mitaufgenommen: ein Vorgehen, das sich vielleicht dadurch rechtfertigen ließe, dass Wittgenstein sie recht unvermittelt abbricht und im weiteren Verlauf auch nicht mehr auf sie zurückgreift. Es scheint nicht möglich, die genauen Ursachen dafür zu nennen, aber ich vermute, dass er diese Kritik, die der Fregeschen Unterscheidung von Begriff und Gegenstand verpflichtet ist, deswegen so abrupt beendet, weil er sie für zu dogmatisch hält. Indem ich am gegeben Ort (gegen Ende diese Abschnitts) entsprechende selbstkritischer Bemerkungen einfließen lasse, kann diese Vermutung hoffentlich erhärtet werden. Der Wert dieser Bemerkungen besteht meines Erachtens vor allem darin, dass sie pointiert das Problem benennen, mit dessen unterschiedlichen Manifestationen wir in der Folge wieder und wieder konfrontiert sein werden: die schlechterdings durch nichts zu schließende Kluft zwischen Erfahrung und Norm, die sich immer dann zu öffnen scheint, wenn wir nach der Rechtfertigung des mathematischen Satzes fragen. Zudem lässt sich anhand der gleich folgenden Überlegungen gut veranschaulichen, inwiefern das Begründungsstreben von vorgefassten Ideen betreffs der Bedeutung mathematischer Sätze geleitet ist, wobei empirisch-wissenschaftliche Aussagen als ihre Vorbilder dienen. Die Spannung zwischen der sinnstiftenden Rolle mathematischer Sätze und ihrer Tauglichkeit zur Weltstrukturierung ergibt sich demnach gerade dann, wenn die Mathematik in Analogie zu den anderen (etwas weniger) exakten Wissenschaften gedacht, und der durch den mathematischen Satz zum Ausdruck kommende Standard zugleich so gedeutet wird, als beschriebe er allgemeinste Zusammenhänge *in*, oder die eigentlichen Strukturen *unter* der Welt.

Die Konstruktion mathematischer Sätze nach dem Schema von Begriff und Gegenstand drängt zu der Frage, wie ihre Anwendbarkeit verbürgt werden könne, ohne dabei ihren normativen Status zu unterlaufen. Dass dies nicht möglich ist, glaube ich mit Verweis auf die von Wittgenstein angestellten Überlegungen zum Regelfolgen zeigen zu können. Die Pointe wird sein, dass sich der normative Status mathematischer Sätze nichts anderem verdankt, als der bloßen Tatsachen, dass wir sie als Paradigmen der Darstellungsweise gebrauchen. Jeder Versuch, mathematische Sätze durch Sachlagen zu rechtfertigen, die ihnen präexistent sind und auf die sie verweisen, untergräbt durch eben dies Bestreben das einzige Charakteristikum, das sie als solche auszeichnet. (Wodurch sich zuletzt der bloße *Versuch* als ein widersinniges, leerlaufendes Unterfangen erweist.) Mit Blick auf die Anwendung kann zwar deutlich werden, dass der mathematische Satz gewisse Regelmäßigkeiten der Empirie wiederspiegelt, die uns seine Annahme nahelegten; im Rahmen einer solchen Betrachtung wird der Satz aber eben nicht als Paradigma angesehen (gebraucht), sondern das anthropologische Faktum unserer Annahme dieses Satzes wird in Bezug gesetzt zu Gleichmäßigkeiten (‚fast immer...‘) in der Welt.

1 Linzer und/oder Wiener

Das Argument für die intensionale Definition der Zahl ist bei Frege wie Russell dadurch motiviert, den ganz an den Gegenständen verhafteten „Pfeffernussstandpunkt“ (GGA II, S. 150; MS 122, 9v) Millscher Prägung, bei dem die Zahl eine Anhäufung von Dingen ist, zu umgehen. Im Zuge seiner Kritik an Weierstraßens Lehre von den Irrationalzahlen (GGA II, §§ 148–155) bemerkt Frege, dass diese empiristische Erklärung der Zahl die beiden größten nur denkbaren Fehler begehe, indem sie erstens die Zahl mit ihrem Träger verwechsle, und zweitens dieser Träger nicht als Begriff, sondern als „Aggregat“ oder „Reihe von Dingen“ genommen werde.

> Der Unterschied liegt darin, daß das Aggregat aus Gegenständen besteht, die durch Beziehungen zusammengehalten werden und Theile des Aggregats genannt werden können. Mit der Vernichtung der Theile wird auch das Ganze vernichtet. Dagegen sind das, was den Bestand des Begriffes – oder seines Umfanges – ausmacht, nicht die Gegenstände, die unter ihn fallen, sondern seine Merkmale; das sind die Eigenschaften, die ein Gegenstand haben muss, um unter den Begriff zu fallen. (GGA II, S. 150)

Die einigende Kraft, die Gegenstände hinsichtlich ihrer Eigenschaften zusammenhält, kann nicht die abstrahierende der Anschauung, sondern nur die ordnende des Begriffes sein. Was fünf Wiener und fünf Linzer gemeinsam haben, das ist nicht eine Eigenschaft, die die einzelnen Individuen teilen, und welche man gewinnt, indem von allen singulären Kontrasten der Personen (wie sie sich etwa in Haarpracht oder Größe unterscheiden) absieht. Sondern das Gemeinsame von fünf Wienern und fünf Linzern besteht darin, dass den beiden Begriffen ‚Linzer‘ und ‚Wiener‘ dieselbe Anzahl an unter sie fallenden Gegenständen zugesprochen wird. Gleichzahligkeit zweier Begriffe ist zwar dadurch zu belegen, dass es eine Beziehung gibt, welche die unter die beiden Begriffe fallenden Gegenstände einander eindeutig zuordnet. Logisch ist diese Zuordnung aber nur dann, wenn sie wiederum vom Begriffe ausgeht. Daher ist der Begriffsumfang nicht dadurch zu definieren, dass man die unter den Begriff fallenden Gegenstände nennt, sondern als das Resultat (Funktionswert) davon, dass ihm (dem Begriff) eine gewisse Eigenschaft zukommt: nämlich die, *so* und *so* viele Dinge unter sich zu befassen. Die beiden Begriffe ‚Linzer‘ und ‚Wiener‘ sind folglich einem anderen Begriff (dem der Fünfzahl) untergeordnet, der es erlaubt, diese Prädikation (‚unter den Begriff … fallen fünf Gegenstände‘) vorzunehmen. Allgemein gewendet, braucht es stets einen Begriff höherer Ordnung, um den Umfang eines Begriffes auf logische Weise zu definieren, der selbst wiederum gebraucht wird, um zwei Begriffe als gleichmächtig ausweisen zu können. Deswegen bestimmt Frege die Anzahl eines Begriffes F als den Umfang des Begriffes „Begriff gleichzahlig dem Begriffe F.“ (GLA, S. 117; vgl. S. 85.) Anstelle von Begriffsumfängen gebraucht Russell Klassen zweiter Ordnung und sagt:

> *The number of a class is the class of all those classes that are similar to it.* (IMP, S. 18) [*]

Beide sehen zwar erst im Korrelieren der tatsächlich unter die jeweiligen Begriffe fallenden Gegenstände den Nachweis der Anzahlengleichheit, meinen aber selbst dann vom Bestehen oder Nichtbestehen einer solchen Gleichheit reden zu können, wenn dieser Nachweis (noch) gar nicht erbracht worden ist. Diese Herangehensweise macht es möglich, eine Definition der Zahl zu geben, die sozusagen aus Richtung des Begriffes kommt und nicht bei den Elementen beginnt. Den Hintergrund für diese Überlegung bildet das Substitutionsprinzip. (Siehe GLA, S. 76, wo Frege Leibniz zitiert: „Eadem sunt, quorum unum potest substitui alteri salva veritate.“) Die Übereinstimmung eines Gegenstandes mit sich selbst wird als a priori einleuchtender Beleg für die identitätsstiftende Funktion betrachtet, welche es erlaubt, die Elemente voneinander geschiedener Klasse einander eineindeutig zuzuordnen, um so die Zahl vollkommen losgelöst von jeglicher Praxis des Zählens zu bestimmen. Darauf vertrauend, dass die Ähnlichkeitsrelation zwischen großen Mengen wesentlich dieselbe sei wie die zwischen Mengen, deren Gleichheit man auf einen Blick erkennt, glaubt man einer genaueren Begutachtung dessen, wie die 1→1 Zuordnung im je konkreten Fall ausschaut, enthoben zu sein. Ist die Zahl auf diesem Wege erst einmal unter den Begriff gebracht, scheint einer Gleichsetzung von Mathematik und Logik (als dem von Leibniz so genannten *Calculus Ratiocinator*) nichts mehr entgegenzustehen. Die Addition von Zahlen wird mit dem Disjunkt ihrer Begriffe (der Zahlbegriffe) unterlegt, als dem eigentlichen Bindeglied der mathematischen Operation zur wirklichen Welt. Die Definition der logischen Summe zweier Klassen ($\alpha \cup \beta = \hat{x}(x \in \alpha . \vee . x \in \beta) \;\; Df.$) als diejenige Klasse, welche genau jene Elemente enthält, die entweder unter die eine oder die andere fallen (PM, S. 43), zeigt dann „das allgemeine Schema der Anwendung der Addition;“

> gleichsam die allgemeine Art, wie sich die Addition auf die Dinge bezieht, die Art ihres Zusammenhangs mit dem worauf sie angewendet wird. (MS 122, 9r)

Während nach empirizistischer Deutung die Addition im eigentlichen Sinne eine Aggregation von Gegenständen ist, sodass man die Einwohner von Linz und Wien nachgerade zusammenschütten müsste, um festzustellen, wie viele Menschen in beiden Städten wohnen, „sagt uns die R’sche Erklärung, daß es sich um keinerlei Zusammenlegen von Gegenständen handelt.“ (10r)

---

[*] Dass Russell mit seiner Klassentheorie zuweilen selbst wieder in den von Frege hier zurückgewiesenen „Pfeffernussstandpunkt“ kippt, ist etwa aus folgender Bemerkung zu entnehmen:

> Since extensional functions are many and important, it is natural to regard the extension as an object, called a *class*, which is supposed to be the subject of all the equivalent statements about various formally equivalent functions. Thus *e.g.* if we say “there were twelve Apostles,” it is natural to regard this statement as attributing the property of being twelve to a certain collection of men, namely those who were Apostles, rather than as attributing the property of being satisfied by twelve arguments to the function “$\hat{x}$ was an Apostle.” (PM, S. 77)

Demnach ist der „Bestand des Begriffes“ nicht die Eigenschaft der unter ihn fallenden Gegenstände, sondern es sind die Gegenstände selbst, durch die er konstituiert wird. Der unvermittelte Übergang vom Singular (*der* Bestand, *collection*) in den Plural (*die* Gegenstände, *Apostles*) ist gerade Teil des in Frage stehenden Problems; welches nicht dadurch übergangen werden sollte, dass man auf die angebliche ‚Natürlichkeit‘ einer Redensart pocht.

> Ich habe also die beiden Begriffe zusammengenommen, nicht die Städte oder ihre Einwohner – aber habe ich nicht doch in einem Sinne die Einwohner zusammengenommen? – nämlich, indem ich sie *zählte* & mit den Zeichen, die ich so erhielt, operierte. (ebd.)

Wittgenstein gesteht hier in einem ersten Schritt das Argument gegen den an den Dingen verhafteten Empiristen zu. Allerdings fragt er noch im selben Atemzug, wie denn der Logizist selbst zu seinen Einwohnerzahlen anders kommen könne, als dass er die Linzer und Wiener zählte, um dann mit dem Ergebnis entsprechend zu verfahren. Um nämlich den 1→1 Abgleich der Gegenstände, die unter die Begriffe ‚Wiener' und ‚Linzer', und jener, die unter den Begriff ‚Wiener oder Linzer' fallen, durchführen, und so den Tautologienachweis für das in logischer Notation angeschriebene Summenschema liefern zu können, müssen die Variablen in der jeweiligen Anzahl bereits vorliegen. Dann aber scheint es, als müssten die Linzer und Wiener bereits zusammengezählt worden sein, ehe man überhaupt auf die Anzahl der unter den Begriff ‚Linzer oder Wiener' fallenden Gegenstände (Menschen) kommen konnte.

Wittgenstein problematisiert hier die Privilegierung der intensionalen Definition von Klassen gegenüber der extensionalen Betrachtungsart (oder auch: den Vorzug des Sinns$_F$ vor der Bedeutung$_F$). Allerdings tut er dies nicht, um sich nun beispielsweise Ramsey (*Foundations of Mathematics*, 1925) anzuschließen, der für eine strikt extensionale Deutung der Klasse eintritt. Vielmehr stellt er mit Blick auf unseren tatsächlichen Sprachgebrauch fest, dass wir zwar fast immer die Summe zweier Anzahlen angeben können, indem wir das Disjunkt zweier Begriffe bilden. So ist der Ausdruck „Zahl der Einwohner von Linz und Wien zusammengenommen" gleichbedeutend mit „Zahl der Leute, die entweder Linzer oder Wiener sind". Dass aber der sich des Oder bedienende Ausdruck in irgendeiner Weise *fundamentaler* sei oder gar dem anderen der Möglichkeit nach vorhergehen würde, ist damit nicht gesagt. Daher fragt Wittgenstein:

> muß ich den Begriff der Disjunktion der beiden Begriffe bilden wenn ich von der Summe der beiden Anzahlen reden will? In den meisten Fällen werde ich es nicht tun sondern die beiden Zahlen addieren & von der Summe der beiden Zahlen reden. (10v)

Russells Erklärung hebt genau genommen einen gewissen Zusammenhang zwischen der Addition und der Funktion des Oderbegriffs hervor: ein Hinweis auf das Arbeiten unserer Sprache, der unter Umständen hilft, Konfusionen vorzubeugen. Die Gefahr besteht aber darin, diese „Möglichkeit des Vergleichs, die uns beeindruckt [...] für die Wahrnehmung einer höchst allgemeinen Sachlage" zu nehmen (PU, § 104). In den *Lectures on the Foundations of Mathematics* (1939) heißt es daher:

> When Turing said that Russell's definitions make clear the *point* of arithmetic, he means: Russell's explanation makes clear, for instance, the connexion between the addition of two numbers and the disjunction of two concepts. "2+3=5" doesn't mean that you put 2 here and 3 there..., but that if a concept has 2 and another concept has 3, the concept which is the disjunction of the two has 5. It makes clear in a way what it means to say "in both rooms together" – that is, in either this room or that room. So far so good. It shows a relation between addition and "or". This clears matters as far as it goes. But what in a particular case we are to call the sum of two numbers is not in any way clear. (LFM, S. 265)

Wittgenstein erkennt die Hervorhebung jenes spezifischen Aspekts unserer Sprache an, hält aber die hypostasierende Deutung durch den Philosophen, der die Oderverknüpfung von Begriffen quasi zur Möglichkeitsbedingung der Addition erklärt, für völlig fehlgeleitet. Und so wie Frege und Russell ausgehend von der Betrachtung unseres Umgangs mit kleinen Zahlen die Begriffssumme mit der Summe zweier Anzahlen identifizieren zu dürfen glaubten, relativiert Wittgenstein diese Identifikation wieder – diesmal mit Blick auf unseren Umgang mit größeren Zahlen.

2 Operation und Ergebnis

Die von Wittgenstein an den Begründungstheoretiker herangetragene Frage ist, „wie man, ohne aus Russells logischem Kalkül herauszutreten zum Begriff der *Menge der Variablen* in dem Ausdruck ‚$(\exists x, y, z\ etc)$‘ kommen kann, dort wo dieser Ausdruck unübersehbar ist?“ (MS 122, 32v) Motiviert ist diese Frage dadurch, das Bild mathematischer Sätze, welches in Anlehnung an empirische Aussagesätze entworfen wurde, und in dem sie als referentielle, d.i. von Gegenständen oder Elementen (welcher Art immer) handelnde Sätze erscheinen, als Luftgebilde auszuweisen. Den Blick von dieser Chimäre abwendend, sollen wir durch die Betrachtung des alltäglichen Gebrauchs – wo der mathematische Satz uns als Paradigma dient – dahin gelenkt werden, nicht länger über seine Anwendbarkeit irritiert zu sein. Denn das Vorbild wird befolgt, nicht gedeutet; es ist der Maßstab des Richtigen, und damit nicht die Erklärung, sondern die Anleitung dafür, was wir richtiges Vorgehen nennen. – Die Verbindung zwischen der Frage nach der Identität eines Mengenausdrucks und der in diesem Zusammenhang problematisierten Vorstellung von der Mathematik als einer in Aussagesätzen abgefassten Wissenschaft wird im nächsten Kapitel noch deutlicher herausgearbeitet. Im Grunde geht es einfach darum, dass für empirische, d. h. Kausalitäten aufzeigende Untersuchungen im Rahmen mathematischen Beweisens kein Platz sein sollte. Dies ist aber erforderlich, wenn Mengenausdrücke im Kalkül nicht ohne weiteres voneinander unterschieden bzw. miteinander identifiziert werden können. Sobald (empirische) Nachforschungen nötig werden, um sich der Identität von Ausdrücken zu versichern, sollte das mathematische Interesse aber auf der operationalen Genese jener Paradigmen liegen, nach denen dabei vorgegangen wird. Da die Aussage, zwei Begriffe seien einander identisch, nur Sinn macht, wenn klar ist, *wie* die postulierte Identität festzustellen wäre, problematisiert Wittgenstein die vom Logizisten in Worten vollzogene Gleichsetzung der Summe der Anzahlen zweier Begriffe mit der Anzahl ihrer Begriffssumme; – wenn nämlich noch gar nicht klar ist, welches Vorgehen eine solche Identifikation rechtfertigt. Sollte sich herausstellen, dass dieses Vorgehen seinerseits erfordert, sich nach gewissen (mathematischen) Untersuchungsstandards zu richten, dann ist der paradigmatische Status verloren, den man diesem Vorgehen zusprechen können müsste, um die Identität der Begriffe zu belegen. – Die Feststellung, man verstehe unter der logischen Summe der Anzahlen zweier Begriffe die Anzahl der Begriffssumme, zieht ihren Sinn also daraus, dass man angeben kann, wie man von ersterer zur zweiten gelangt. Außerdem aber muss der hierfür angeführte Sinnbeleg eine *mathematische* Operation darstellen, und er darf keine *empirische* Untersuchung erfordern, wenn man damit die Addition erklären möchte.

> Es ist falsch zu sagen: „Unter der Summe der Anzahlen zweier Begriffe verstehe ich die Anzahl der Begriffssumme“ – sondern ich verstehe darunter dasselbe wie die Anzahl der Begriffssumme, wenn sich diese Anzahl in bestimmter Weise aus den beiden ersten Zahlen berechnen läßt. D.h., wenn das was man unter ‚Anzahl der Begriffssumme‘ versteht eben *so* aus den Zahlen der ersten Begriffe zu erhalten ist. (17r)

Es reicht demnach nicht hin, die Disjunktion zweier Begriffe zu bilden, um dann zu sagen, die Anzahl der unter sie fallenden Gegenstände sei die Summe jener beiden; – denn was ist jene Anzahl? Zwar kann man den Ausdruck „die numerische Summe der Begriffe ‚φ‘ und ‚ψ‘“ als gleichbedeutend mit der Anzahl des Begriffes ‚$\varphi \vee \psi$‘ definieren, – die Summe ist aber damit noch nicht berechnet. (20v) Wenn man die numerische Summe zweier Begriffe mit der Anzahl der logischen Summe gleichsetzt, ist damit solange noch nichts geschehen, als bis man hinzusetzt, *wie* diese Zahl aus den beiden anderen zu berechnen ist. Und es drängt sich dann die Frage auf, wieso überhaupt der Umweg über die Begriffe eingeschlagen wird, wo man doch gleich die Berechnung zur Definition der Zahlensumme heranziehen könnte. Unter der Zahl der Begriffssumme verstehen wir eben etwas, „was durch eine bestimmte Rechnung aus den Zahlen der Summandenbegriffe zu erhalten ist.“ (18r)

Nun würde der Logizist an dieser Stelle wohl erwidern, dass wir durch die bloße Beschreibung der Rechentechnik noch nichts über ihre Applikation auf Gegenstände erfahren: dass uns die *inhaltliche* Grundlage des Rechnens fehlt, auf die sich die Anwendbarkeit mathematischer Sätze stützt. Und, so der Logizist weiter, mit dem Wegfall der Begriffsebene blieben die Operation und ihr Ergebnis außerdem an den Dingen hängen – womit wir erst wieder den Problemen ausgesetzt wären, wie wir sie beim Empiristen konstatierten. Die Arithmetik wäre zur kontingenten Wahrscheinlichkeitswissenschaft geworden, bedingt durch die begrenzten psychologischen Fähigkeiten des Menschen und den wechselnden Gegebenheiten der physischen Welt.

Hier stehen einander zwei Erklärungen gegenüber, die auf ein je eigenes Verständnis der Mathematik verweisen. Die logizistische fußt auf der Unterscheidung von Begriff und Anzahl und gibt vor, mathematische Operationen mit begrifflichen Zusammenhängen identifizieren und so derer Notwendigkeit Rechnung tragen zu können – bei gleichzeitiger Sicherung der Möglichkeit ihres Bezuges zur empirischen Realität, da unter die Begriffe auch Gegenstände fallen, deren Anzahl die Zahlen sind. Wittgensteins Betrachtungsweise kennt jenen Unterschied von Begriff und Anzahl nicht und macht entsprechend auch „keine Andeutung darüber, [...] wie eine Addition anzuwenden wäre.“ (17v) Sie stellt lediglich die Beschreibung der Rechentechnik dar und erklärt in keiner Weise, was das Rechnen *eigentlich* sei, indem auf ein ihm vorgeblich Zugrundeliegendes verwiesen wird. Es liegt im Gegenteil schon alles offen zu Tage, und was einzig es braucht, um zu verstehen, was das Addieren ist, ist eine genaue Darstellung dessen, was wir tun, wenn wir sagen, wir addierten. Diese Gegenüberstellung im Auge habend, schreibt Wittgenstein:

> Einmal scheine ich zuerst nur mit (den) Begriffen zu operieren und was dann die Zahl des resultierenden Begriffes ist, nenne ich Summe der Zahlen der Teilbegriffe. – Im andern Fall habe ich mit Begriffen, deren Zahlen die Zahlen sind, (gar) nichts zu tun. (18v)

Jenes inhaltliche Mehr, das der Logizist verspricht, möchte Wittgenstein, wie aus obigem hervorgeht, nicht gelten lassen. Wenngleich es vielleicht zunächst den Anschein hat, als präsentierten Russell/Whitehead nicht nur eine Rechentechnik mit Zeichen, sondern bereiteten auch deren Anwendung vor, etwa weil man ‚Wiener' an die Stelle von ‚φ' und ‚Linzer' an die Stelle von ‚ψ', sowie rechts des Tautologiezeichens den Begriff ‚Wiener oder Linzer' setzen könne – so ist man der Anzahl der Bewohner von Linz und Wien doch noch um kein Stück nähergekommen.

> So als sagte man: Die Disjunktion der Begriffe kannst Du doch gewiß leicht bilden – nun, die Anzahl dieses Begriffs ist die Summe n+m. – Als wäre jetzt ja alles (schon) getan, da man ja nur mehr nachschauen braucht, welches die Anzahl der Begriffssumme ist. (20r)

Dieser Einwand soll nicht so sehr eine Unvollständigkeit der logizistischen Erklärung offenbaren, insofern diese noch angeben müsse, auf welche Weisen wir von den Begriffen zu den Anzahlen ihrer Gegenstände gelangen. Wittgenstein scheint eher darauf abzuzielen, dass die Arithmetik mit Zahlzeichen *operiert* und also ein Kriterium ihrer Gleichheit bei der Hand hat, das ganz unabhängig davon ist, wie man auf die jeweiligen Zahlen kam. Wir vergleichen in ihr die Zahlen miteinander, ohne begründen zu müssen, wie wir sie erhielten (ob also dem Rechnen mit Zahlen deren Schätzung, Zählung oder eine andere Berechnung vorherging). Indem der Logizist das Kriterium für die Identität von Zahlen in der 1→1 Zuordenbarkeit von unter Begriffe fallenden Gegenständen (Zahlen als die Äquivalenzklassen von Mengen) erblickt, vermengt er das genuin Rechnerische der Mathematik mit empirischen Vorgängen des Zählens, Messens oder sonstiger, den jeweiligen Rahmenbedingungen anzupassender, Untersuchungen. Das Problematische an der Definition der Zahlen als Anzahlen von Begriffen ist deshalb nicht, dass die Eruierung der Anzahl empirischen Kontingenzen unterliegt, sondern dass auch die für die Arithmetik entscheidenden *Vergleichsmodi*, sprich die Weisen, in der man die Zahlen rechnerisch in Beziehung setzt, auf die empirische Ebene verschoben werden. Zwar sieht der Logizist sein Vorgehen durch den 1→1 Abgleich der Mengenelemente gerechtfertigt, welcher erst auf dieser Ebene hergestellt werden könne, und den er – des Gesetzes der Identität wegen – als zwingenden Nachweis der Anzahlengleichheit von Mengen betrachtet. Da uns Menschen dies Gesetz der Identität (jedenfalls in der Form $A = A$) aber spätestens dann nichts mehr hilft, sobald wir mit größeren Mengen konfrontiert sind, bleibt die Frage bestehen, was uns noch daran festhalten lässt, wenn es um die Bestimmung der Gleichmächtigkeit zweier Klassen geht.

Wer die Unterscheidung von Begriff und Anzahl, bzw. allgemein die Idee des Fallens eines Gegenstandes unter einen Begriff, weil sie in Hinsicht auf Aussagesätze der beschreibenden Wissenschaften oft passt, ebenso auf arithmetische Sätze anwenden möchte, steht jedenfalls in der Verlegenheit, zur Feststellung dessen, ob und wie viele Gegenstände im Konkreten unter einen Begriff fallen (oder welche Anzahl ihm zukommt), auf Techniken zurückgreifen zu müssen, die im Rahmen einer solchen Herangehensweise erst recht wieder einer Rechtfertigung bedürfen. Zumindest ist mit der bloßen Angabe des Begriffszeichens noch keineswegs geklärt, welche Gegenstände unter den von ihm bezeichneten Begriff fallen. Das heißt, „die Kluft zwischen Begriff und Gegenstand" (ÜBG, S. 199) ist dadurch nicht kleiner geworden, dass man mit Blick auf den (nach Wittgensteins Ansicht im Übrigen völlig nutzlosen) Satz „Ein Ding ist mit sich selbst identisch“ (PU, § 216) die Methode des 1→1 Korrelierens als Garant für den Nachweis der Anzahlengleichheit von Begriffen ansieht. Schließlich muss man zuerst zu der fraglichen Menge an Elementen gelangen, ehe man zwischen ihnen korrelieren kann. Und es ist einfach nicht klar, wie wir etwa die Zahl von ‚Linzer oder Wiener‘ – wenn wir sie nicht mittels Addition der Einwohnerzahlen von Linz und Wien *berechnen* – anders feststellen sollten, als indem wir die Linzer und Wiener *zählten*. Da dieses Zählen aber, aufgrund der Fehleranfälligkeit des Menschen, einmal *so* und einmal *anders* ausfallen könnte, kann uns dies nicht befriedigen, wenn uns daran gelegen ist, eine Erklärung der Mathematik zu liefern, wie wir sie betreiben.

> „Der Begriff ‚$\phi \vee \psi$‘ hat doch eine Zahl“. Wie soll die festgestellt werden? Unabhängig von den Zahlen ‚ϕ‘ und ‚ψ‘ ? Und wie wenn sich durch Zählung der Gegenstände die ϕ genügen, der Gegenstände die ψ genügen und der Gegenstände die ‚$\phi \vee \psi$‘ genügen ergibt daß die erste Zahl 100 die zweite 200 und die dritte 302 ist? (MS 122, 21r)

Wendet man hiergegen wieder ein, dass es sich eben um kein bloßes Zählen der Gegenstände handelt, sondern darum – mittels der durch die Selbstidentität der Gegenstände etablierten 1→1 Korrelation der Elemente zweier Klassen mit all jenen einer anderen dritten Klasse – die Berechnung der Summe zweier Anzahlen vorgeführt zu haben, so ist darauf zu erwidern, dass die Rede vom Begriff (dessen Gegenstände Anzahl die Zahl ausmacht) dann eben überflüssig ist. Wie immer man es wendet, die Unterscheidung zwischen dem Begriff und der Anzahl der unter ihn fallenden Gegenstände ist nicht geeignet die mathematische Operation einzufangen. Stets fällt das Vergleichskriterium, das die Operation auszeichnet, auf die eine oder die andere Seite und lässt die zweite jeweils überflüssig werden. Nimmt man die Addition von Zahlen als Rechnung ernst, fällt jeder Zusatz, der sich entweder um die Referenz der Zahlzeichen (ob also 2 Äpfel und 3 Äpfel oder 2 Linzer und 3 Wiener addiert werden) oder um die Benennung der Summe durch etwaige andere Termini (ob man also lieber von der Anzahl der „Leute, die entweder in Linz oder in Wien wohnen“ oder von der Anzahl der „Wiener und Linzer“ redet) sorgt, als leerlaufendes Attribut aus der Betrachtung heraus. – Wer demnach sagt,

> die Summe zweier Anzahlen sei die Anzahl der Begriffssumme, sagt eigentlich: „Berechne die Anzahl der Begriffssumme, dann hast Du die Summe der beiden Anzahlen“. (21v)

Und das ist eine grammatische Anmerkung zum Gebrauch des Ausdrucks ‚Summe zweier Zahlen‘, keineswegs jedoch eine Erklärung jener Rechnung, als deren Resultat wir sie bezeichnen. Wittgenstein weist hier darauf hin, dass bereits eine Rechentechnik vorausgesetzt ist, wenn wir von Äquivalenzen zwischen zwei Begriffen sprechen; dass die Gleichsetzung der Anzahl einer Begriffssumme mit der Summe zweier Anzahlen nur dann Sinn hat, wenn eine Technik bekannt ist, die uns dieser Gleichheit versichert. Unser Begriff der Summe ist charakterisiert durch Techniken des Addierens. Diese Techniken gilt es zu beschreiben, wenn wir Klarheit über jenen Begriff erreichen wollen. Solches Beschreiben ist jedoch kein Erklären in dem Sinne, dass der von uns gebrauchte Summenbegriff auf (z. B. logische) Prinzipien zurückgeführt würde, die ihn rechtfertigen oder begründen. Sondern das Beschreiben jener Techniken, die wir im Kindesalter erlenen und in der Folge in vielfältigen Formen und Situationen praktizieren, dient nur dazu, klar vor Augen zu führen, was wir immer schon tun. An die Stelle einer Erklärung des *einen* sublimen Wesens der Addition rückt das Beschreiben *vielfältiger* menschlicher Techniken des Addierens.

Russell/Whitehead verfolgen mit der Zurückführung der Arithmetik auf formale Logik hauptsächlich zwei Ziele: Es soll der Zwang mathematischer Sätze, d. h. ihr Notwendigkeitscharakter begründet, dabei aber zugleich ihrer mannigfachen Anwendbarkeit Rechnung getragen werden. Daher konstruiert man arithmetische Sätze als Relationen zwischen Begriffen – deren eigentlicher Gehalt (die ‚inhaltliche Deutung') aber von der Anzahl der Gegenstände abhängt, die unter sie fallen können. Der Begriff wahrt Notwendigkeit, sein Umfang die Applikation. Da aber der Nachweis dafür, dass ein behaupteter Begriffszusammenhang tatsächlich tautologisch, mithin notwendig ist, auf Ebene der Extensionen geführt wird (wo man die Elemente der jeweils intensional bestimmten Klassen einander zuordnet), liegt das Kriterium, das den Satz als mathematischen ausweist, gerade nicht auf der Höhe des Begriffes. Das Attest der Notwendigkeit kippt sozusagen auf den Unterbau, der allein zur Rechtfertigung seiner Anwendung gebildet wurde. Deswegen wendet Wittgenstein ein, dass der Aufstieg zu den Begriffen überflüssig wird, wenn wir bereits durch den 1→1 Abgleich vom mathematischen Status einer Konstruktion überzeugt worden sind. Auf jeden Fall würden diese Begriffszeichen der Konstruktion dann nichts von mathematischer Relevanz hinzufügen. Ist das mathematische Faktum hingegen ganz auf der Begriffsebene verbürgt, dann hilft uns wiederum die Rede von der direkten Zuordenbarkeit der die Begriffe sättigenden Dinge oder Terme nichts, wenn es um die Anwendung dieser Begriffe geht. Gesetzt nämlich den Fall, wir kennen eine Formel der *PM* als tautologisch an, so tut der Hinweis, dass unter die durch ‚nicht' und ‚oder' verknüpften Begriffe *diese* oder *jene* Gegenstände fallen, dem Satze nichts von Wichtigkeit hinzu. „1000 Äpfel und 1000 Äpfel sind 2000 Äpfel" schaut zwar aus als handelte er von Äpfeln, sagt aber in Wahrheit nicht mehr als „1000 + 1000 = 2000" oder „1000 Wiener und 1000 Linzer geben 2000 Österreicher" (obwohl in diesem Fall jemand einen Erkenntnisgewinn insofern daraus ziehen könnte, als er zwar den arithmetischen Satz kannte, nicht aber wusste, dass Linzer auch Österreicher sind und darüber nun Belehrung fand.) – zumindest ist es irreführend, den ersten und den letzten eine *Anwendung* des zweiten zu nennen: alle drei sind mathematisch Sätze. (Vgl. MS 122, 78r.) Russell/Whitehead scheinen aber genau diesen Unterschied nicht zu sehen, wenn sie die Addition am Disjunkt (‚$\phi \vee \psi$'), ihre Applikation aber an den Elementen festmachen wollen, durch die genau jene Begriffe gesättigt werden können, die links und rechts des Oderzeichens stehen.

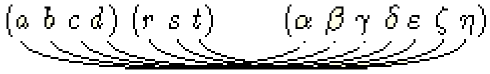
3 Der Gegenstand der Mathematik

Dass Wittgenstein mit den bisher vorgebrachten Einwänden selbst ganz und gar nicht zufrieden war, belegt u. a. die folgende Stelle:

> Es kommt mir vor, daß der Beweis davon, daß für die Werte 1000, 1000 und 2000 eine Tautologie entsteht gänzlich außerhalb des Beweises des uns interessierenden Satzes ist.
> Und doch erscheint mir auch in dem, was ich sage, etwas falsches. (MS 122, 15v)

Ohne zu spezifizieren, worin der Fehler genau liegt, wird er diese, an der Unterscheidung von Begriff und Gegenstand orientierte Kritik später fallen lassen, da sie sich einer speziellen Deutung des Russell/Whiteheadschen Kalküls bedient, die durch prosaische Passagen der *PM*[*] zwar nahegelegt wird, keineswegs jedoch zwingend ist. Er versucht den Kalkül dann als Konstruktion ernst zu nehmen und richtet seinen Blick entsprechend auf die konkreten Zeichenoperationen.

> Daß der Russellsche Beweis von n+m=l alles mögliche Überflüssige enthält ist wohl klar, aber *das* zu zeigen genügt mir noch nicht. Nun, wenn er auch einigermaßen ausgeschmückt ist, macht ihn das noch nicht falsch. Man braucht diese Deutung nicht, aber sie schadet auch nichts. Wenn wir sie aber weglassen, so haben wir vorerst eine Konstruktion, ausgehend von zwei Reihen von Variablen eine dritte Reihe zu bilden, die so viele Variable enthält, als beide ersten zusammen. Analog etwa dieser Konstruktion:



> Genügt nun dies, die Addition der Kardinalzahlen zu erklären? Ist es richtig, daß unser ganzer Additionskalkül mit Kardinalzahlen wirklich auf so einem eins-zu-eins Kollationieren *beruht* – sodaß dieses im Hintergrund jeder Addition stünde? (36r–v)

Obwohl also die oben beschriebenen Einsprüche in dieser Weise nicht weiterverfolgt werden, scheinen sie mir dennoch wichtig zu sein, weil sie auf grundsätzliche Auffassungsunterschiede bezüglich der Rolle der Arithmetik verweisen, gerade was den Status ihrer Sätze und die damit verbundene Frage nach ihrer Anwendbarkeit betrifft. Denn auf den vorherigen Einwand, wonach der Rückgang zu den Begriffen eigentlich entbehrlich sei, wenn die Anzahlengleichheit erst einmal gezeigt wurde, würde der Begründungstheoretiker wohl erwidern, dass

---

[*] Insbesondere sind dies Ausführungen in der Einleitung, wo z. B. die „primitive propositions“ in einer Weise formuliert werden, die klar eine semantische Deutung des Kalküls nahelegen. So, wenn Pp. No. 2, „$\vdash: p \lor p . \supset . p$“ gelesen wird als: „wenn p oder p wahr ist, dann ist p wahr“ – wo sich natürlich sofort die Frage stellt, was hier über wahr oder falsch entscheidet. (Vgl. BGM I, §§ 19–22.) Ebenso sind die „propositional functions“ als Schemen beschreibender Sätze charakterisiert, deren Bedeutung von ihrem Wertebereich (als der Klasse all jener Gegenstände, deren Namen die Aussagefunktion sättigen) abhängt und die daher, wenngleich uneindeutig, auf Gegenstände referieren. (PM, S. 15)

Am bestimmtesten ist die hier zur Rede stehende Deutung aber in der Beschreibungs- und Klassentheorie niedergelegt, wo der Sinn jedes beschreibenden Ausdrucks (der als „incomplete symbol“ nur im Satzzusammenhang auftreten darf) von der Existenz des von ihm beschriebenen Gegenstandes abhängig gemacht (PM, S. 71) und die logische Äquivalenz zwischen Begriffen daher über die Identität von Gegenständen definiert wird. (PM, S. 23) Über den Zweck der Klassentheorie heißt es in den *PM*:

> It is an old dispute whether formal logic should concern itself mainly with intensions or with extensions. In general, logicians whose training was mainly philosophical have decided for intensions, while those whose training was mainly mathematical have decided for extensions. The facts seem to be that, while mathematical logic requires extensions, philosophical logic refuses to supply anything except intensions. Our theory of classes recognizes and reconciles these two apparently opposite facts, by showing that an extension (which is the same as a class) is an incomplete symbol, whose use always acquires its meaning through a reference to intensions. (PM , S. 75)

Wittgensteins eben formulierte Einwände könnte man entsprechend dahin auslegen, dass gerade die Trennung von Extension und Intension ein klares Verständnis davon, woher mathematische Sätze ihren eigentümlichen Status ziehen, unmöglich macht.

es doch darum geht, *Sätze* zu generieren, folglich der bloße Beweisvorgang (Bijektion) nicht hinreicht, um das mathematische Faktum, auf dessen Nachweis es uns ankommt, adäquat auszudrücken. Zudem müsse die Anwendbarkeit dieser Sätze gesichert werden, indem man zeigt, dass die mit ihnen ausgedrückten Relationen zwischen Begriffen für sämtliche gleichzahligen Klassen gelten, die mögliche (wenngleich zunächst noch unkonkretisierte) Extensionen jener Begriffe sind.

Einer solchen Trennung von Begriff und Anzahl liegt eine Vorstellung der Arithmetik zu Grunde, bei der sich Frege und Russell/Whitehead selbst mit Mill wieder treffen: die Auffassung, das genuin Mathematische fände seinen Ausdruck in *Sätzen*, die ihren Sinn aus der Übereinstimmung mit einer, wie immer gearteten, Realität hinter den Beweisen (die ja aus bloßen Zeichen bestehen!) ziehen. Nach Mill handelt es sich bei arithmetischen Sätzen um verallgemeinerte Aussagen, deren Worte sich auf Anordnungen beziehen, die uns entweder unmittelbar vor Augen liegen oder doch zumindest anschaulich dargestellt werden *könnten* (wodurch es möglich sein soll, die Mathematik auch auf Nichtgegenständliches anzuwenden). Wenn wir Mathematik treiben, abstrahieren wir Mill zufolge von jenen Eigenschaften, die nur bestimmten und nicht allen Gegenständen zukommen. Im bereits genannten *A System of Logic Ratiocinative and Inductive* (Book III, ch. xxiv, § 5) schreibt er:

> Every arithmetical proposition; every statement of the result of an arithmetical operation; is a statement of one of the modes of formation of a given number. It affirms that a certain aggregate might have been formed by putting together certain other aggregates, or by withdrawing certain portions of some aggregate; and that, by consequence, we might reproduce those aggregates from it, by reversing the process. (Mill 1843, S. 611)

Mit der Diagnose, die Zahl sei keine Eigenschaft von Dingen, sondern die eines Begriffes (bzw. einer mittels der Aussagefunktion definierten Klasse), indem die Zahlangabe sage, wie viele Gegenstände unter denselben fallen (bzw. wie viele Elemente die durch die Aussagefunktion definierte Klasse enthält) (GLA, S. 61; IMP, S. 14), löst man sich zwar von der Vorstellung, die Arithmetik handle von Sandkörnern und Nüssen (GLA, S. 37), nicht aber davon, dass ihre Sätze überhaupt von etwas handeln. Daher fühlt sich Frege (*Der Gedanke*, 1918–19, S. 69) dazu gedrängt, „ein Gebiet des Objektiven, Nichtwirklichen“ als ein „drittes Reich“ neben den Dingen der physikalischen Welt und den subjektiven Vorstellungen des Einzelnen anzuerkennen, in dem die nichtphysikalischen Gegenstände der Mathematik, auf welche die in ihren Sätzen vorkommenden Zahlzeichen referieren, vereinigt sind. Selbst Russell (*The Problems of Philosophy*, 1912), der bei erkenntnistheoretischen Fragen ansonsten stets das den Sinnen unmittelbar Gegebene zum fundamentalen Ausgangspunkt nimmt, verliert sich in die Rede einer unveränderlichen Welt der Ideen – wie er sie bei Platon zu finden, und auf deren Bahnen er den Kontingenzen der sinnlichen Erfahrungswelt zu entfliehen meint. Zwar sperrt er sich gegen den Gedanken, die Vernunftideen seien uns angeborene Wahrheiten, an die man sich bloß zurückzuerinnern beginnt, sobald man Wissenschaft betreibt. Er ist aber der Ansicht, dass die Möglichkeit aller Vernunfterkenntnis darauf beruht, im Zuge von Beobachtungen einzelner Phänomene Einsicht in Gesetzmäßigkeiten zu nehmen, die diesen Erscheinungen zugrunde liegen. Der geübte Logiker könne insofern direkte Kenntnis von mathematischen und logischen Grundwahrheiten (Universalien) erlangen, als sein geschultes Auge in den Erscheinungen die sie konstituierenden Regeln zu erblicken vermag. Sich auf Whiteheads *Introduction To Mathematics* (1911) beziehend, welcher dort ganz ähnliche Ansichten vertritt, schreibt Russell über unser Wissen von ‚2+2=4' also:

> The fact is that, in simple mathematical judgements such as 'two and two is four', and also in many judgements of logic, we can know the general proposition without inferring it from instances, although some instance is usually necessary to make clear to us what the general proposition means. (PP, S. 57)

Gemeinsam ist sowohl Russell/Whitehead und Frege als auch Mill, dass sie von mathematischen Tatsachen reden und die Mathematik als eine Art Quasi-Physik immaterieller Dinge betrachten. Der mathematische Satz nimmt seine Wahrheit daher, dass er mit den Tatsachen übereinstimmt, die der Mathematiker zu erforschen strebt; dazu bedient dieser sich gewisser Beweise, die uns davon überzeugen, dass es sich so verhält, wie der Satz es sagt, der an seinem Ende steht. Charakteristisch drückt dies G. H. Hardy, ein zu philosophischen Betrachtungen neigender Mathematiker, der von den *PM*, aber auch von Hilberts Axiomatisierungsideen inspiriert zu sein scheint, in seinem Aufsatz *Mathematical Proof* (1929) so aus:

> Mathematical theorems are true or false; their truth or falsity is absolute and independent of our knowledge of them. In *some* sense, mathematical truth is part of objective reality.
> 'Any number is the sum of 4 squares'; 'any number is the sum of 3 squares'; 'any even number is the sum of 2 primes' [are] theorems concerning reality, of which the first is true, the second is false, and the third is either true or false, though which we do not know. [...]
> When we know a mathematical theorem, there is something, some object, which we know; when we believe one, there is something which we believe; and this is so equally whether what we believe is true or false. (Hardy 1929, S. 4)

Wittgenstein möchte zeigen, dass die „Auffassung der Mathematik als der Physik mathematischer Gegenstände" (MS 163, 46v) das Ergebnis sprachlicher Verblendung ist. Getäuscht von der „Oberflächenstruktur unsrer Grammatik" (BGM I, § 108), die mathematische Sätze analog denen der Physik nach dem Schema von Subjekt und Prädikat bildet („2 und 2 *sind* 4") (BGM Anh. 3, § 4), werden wir dazu geführt, nach jenem Sein zu fragen, von dem hier etwas ausgesagt wird. Wir bemühen uns die wesentlichen Eigenschaften des Verhältnisses von 2 und 4 Dingen zu erkunden, möchten in die Tiefen der Relation eintauchen, um so das Konzentrat des Weltgeschehens zu erkennen. Die Addierbarkeit, Teilbarkeit, und all die anderen mathematischen Operationen müssen schon irgendwie in den Dingen angelegt sein: denn wie sonst wäre es möglich, dass diese Operationen so vortrefflich auf Nüsse, Sterne, Seelen usw. passt! Man begibt sich auf die Suche nach den Formen des Seins, die man ihrerseits dingfest machen will. (BGM I, § 72) Durch das Ideal des beschreibenden Satzes der empirischen Wissenschaften verführt, fragt man nach der Bedeutung, dem eigentlichen Dahinter mathematischer Sätze – das, wofür sie stehen und wovon einen ihre Beweise überzeugen (BGM I, §§ 47, 51–59, 63, 66, 72) – und merkt nicht, dass man ihnen auf diese Weise etwas hinzudichtet, von dem nichts zu sehen ist, wenn man unvoreingenommen auf ihre tatsächliche Verwendung Acht gibt. (BGM I, §§ 72–74)

Wenden wir unseren Blick auf diesen Gebrauch, stellen wir zuallernächst fest, dass der in der Regel dort stattfindet, wo auch gerechnet wird. Wir sprechen z. B. das Ergebnis einer Multiplikation aus, nachdem wir sie (im Kopf, auf dem Blatt, mit dem Taschenrechner etc.) durchgeführt haben. Oder, anderes Beispiel, wir sagen: „Hier siehst Du, dass Deine Versuche ein regelmäßiges Siebeneck zu konstruieren zu nichts führen werden" – nachdem wir ihm den Beweis vorlegten. Der mathematische Satz hat seine Verwendung also vor allem im Rahmen der Mathematik selbst. Damit ist nicht behauptet, dass mathematische Sätze nicht auch ganz losgelöst von ihrer Berechnung im Umlauf wären (z. B.: „Du kannst mir glauben: 12 mal 12 gibt 144!"); auch in solchen Fällen haben wir aber seine Berechnung sozusagen in der Hinterhand, um ihn als solchen zu verbürgen.

Diese Beobachtung, wonach mathematische Sätze vor allem im Zuge ihrer Berechnung geäußert werden, wirft zugleich ein helles Licht auf die Frage, worin ihre Anwendung besteht. In den meisten Fällen liegt sie nämlich nicht darin, dass ein dem mathematischen Satze irgendwie entsprechender empirischer Satz gebildet wird. Zwar bezeugen die von uns vorgenommenen Beschreibungen und die Weise, wie wir tagtäglich handeln, dass wir uns nach gewissen mathematischen Einsichten richten; und wir stellen auch fest, dass der Grund dafür oft von den ihnen entsprechenden Beweisen herrührt, oder auch von einem im Raume verfolgbaren Sich-Ergeben, das uns als zwingend erscheint. Aber weder haben wir ein außerhalb des Beweises (oder Ablaufparadigmas) liegendes Kriterium dafür, dass *dieses* Vorgehen tatsächlich unsere Befolgung *dieses* mathematischen Satzes kund tut, noch fassen wir die in solcherlei Vorgehen sich offenbarende Anwendung mathematischer Sätze ihrerseits in Sätzen ab. Der Gebrauch des mathematischen Satzes außerhalb der Mathematik (d. h. außerhalb des Beweisens, Rechnens), mithin das, was wir seine außermathematische Anwendung nennen können, besteht also für gewöhnlich nicht darin, dass wir ihn selbst oder einen, ihm in irgendeiner Weise korrelierbaren, empirischen Satz äußern, sondern allein darin, dass wir *so* und *so* vorgehen. „500 Leute passen ins Auditorium; 480 sind schon drin. – Du kannst also noch 20 einlassen." Diese Überlegung, diesen Schluss, könnte man eine Anwendung des mathematischen Satzes „500 – 480 = 20" nennen. (Aber auch die von „500 = 480 + *x*"; und manch anderer; warum aber nicht die von „2 + 3 = 5"?) — Die Anwendung des mathematischen Satzes erweist sich so als die Befolgung einer Regel: die Anwendungen der Mathematik sind ihren Sätzen entsprechende Weisen des Vorgehens, Schließens, Denkens. Freilich ließe sich der oben vollzogene Schluss auch in *einem* Satz abfassen, und also so etwas wie ein ‚Satz der angewandten Mathematik' konstruieren. Wer etwa den Handlungsaspekt kaschieren möchte, könnte wie folgt sagen: „Wann immer in ein 500 Seelen fassendes Auditorium 480 eingelassen werden, finden 20 weitere Platz." (Vorausgesetzt, dass jeder Besucher eine Seele hat, keine Stühle zerbrochen sind oder es keine Sonderauflagen zu beachten gibt etc.) Die Tatsache, dass wir zu mathematischen Sätzen solche konstruieren können, die wir ihr empirisches Korrelat zu nennen geneigt sind, sollte uns aber nicht darüber hinwegtäuschen, dass wir es in der Regel nicht tun, ‚Sätze der angewandten Mathematik' also für gewöhnlich gerade *nicht* in Verwendung sind. Um es nochmals zu sagen: Wir wenden „1000 + 1000 = 2000" nicht dadurch an, dass wir den Satz „1000 Äpfel und 1000 Äpfel sind 2000 Äpfel" äußern, der selbst nur den arithmetischen Satz wiederholt. Sondern die Anwendung besteht (z. B.) darin, nochmals 1000 Äpfel zu pflücken, nachdem uns der Händler sagte, wir hätten von den vereinbarten 2000 Stück erst 1000 abgeliefert. (Vorausgesetzt ist hier wieder, dass wir den Kontrakt einhalten wollen, dass wir der Angabe des Händlers vertrauen usw.)

Wenn man, von diesen Betrachtungen geleitet, das Charakteristikum mathematischer Sätze nun darin sieht, dass sie Regeln darstellen, die unseren Umgang mit empirischen Sachverhalten lenken, speziell die Weise, wie wir diese beschreiben: dann verliert die vom Begründungstheoretiker als so drückend empfundene Frage, wie die Anwendbarkeit mathematischer Sätze gesichert werden könne, gehörig an Gewicht, um nicht gar zu sagen: ihren Sinn. Denn die Idee, den Maßstab richtigen Vorgehens/Beschreibens mittels anderer Kriterien auf einzelne Fälle anwendbar zu machen, unterminiert ihn ja gerade als Maßstab. Wer die Anwendung eines Standards der Beschreibung hinsichtlich seines ‚Passens' auf eine spezifische Art von Gegenständen eigens verbürgen will, beraubt ihn dessen, was allein ihn zum Standard macht: unseres unhinterfragten Gebrauchs *als* eines solchen. Die Uneingeschränktheit, mit der wir einen Satz gelten lassen, ist nicht weiter zu rechtfertigen als dadurch, dass wir ihn *so* gebrauchen. Womit aber klar wird, dass wir von Rechtfertigung besser nicht sprechen sollten.

Wittgenstein zufolge lehrt die Mathematik unterschiedliche Weisen des Darstellens empirischer Zusammenhänge. Sie stellt die Formen zur Verfügung, in deren Bahnen die Spiele des Rechtfertigens, des Passens, des wahren und richtigen Urteilens (und etliche andere) ablaufen. Von seiner Warte aus betrachtet erscheint daher das Vorhaben des Grundlagentheoretikers nachgerade widersinnig, wenn dieser die Wahrheit des mathematischen Satzes oder die Möglichkeit seines Passens auf empirische Tatsachen wiederum begründen möchte.

4 Paradigmen des Beschreibens und Tuns

Die relationale Ordnung zwischen dem beschreibenden Satz und dem von ihm Beschriebenen setzt einen Standard des richtigen Entsprechens voraus: ein Muster, das uns zum Vorbild dafür dient, dass *dies* eine (wahre oder falsche) Beschreibung von *jenem* ist. Daher wird man der Unbedingtheit mathematischer Sätze nicht gerecht, wenn man diese in Anlehnung an Aussagen der Physik „nach dem Muster von ‚Gegenstand und Bezeichnung' konstruiert." (PU, § 293) Nicht nur stellt sich uns – es sei denn wir philosophierten – die Frage gar nicht, wovon der mathematische Satz eigentlich handelt; es kommt noch hinzu, dass uns, wenn wir sie stellen, die Mathematik aus der Hand zu gleiten droht. Sobald wir ihren Sätzen die Wort-Gegenstands-Struktur überstülpen, werden wir zu der Frage gedrängt, wie und gemäß welcher Regel die Verbindung herzustellen sei, oder genauer, was das Kriterium der Äquivalenz ist, das zwischen den Aussagen und jenem Geltungsbereich vermittelt, durch den sie auf ihre Wahrheit hin überprüft werden könnten. Dass damit der Status, den wir für mathematische Sätze gelten lassen, bereits untergraben ist, springt dem in die Augen, der auf die Rolle Acht gibt, die sie in unserem Leben tatsächlich spielen. Mathematische Sätze werden als Regeln gebraucht, denen wir – was man ihre Anwendung nennen könnte – *folgen*. Diesem Folgen geht aber nicht, wie der Begründungstheoretiker zu meinen scheint, ein Deuten voraus. Vielmehr bezeugen wir vor allem in unserem alltäglichen Umgang mit mathematischen Sätzen,

> daß es eine Auffassung einer Regel gibt, die *nicht* eine *Deutung* ist; sondern sich, von Fall zu Fall der Anwendung, in dem äußert, was wir „der Regel folgen", und was wir „ihr entgegenhandeln" nennen. (PU, § 201)

Wenn wir aber einen Satz nun doch deuten und folglich verschiedene andere Interpretation miteinräumen, so ist das Mathematische nicht in dem dieserart Gedeuteten zu finden, sondern es spiegelt sich in der Weise unseres Deutens, bei dem wir gemäß einer Regel verfahren. Worin die Gemäßheit zwischen der Regel und ihrer Anwendung besteht, ist am Ehesten in Hinblick auf die Situation der Lehre (Abrichtung) zu verstehen, bei der wir auf ein gewisses Vorgehen konditioniert werden, das uns nach gehöriger Einübung in Übereinstimmung mit anderen rechnen lässt. (Worauf hier gewiesen wird, sind also Beispiele!) Mögliche Irrtümer in der Anwendung sind damit nicht ausgeschlossen, die Erfahrung lehrt aber, dass sie sehr selten sind. Die philosophisch wichtige Einsicht ist hier, dass eine Regel, die durch eine entsprechende Deutung die Anwendung einer anderen Regel lenkt (wodurch diese ihre Funktion als Regel gewissermaßen einbüßt), dies nur dadurch ist, dass wir ihr (unhinterfragt) folgen, sie also zum Maß richtigen Vorgehens (hier: Deutens) nehmen. – Ziehen wir wieder das Beispiel mit den Äpfeln heran: Der Händler sagt nun, wir hätten erst 1250 Stück abgeliefert, obwohl doch 2000 vereinbart gewesen wären. Für gewöhnlich folgen wir hierauf der Regel „1250 + 750 = 2000" oder ihrem Komplement „2000 – 1250 = 750" – und pflücken nochmals 750 Stück. Dieses Handeln nach der Regel ist das, was dem mathematischen Satz seinen Zwang, seine Notwendigkeit verleiht: wir nehmen ihn zum Standard dafür, wie wir vorgehen sollen. Natürlich ist auch denkbar, dass aufgrund gewisser Umstände (z. B. weil wir dem Händler misstrauen) die Anwendung des Satzes etwas anders ausfällt. Fängen wir auf die Aussage des Händlers hin jedoch damit an, die Richtigkeit von „1250 + 750 = 2000" zu hinterfragen, so stellte sich die Frage, an welchen Maßstäben sich eine solche Untersuchung orientieren könnte; denn diese Normen, die das Untersuchen methodisch leiten, wären dann dasjenige, was den Mathematiker interessieren sollte. So wäre es möglich, dass wir das Subtraktionsschema

$$\begin{array}{r} 2000 \\ \underline{-\ 750} \\ \underline{\underline{1250}} \end{array}$$

nochmals durchgingen, so wie man es in der Volksschule lernt: von rechts beginnend, ziehen wir in jeder Spalte die Ziffer der zweiten Reihe von der Ziffer der ersten Reihe ab, schreiben die sich jeweils ergebende Zahl darunter, machen den Übertrag auf die nächste Spalte und wiederholen dort das Prozedere. Der Satz „1250 + 750 = 2000" würde insofern zu einem Gegenstand der Untersuchung, als seine Richtigkeit davon abhängig gemacht wird, dass in der dritten Reihe tatsächlich das genannte Ergebnis erscheint. Es ist nicht der Fall, dass ein solches Vorgehen die Mathematik für kurze Zeit ins Wanken brächte: aber „1250 + 750 = 2000" wird dabei ganz einfach nicht als mathematischer Satz gebraucht, sondern als etwas, das einer Prüfung unterzogen wird. Davon abgesehen, dass der Händler mit uns bald keine Geschäfte mehr machen würde, verfielen wir öfter darauf, derart einfache mathematische Sätze auf ihre Richtigkeit hin zu überprüfen, liegt die Pointe dieses Beispiels darin, dass der Satz „1250 + 750 = 2000" eine spezifische Deutung erfährt, wenn man ihn abhängig macht vom Resultat einer zeichnerischen Operation: er wird als das Ergebnis *dieses* (zeitlichen) Vorgangs gedeutet. Reagieren wir auf die Mitteilung des Händlers damit, dass wir ihm die restlichen 750 Äpfel *bringen*, dann wieder gebrauchen wir „1250 + 750 = 2000“ als mathematischen Satz: er wird nicht gedeutet, sondern wir folgen ihm. Er ist dann Regel unseres Vorgehens.

Aus dieser am Gebrauch interessierten Perspektive betrachtet, wirkt es nahezu grotesk, den Zwang, wie wir ihn der Mathematik einräumen, nochmals fundieren zu wollen. Denn worauf könnte man sich denn berufen, um das, worauf wir uns zur Rechtfertigung vernünftigen Vorgehens berufen, abermals zu rechtfertigen! (LFM, S. 266) Zugleich finden wir hier einen Anknüpfungspunkt, der die Identifizierung von Logik (als der Lehre des richtigen Schließens) und Arithmetik (als der Lehre der richtigen Zahlenrelationen) nahelegt: betreffend ihres Verhältnisses zu empirischen Aussagen nämlich, zu denen sie sich wie das Maß zum Gemessenen verhalten. (BGM I, §§ 165, 133)

> Arithmetic is not based on logic. It is based on all sorts of principles which in a sense are logical principles – but not [$p \supset p$], etc. We can call them laws of thought. Or if you said arithmetic *is* logic – meaning that arithmetical propositions and logical propositions have the same relation to propositions of science – then I’d say yes. (LFM, S. 272)

Das der Arithmetik und Logik Gemeinsame ist hier ihre paradigmatische Funktion. Insoweit kann daher die folgende Bemerkung, in der vom Charakter logischen Zwangs die Rede ist, ebenso für die Mathematik gelten gemacht werden. Dieser Zwang rührt demnach nicht her von einer spezifischen Relation zwischen Sprache und Welt, die vom Logiker erst noch erforscht werden müsste. Die Unbedingtheit des logischen Schlusses besteht schlichtweg darin, dass er der Maßstab ist, nach dem wir schließen, urteilen, hinterfragen; und dies ist gleichbedeutend damit, dass wir ihn nicht in Frage ziehen.

> Ist es nicht so: Solange man denkt, es kann nicht anders sein, zieht man logische Schlüsse.
> Das heißt wohl: solange *das und das gar nicht in Frage gezogen wird*.
> Die Schritte, welche man nicht in Frage zieht, sind logische Schlüsse. Aber man zieht sie nicht darum *nicht* in Frage, weil sie ‚sicher der Wahrheit entsprechen‘ – oder dergl. – sondern, dies ist es eben, was man ‚Denken‘, ‚Sprechen‘, ‚Schließen‘, ‚Argumentieren‘, nennt. Es handelt sich hier garnicht um irgendeine Entsprechung des Gesagten mit der Realität; vielmehr ist die Logik *vor* einer solchen Entsprechung; nämlich in dem Sinne, in welchem die Festlegung der Meßmethode *vor* der Richtigkeit oder Falschheit einer Längenangabe. (BGM I, § 156)

Diese Charakterisierung schreibt der Mathematik den Status der Notwendigkeit zu, insofern wir sie als paradigmatisch gelten lassen, ihre Sätze als Regeln gebrauchen. Unser Befolgen jener Regeln besteht aber, wie wir gesehen haben, nicht in der Konstruktion wie immer gearteter ‚Sätze der angewandten Mathematik‘, sondern darin, dass wir *so* und *so* vorgehen: *diese* Beschreibungen vornehmen, *das* für wahr und *jenes* für falsch erklären.

5 Das Interesse am Beweis

Damit ist aber zunächst nur gesagt, dass der mathematische Satz seinen Status daher bezieht, dass wir ihn als ein solches Paradigma der Darstellungsweise gelten lassen. Nun erhebt sich die Frage, woher der mathematische Satz seinen Sinn nimmt, wenn er als ein solches Vorbild der Beschreibung selbst nicht *be*-, sondern eben *vor*schreibend ist, und dieser Sinn (was hier so viel heißt als: das, weshalb wir wissen, was mit ihm anzufangen, wie mit ihm umzugehen ist) daher nicht von irgendeinem ihm referentiell entsprechenden Faktum abhängen kann. Die typische Bewegung Wittgensteins ist die, nachzusehen, in welchen Zusammenhängen der mathematische Satz verwendet wird. Da dies für gewöhnlich dort der Fall ist, wo wir Mathematik tatsächlich betreiben, wo wir ihn also im Rahmen von Rechnungen und Beweisen gebrauchen, scheint es seine innermathematische Verwendung zu sein, die ihm Sinn verleiht. Hingegen verbürgt die Funktion als Maßstab seinen mathematischen Status. Das muss nicht so verstanden werden, dass ein Satz der Mathematik dies nur dann ist, wenn er auch tatsächlich als Maßstab fungiert; jeder mathematische Satz also in dieser oder jener Weise in unser Leben einzugreifen hätte, um ihn als einen solche auszuweisen. Das wäre durchaus der mathematischen Praxis zuwider, wo Beweise sehr häufig geführt werden, um Sätze zu erhalten, die ihrerseits Konstituenten weiterer Beweise sind, und also nicht (bzw. höchstens über gehörige Beweisumwege) unser Vorgehen außerhalb der beweisenden Mathematik tangieren. Klar wird aber doch, dass die Mathematik ihren Ruf der Exaktheit und logischen Härte daher nimmt, dass wir in der Anwendung ihrer Sätze rigoros sind, mithin der Witz darin liegt, dass wir sie als die normative Wissenschaft gebrauchen, uns nach ihr richten.

Wittgensteins Kritik an der Idee einer referentiellen Struktur arithmetischer Sätze, die ich als eine besondere Spielart seiner Überlegungen zum Verhältnis der Befolgung und Deutung von Regeln begreife, führt zu einer Auffassung, die in markantem Gegensatz zu derjenigen steht, wie sie im oben abgedruckten Hardy-Zitat zum Ausdruck kommt. (Vgl. die äußerst expliziten Einsprüche gegen Hardys Sichtweise in LFM, S. 13, 91, 123, 131, 139, 169, 239.) Dem von Hardy skizzierten Bild des Mathematikers, das diesen als Entdecker und Erforscher ewig wahrer Sphären mathematischer Realitäten darstellt, setzt er eine Charakteristik entgegen, die den Mathematiker als Erfinder begreift. (Siehe u. a. BGM I, § 168; LFM, S. 22.) Der Mathematiker observiert nicht die Tiefenstruktur der Weltverhältnisse, sondern schafft Paradigmen zur Beschreibung der uns vorliegenden Welt. Er „erzeugt *Wesen*“ (BGM I, § 32), insofern er Verbindungen zwischen Weisen des Beschreibens knüpft, die uns den Übergang von einer Beschreibung zur nächsten als richtig, andere Übergänge als falsch oder unsinnig benennen lassen. Der mathematische Satz, der diese Verbindungen herstellt, ist nicht wahr oder falsch, sondern wir nehmen ihn zum Standard dafür, was als wahr und falsch zu gelten hat. Deshalb ist es auch irreführend, wenn man (wie Hardy) sagt, man sei von der *Wahrheit* eines mathematischen Satzes überzeugt (oder gar: man *glaube*, dass 13 mal 13 169 sei). Da sie unsere Standards für Wahr- und Falschheit sind, untergräbt jeder Beleg, den wir zur Begründung der Wahrheit mathematischer Sätze anführen wollten, ihren Status als unhinterfragtes Maß – den nun eben jener Beleg übernommen hätte; sodass sich die Frage bei ihm wiederholte. Wahrheit kann in Bezug auf mathematische Sätze also nicht heißen, dass eine weitere Instanz uns ihrer versichert hat; sondern höchstens, dass *sie* es sind, die wir als unbedingten Standard des Wahren und Richtigen anzuerkennen geneigt sind. Und wer das sieht, wird sich womöglich nicht länger dazu gedrängt fühlen, überhaupt von der Wahrheit mathematischer Sätze zu reden. Aus demselben Grund erscheint es auch absurd zu sagen, man *glaube*, ein mathematischer Satz sei wahr: denn es ist einfach nicht klar, worauf sich die Überzeugtheit richten soll, was das Geglaubte ist, solange man nicht auch in der Lage ist, über seine Wahrheit/Falschheit zu entscheiden. (BGM I, § 110)

Insofern die Mathematik bei der Beschreibung physikalischer Sachverhalte als Standard dient, ist sie der Empirie also keine Rechenschaft schuldig. Zwar basiert die Annahme einer neuen Norm meist auf einer festgestellten Regelmäßigkeit derjenigen Zusammenhänge, zu deren Beurteilung sie eingeführt wird. Sobald dies aber geschehen ist, determiniert das nun einmal angenommene Maß die Beschreibung jeder weiteren solchen Sachlage (jedenfalls solange, als sich diese Beschreibungen bewähren). Was einen weiteren Fall zu einem solchen macht, für den das Maß als Maß fungiert – sprich die Frage: wodurch die Anwendung der einmal angenommenen Regel auf weitere Fälle sichergestellt wird? – kann nach dem eben Gesagten, nicht selbst wieder durch eine Regel sichergestellt werden, will man den normativen Status nicht verlieren: denn die ‚Norm' würde damit zum Gegenstand unseres Urteils gemacht, und so ihrer Unbedingtheit enthoben. Alles, was wir auf diese Frage erwidern können/dürfen, ist, dass wir Menschen in der täglichen Beurteilung dessen, was als spezieller Fall dieser oder jener Regel gilt, für gewöhnlich übereinstimmen. Wir können noch hinzusetzen, dass dies zu einem nicht unbeachtlichen Teil der uns gemeinsamen Erziehung geschuldet ist, bei der wir in gewisse Techniken eingeübt, zu einem gewissen Reagieren abgerichtet wurden: Gepflogenheiten, die uns *dies* als *jenem* gleich, und *jenes* als *diesem* ungleich ansehen lassen. Aber eine wirkliche Rechtfertigung oder Garantie für die Richtigkeit der Anwendung des mathematischen Satzes kann es so wenig geben wie eine Rechtfertigung der Wahrheit oder Richtigkeit des mathematischen Satzes selbst. Oder, um näher am Wortlaut Wittgensteins zu bleiben: Wir *brauchen* diese Rechtfertigung nicht, sondern handeln, wie wir es gelernt haben, und kommen damit gut zurecht.

Es liegt auf der Hand, dass Wittgenstein nach dem Ausschluss regelgeleiteter Deutungsmethoden jenen Strukturen besondere Aufmerksamkeit schenken wird, die tatsächlich vorliegen, wenn wir Mathematik treiben. Anstatt den Symbolen eine allererst aufzudeckende Tiefenstruktur zuzusprechen, richtet er den Blick auf jene Ordnungen, in denen der Satz verwendet wird. Das starke Interesse für Beweise ergibt sich demnach als natürliche Konsequenz daraus, dass der Gehalt eines mathematischen Satzes nicht durch eine, wie immer gedachte, Analyse seiner Bestandteile eingesehen werden kann – da das nicht Mathematik ist, was Gegenstand der Deutung wird. Wir werden im Folgenden allerdings sehen, dass mit dieser Bewegung die Rede vom „Gehalt" des mathematischen Satzes ihrerseits problematisch wird, ja die Mathematik gleichsam im (unsagbaren) Operieren verloren zu gehen droht.

Ich wollte in diesem Kapitel verdeutlichen, dass und wie Wittgensteins Einwände gegen Begründungsunternehmungen im Felde der Mathematik (der Zurückführung der Arithmetik auf formale Logik) einhergehen mit einem Wechsel der Betrachtungsweise. Mathematische Sätze werden nicht als wahre Beschreibungen unwandelbarer platonischer Sphären oder untergründiger Strukturen der körperlichen Erscheinungen angesehen, sondern die Mathematik wird als Regelsystem funktionierender Darstellung wahrgenommen. Sie stellt operationale Mittel und organisierende Regularien für Sprachspiele bereit, wie wir sie aufgrund lebenspraktischer Interessen spielen. – Dieser Perspektivenschwenk erwächst jedoch nicht aus völliger Beliebigkeit. Vielmehr ist er das Ergebnis der konsequenten Anwendung von Einsichten, die sich beim Nachdenken über das Befolgen und Deuten von Regeln ergaben: dass nämlich nur das den Status der (logischen, mathematischen) Unbedingtheit genießt, was Regel der Darstellung ist, d. h. von uns als solche *gebraucht* wird. Der mathematische Satz ist dies gerade insoweit, als wir uns nach ihm *richten*.[*]

[*] Felix Mühlhözer betont in seinem Kommentarband (Mühlhölzer 2010, S. 50), dass diese Auffassung in den *BGM III* (bzw. den Manuskripten MS 122 und 177-II) ausdrücklich vorausgesetzt sei, etwa wenn Wittgenstein daran erinnert: „wir werden in der Mathematik von *grammatischen* Sätzen überzeugt; der Ausdruck, das Ergebnis, dieser Überzeugtheit ist also, daß wir eine *Regel annehmen*.“ (MS 122, 52r; BGM III, § 26) Es ist wohl wahr, dass Wittgenstein die Frage nach dem Status mathematischer Sätze nicht *explizit* zur Debatte stellt. Ich möchte aber doch hervorheben, dass die von ihm an allen Ecken und Enden erhobenen Selbsteinsprüche und Gegenargumente fast durchgehend als Problematisierung genau dieser Voraussetzung verstanden werden können. Schließlich drängen sich die Einsprüche gegen Russells Reduktionsprogramm unmittelbar auf, sobald man die Mathematik als Grammatik ihrer Zeichen betrachtet. Wenn mit seinen Einsprüchen etwas nicht in Ordnung ist, scheint dies daher auf jene Voraussetzungen zurückzuwirken, aus denen sie folgen. Insbesondere erkenne ich in der Infragestellung seiner eigenen Neigung, die Mathematik ganz im Operativen aufgehen zu lassen – die ihn dahin führt, sich zu wundern, weshalb unsere Mathematik überhaupt in Sätzen niedergelegt ist – ein klares Indiz dafür, dass man den Tatsachen nicht gerecht wird, wenn man die Mathematik als Reglementarchivs unseres Sprachgebrauchs charakterisiert.

Ein Satz, der von etwas handelt, und dessen Wahrheit davon abhängt, dass die Dinge sich verhalten, wie der Satz es sagt, zieht seinen Sinn daher, dass es einen Standard gibt, an dem sich messen lässt, ob jene Entsprechung gilt oder nicht. Wenn wir mit einem Satz ein ihm entsprechendes Faktum postulieren, sind wir im Falle eines Einspruches in der Lage, Kriterien der Evidenz für das Bestehen jener Entsprechung anzuführen. Dies deutet darauf hin, dass der Sinn unserer Beschreibungen, sofern wir sie als wahr oder falsch, adäquat oder inadäquat begreifen, in der Möglichkeit liegt, sie durch den Verweis auf ein anerkanntes Paradigma der Beschreibungsweise hinsichtlich ihrer Angemessenheit für den jeweiligen Fall zu rechtfertigen. Insoweit die Möglichkeit des rechtfertigenden Rückganges zu einem Muster der Beschreibung den Sinn einzelner Beschreibungen verbürgt, belegen die vorgenommenen Beschreibungen die Überzeugtheit davon, dass wir im Falle eines Einspruches über eine Rechtfertigungsinstanz verfügen, mittels der die Streitfrage entschieden werden könnte. Kurz gesagt, der von etwas handelnde Satz verdankt seine relationale Struktur, d. i. das Verhältnis zwischen seinem Wahrheitswert und dem von ihm Beschriebenen, unserer Befähigung, ein Muster vorzulegen, das als Vorbild für in dergleichen Fällen vorzunehmende Weisen des Beschreibens dient. – Möchte man nun den mathematischen Satz als deskriptiven Satz begreifen, dessen Wahrheit dadurch belegt ist, dass er einer von ihm unabhängigen mathematischen Tatsache entspricht, so erhebt sich die Frage, nach welchem Kriterium das Bestehen einer solchen Entsprechung sicher zu stellen wäre. Denn wie wir eben sahen, bedingt die Rede von wahrer Beschreibung die Möglichkeit der Angabe eines Musters des Entsprechens, das sowohl festlegt, was als wahre, als auch, was als falsche Beschreibung zu gelten hat. Charakterisiert man mathematische Sätze als beschreibende Sätze, müsste man daher in der Lage sein, ihr Gegenteil in Worte zu fassen – was seinerseits nur machbar scheint, wenn man ein Kriterium bei der Hand hat, das über wahr und falsch entscheidet. Damit wird deutlich, dass die Konstruktion mathematischer Sätze nach dem Schema einer Entsprechung zwischen Aussage und Ausgesagtem der Unbedingtheit der Mathematik nicht gerecht werden kann, insofern eine solche Charakteristik nur sinnvoll ist, wenn ein Paradigma des Entsprechens vorausgesetzt bleibt. Man mündet also in einen infiniten Regress, sobald man den mathematischen Satz dadurch zu erklären versucht, dass man ein Faktum anführt, welches ihm scheinbar entspricht.

Fasst man nun, mit Wittgenstein, mathematische Sätze nicht als deskriptive, sondern als unsere Weisen des Beschreibens regulierende Sätze auf, wie sie uns zum Vorbild (richtigen) Beschreibens und Urteilens dienen, so ist man zwar der Regressproblematik enthoben, die sich dem stellt, der von Entsprechungen spricht – dafür aber ist man mit der Frage konfrontiert, woher der mathematische Satz seinen *Sinn* nimmt; woher wir also überhaupt wissen, was mit ihm anzufangen ist und was er uns sagt. Wenn Beschreibung und Beschriebenes zusammenfallen (indem der mathematische Satz nicht länger als Beschreibung einer mathematischen Tatsache, sondern als Regel für die sinnvolle Darstellung empirischer Zusammenhänge aufgefasst wird), kann die Erklärung weder im Hinweis auf einen Beschreibungsgegenstand (als das, worauf die Regel referiert) noch darin liegen, dass man eine andere Beschreibung (als eines Äquivalents der Regel) anführt; mit jenem kippte man wieder in den Regress, dieses setzt bloß einen Ausdruck an die Stelle des zu rechtfertigenden. Und ganz analog der Bewegung, die er im Zuge seiner Kritik an referenztheoretischen Bedeutungsbestimmungsversuchen beschreibender Sätze (Augustinisches Bild der Sprache) vorführt, indem er auf den Kontext ihrer alltäglichen Verwendung verweist und darauf aufmerksam macht, dass ihrem Verständnis stets das Beherrschen einer unhinterfragt angenommenen (antrainierten) Sprachtechnik vorausgeht (PU § 1 ff.), wendet er auch zur Behandlung der Frage, woher wir wissen, was mit mathematischen Sätzen anzufangen ist, den Blick auf jene Zusammenhänge, in denen wir sie tatsächlichen gebrauchen. (BT, S. 628) Daher erklärt sich sein starker Fokus auf mathematische Beweise – weil sie die Rahmen darstellen, innerhalb derer mathematische Sätze hauptsächlich in Erscheinung treten.

1 Die Identität des Beweises

Die in den nun folgenden Kapiteln im Zentrum des Interesses stehende Gedankenbewegung beginnt mit einer von Wittgenstein am 25. 10. 1939 in Manuskript 122 (BGM III, § 1) niedergeschriebenen Bemerkung zur Grammatik, d.i. unserer Verwendungsweise des Wortes „Beweis“:

> ‚Ein mathematischer Beweis muß übersichtlich sein.‘ „Beweis“ nennen wir nur eine Struktur, deren Reproduktion eine leicht lösbare Aufgabe ist. Es muß sich mit Sicherheit entscheiden lassen, ob wir hier wirklich zweimal den gleichen Beweis vor uns haben, oder nicht. Der Beweis muß ein Bild sein, welches sich mit Sicherheit genau reproduzieren läßt. (MS 122, 5r)

Die Forderung nach der Übersichtlichkeit des Beweises wird hier mit der zu seiner Reproduktion erforderlichen Identifikationsmöglichkeit begründet, d.i. der Möglichkeit, zwei in beispielsweise unterschiedlichen Handschriften oder Farbtönen abgefasste Muster als denselben bzw. als zwei voneinander unterschiedene Beweise zu erkennen. In dem Aufsatz *„A mathematical proof must be surveyable“ What Wittgenstein meant by this and what it implies* (Mühlhölzer 2005, S. 61) stellt Felix Mühlhölzer klar, dass damit nicht gemeint ist, man müsse mathematische Beweise gleichsam mit einem Blick einfangen können. Dagegen spräche allein schon die Tatsache, dass Mathematiker nicht selten mehrere Seiten füllende Beweise liefern – womit ein Übersehen im Sinne der augenblicklichen Präsenz schon am Umblättern scheiterte. Wittgensteins Emphase der Übersichtlichkeit im Sinne sicherer und exakter Reproduzierbarkeit zielt vielmehr darauf ab, dass wir mathematische Beweise in Hinblick auf den in ihnen konstruierten *Gedanken* von anderen Beweisen unterscheiden; und dass diese Unterscheidung nicht in Folge zusätzlicher Untersuchungen am Beweisbild bewerkstelligt wird, sondern schlicht und einfach dadurch, dass wir uns den einen und den anderen Beweis *ansehen* (und da ist ein Umblättern durchaus erlaubt) und im jeweiligen Beweise selbst, d. h. in dem, wie und was er beweist, das Kriterium seiner Identität erblicken. So betrachtet, macht uns die obige Bemerkung zunächst nur darauf aufmerksam, dass dasjenige „Beweis“ genannt wird, was uns als eine gewisse Struktur von Zeichen anschaulich gegeben ist: dass nichts erst noch hinter den Zeichen hervorzugraben sei, sondern alles schon offen zu Tage liegt.* Die Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks mit Lineal und Zirkel ist z. B. nicht in der Weise zu betrachten, wonach sie eine bloß ungefähre Annäherung an eine ideale Konstruktion sei, wie sie dem Menschen aufgrund messtechnischer Unzulänglichkeiten der verwendeten Instrumente verwehrt ist; sondern die Zeichnung ist ein exakter Beweis auch dann, wenn sich von ihr zeigen lässt, „daß die Geraden nicht gerade sind, die Kreisbögen nicht genau kreisförmig etc. etc.“ Und dies zeigt,

> daß diese Zeichnung nicht – z. B. – demonstriert daß eine solche Konstruktion ein Vieleck mit 5 gleichlangen Seiten ergibt, daß sie einen Satz der Geometrie, nicht einen über die Eigenschaften von Papier, Zirkel, Lineal & Bleistift beweist
> [Hängt zusammen mit: Beweis ein *Bild* eines Experiments] (MS 122, 6r)

Die Übersichtlichkeit des Beweisbildes, charakterisiert durch die Leichtigkeit seiner Reproduktion, wird hier gleich zu Beginn mit der Frage nach der Differenz von Beweis und Experiment zusammengebracht. Wenn nämlich der Beweis dadurch gekennzeichnet ist, dass zur exakten Rekonstruktion keine weiteren Untersuchungen an seinem Erscheinungsbild nötig sind, dann unterscheidet ihn dies insofern vom Experiment der Naturwissenschaften, als dieses selbst dann noch *dasselbe* genannt würde, gelangte man im Falle seiner Wiederholung zu einem anderen Resultat. Die Identitätskriterien des Beweises liegen ganz in ihm selbst, während das Experiment zwar in Hinblick auf die Versuchsanordnung, nicht aber hinsichtlich des sich daraus Ergebenden determiniert ist. Der Beweis unterscheidet sich vom Experiment dadurch, dass ein und dasselbe Experiment entsprechend den jeweiligen Rahmenbedingungen zuweilen auch unterschiedliche Ergebnisse liefern kann, während wir im Falle eines Beweises sagen würden, dass ein Rechenfehler vorliegen muss, wenn man zu divergierenden Ergebnissen gelangt. Verfertigen wir jedoch ein Bild, das den zeitlichen Ablauf des Experiments in schematischer Weise wiedergibt und das daher zeigt, wieso sich gerade *dieses* Ergebnis einstellen muss, so ist dies Bild nicht selbst wieder ein Experiment, sondern ein Schema, das die Bewegungsmöglichkeiten der experimentellen Konstruktion aufzeigt. Und insoweit uns dieses Bild vorauszusagen erlaubt, dass sich jenes Ergebnis immer einstellen wird, solange die Anordnungen dem Schema entsprechend getroffen werden, kann man es als Beweis auffassen. Das bedeutet nicht, dass jedes beliebige Bild eines Experiments auch ein Beweis sein wird, aber es heißt im Umkehrschluss, dass ein Beweis als Bild eines Experiments gedacht werden kann. Wittgensteins Betrachtung zur Pentagonkonstruktion hängt nun insoweit mit

---

* Am Ende des fünften Kapitels von Teil II (S. 29–31) habe ich anhand des Beweises von *2.15 (Transpositionsprinzip) vor Augen geführt, auf welche Weise in den *PM* oft ganze Schlussmuster abgekürzt werden. Es ist wichtig zu sehen, dass Wittgenstein diese Form der Ersetzung ganzer Schlussweisen mittels entsprechender Kürzel, die auf den bereits an anderer Stelle erbrachten Nachweis für die Gültigkeit des Schemas verweisen, *nicht* beeinsprucht. Wittgensteins Kritikgedanke ist nicht, dass man für den vollen Nachvollzug eines Beweises nicht auch auf andere Stellen soll blättern dürfen, wo bewiesen wurde, was im vorliegenden Beweis vorausgesetzt ist. Er stellt in Frage, dass es sich bei denjenigen Definitionen um bloße Abkürzungen handelt, bei denen das Definiendum den definierten Ausdruck aus dem Kalkül verdrängt, um Rollen zu übernehmen, die das Definiens nicht spielen könnte. Keineswegs aber hat er ein Problem damit, sich im Rahmen eines Beweises auf Sätze zu stützen, die an anderer Stelle bewiesen worden sind. Die Übersichtlichkeit, wie Wittgenstein sie hier einfordert, ist also nicht schon dadurch zerstört, dass wir zum Nachvollzug eines ganzen Beweisgedankens oft recht verzweigte Wege gehen müssen. – Er leugnet aber, dass das noch ein Beweis ist, wo Unklarheit darüber herrscht, welche Wege einzuschlagen sind, wollen wir ihn z. B. reproduzieren.

der Idee des Beweises als *Bild* eines Experiments zusammen, als das Konstruktionsresultat dabei von der Konstruktion nicht zu trennen ist, wie dies der Fall wäre bei der Durchführung eines Experiments. Der Beweis der Konstruierbarkeit des regelmäßigen Fünfecks besteht schließlich darin, dass man das regelmäßige Fünfeck *konstruiert*; die Hilfslinien sind dabei Teil des Beweises, ohne die er dessen beraubt wäre, was ihn dazu macht. Konstruktionsvorgang (*wie* bewiesen wird) und Konstruktionsresultat (*was* zu beweisen ist) fallen demnach in Eins zusammen: wie wenn man das *Bild* eines Experiments betrachtet, bei dem das Ergebnis gleichfalls maßgebend dafür ist, um *welches* Bild oder Schema es sich handelt, da die Versuchsanordnung nicht von einem sich daraus ergebenden Resultat zu trennen ist.

Es liegt vielleicht zunächst nicht unmittelbar auf der Hand, inwiefern diese den Status von Beweisen betreffende Feststellung das logizistische Begründungsunternehmen tangiert. Das wird aber sofort klar, wenn wir uns daran erinnern wie (bspw.) das Addieren mit großen Zahlen im System der *PM* ausschauen würde. Wir haben da einen Zahlbegriff und eine Anzahl von zunächst unbestimmt gelassenen Variablen, die unter ihn fallen. Beim Addieren verknüpfen wir zwei solcher Begriffe zu einer Disjunktion, und die Anzahl der unter dieses Disjunkt fallenden Variablen ist dann die Summe der Anzahlen derjenigen Variablen, die unter die beiden einzelnen Begriffe fallen. Soll der Beweis für die Richtigkeit einer vorliegenden Addition geliefert werden, ist ein 1→1 Abgleich der unter den durch die Oder-Verknüpfung der beiden Begriffe geschaffenen Begriff fallenden Variablen, sowie jener, die entweder unter den ersten oder unter den zweiten fallen, erforderlich.[*]

Die von Wittgenstein konstatierte Schwierigkeit besteht nun darin, dass zum Nachweis der Richtigkeit eines Beweises für einen aus mehreren tausend primitiven Termen bestehenden Additionssatz eine Untersuchung am Beweisbild erfordert wäre, die uns Gewissheit über die Identität der unter die Begriffe fallenden Anzahlen der Variablen verschafft. Ob der vorgebliche Beweis stimmt, hinge dann von einer Analyse der ihn konstituierenden Zeichen ab. Und gegen diese Idee, wonach auch *das* ein Beweis sei, von dem eine Untersuchung dies erst zeigen müsste, wendet sich Wittgenstein, wenn er die Übersichtlichkeit im Sinne leichter und exakter Reproduzierbarkeit zu einem Merkmal dessen macht, was Beweis zu nennen ist. Die Forderung ist demnach die, dass in einem Beweis die ihn auszeichnenden Operationen ganz mit Blick auf das Beweisbild selbst nachvollziehbar sein müssen; mithin zur Feststellung der Entitäten (Zahlzeichen, Variablen, Funktionsnamen etc.), zwischen denen die Operationen (z. B. das Addieren, Negieren, Abbilden etc.) vermitteln, nicht erst noch Nachforschungen angestellt zu werden brauchen. Der entscheidende und für Spannung sorgende Punkt ist aber der, dass Wittgenstein nicht nur diese in unserem tatsächlichen Umgang mit Beweisen in der Regel Bestätigung findende Charakteristik unternimmt, sondern so weit zu gehen geneigt ist,

---

[*] Diese Darstellung ist derjenigen Wittgensteins ähnlich, die er in der 27. Einheit seiner im Frühjahr 1939 abgehaltenen *Lectures on the Foundations of Mathematics* gibt, und die durchaus die Intention Russells/Whiteheads zu treffen scheint. (Vgl. Hauptteil II, Kap. 7.)

> Arithmetic and logic. If one had to prove by Russell's logic that 4,000,000 + 3,000,000 = 7,000,000, one does it by saying roughly this:
> If 4,000,000 entities – that is, (x, y,… up to 4,000,000) – satisfy the function ϕ, and only 4,000,000; and 3,000,000 satisfy ψ, and only 3,000,000; and no ϕ's are ψ's – then the sum of the two numbers is the number of things which are either ϕ or ψ. (LFM, S. 258f.)

auch jenes Konstrukt nicht Beweis nennen zu wollen, von dem gezeigt werden kann, dass es sich durch entsprechende Zeichenadaptionen in ein die Übersichtlichkeitsanforderungen erfüllendes Bild verwandeln ließe.

> Ich will sagen: Wenn man eine nicht übersehbare Beweisfigur durch Veränderung der Notation übersehbar macht, dann schafft man erst einen Beweis, wo früher keiner war. (6v)

2 Die Synthesis beim Definieren

Erinnern wir uns daran zurück (Teil II, Kap. 5), wie Russell, Whitehead, Ramsey, Carnap und Frege über Definitionen denken, so ist die Art der Erwiderung des Logizisten abzusehen. Er wird betonen, dass eine Veränderung der Notation nichts wirklich *Neues* schafft, sondern bloß eine Abkürzung von etwas darstellt, das auf allerlei andere – teils längere, teils kürzere – Weisen wiedergegeben werden könne. Wittgenstein fährt daher, diesen Einwand aufgreifend, fort:

> Denken wir uns nun einen Russellschen Beweis für einen Additionssatz der Art a+b=c der aus ein paar tausend Zeichen bestünde. Du wirst sagen: Zu sehen, ob dieser Beweis stimmt, oder nicht, ist eine rein äußerliche Schwierigkeit, die von keinem mathematischen Interesse ist. („Ein Mensch übersieht leicht, was ein anderer schwer oder garnicht übersieht" – etc. etc.) [...]
> Die Annahme ist, daß die Definitionen nur zur Abkürzung des Ausdrucks dienen, zur Bequemlichkeit des Rechnenden; während sie doch ein Teil der Rechnung sind. Mit ihrer Hilfe werden Ausdrücke erzeugt, die ohne ihre Hilfe nicht erzeugt werden könnten//würden. (MS 122, 7r)

Ein erster großer Unterschied zwischen der logizistischen und der von Wittgenstein im Rahmen seiner Kritik eingenommenen geometrischen Betrachtungsweise, die der Notation der Beweisführung besondere Wichtigkeit zuerkennt, liegt also in einer konträren Auffassungsweise des Status mathematischer Definitionen. Während der Logizist die durch Definitionen erhaltenen Ausdrücke als bloß kürzere Versionen der Definientia begreift, stellt Wittgenstein die Tatsache als zentral heraus, dass wir zum Rechnen auf das Definiendum angewiesen sind. Die Idee, dass der Wert von Definitionen der sei, besonders wichtige Ausdrücke durch gleichbedeutende kürzere ersetzen zu können, konfrontiert Wittgenstein mit dem Faktum, dass das Definiens nach dem Definieren gerade aus dem Kalkül herausfällt.

> Man hat oft gesagt, daß die Wichtigkeit einer Definition oft darin liege, daß sie die *Wichtigkeit* des Definiens hervorhebe. Aber in anderem Sinne läßt sie ja das Definiens aus dem Kalkül verschwinden. Die Wichtigkeit einer Definition liegt zumeist darin, daß sie Ausdrücken neue Strukturen gibt.
> Führt der, welcher neue Definitionen einführt, nicht einen neuen Kalkül ein? (16r)

An dieser Stelle wird nicht nur deutlich, dass Wittgenstein einen Kalkül als offen daliegendes Gebilde verstehen will, dem keine allererst aufzudeckende Tiefenstruktur eigen ist; es klingt darüber hinaus im letzten Satz die Frage an, ob nicht mit dem Offen- oder Hineinlegen einer vermeintlichen Tiefenstruktur erst recht ein neuer Kalkül geschaffen würde. Der Logizist meint, das Definieren ermögliche es dem Menschen, sich innerhalb eines mathematischen Kalküls, der unübersichtlich ist, zurechtzufinden: das Definieren offenbart jene Strukturen, die im Kalkül verborgen liegen, von uns aber nicht problemlos als solche erkannt werden können. Wittgenstein hält dagegen, dass das Definieren den Kalkül aus dem hervorbringt, was vorher eine bloße Ansammlung von Zeichen war. Den Mathematiker sollten folglich nicht so sehr die unübersichtlichen Zeichenketten interessieren, sondern die Definitionen, die aus ihnen einen Kalkül generieren. Dass dieser Gedanke aber nur äußerst vorsichtig angedeutet wird, liegt wohl daran, dass er zu problematischen Schlüssen verleitet. Wenn nämlich jede neue Definition einen neuen Kalkül einführt, kann von *einem* Kalkül, z. B. *dem* der *PM*, gar keine Rede mehr sein. Jede kleinste Zeichenadaption innerhalb eines Kalküls würde die Identität des Kalküls selbst tangieren; von klar bestimmten Kalkülen dürfte dann nur mehr dort die Rede sein, wo nicht mit ihnen gerechnet wird: das Wort „Kalkül" könnte dann höchstens noch zur Bezeichnung einer klar bestimmten Menge von (toten) Formeln dienen, die in einem Archiv abgelegt wurden. Tatsächlich aber reden wir über Kalküle, die in Verwendung sind – etwa dem logischen, mit dem in der *PM* operiert wird. Obige Betrachtung scheint diese alltägliche Redeweise nun stark in Frage zu ziehen, indem der Kalkül als etwas angesehen wird, das seine Gestalt durch jede neue Definition verändert. Da Wittgenstein aber im tatsächlich gepflogenen Sprachgebrauch den Schlüssel zum Verständnis der Bedeutung unserer Wörter verortet, und eine solche Schlussfolgerung diesem widerspräche, ist verständlich, wieso er sie (in Form einer Frage) so vorsichtig formuliert.

Es offenbart sich hier eine Schwierigkeit, mit der sich Wittgenstein in der Folge immer wieder konfrontiert sieht: dass seine zunächst sehr plausibel anmutenden Einwände, sobald man die ihnen zugrunde liegenden Implikationen konsequent weiterdenkt, zu Formulierungen hinleiten, die man nicht so ohne weiteres in Kauf nehmen will. Denn einerseits scheint der Hinweis berechtigt, dass der in primitiven Termen ($\vdash$, $\vee$, $\sim$) abgefasste Kalkül mit seinem Aussehen zugleich auch sein Wesen ändert, wenn man ihm durch entsprechende Definitionen eine kürzere Form verleiht; weil wir dann Operationen durchführen können, die vorher schlichtweg unmöglich waren. Denkt man diesen Gedanken aber dahingehend weiter, dass jegliche durch Definitionen erwirkte Zeichenänderung des innerhalb eines bestimmten Kalküls geführten Beweises jenen Kalkül selbst modifizierte, so steht man vor der paradoxen Frage, inwiefern Definitionen – wie dies in der Praxis der Fall ist – überhaupt *Teil* eines Kalküls sein können. Paradox ist diese Frage deshalb, weil ein hauptsächliches Anliegen der Wittgensteinschen Kritik darin besteht, die Ferne der logizistischen Idee des Rechnens von dem, was wir in der alltäglichen mathematischen Praxis unter Addieren, Multiplizieren etc. verstehen, herauszustellen. Wenn aber diese Kritik selbst Implikationen in sich trägt, die jener Praxis widerstreiten, fällt dieser gegen den Logizisten erhobene Vorwurf zuletzt wieder auf Wittgenstein zurück.*

* Wir werden sehen, dass Wittgenstein im weiteren Verlauf noch öfters in solche Zwangslagen gerät. Einen Ausweg, der seinen Einsprüchen Rechnung zu tragen erlaubt, ohne in übersteigerte Konklusionen zu führen, glaube ich in seinen Bemerkungen (v. a. am Ende von MS 117) zuletzt doch ausmachen zu können. (Obgleich Wittgenstein auch dort Bedenken laut werden lässt.) Bis er dorthin gelangt, werden aber etliche Umwege eingeschlagen, auf denen er verschiedenartigste Formulierungen und Beschreibungsweisen für eine adäquate Charakterisierung der Rechen- und Beweisvorgänge ausprobiert. Ich werde in den folgenden Kapiteln zumindest einzelne Hauptstränge und Kreuzungspunkte dieser Wege nachzuzeichnen versuchen.

Kommen wir zurück zur Frage nach dem Status von Definitionen. Oben hielt ich fest, dass Wittgenstein dahin tendiert, ihre synthetisierende Leistung herauszustellen, indem sie Strukturen und Raum für Operationen schaffen, die ohne sie nicht durchzuführen wären. Der Konter des Logizisten: dass diese Operationen *prinzipiell* durchaus auch in der, um etwa Freges Worten zu folgen, unabgekürzten Schreibweise bewerkstelligt werden könnten, „wenn nicht sonst die Weitläufigkeit unüberwindliche äussere Schwierigkeiten machte." (GGA I, S. vi) Ein für diese Argumentation sich sofort aufdrängender „Beleg" ist der, dass unser Rechnen – auch bei größeren Zahlen – den Verhältnissen in der Welt so gut wie immer zu entsprechen scheint. Die logizistische Erklärung der Addition, die diese als Disjunktion von gewisse Anzahlen an Variablen unter sich fassenden Begriffen versteht, zeige eben, dass eine genaue Entsprechung besteht zwischen dem in primitiven Termen geschriebenen Operationen und jenen, die wir beispielsweise im Dezimalkalkül vollziehen. So können wir etwa die Einwohnerzahlen von Linz (200.000) und Wien (1.700.000) eruieren, daraufhin deren Summe (1.900.000) berechnen, und zur Wappnung gegen etwaige Luftangriffe die berechnete Menge an Gasmasken produzieren. Beim Verteilen stellen wir fest, dass jeder Linzer und jeder Wiener eine Gasmaske erhält und keine übrig bleibt, sprich die den einzelnen Menschen entsprechende Menge hergestellt worden ist. Worauf ein Befürworter des *PM*-Kalküls die zynische Frage stellen könnte, ob es denn bloßer Zufall sei, „daß die Russellsche Logik in dieser Weise nützlich sein kann." (MS 122, 7v) – Hieraus sehen wir, dass die Auffassung der Definition als bloßer „Abkürzung der Ausdrucksweise" eng mit der Idee einer „Entsprechung von Kalkülen" verwoben ist. Denn auch der Verfechter der Russellschen Logik gäbe wahrscheinlich zu, dass diese nicht völlig ident ist mit unserem Dezimalkalkül. Er würde aber darauf beharren, dass eine Entsprechung zwischen beiden existiert, wie sie mittels der definitorischen Abkürzungen sichergestellt sei, sodass praktische Aufgaben, die wir für gewöhnlich durch Anwendungen des Dezimalkalküls lösen, wenn auch auf umständlichere Weise, in Termen der *PM* gelöst werden *könnten*. Dass dies tatsächlich funktioniert, stellt Wittgenstein in Frage, indem er wieder auf die Übersichtlichkeit des Beweisbildes dringt.

> Denken wir uns nun die Kardinalzahlen erklärt als 1, 1+1, (1+1)+1, ((1+1)+1)+1, u.s.f... Du sagst, die Definitionen welche die Ziffern des Dezimalsystems einführen dienen bloß zur Bequemlichkeit; man könnte die Rechnung 703000 × 40000101 auch in jener langwierigen Schreibweise ausführen. Aber stimmt das? – „Freilich stimmt es! Ich kann doch eine Rechnung in der ersten Notation anschreiben, konstruieren, die der Rechnung in der Dezimalnotation entspricht." – Aber wie weiß ich, daß sie ihr entspricht? – Nun, weil ich sie nach einer gewissen Methode aus der anderen abgeleitet habe. – Aber wenn ich sie nun nach einer halben Stunde wieder anschaue, kann sie sich da nicht verändert haben? Sie ist ja nicht übersehbar. (MS 122, 8v)

Auf diesen Einwand möchte man erwidern, dass sich in der physikalischen Welt keineswegs so mir nichts dir nichts die Dinge verändern. Schreiben wir eine Rechnung ins Studierheft, so haften die Zeichen für gewöhnlich auf dem Papier. Dass 703000 × 40000101, abgefasst in der 1er-Notation, sich verändert, wenn man das (einigermaßen umfangreiche) Heft kurz schließt und wieder öffnet, scheint daher eine recht absurde und kaum haltbare Idee zu sein. Was ist es also, worauf Wittgenstein uns hier aufmerksam machen will? Dass eine solche Formelreihe nicht nachvollziehbar wäre, uns also die Übersicht fehlte, um beispielsweise sagen zu können, an welcher Stelle die Hälfte der Rechnung durchgeführt ist, daran würde wohl kaum jemand zweifeln. Wohin zielt aber der Gedanke, dass sich die Anordnung sogar unbemerkt verändern könnte? – Wittgenstein scheint darauf hinaus zu wollen, dass wir im 1er Kalkül für größere Zahlen kein aus den Zeichen selbst zu entnehmendes Kriterium ihrer Identität bei der Hand haben, zum Beispiel ((((((((1+1)+1)+1)+1)+1)+1)+1)+1) von ((((((((((1 +1)+1)+1)+1)+1) +1)+1)+1)+1)+1) nicht so ohne weiteres zu unterscheiden vermögen. Wir wüssten die den Dezimalzahlen vorgeblicherweise entsprechenden Zeichen des 1er-Kalküls oft gar nicht voneinander zu trennen, geschweige denn ihre mathematischen Relationen zueinander darzustellen; eine Schwierigkeit, die sich bereits bei 10 und 11, noch weit dringlicher aber bei Zahlen wie 703000, 40000101 oder deren Produkt ergibt. Und insofern die Kriterien der Identität für größere Variablenmengen nicht am Symbol selbst zu erkennen sind, wird es problematisch, von einer Entsprechung zwischen den Zeichen des Russellschen und des Dezimalkalküls zu sprechen. Die Rede von Entsprechung zieht ihren Sinn schließlich daher, dass die in Beziehung gesetzten Entitäten klar bestimmt sind. Nachdem aber z. B. aus (((((((((((((((((((((1+1)+ 1)+1)+1)+1)+1)+1)+1)+1)+1)+1)+1)+1)+1)+1)+1)+1)+1)+1)+1)+1) für sich genommen nicht eindeutig ersichtlich wird, welche Zahl es darstellt, ist zunächst überhaupt nicht klar, warum man es zum Äquivalent der Dezimalzahl 22 nehmen sollte.

3 Ist das Zählen ein Beweis?

Damit ist nicht gesagt, dass es keine Methoden gebe, die solche Entsprechungen etablieren könnten. Das nächstgelegene wäre vermutlich, die einzelnen Einsen zu zählen und die erhaltene Zahl als Beleg dafür zu nehmen, dass einander die 22 und obige Zeichenkette tatsächlich entsprechen. Gegen ein derartiges Vorgehen erheben sich jedoch zwei Bedenken. Erstens zählen wir im *Dezimalsystem*, d. h. der Übergang von 9 auf 10, von 19 auf 20, von 99 auf 100, etc. (allgemein der Übergang von Einer auf Zehner, von Zehner auf Hunderter etc.) deutet darauf hin, dass wir hierbei einer Zähltechnik folgen, die einem Paradigma der Zahldarstellung verpflichtet ist, wie sie sich im Einerkalkül schlicht nicht findet. Demzufolge kann das Zählen nur deshalb zur Identifizierung der für sich gänzlich unanschaulichen Zeichenkolonne dienen, als man sich dabei eines Kalküls bedient, der das dazu nötige Kriterium für die Unterscheidbarkeit der Zahlzeichen bereitstellt. Insofern der Dezimalkalkül die Kriterien festlegt, mittels der die Entsprechung zwischen ihm und dem in primitiven Termen geführten Kalkül sicherzustellen ist, ergibt sich damit ein begründungstechnisches Primat des Dezimalsystems gegenüber dem, das der Logizist als der Mathematik zu Grunde liegend ansehen möchte. Das zu Begründende (Dezimalkalkül) wird gebraucht, um das vorgeblich Begründende (Primärkalkül) übersehbar und damit die Rede einer Entsprechung zwischen beidem allererst sinnvoll zu machen. Die zweite, mit der eben genannten eng zusammenhängende Schwierigkeit besteht darin, dass das Zählen selbst ein empirischer, mithin unter Umständen auch fehlgehender Vorgang ist; folglich die dadurch hergestellte Entsprechung zwischen den Zahlzeichen des primitiven und des Dezimalkalküls keineswegs mathematischer Natur, sondern vielmehr von kontingenten Begleitumständen des Zählvorganges abhängig ist. Dieser zweite Einwand deutet auf den bereits angeklungenen Unterschied zwischen mathematischem Beweis und empirischem Experiment, womit Wittgenstein den normativen Status mathematischer Sätze herausstellen und die zu ihnen führenden Beweise von empirischen Untersuchungen, bei denen zu verschiedenen Zeiten verschiedene Resultate denkbar sind, abheben will. Beide Einspruchslinien hängen eng miteinander zusammen. Dass nämlich von einer Entsprechung zwischen primitivem Kalkül und Dezimalsystem nur geredet werden kann, insofern der letztere die Möglichkeit der Identifizierung beider erlaubt, ist eine in den Zirkelvorwurf gekleidete Instanziierung der Idee, wonach die Zurückführung auf empirische Regelmäßigkeit des Sich-Ergebens (z. B. auf das Ergebnis des Zählvorgangs) den Status mathematischer Sätze untergräbt. Denn auch die Pointe des ersten Einwandes ist ja, dass ein Kalkül, zu dessen Identifikation man der Applikation eines anderen Kalküls bedarf, zum hinterfragten Untersuchungsobjekt des letzteren, und damit nicht länger als mathematisches Paradigma verwendet wird.

Während allerdings die Wägung der Tinte auf den beiden Seiten des Tautologie- bzw. Gleichheitszeichens zur Feststellung des Gleichgewichts der im konkreten Fall vorliegenden Token relativ klar als „ein Experiment eines nicht-mathematischen Satzes“ ausgewiesen werden kann (MS 122, 6v), stellt sich mit Blick auf das Zählen die Frage, ob dieses nicht zumindest für kleine Zahlen auch zur mathematischen Identitätsbestimmung tauglich ist. Immerhin wird den Kindern in der Schule das Kleine 1×1 mit häufigem Verweis auf das Verhalten zählbarer Gegenstände beigebracht, indem der Lehrer dem Schüler drei Reihen zu je vier Stäbchen auflegen lässt, und beim Abzählen in der Regel dann genau das herauskommt, was auch die Dreier- oder Viererreihe sagt. Das heißt, wir lassen in solchen Fällen das Abzählen als dem mathematischen Satz gleichberechtigt gelten, ja nehmen sogar das sich beim Zählen Ergebende zuweilen als Erklärungsgrund für die Tauglichkeit jener einfachen Multiplikationen zur vorhersagenden Stäbchenbestimmung. Genau diese Tatsache verleitet einen sodann, eine Entsprechung des Zählergebnisses auch für größere Rechnungen anzunehmen. Und in der Tat würde man wohl, wenn man die zu einem Rechteck von 12 Stück je Seite aufgelegten Stäbchen aufmerksam zählte, relativ häufig zu 144 gelangen. Und was die Stückzahlen eines für alle Linzer wie Wiener gedachten Produkts angeht, nehmen wir ja ähnliche Regelmäßigkeiten an. Als Beweis ließen wir ein derartiges Vorgehen aber nicht gelten, weil dabei die Möglichkeit anderer, falscher Ergebnisse keineswegs ausgeschlossen bleibt. Aufgrund dieser Beobachtung, wonach das Zählen eine Zeitlang als gleichberechtigt neben dem Rechnen einherläuft, dann aber das Rechnen im Dezimalkalkül seine paradigmatische Rolle alleine zu spielen beginnt, lässt sich Wittgenstein zu der provozierenden Aussage hinreißen:

> Russell lehrt uns also einen anderen Kalkül, um von 2 und 3 zu 5 zu gelangen; und das stimmt auch dann, wenn wir sagen der logische Kalkül sei nur – Fransen, die dem arithmetischen Kalkül angehängt seien. (12v)

Zuvor hörten wir von Russell, dass die eindeutige Zuordnung nicht dem Zählen gleichzusetzen sei: Die Technik des Zählens im Dezimalsystem, bei der die zuletzt erreichte Zahl die Anzahl der gezählten Menge darstellt, ist demnach zur Bestimmung der Ähnlichkeit zweier Klassen – „vom logischen Standpunkte aus betrachtet“ – völlig überflüssig. (Vgl. Teil II, Kap. 4.) Von Wittgensteins Überlegungen kann man sich nun dahin führen lassen, zu sagen, dass wir dieser Technik durchaus bedürfen; und zwar, um uns der Identität jener Variablen versichern zu können, mit denen im Kalkül operiert wird. Beim Eins-Eins Abgleich sind gewisse Methoden erforderlich, welche die aus dem Dezimalsystem bekannte Zähltechnik voraussetzen. Allerdings scheint Wittgenstein selbst gar nicht eruieren zu wollen, was dem Tautologienachweis genau ermangelt, um als Beweis eines arithmetischen Satzes gelten zu können. Da es „viele Arten und Weisen [gibt], das Gelingen der 1 → 1 Zuordnung festzustellen“ (15r), ist auch die Kluft zum arithmetischen Beweis nicht stets die gleiche. Eine wichtige Differenz zwischen beiden scheint aber die zu sein, dass das Russellsche Kollationieren für größere Klassen ein keineswegs paradigmatischer und stets aufs gleiche reproduzierbarer Vorgang ist, sondern vielmehr eine Untersuchung dessen darstellt, was bei wirklich arithmetischen Operationen ganz im Beweisbilde aufgehoben ist. Dass jene Untersuchung genau solchen Regeln folge, wie sie uns die Arithmetik bereitstellt, ist meines Erachtens ein zusätzlicher, nicht aber der zentrale Einwand.

4 Das einprägsame Bild

Wenn der Logizist der Ansicht war, dass zwar die 1 → 1 Zuordnung auf Ebene der primitiven Terme durchgeführt werde, man sich aber dann mittels gehöriger definitorischer Abkürzung auf eine anschaulichere Ebene begäbe, um auf ihr die in logische Beziehung gebrachten Zahlen nachvollziehbarer darzustellen – so tendiert Wittgenstein dazu zu sagen, „daß der Russellsche Beweis nichts Interessantes der Transformation hinzufügt, die durch die Definitionen allein bewerkstelligt wird.“ (MS 122, 15v)

> Es kommt mir vor, daß der Beweis davon, daß für die Werte 1000, 1000 und 2000 eine Tautologie entsteht gänzlich außerhalb des Beweises des uns interessierenden Satzes ist. (ebd.)

Die Pointe ist auch hier wieder, dass Mathematik betreiben nicht heißt, Untersuchungen an etwas durchzuführen, sondern Verbindungen zwischen Paradigmen zu etablieren. Die Berechnung der Summe zweier Zahlen besteht nun einmal nicht darin, in einem Ausdruck des Schemas (1) (2) ⊃ (3) „für je eine Variable in (1) und in (2) eine Variable in (3) [zu] schreiben.“ (17r) Denn nehmen wir an, wir erhielten dadurch den folgenden Ausdruck (man prüfe selbst, ob richtig abgeglichen wurde):

(| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |) (| | | | | | | | | | |) ⊃ (| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |)

Was könnte uns hier berechtigen, von der *Berechnung* der Summe zweier Zahlen zu sprechen? Wittgensteins Antwort ist: wenn uns jene Zeichenketten als Paradigmen der (dann auf mathematischem Wege) verglichenen Zahlen dienten; wie dies etwa bei (| | |) (| |) ⊃ (| | | | |) der Fall ist. Erwidert hierauf der Logizist, dass aber doch eine Entsprechung bestehe zwischen dem obigen Ausdruck und der Additionsformel 22+11=33, da man diese aus jenem ableiten kann, stellt sich uns wieder die Frage, nach welcher Methode (durch Anwendung welcher Techniken und unter Befolgung welcher Regeln) diese Entsprechung sicherzustellen sei. Da Russell und Frege die Definitionen aber als bloße Abkürzung der Schreibweise betrachten, scheint ihnen hier kein Problem zu liegen: die Entsprechung *besteht* eben. Wohingegen Wittgenstein sagt, wir *stellen* Entsprechungen *her*; legen uns, wenn wir definieren, auf eine neue

Ausdrucksweise fest. Und insofern 22 ein „einprägsames Bild“ ist, das sein Identitätskriterium ganz in sich selbst trägt – was von (| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |) nur unter sehr speziellen Umständen (siehe unten) zu behaupten wäre – scheint auch klar zu sein, warum wir die Dezimalziffern zum Addieren gebrauchen, und nicht die umfangreichen Stäbchenreihen. Die Überlegungen zum Zählen machen aber deutlich, dass die Grenzen recht fließend sind zwischen dem, was uns als Paradigma dient, und dem, was wir nach ihm beurteilen. Im Falle von 2+2=4 ließen wir vielleicht das empirische Faktum, dass immer vier Äpfel daliegen, wenn wir zu zweien nochmals zwei dazulegen, als Rechtfertigung des mathematischen Satzes gelten. Wo hört die Empirie aber auf, den Kalkül zu bevormunden? Hat 22+11=33 noch dieselbe empirische Evidenz? Obiges Beispiel hat jedenfalls gezeigt, dass wir uns schwer täten, die entsprechenden Stäbchenreihen als Paradigmen anzuerkennen; dass wir vielmehr im Rechenausdruck die Beglaubigung dafür sehen, denjenigen zu beeinspruchen, der beim Zusammenzählen von 22 Stäbchen und 11 Stäbchen auf 32 Stäbchen käme.

> Es fragt sich eben: Was nennen wir ein „einprägsames Bild“? Was ist das Kriterium davon, daß wir es uns eingeprägt haben? Oder ist die Antwort hierauf: „Daß wir es als Paradigma der Identität benützen!“? (27r)

Die zweite Frage ist eine, mit der man sich häufig konfrontiert sieht, wenn man mit Wittgenstein philosophiert. Auch an späterer Stelle fragt er, zu sich selbst gewandt:

> Sagst Du eigentlich etwas anderes als: der Beweis wird als *Beweis* genommen? (80r)

Die Schwierigkeit ist, dass seine Einsprüche gegen den Kalkül von Russell/Whitehead auf einem Begriff des Paradigmas fußen, der immerzu entgleitet, sobald man ihn genauer benennen will; ja beim Versuch, dies zu tun, man sich im Kreis zu drehen beginnt. Die Rede vom „einprägsamen Bild“ sollte ja schließlich erklären oder begreifbar machen, warum wir *dies* (22) zum Rechnen gebrauchen und *jenes* (| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |) nicht; wenn aber das „einprägsame Bild“ $\left(\text{z. B.:}\begin{array}{r} 11 \\ +\,22 \\ =\,33 \end{array}\right)$ selbst nur dadurch gekennzeichnet ist, dass wir es „als Paradigma der Identität benützen“, hat man den Zirkel bereits beschrieben. Damit wird auch nachvollziehbar, wieso Wittgenstein an die obere Frage, den (in der publizierten Edition der *BGM* nicht wiedergegebenen) Zusatz anhängt:

> (In dieser ganzen Untersuchung fühle ich mich nicht wohl: mir scheint ich bin dogmatisch.) (27r)

Ich erkläre mir die immer wiederkehrenden Selbstbezichtigungen der Vorurteilsbehaftetheit (siehe TEIL I, bes. S. 7) daher auch damit, dass Wittgenstein den Anspruch erhebt, die Begriffe, die er im Zuge seiner Kritik an Russell/Whitehead gebraucht, deutlich darzulegen; dies sich aber als ungemein schwierig erweist, da jede allgemeine Charakterisierung der Übersichtlichkeitsidee mathematischer Beweise relativierende Gegenbeispiele provoziert. Wenn wir den losen Begriff des Paradigmas festmachen wollen, gleiten wir ins Dogma. Wittgenstein selbst thematisiert mitunter den Einwand, dass es denkbar ist, sich der Identität großer Zahlen durch ein gegenständliches, z. B. in Stahl oder Stein gehauenes Paradigma der Strichreihe (Ur-Tausend, Ur-Hundert etc.) zu versichern. Das Spannen von Schnüren ermöglichte dann das Herstellen von Beziehungen zwischen solchen Maßplatten: womit ein Beleg des Zusammenhanges zwischen Zahlen erbracht wäre, der nicht übersichtlich ist.

Neben dem paradigmatischen Gebrauch der darin operativ verwendeten Zeichen hat Wittgenstein noch ein anderes, gewissermaßen aus derselben Quelle entspringendes Übersichtskriterium des Beweises genannt: seine einfache und genaue Reproduzierbarkeit.

> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | ‖ | | | | | | | | | | | | | | | |
> Ist diese Figur ein Beweis für 27+16=43: weil man zu „27“ kommt, wenn man die Striche der linken Seite zählt, zum Wort „16“ auf der rechten Seite, und zu „43“ wenn man die ganze Reihe zählt? Worin liegt hier das Seltsame – wenn man die Figur den Beweis dieses Satzes nennt?
> Doch in der Art, wie dieser Beweis zu reproduzieren ist, oder wiederzuerkennen ist; darin, daß er keine charakteristische visuelle Gestalt hat. (28r)

Doch hier stoßen wir auf dasselbe Probleme wie vorhin.

> Wenn nun jener Beweis auch keine visuelle Gestalt hat, so kann ich ihn dennoch genau kopieren (reproduzieren) – ist die Figur also nicht doch ein Beweis? (28v)

In beiden Einwänden ist vorausgesetzt, dass wir uns einer Figur als eines mathematischen Paradigmas bedienen *könnten*, obwohl wir sie in der Tat nicht dazu gebrauchen. Es ist natürlich denkbar, obiges Zeichenschema in ein Stahlstück einzuritzen, um den Maßstab dafür, was bei 27+16 herauskommen soll, bei der Hand zu haben. Liefe aber heute jemand damit herum, würden wir zunächst einmal untersuchen, ob die Freske auch wirklich aus 27 und 16 Naben besteht, und es erst dann als Bild von 27+16=43 beglaubigen. Das heißt, wir könnten es zwar als Maßstab heranziehen, das macht aber die Figur noch zu keinem Beweis, denn die Begründung dafür, dass es als Standard dienen kann, ist nicht aus ihm selbst entnommen. Dass wir uns nach einem Paradigma richten, gilt *uns* (die wir Mathematik nicht mit Urzahlen betreiben, die in Stein gehauen sind) ganz einfach nicht als Grund, der ein solches Vorgehen rechtfertigen würde. Diese Rechtfertigung muss vielmehr aus einem Beweis kommen, der uns anschaulich vor Augen führt, wieso für den vorliegenden Fall gerade *dieses* (und nicht ein davon unterschiedenes) Bild als Maßstab zu gebrauchen ist. „Ein Beweis soll nicht nur zeigen, daß es so ist, sondern daß es so sein muß.“ (26v) Insofern hat der formulierte Einwand zwar Recht darin, dass wir Kriterien zur Reproduktion unübersehbarer Strichreihen kennen: etwa eine in Stein gehauenen Vorlage. Da wir jedoch im Beweisbild zugleich den Grund für seine Annahme sehen, ist jenes Bild kein Beweis, wenn der Grund der Annahme nicht in ihm liegt. Nehmen wir die obige Strichreihe daher als Beleg für 27+16=43, so tun wir das entweder ohne jede weitere Rechtfertigung, oder aber aufgrund einer Untersuchung, bei der wir auf Paradigmen zurückgreifen, wie sie im Zählen niedergelegt sind. Liefert aber ein solches Vorgehen einen Beleg, wie wir ihn wünschen? Ist das Zählen denn ein unfehlbarer mathematischer Vorgang? — Andererseits, der zu den Dingen drängende Logiker: „Ist es nicht gleichgültig, auf welchem Wege wir zu der Überzeugung gelangen, dass die Kolonne aus 27 wie 16 Strichen, und insgesamt 43 Strichen besteht? Denn handelt es sich dabei nicht nur um das Aufdecken einer Entsprechung, die auch unabhängig von der Untersuchung existiert? Die Entsprechung besteht doch nun einmal!“ – Womit wir wieder zur Frage gelangen, ob die in den *PM* gemachten Definitionen schlichtweg Abkürzungen sind, die nur hervorheben, was ohnehin schon in den in primitiven Termen abgefassten Formeln gelegen hat; oder ob sie die für unsere Mathematik relevanten Strukturen allererst hervorbringen, indem sie „den Ausdruck eines *neuen Systems*“ einführen. (31r) Für Wittgenstein ergibt sich jedenfalls das Problem, dass die Weise, *wie* der logische Kalkül abzukürzen ist, um daraus den uns bekannten des Dezimalsystems entspringen zu lassen, nicht aus dem ersteren entnommen werden kann. Man scheint schon die uns gebräuchlichen Dezimalbegriffe mitnehmen zu müssen, um überhaupt zeigen zu können, dass man sie aus dem logischen Kalkül ableiten kann. Dann aber wirkt es sonderbar, von einer *Fundierung* der Arithmetik durch den Logikkalkül zu reden: denn die Kriterien, nach denen sich die Entsprechung richtet, sind schließlich aus der Arithmetik genommen.

> Liegt denn nicht meine ganze Schwierigkeit darin, einzusehen, wie man, ohne aus Russells logischem Kalkül herauszutreten zum Begriff der *Menge der Variablen* in dem Ausdruck „$(\exists\, x, y, z\ etc)$“ kommen kann, dort wo dieser Ausdruck unübersehbar ist? –
> Nun kann man ihn aber doch übersehbar machen indem man schreibt: ($\exists\ x_1, x_2, x_3$, *etc*). Und dennoch verstehe ich etwas nicht: man hat doch nun das Kriterium für die Identität so eines Ausdrucks geändert! Ich sehe jetzt auf andere Weise, daß die Menge der Zeichen in zwei solchen Ausdrücken die selbe ist. (33r)

5 Die Erfindung des Dezimalsystems

Das Verhältnis der im Dezimalsystem geführten Beweise zu den Formeln der *PM*-Arithmetik im Auge habend, können wir dieses Problem dahin wenden zu fragen, was die Erfindung des Dezimalsystems eigentlich sei. Denn in der Schule lernen wir zuerst von 1 bis 9 zu zählen, und zwar anfangs mittels der unmittelbaren Anwendung auf Stäbchen oder sonst einprägsamer Gegenstände (Kugeln am Abakus); dann geht es weiter von 10 bis 20, 21 bis 30 etc., wobei wir hier bereits auf die regelmäßige Wiederkehr der Einer aufmerksam gemacht werden; und bei den Hundertern wird dann auf die Wiederkehr der Zehner hingewiesen; und so weiter bei jeder Potenz die vorhergehende. (PU, § 145) Diese Beobachtungen könnten uns dahin führen zu sagen, dass die Erfindung des Dezimalsystems die „Erfindung eines Systems von Abkürzungen“ sei. (MS 122, 30v) Denn die 10 gilt uns als *dasselbe* wie 1+1+1+1+1 + 1+1+1 +1+1, die 100 als *dasselbe* wie 10+10+10+10+10 + 10+10+10+10+10, die 1000 ist *dasselbe* wie 100+100+... usw. – Ist daher nicht auch die 1000 auf die Einsen zurückgeführt und also *dasselbe* wie 1+1+1+1+1... ?

Wir sagen 100 sei dasselbe wie 100×1 und meinen, dies wiederum bedeute dasselbe wie 1+1+1+1+... – Betrachten wird nun aber, was in beiden Fällen ‚dasselbe‘ heißt. Die Kriterien dafür, „dass 100 dasselbe wie 100×1 ist“, liegen in diesem Satze selbst; wir sagen: „Ja, das ist, was wir ‚100‘ und ‚100×1‘ nennen wollen.“ Dagegen liegen die Kriterien dafür, „dass 100 das selbe wie 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 +1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 +1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 ist“, nicht in diesem Ausdruck selbst. Zur Beurteilung seiner Wahrheit sind wir auf Kriterien angewiesen, die eine Übersicht über die lange 1er-Kolonne herstellen und die folglich nicht aus ihr (d.i. die 1er-Kolonne bzw. der zu beurteilenden Ausdruck) selbst zu entnehmen sind. Als maßgebend sehen wir beim Rechnen nicht die Einerschritte an, sondern den Zahlausdruck des Dezimalsystems. Wenden wir diesen Gedanken jedoch auch auf die Verwendung von ‚dasselbe‘ in den anderen der oben genannten Sätze an, so müssten wir auch hier sagen, dass dieses Wort in dem Satze „die 10 gilt uns als *dasselbe* wie 1+1+1+1+1 + 1+1+1+1+1“ eine andere Bedeutung hat als in dem Satze „die 100 gilt uns als *dasselbe* wie 10+10+10+10+10 + 10+10+10+10+10.“ Ja, in gewisser Weise scheinen wir die Frage nach der (gemeinsamen) Bedeutung von ‚dasselbe‘ gar nicht stellen zu dürfen. Denn in allen Fällen erhalten wir schließlich eine Erklärung bzw. Festlegung dessen, was betreffs der jeweiligen Zeichen ‚dasselbe‘ zu nennen ist. — „Doch nein!“, will man hier wieder rufen: „Die Sätze sagen uns doch was dasselbe *ist*, nicht bloß, was wir so *nennen*. Die Art des Übergangs von einer Potenz zur nächsten ist doch immer die gleiche. Und nachdem zehn Dinge – ein Ding, und noch ein Ding, und noch ein Ding (etc.) *sind*; so *sind* aufgrund der Definitionen, d. h. wegen der stets gleichen Übergänge im Kalkül, auch hundert Dinge – ein Ding, und noch ein Ding, und noch ein Ding (usw. usf.)!“ Und dieser Ruf scheint doch irgendwie berechtigt, jedenfalls drängt er sich einem sehr schnell auf. Das Entscheidende, möchte man sagen, zeigt sich ja in 10 = 1+1+1+1+1 + 1+1+1+1+1 genauso wie in 100 = 10+10+10+10+10 + 10+10+10+10+10: dass wir nämlich immer 10 zusammenfassen und dafür einen neuen Ausdruck geben; und *dasselbe*, so fährt man fort, geschieht doch auch im Übergang von den Hundertern zu den Tausendern, und so weiter, alle Dezimalstellen hindurch. – Wittgenstein hält dem nun wieder die Tatsache entgegen, dass *wir* mit 10 und 100 und 1000 (etc.) rechnen, nicht mit lauter 1er Reihen.

> „Die Rechnung basiert ja doch auf den Einerschritten...“ Ja; aber auf andre Weise. Der Beweisvorgang ist eben ein anderer.
> Ich könnte z.B. sagen 10=1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 und *gleichermaßen* 100=10+10+10+10+10+10+10+10+10+10. Habe ich nicht die Erklärung von 100 auf die sukzessive Addition von 1 basiert? Aber in der selben Weise, als hätte ich 100 Einser addiert? Braucht es in meiner Notation überhaupt ein Summenzeichen der Form – ‚1+1+1...‘ mit 100 Summanden geben?
> Die Gefahr scheint hier zu sein, das gekürzte Verfahren als einen blassen Schatten des ungekürzten anzusehen. Die Regel des Zählens ist nicht das Zählen. (41v)

Das Verständnis eines Systems wird, wenn man nach obiger Auffassung denkt, als Extrapolation einer in alle Ferne führenden Schiene gefasst. (PU, § 218) Indem man das gegenseitige Verhältnis der ersten, gut übersehbaren Gleiskörper eruiert, nimmt man an, ihren weiteren Verlauf gleichsam miteingefangen zu haben. Dieser Betrachtungsweise, bei der der Kalkül sozusagen denkend durchlaufen wird, stellt Wittgenstein eine solche gegenüber, die das Beherrschen eines Kalküls als Technik begreift, in die wir durch tätige Praxis eingeübt werden. Was es heißt, das System eines Kalküls zu ‚sehen‘ wird von beiden Zugängen also völlig unterschiedlich ausgelegt. Während die logizistische Auffassung unsere Kenntnis des Kalküls als ein *Wissen* über die Anwendung der bei seinem Erlernen erworbenen Regeln denkt, pflegt Wittgenstein eine Redeweise, die das Fortschreiten im Kalkül als Ausgestalten einer durch Übung und Konditionierung erworbenen Technik und *Fertigkeit* in den Vordergrund rückt. Das System zu ‚sehen‘ besteht für ihn nicht darin, durch Anschauen einzelner seiner Manifestationen eine allgemeine Idee zu fassen, sondern „darin[,] auf den Befehl die Reihe hin fortzusetzen[,] so und so zu reagieren.“ (MS122, 29v) Wir denken nicht an jeder Stelle die Regel und wie sie anzuwenden ist, sondern beherrschen eine Technik, die uns die Übergänge in

Übereinstimmung mit Anderen machen lässt. Mathematisches Operieren ist nicht ein Deuten von Regeln, sondern deren stetige Neusetzung im Zuge ihrer Anwendung. (Dass wir dennoch von *der* Regel und ihrer Anwendung bzw. von *dem* Kalkül und seiner Erweiterung reden, zeigt allerdings, dass wir noch andere Kriterien bei der Hand zu haben scheinen, die uns zur Identifikation des sich durch seine Applikation Verändernden dienen. Ohne hier schon näher darauf eingehen zu wollen, sei so viel gesagt, dass die Verortung dieser Kriterien sehr eng mit Fragen der Brauchbarkeit und der inner- wie außermathematischen Anwendung der mittels des Kalküls erhaltenen Sätze zusammenhängt.)

Die begründungstheoretische Zugehensweise möchte das Zahlsystem hinsichtlich seines Passens auf die tatsächlichen Weltverhältnisse verbürgen. Die Tatsache, dass wir das Zahlsystem zur Beurteilung benützen, ist ihr nicht genug, weil damit über die Berechtigung unseres Vorgehens noch nichts gesagt ist. Nun wird die Richtigkeit des Systems erklärt, indem man ausgehend von einer auf niedriger Stufe festgestellten Übereinstimmung desselben mit den empirischen Fakten auf das Bestehen derselben Übereinstimmung auch auf höherer Stufe schließt. Eine erkannte Regelmäßigkeit im Systemfortschritt könne uns demnach belegen, dass in höheren Sphären die Entsprechung zwischen Kalkül und empirischer Welt genauso existiert wie auf der Ebene einfacher Operationen, wo wir uns von einer solchen Entsprechung direkt zu überzeugen vermögen. Das System versteht, wer aufgrund von Beobachtungen eine Regel erkannt hat, die es im Fortschreiten bloß immer wieder aufs Neue anzuwenden gilt. Nachdem nun ein Blick auf den Dezimalkalkül zeigt, dass die Form des Übergangs von einer Potenz zur Nächsten stets die gleiche ist, und wir außerdem bei kleinen Zahloperationen der Übereinstimmung mit anschaulich vorliegenden Vorgängen der Wirklichkeit versichert sind (etwa dass 2 Reihen zu 10 Mann einen Trupp von 20 ergeben), schließt man, dass die Entsprechung auch statthaben muss, wenn wir mit zehnstelligen Zahlen operieren – denn die Bewegungen im Kalkül waren doch stets *die gleichen*!

Wittgenstein konfrontiert diesen so ungemein naheliegenden Gedanken mit der Frage, ob man denn ein Kriterium geben könne, an dem das richtige Fortschreiten im Kalkül zu bemessen sei. Oder anders gewendet: Ob denn die bloße Abkürzung eines Zeichens bereits zeige, wie man die Definition im konkreten Falle anzuwenden habe. (30r) Damit weist er darauf hin, dass wir kein außerhalb unseres tatsächlichen Fortsetzens des Kalküls liegendes Kriterium dafür haben, wie er fortzusetzen ist. Unser Beleg dafür, dass in der 1er Reihe auf 1300089999 130090000 folgt, liegt darin, dass wir *diesen* Übergang *so* vollziehen. Nun würde hierauf womöglich erwidert werden, dass sich der vollzogene Übergang von 899 auf 900 ergeben *müsse*, wenn die Rechnenden die zuvor angenommenen Regeln 1+9=10, 10+90=100 und 100+800=900, die ihrerseits alle auf die erste reduziert werden könnten, auch an dieser Stelle anwenden. – Davon abgesehen, dass wir wohl für gewöhnlich keinen Gedanken an diese Regeln verschwenden, wenn wir jenen Übergang zu machen haben: Sollten sie tatsächlich als Rechtfertigung für den fraglichen Übergang dienen, so ließe sich ohne weiteres eine Interpretation ihrer Anwendung denken, die uns nach 899 wieder mit 100 fortfahren ließe. Wenn wir eine Rechtfertigung für die Richtigkeit des Kalküls geben wollen, können die dazu herangezogenen zuvor gemachten Schritte, bei denen wir einer Regel (z. B. Addition um 1) folgten, auch in einer Weise gedeutet werden, die ein Abweichen (wie wir jetzt sagen würden) in der weiteren Anwendung rechtfertigten. Wann immer eine Regel herangezogen wird, um ein Vorgehen (den Übergang von einer Zahl zur nächsten in der 1er Reihe) zu rechtfertigen, findet eine Deutung dieser Regel statt, insoweit ihre Geltung auch für den konkreten Fall beansprucht wird. Diese spezielle Deutung kann nun weder durch sich selbst noch durch all die vorhergehenden Applikationen gerechtfertigt werden. Dann aber ist man mit der Frage konfrontiert, welchen Maßstäben eine solche Interpretation denn folge. Lassen wir aber in Bezug auf die Fortsetzung eines mathematischen Kalküls diese Möglichkeit des Rückgangs auf Regeln, die das Befolgen von Regen regeln, nicht gelten, dürfen wir das Befolgen einer Regel nicht als Interpretation dieser Regel verstehen, sondern müssen unser Vorgehen selbst zum Kriterium richtigen Vorgehens nehmen. Was ‚gleiches Fortsetzen' heißt, wird somit festgelegt, indem wir fortsetzen. Jeder Schritt hinter diese Tat verliert sich im Deuten. Sobald man dies zugesteht, kann die Rede von den *immer gleichen Übergängen* im Dezimalkalkül nicht mehr ins Feld geführt werden, um die genaue Entsprechung zwischen den Operationen mit zehnstelligen Zahlen und dem Verhalten von Sandkörnern zu belegen. Dass wir aufgrund anschaulicher Gegebenheiten sagen, die Gleichheit sei im Fall von 3+2=5 und | | | + | | = | | | | | dieselbe, impliziert nicht, dass diese Entsprechung unmittelbar auch für größere Zahlen gilt. Der Begriff der Gleichheit, wie er in einer zehnstelligen Addition gebildet wird, ist nicht in dem der Gleichheit zwischen | | | + | | und | | | | | enthalten. Daher sagt es für sich genommen noch nichts, die Gleichheit zwischen 300.000+200.000 und 500.000 entspräche einer Gleichheit zwischen | | | ... + | | | ... und | | | | ... – Indem wir Dezimalgrößen statt Einer schreiben, ändert sich beim Fortschreiten das Kriterium, an dem die Entsprechung zu messen wäre; etablieren wir sie dann anhand dieser Kriterien, nehmen wir das Dezimalsystem zum Maß, wodurch der Begründungsanspruch zur leeren Geste wird. Dass wir in Bezug auf erste Schritte zweier Kalküle den in ihnen zum Ausdruck gebrachten Begriff der Gleichheit miteinander identifizieren können, garantiert uns demnach keineswegs, dass diese Entsprechung auch besteht, wenn wir den Vergleich nicht mehr zu bewerkstelligen vermögen, ohne einen der dabei verglichenen Kalküle zum Maßstab der Zuordenbarkeit zu nehmen. Was ‚gleich sein' heißt, ist dann allein durch unser Zählsystem definiert. Was die lange Strichreihen überhaupt darstellen, ist einfach nicht klar, ehe sie mittels der ‚Abkürzungen', wie wir sie vom Dezimalsystems her kennen, geordnet wurden.

> Ich bin eben versucht zu sagen: Russells Beweis kann wohl Stufe für Stufe weitergehen, aber am Schluß wisse man nicht recht was man bewiesen hat – wenigstens nicht nach den alten Kriterien. Indem ich den Russellschen Beweis übersichtlich mache, bewiese ich etwas über den Beweis.
> Ich will sagen: man brauche die Russellsche Rechentechnik gar nicht anzuerkennen – und könnte mit einer andern (Rechentechnik) beweisen, daß es einen Russellschen Beweis des Satzes geben *müsse*. Dann aber ruht der Satz freilich nicht mehr auf dem Russellschen Beweis.
> Oder: Daß man sich zu jedem bewiesenen Satz der Form m+n=l einen Russellschen Beweis vorstellen kann, zeigt nicht daß der Satz auf dieser Rechnung ruht. Denn der Fall ist denkbar, daß man den Russellschen Beweis eines Satzes vom Russellschen Beweis eines andern Satzes gar nicht unterscheiden kann und nur darum sagt sie seien verschieden, weil sie die Übersetzungen zweier erkennbar verschiedener Beweise sind.
> Oder: Etwas hört auf Beweis zu sein, wenn es aufhört Paradigma zu sein, z. B.

> Russells logischer Kalkül; und anderseits ist jeder andere Kalkül annehmbar, der uns als Paradigma dient. (34)

6 Selbstkritik und Dogmatismus

Nun ist auffallend, dass obige Thesen allesamt mit den Worten „Ich bin versucht zu sagen...“ oder „Ich will sagen“ beginnen. Das deutet darauf hin, dass Wittgenstein seine eben formulierten Einwände durchaus mit Skepsis betrachtet. Bestätigung findet dies durch selbstkritische Bemerkungen aus dem direkten Umfeld.

> Es wird mir schwer, hier gerecht zu sein. Es ist in der Philosophie schwer, nicht ungerecht zu sein, wenn man den *gerechten* Ausweg nicht sieht. (MS 122, 28r)
>
> Wie kannst Du sagen, daß Russell den Satz „250+3220=3470“ nicht beweisen kann?! (30r)
>
> Versuche nicht, recht zu behalten! Es ist fruchtbarer, zu trachten, das eigne Unrecht zu beweisen. Ich bin jetzt eigentlich sicher, ich habe mich geirrt. Aber de[n] Platz meines Irrtums und seine Reichweite weiß ich nicht. (39v)

Als Leser steht man hier vor der Frage, woran diese Selbstzweifel Anstoß nehmen. Wo genau liegt denn der Irrtum, von dem Wittgenstein spricht? Man möchte doch wissen, worin er meint, Unrecht gehabt zu haben: um diesen Fehler dann auszumerzen und die Einsprüche entweder fallen lassen oder entsprechend adaptieren und richtig stellen zu können. – Allerdings wird man enttäuscht, wenn man meint, dergleichen explizite Hinweise im Text finden zu können. Auch ist kein unmittelbarer Bruch zwischen den Betrachtungen vor und nach diesen Selbstkritiken zu sehen, der es einem erlaubte, die genaue Differenz – und damit den angesprochenen Irrtum – auf diese Weise zu ermitteln. Im Gegenteil äußert Wittgenstein kurz darauf und auch in der weiteren Folge ganz ähnliche Einwände, etwa wenn er schreibt:

> Ein abgekürztes Verfahren lehrt mich, was bei dem unabgekürzten herauskommen *soll*. (Statt daß es umgekehrt wäre.) (41r)

Mir scheint, es ist nicht möglich, den *einen* „Fehler“ zu markieren, weshalb Wittgenstein mit seinen Überlegungen und Einsprüchen unzufrieden ist. Vielmehr werden wir in den weiteren Kapiteln sehen, dass er, ausgehend von der Forderung nach Übersichtlichkeit des Beweisbildes, immer wieder aufs Neue zu recht expliziter, wenngleich in anderen Worten und Bildern formulierter Kritik gegen den Grundlegungsanspruch der *PM* geführt wird; die Selbsteinsprüche dabei aber genausowenig aufhören. Den weiteren Verlauf seiner Bemerkungen im Auge habend, ist jedoch schon jetzt der Hinweis angebracht, dass Wittgensteins „Irrtum“ nicht, wie dies eben angedacht wurde, darin gesucht werden sollte, einzelne Schritte der Argumentation auf ihre Schlüssigkeit hin zu untersuchen und entsprechend auszubessern. Sondern der „Fehler“ liegt, wie ich meine, eher in der Betrachtungsweise selbst, indem die von Wittgenstein bislang gewählten Formulierungen dazu leiten, mehr zu leugnen als er eigentlich möchte. – Das ursprüngliche Motiv seiner Untersuchungen zur Verwendungsweise von Beweisen war, die prinzipielle Sinnhaftigkeit des Grundlegungsgedanken zu hinterfragen; welches Interesse wir also überhaupt daran nehmen sollen, wenn die Zurückführung auf Logik alles in Eins zerfließen, und so die Unterscheidung der vielfältigen Beweispraktiken der Mathematik immer schwieriger werden lässt. Auf dieses Motiv sich besinnend, wird es später heißen:

> Was will Einer zeigen, der zeigen will, daß Mathematik nicht Logik ist? Er will doch etwas sagen wie: – Wenn man Tische, Stühle, Schränke etc. in genügend Papier wickelt, werden sie gewiß endlich kugelförmig ausschauen.
> Er will nicht zeigen, daß es unmöglich ist, zu jedem mathematischen Beweis einen Russellschen zu konstruieren, der ihm (irgendwie) ‚entspricht'; sondern, daß das Anerkennen dieser Entsprechung sich nicht auf Logik stützt. (101r)

Die bisher erörterten Einwände gehen aber weit über diese Absicht hinaus, da Wittgenstein nicht nur die begründungstheoretische Geltung des in den *Principia Mathematica* entwickelten Kalküls zurückweist, sondern im Zuge seiner Betrachtungen außerdem dazu geleitet wird, dessen Beweiskraft selbst in Frage zu stellen. Bei dem Versuch, die Idee einer Grundlegung der Mathematik als fehlgeleitet auszuweisen, indem gezeigt wird, dass der logische Kalkül das Rechnen im Dezimalsystem nicht zu rechtfertigen vermag, schwenkt die Betrachtung also auf eine Ebene, auf der man sich als Philosoph schnell unwohl zu fühlen beginnt. Wenn auch die Logik nicht das Fundament der Mathematik ausmacht, so ist sie doch ein Teil derselben. Und sollte der Philosoph sich anmaßen dürfen, darüber zu urteilen, ob sie das zu Recht ist oder nicht? Die gegen sich selbst gewendeten Dogmatismusbezichtigungen erkläre ich mir in diesem Fall so, dass Wittgenstein nichts gegen den Kalkül als einer Manifestation mathematischen Denkens einwenden möchte: dass aber seine Versuche, dessen Brauchbarkeit zur Begründung der Mathematik zu hinterfragen, ihn immer wieder genau dazu führen; und er sich in der Folge mit Arbeit überladen sieht, die ihn eigentlich nichts angeht. In den *Philosophischen Untersuchungen* heißt es:

> Die Philosophie darf den tatsächlichen Gebrauch der Sprache in keiner Weise antasten, sie kann ihn am Ende also nur beschreiben.
> Denn sie kann ihn auch nicht begründen.
> Sie läßt alles wie es ist.
> Sie läßt auch die Mathematik wie sie ist, und keine mathematische Entdeckung kann sie weiterbringen.
> Ein „führendes Problem der mathematischen Logik" ist für uns ein Problem wie jedes andere. (PU, § 124)

Am tatsächlichen Sprachgebrauch hat der Philosoph also nicht zu rütteln. Wenn seine Charakterisierung eines Phänomens (hier: die Rolle des Beweises in Sprachspielen) mit unserer Verwendungsweise von Begriffen in Widerspruch steht (wir nämlich ganz einfach sagen, dass in den *PM* Sätze bewiesen werden), so fehlt es an der entsprechenden Übersicht über dieses Phänomen – die zu generieren alleine helfen kann, um die passende Charakteristik zu finden. Auf diese Schwierigkeit bezugnehmend, schreibt Wittgenstein in MS 163 (Juni, Juli 1941), wo er die hier behandelten Fragen wieder aufrollt:

> Meine Aufgabe ist es nicht, Russells Logik von *innen* anzugreifen, sondern von außen.
> D.h.: nicht, sie mathematisch anzugreifen – sonst triebe ich Mathematik – sondern ihre Stellung, ihr Prestige. (MS 163, 13r)

Nach den bisherigen Ausführungen ist vielleicht noch nicht hinreichend klar, inwiefern die geometrische Betrachtungsweise tatsächlich zu jenen Schwierigkeiten führt, wonach dem logischen Kalkül seine mathematische Berechtigung entzogen werde. Zunächst scheint Wittgenstein ja nur gesagt zu haben, dass die *PM* der Definitionen als eines notwendigen Beweisartefaktes bedürfen und die Wahl dieser nicht durch den logischen Kalkül vorbereitet, sondern an bereits bestehenden Paradigmen der Mathematik orientiert sei. Doch die im nächsten Kapitel dargestellten Überlegungen, in denen Wittgenstein genauer darauf eingehen wird, was den Beweis kennzeichnet, worin unsere Annahme eines mathematischen Satzes besteht, und welche Rolle der Beweis dabei spielt – diese Ausführungen, die quasi explizieren, welche Idee des Beweises mit seiner Kritik einhergeht, werden verdeutlichen, dass es dadurch schwierig wird, den logischen Kalkül überhaupt als einen beweisenden im gedachten Sinne zu verstehen. Da es aber höchste Wichtigkeit hat, „not to interfere with the mathematicians" (LFM, S. 13), schließt Wittgenstein daraus, dass etwas mit dem von ihm eingenommenen Betrachtungsstandpunkt nicht stimmen kann, wenn man von ihm aus Dinge leugnen möchte, die nun einmal so sind.

Bislang thematisierten wir die Übersichtlichkeit vorrangig im Zusammenhang mit der Möglichkeit der Identifizierung und/oder Reproduktion mathematischer Beweise. Die Übersehbarkeit des Beweisbildes wurde vor allem unter dem Aspekt unserer Erkenntnisfähigkeit desselben betrachtet. Zur Bestimmung eines Beweises als eben dieses Beweises dürfe demnach keine Untersuchung seiner Strukturelemente vonnöten sein, weil dabei ein methodisch leitendes Paradigma vorausgesetzt bliebe und der vorgebliche Beweis, indem er Objekt einer einmal zu diesem und einmal zu jenem (wenngleich *oft* dem gleichen/richtigen) Ergebnis gelangenden Untersuchung wird, seinen paradigmatischen Status verlöre. Von der Überzeugungskraft, die wir Beweisen zusprechen, war bislang weniger die Rede. Doch auch diese ist eng mit ihrer Überschaubarkeit verknüpft, weil nur derjenige Vorgang uns die Annahme des ihn abschließenden Satzes als grammatischer Festsetzung nahelegt, der uns als zwingend erscheint. Die Forderung nach Übersicht des Beweisbildes erwächst also u. a. daraus, dass nur dasjenige als Vorbild zur Beurteilung einer Sachlage dient, was problemlos als ebendies Paradigma zu identifizieren ist. Oder anders gewendet: Der paradigmatische Status des Beweises ist durch seine einwand- bzw. untersuchungsfreie Identifizierbarkeit erwirkt.

> Wo ein Zweifel auftreten kann, ob *dies* wirklich das Bild *dieses* Beweises ist, wo wir bereit sind die Identität eines Beweises anzuzweifeln, dort hat unser Vorgehen seine Beweiskraft verloren. Denn der Beweis dient uns ja als Maß. (MS 122, 44r)

Während in den vorangegangenen Betrachtungen der Sinn der Rede vom paradigmatischen Status des Beweises weitestgehend unhinterfragt vorausgesetzt blieb, wendet sich Wittgenstein in der Folge sehr eingehend der Frage zu, *wozu* der Beweis denn als Vorbild oder Maß fungiere. Den Grund für die besondere Virulenz dieser Frage verorte ich darin, dass es sich in Hinblick auf logische Formeln als ungemein schwierig erweist, sie als Paradigmen *für* ein entsprechendes Vorgehen zu fassen. Ich deute die in diesem Kapitel aufbereiteten Überlegungen daher als die Exemplifizierung von Implikationen seiner Kritik, die zeigen, dass eine überstarke Betonung des in der Zeichengeometrie niedergelegten Operationalen mathematischer Beweise dahin führen könnte, dem logischen Kalkül per se jede Relevanz als eines Beweismechanismus abzusprechen; – etwas, was Wittgenstein nicht machen möchte. Die Schwierigkeit, der er sich stellt, ist dann die, dem logischen Kalkül als mathematischer Erscheinung volle Rechnung zu tragen, trotzdem man seine Tauglichkeit zur *Begründung* der Arithmetik bestreitet. Die Einsprüche müssen also von einem Standpunkt aus vorgebracht werden, der nicht auf Vorstellungen gründet, die Russells und Whiteheads „primitive propositions“ von vornherein als nicht zur Mathematik gehörig ausweisen; was mindestens solange der Fall zu sein scheint, als man nicht in der Lage ist, die gegebene Charakteristik des Beweises auch auf logische Beweisformen angemessen anzuwenden. Schließlich *reden* wir von „formallogischen Beweisen“, bei welchen man mittels entsprechender Regeln aus gegebenen Axiomen einen Satz ableitet. Die Frage wird daher sein, ob in Bezug auf solche Beweise die Beschreibung des Beweises wie Wittgenstein sie andenkt, nämlich als eines *Begriffsvorbildes*, aufrecht erhalten werden kann.

> Wenn ich vom Beweis sage, er sei ein Vorbild (ein Bild) so muß ich es auch von einer Russellschen primitive proposition sagen können (als der Eizelle eines Beweises). (58r)

Ein weiterer Aspekt dieser Problemlage spiegelt sich in der augenscheinlichen Ambivalenz, dass nach Wittgensteins Darstellungsweise der Sinn mathematischer Sätze durch deren Beweisumfeld bestimmt ist und folglich nur mit Blick auf dieses verstanden werden kann; die Praxis hingegen zeigt, dass wir mathematischen Sätzen häufig weitest gehende Selbstständigkeit einräumen, indem wir sie auch dann als gehaltvoll erachten, wenn wir den Beweis nicht kennen. Da der Sinn vom Gebrauch nicht gelöst werden kann, fließt die Frage nach dem Gehalt mathematischer Sätze in jene Überlegungen ein, die sich um das genaue Verhältnis zu ihrer Anwendung drehen und umgekehrt. Die Betrachtung muss sich daher einerseits auf die innermathematischen Beziehungen richten, darf aber zugleich die außermathematischen Anwendungen nicht aus den Augen verlieren, die unsere Überzeugtheit von den ersteren belegen. Die Schwierigkeit besteht dann darin, dass wir zum einen sagen wollen, das mathematische Faktum sei durch unser Vorgehen belegt, da die Mathematik ihren regulativen Charakter nur durch den entsprechenden Gebrauch als solche erhält; wir aber zum anderen zugeben müssen, dass sie (zu einem großen Teil jedenfalls) in Sätzen abgefasst ist, die einen spezifischen Sinn ausdrücken. Die arithmetische Betrachtungsweise will dieser Ambivalenz gerecht werden, indem sie zu zeigen versucht, dass der mathematische Satz den Gehalt aus seinem Verhältnis zu jenen zieht, die in den Beweisstrukturen um ihn stehen. Dass also die Verwandtschaft oder Ähnlichkeit des arithmetischen zum Satz der Naturwissenschaften eine nur oberflächliche ist, und er seinen Sinn durch den innermathematischen Gebrauch, seine Rollen im Beweisgeflecht erhält; dieses aber wiederum ein bloßes Zeichenmosaik wäre, dem höchstens ästhetische Relevanz zukäme, würden nicht etliche der darin aufscheinenden Zeichen auch „in Zivil“ gebraucht. Die Frage nach dem Verständnis eines mathematischen Satzes steht nicht vor der Alternative, ob man ihn anwenden können oder aber seinen Beweis kennen muss, um ihn zu verstehen. Ein Beweis überzeugt uns gerade dadurch, dass er vor Augen führt, wozu der durch ihn bewiesene Satz zu gebrauchen ist.

1 Das synthetische Faktum

Um einen ungefähren Eindruck von Wittgensteins Bemühen um den angemessenen Ausdruck zu vermitteln, gebe ich hier zunächst einen Abriss seiner Charakterisierungsversuche dessen, wofür der Beweis uns als Vorbild dient. In der Folge werde ich dann, wieder möglichst nah am Text bleibend, seine Rede vom Beweis als eines Begriffsvorbildes, sowie den Grund für seine Skrupel gegenüber den eigenen Formulierungen herauszuarbeiten versuchen.

> „Der Beweis muß überblickbar sein“ – heißt: wir müssen bereit sein ihn zur (unbedingten) Richtschnur zu gebrauchen (?) dafür, ...
> ... was als gleich und ungleich zu gelten hat, etc... (MS 122, 44v)
> ... wie dieser Ausdruck richtig anzuwenden ist. (45r)
> ... wie wir eine Lage beurteilen. (45r)
> ... wie diese Operationen *ein Ergebnis* haben. (48v)

> ... wie ein Satz zu verifizieren ist. (49v)
> ... das als Sinn, das nicht als Sinn anzuerkennen. (54r)

Wenn Wittgenstein von diesen Überlegungen aus dazu übergeht, vom Beweis bevorzugt als einem Begriffsvorbild zu sprechen, so wird aus dem Zusammenhang deutlich, dass er unter einem Begriff weniger ein ungesättigtes Fregesches Abstraktum verstehen möchte, das die Gegenstände hinsichtlich ihrer gemeinsamen Eigenschaften bestimmt. Sondern er denkt dabei, wie er an anderer Stelle (1941) schreibt, „an die Technik unseres Gebrauchs eines Ausdrucks. Gleichsam das Eisenbahnnetz das für ihn von uns gebaut ist." (MS 163, 57r) Der Beweis legt uns eine Technik zur Beurteilung und Darstellung (nicht nur Beschreibung!) empirischer Zusammenhänge, bzw. allgemeiner des richtigen Umgangs mit ihnen nahe, indem er durch die Konstruktion eines Ausdrucks die Anerkennung des Wie seiner Konstruktion provoziert. Es kommt also nicht allein darauf an, *dass* der Beweis zu einem Ergebnis gelangt, sondern *wie* er dahin gelangt; und dass dieses Hingelangen uns als zwingend erscheint.

> Der Beweis (das Beweisbild) zeigt uns das Resultat eines Vorgangs (der Konstruktion); und wir sind bedingungslos bereit anzunehmen, daß ein *so* geregeltes Vorgehen (immer) zu diesem Bild führt.
> (Der Beweis führt uns ein synthetisches Faktum vor.) (MS 122, 46v)

Die lakonische Rede vom „synthetischen Faktum" deutet hier vielleicht darauf hin, dass das beweisende Ergeben zwar einen empirischen Vorgang darstellt, dem so betrachtet auch alternative Ergebensmöglichkeiten gegenüberstehen; dass wir aber diese anderen Möglichkeiten gerade *nicht sehen*, wenn wir den Beweis als Beweis betrachten oder gebrauchen – die Möglichkeit des Ergebens dann vielmehr zum Rechtfertigungsgrund dafür genommen wird, wie der Vorgang ablaufen *soll*. Der Beweis führt uns insofern ein „synthetisches Faktum" vor, als wir die *eine*, im Beweisbild sich ergebende Konstruktionsweise, als die einzig *richtige* auffassen, und alternative Transformationsbewegungen schlichtweg nicht andenken. Er wird nicht als Experiment nachverfolgt, sondern als Konstrukt, von dem wir sagen, das Erstellte müsse immer erhalten werden, wenn so vorgegangen werde wie im Beweis. Wittgensteins häufige Rede vom Begriff oder Bild erklärt sich entsprechend damit, die synthetische Leistung oder Genese des Beweises sowie unseren paradigmatischen Umgang mit ihm in Einklang bringen zu wollen. Denn in einem Bild können wir zwar Ordnungen und Übergänge ausmachen, die uns nach etwaiger Untersuchung verschiedene Zusammenhänge zwischen seinen Konstituenten prädizieren lassen – ein Bild kann aber ebenso als geschlossene Einheit betrachtet werden, bei der es uns nicht auf die Beziehungen seiner Elemente oder den Prozess seiner Genese, sondern allein auf das dargestellte Thema ankommt. Auch wenn ein Bild auf seine Entstehungsbedingungen oder strukturellen Feinheiten hin untersucht werden kann, ist es ebenso gut möglich, es als den Standard dafür zu nehmen, wie sich die in ihm dargestellten Dinge verhalten *sollen*. Indem wir einen einmaligen, zeitlichen Vorgang in ein Schema verbildlichen, ergibt sich die Möglichkeit, die Gesetze zu sehen, die dafür verantwortlich waren, dass der Vorgang in der spezifischen Weise ablaufen musste. Freilich ist nicht jedes Bild eines experimentellen Vorgangs bereits ein Beweis. Wohl aber kann umgekehrt jeder Beweis als *Bild* eines zeitlichen Vorgangs betrachtet werden. Daher die Aufforderung Wittgensteins: „Schau den geschriebenen Beweis als eine Zeichnung an." (46r) – Auch wenn das Beweisen einen Vorgang in der Zeit darstellt (wie sollte es anders sein!), verwenden wir ihn nicht als einen kontingenten Prozess, dessen Ergebnis einmal *so* und einmal *anders* ausfallen könnte (Experiment), sondern sehen in ihm den Grund zu sagen, dass der gezeigte Vorgang zu *diesem* Ergebnis kommen muss.

> Der Beweis muß ein Vorgang sein, von dem ich sage: Ja, so muß es sein; das muß herauskommen, wenn ich nach dieser Regel vorgehe.
> Der Beweis, könnte man sagen, muß ursprünglich eine Art Versuch sein – wird aber dann einfach als Bild genommen. (47v)

Wenngleich beim Addieren ein zeitlicher Vorgang abläuft (200 und 200 *ergeben* 400), bei dem man für sich genommen auch zu einem anderen Ergebnis gelangen könnte, so ist doch die richtige Addition dadurch bestimmt, dass und *wie* sie nur dieses Ergebnis (400) kennt. Dadurch dass die Errechnung der Additionsformel das „richtige Zusammenzählen" definiert, und also festlegt, was in Hinkunft richtiges Zusammenzählen zu nennen ist, werden die Transformationen „von einem einmaligen [Vorgang/Ablauf/Prozess] zur Bestimmung eines Begriffs." (48r) Wir generieren ein Bild, indem wir gewissen Regeln folgen (zeitlich) und nehmen das so erhaltene Bild zum Beleg dafür, wie es ausschauen muss, wann immer man den Regeln folgt (unzeitlich). Wittgenstein fasst diesen Wechsel der Betrachtungsweise, vom zeitlichen Beweisvorgang hin zum zeitlosen Beweisbild, in die folgenden Worte:

> Das menschliche Vorgehen nach einer Regel ist ein Vorgang dessen Ergebnis die Erfahrung lehrt.
> Der Beweis aber sagt: Wenn Du nicht zu *diesem* Ergebnis gelangst, bist Du nicht nach dieser Regel vorgegangen. (51v)

Die beiden möglichen Umgangsweisen mit dem Konstrukt machen verständlich, wieso der Mathematiker oft dazu neigt, dort von Entdeckungen zu sprechen, wo Wittgenstein ihn als Erfinder charakterisieren will. Der Beweisende folgt gewissen Regeln, die ihn zu diesem und jenem Ergebnis führen, wodurch ihm sein Vorgehen als analog dem des empirischen Wissenschaftlers erscheint: das Resultat der regelgeleiteten Untersuchung war eben, dass *dies* herauskommt. Dabei übersieht er allerdings, dass nichts außerhalb des Beweises den Bestimmungsgrund dafür abgibt, worin nun das richtige Befolgen der Regel besteht. Zwar folgen wir auch beim Beweisen gewissen Regeln; das aber ändert nichts daran, dass der Begriff dessen, was richtiges Befolgen der Regeln im Konkreten heißt, noch gar nicht festgestanden hat, ehe der Beweis geführt worden war. Die jeweilige Konstruktion ist nicht da, bevor wir sie machen.

> Wenn der Beweis auch nach Regeln fortschreitet, so ist er doch das Paradigma für *diese* Fortschreitung. (59v)

Wir finden darüber hinaus in dieser gedoppelten Betrachtungsweise den Grund, wieso man in Fällen, bei denen der Beweis mit dem von ihm bewiesenen Satz abschließt, so sehr zu dem Ausruf neigt: „Der Beweis überzeugt uns von der Wahrheit dieses Satzes." (52r) Der Beweisvorgang wird dann nämlich als empirisches Fortschreiten betrachtet, an dessen Ende die so gefundene Wahrheit steht. Wittgenstein konfrontiert eine solche Zugehensweise damit, dass die Rede von Überzeugtheit nur Sinn macht, wenn klar ist, worin die sich äußert. Es kann hier aber auch nicht – wie man vielleicht zu meinen geneigt ist – auf einen wie immer gearteten Gemütszustand ankommen, wenn es die Unbedingtheit des mathematischen Satzes zu bestimmen gilt. Wichtig sind vielmehr die „Anwendungen die die Überzeugung belegen“ (50r): „der Ausdruck, das Ergebnis, dieser Überzeugtheit ist also, daß wir eine *Regel annehmen*.“ (52v) Und das „Einleuchten“, von dem in Bezug auf die Axiome eines mathematischen Systems häufig gesprochen wird, liegt in der Entschlossenheit, „*sie* unbedingt als die Richtschnuren der Darstellung zu nehmen.“ (65v) Sobald wir jedoch diesen paradigmatischen Aspekt mathematischer Sätze geltend machen, haben wir die Betrachtungsweise bereits geschwenkt: der Beweis erscheint uns nicht länger als empirischer Vorgang, der zu jenem Ergebnis führt, sondern als „unser Vorbild eines bestimmten *Ergebens*; – welches als Standard zur Beschreibung von (wirklichen) Vorgängen dient.“ (48v) Wenn daher zugestanden wird, dass wir in der Mathematik von grammatischen (d. h. unser sprachliches Arbeiten regulierenden) Sätzen überzeugt werden – und nur so scheinen wir ihrer Unbedingtheit gerecht werden zu können – ist auch der Beweis als paradigmatisches Bild oder Maßstab zu fassen; denn aus einem Versuch, der einmal zu diesem und einmal zu jenem Ergebnis gelangte, ist die Regel („das Muss“) nicht zu entnehmen.

2 Regel und Prosasatz

Ein entscheidender Zug dieser Überlegungen ist, dass unser Interesse nicht partikulären mathematischen Sätzen gelten, sondern sich auf die jeweiligen Beweiszusammenhänge richten sollte. Wenn der Beweis es ist, der uns als Vorbild des richtigen Vorgehens (im Sinne der richtigen Verwendung von Begriffen) dient, dann ist der ihn abschließende Satz für sich genommen wenig wert, um zu verstehen, was gezeigt wurde, bzw. wovon einer überzeugt worden ist. Darüber hinaus findet sich dieser eine letzte Satz am Ende des Beweises häufig auch gar nicht, so z. B. bei geometrischen Beweisen. Auch kann man multiplizieren und von der Richtigkeit des Ergebnisses überzeugt sein, ohne das Ergebnis nochmals eigens in den Formelausdruck zu kleiden. Wir sind dann aufgrund eines Beweises von der Richtigkeit der Rechnung überzeugt, „ohne daß der *Satz* der sie ausdrückt je ausgesprochen wird.“ (MS 122, 50v) Die Pointe dieses Gedankens ist, dass das den Beweis abschließende Resultat den Sinn dessen, was bewiesen wurde, oft nicht erschöpfend wiedergibt.

> Der Beweis kann mit einem *Satz* endigen, braucht nicht mit einem *Satz* zu endigen. Der Satz, der sogenannte Satz, zeigt uns beiläufig an, wie der Beweis zu verwenden ist, da der Satz ja Zeichen enthalten muß, die Worten der Umgangssprache entsprechen (und so die Brücke zur Anwendung durch eine vertraute Praxis schlägt).
> Ein psychologischer Nachteil der Beweise, die *Sätze* konstruieren, ist, daß sie uns leichter vergessen machen, daß der *Sinn* des Resultats nicht aus diesem allein abzulesen (ist), sondern aus dem *Beweis*. In dieser Beziehung hat das Eindringen des Russellschen Symbolismus in die Beweise viel Schaden getan.
> Die Russellschen Zeichen hüllen die wichtigen Formen des Beweises, gleichsam, bis zur Unkenntlichkeit ein, wie wenn eine menschliche Gestalt in (viele) Tücher gewickelt ist.
> (Ich schrieb einmal: „Wenn Du wissen willst, was bewiesen ist, schau auf den Beweis“. Also nicht: „schau auf das Ende des Beweises“.) (50v–51v)

Die in Klammer gesetzte Einsicht ist auch im *Big Typeskript* zu finden, wo Wittgenstein ebenfalls die Tücke der Russellschen Notation betont: Diese würde unser Interesse vom vollständigen Beweis weg und auf den bloßen Wortausdruck des bewiesenen Satzes lenken, der das wirkliche Ziel des Beweises verschleiert (ja zum realistischen Mythos anregt), während es in ihm selbst „mit voller Klarheit zu sehen“ ist. (BT, S. 629) Als den Grund für die Gefahr, von der Prosa in die Irre geführt zu werden, nennt Wittgenstein die Tatsache, dass dabei „jeder Ausdruck in diesen Sätzen in einer sehr speziellen, und dabei, gewissermaßen, übertragenen Bedeutung gebraucht wird.“ (MS 122, 52v) Wenn man sich nämlich vor Augen hält, dass der tatsächliche Gebrauch unserer Ausdrücke die letzte Instanz ist, um sich ihres Sinns zu versichern, und folglich ein neuer Gebrauchszusammenhang auch eine veränderte Bedeutung der Worte erwirkt, so ist verständlich, dass wir nicht einfach Ausdrücke aus dem Alltag herausnehmen, und sie unter Beibehaltung ihres Sinns in den mathematischen Kalkül einpassen können. (PU, § 117: „Als wäre die Bedeutung ein Dunstkreis, den das Wort mitbringt und in jederlei Verwendung hinübernimmt.“) Vielmehr ist der Sinn des Ausdrucks eben wieder mit Blick auf seine konkrete Verwendungsweise nachzuvollziehen, d. h., indem wir auf die Rolle achten, die er im jeweiligen Beweiszusammenhang, im Kalkül einnimmt. Wie aus obigem hervorgeht, leugnet Wittgenstein nicht, dass gewisse Analogien bestehen können, die zwischen alltäglicher und mathematischer Verwendung lautgleicher Ausdrücke vermitteln. Die tatsächliche Reichweite dieser Analogien ist aber nur dadurch zu klären, dass man die inner- wie außermathematischen Anwendungen des Ausdrucks betrachtet. Obgleich die Prosaisierung der Mathematik durch den logischen Kalkül der *PM* zuweilen vorteilhaft sein mag (indem in Einzelfällen der Brückenschlag zur Anwendung vereinfacht wird) sieht Wittgenstein darin die unverhältnismäßig größere Gefahr, die teilweise Analogie zwischen Ausdrücken der Alltagssprache und jenen des logisch-mathematischen Kalküls könne zu der Vorstellung leiten, dass der mathematische Satz einen ähnlichen Status einnimmt als der im Alltag gebrauchte. Dabei kann der Unterschied kaum größer sein, insoweit die Mathematik das Gerüst bereitstellt, in dem wir uns dann im Alltag bewegen: die Regeln, nach denen wir uns richten, wenn wir empirische Geschehnisse darstellen. Da die mathematische Logik Sätze beweist, die der oberflächlichen Form nach ganz den Aussagesätzen der empirischen Wissenschaften gleichen, glaubt man fälschlicherweise, diese Sätze müssten wie ihre Vettern des Alltags auch von *etwas* handeln – wohingegen Wittgenstein geltend macht, dass erstere die Gebrauchsregeln von Ausdrücken, letztere deren funktionelle Verwendungen sind. Dass die mathematische Logik Sätze konstruiert, die jenen der empirischen Wissenschaften der Form nach ähneln, darf uns nicht darüber hinwegtäuschen, dass ihr Gebrauch ein völlig verschiedener ist.

> Ich will etwa sagen: Wenn auch der bewiesene mathematische Satz hinaus auf eine Realität außerhalb (seiner selbst) zu deuten scheint, (so) ist er doch nur (der) Ausdruck der Anerkennung eines neuen Maßes (der Realität). (MS 122, 53r)

Die Schwierigkeit ist hier, dass sich der mathematische Satz meist nicht als Regel zu erkennen gibt: er hat häufig „nicht die Form einer Regel“, sondern spiegelt uns vor, *etwas,* und zwar die Wahrheit, auszusagen. Es heißt nicht „25 × 25 *nennen* wir 625“ oder „25 × 25 *soll* 625 ergeben“, sondern „25 × 25 *ist* 625.“ Die Ambivalenz zwischen dem Gebrauch des mathematischen Satzes als einer Regel der Darstellung bzw. richtigen Vorgehens und seiner syntagmatischen Form, die diese Rolle seiner Verwendung verschleiert, spiegelt sich auch im Beweisvorgang wider. Wie bereits oben angedeutet, liegt es nahe, das Erzeugen von Symbolen mittels der Anwendung gewisser Regeln auf andere Symbole (entweder als bereits bewiesener mathematischer Sätze, oder als festgesetzter Axiome) dahin auszulegen, dass der mathematische Satz nur ein im Kalkül implizit immer schon enthaltenes Ergebnis offenbare, mithin dessen Wahrheit schon *vor* der tatsächlichen Konstruktion des Beweises festgestanden hat. Der Beweis erscheint, so betrachtet, als ein regelgeleitetes Vorgehen, das uns zu einem gewissen Resultat hinführt, das auch unabhängig vom Beweis existierte. Dem hält Wittgenstein entgegen, dass der Beweisvorgang zwar natürlich ein in der Zeit stattfindender Prozess sei: allerdings einer, der auch hinsichtlich seines Ergebens determiniert ist. Die Konstruierbarkeit eines Symbols (bei der wir eventuell Regeln folgen) wird zum Zeichen dafür genommen, „daß wir Symbole so und so transformieren sollen." (53r) Die Idee einer ursprünglichen Regel, die all unser Rechnen lenkt, kann nicht aufrecht erhalten werden, da sich sofort die Frage ergäbe, wodurch dann garantiert werden könnte, dass wir die Regel auch *richtig* anwenden. Unsere Gewandtheit im Umgang mit einem Kalkül soll uns nicht vergessen lassen, dass dieser Kalkül nicht anders bestimmt ist als durch eben jene Bewegungen, die wir in oder mit ihm machen. Wenn wir dazu neigen, unsere Fertigkeit im Umgang mit einer Technik wie der des Multiplizierens durch ein unmittelbares *Einleuchten* einer allgemeinen Regel erklären zu wollen, die es immer bloß aufs Neue anzuwenden gelte, so ist das nur der hypostasierender Ausdruck davon, dass wir die Technik des Multiplizierens *beherrschen*. Und selbst wenn man sagte, dass wir beim Multiplizieren stets gewissen Regeln folgen, die uns an den je richtigen Ort führen, so bliebe dennoch der Tatsache Rechnung zu tragen, dass wir das so erhaltene Ergebnis als dasjenige ansehen, das herauskommen *soll*, und wir nicht in Betracht ziehen, dass es auch anders hätte ausfallen können. Der „durch den Beweis bewiesene Satz dient als Regel – also als Paradigma." (53v) Wir verwenden ihn also nicht als Beschreibung von etwas, das durch den Beweis entdeckt worden ist, sondern als Regel, die der Beweis konstituierte.

Wenn aber der bewiesene Satz als Regel fungiert, *er* der Standard richtigen Vorgehens ist, widerspricht dies nicht dem, was wir weiter oben sagten, dass nämlich sein Sinn *aus dem Beweis* zu entnehmen ist?

> Wir haben uns, von Stufe zu Stufe des Beweises fortschreitend, zu einer Erkenntnis durchgerungen? Und der letzte Satz spricht diese Erkenntnis aus? Ist diese Erkenntnis nun frei vom Beweise (ist die Nabelschnur durchschnitten)? – Nun, der Satz wird jetzt allein und ohne das Anhängsel des Beweises verwendet. (53r)

Diese Antwort erinnert daran, dass wir den bewiesenen Satz unabhängig vom Beweis verwenden; etwa innermathematisch als Ausgangssatz für weitere Beweise oder außerhalb zur Beurteilung empirischer Fakten. Heißt das aber auch, sein Sinn sei vom Beweis gelöst; kommt es etwa doch nur darauf an, dass uns der Beweis von dem ihn abschließenden Satz überzeugt, unabhängig davon, wie er das tut? Es ergibt sich also die Frage, inwiefern der Beweis eines mathematischen Satzes für sein Verständnis relevant bleibt, auch nachdem er bereits als grammatische Regel anerkannt wurde. Allerdings ist an dieser Frage etwas unklar. Immerhin ist die Verwendung eines bewiesenen Satzes als einer grammatischen Regel (sofern es sich um kein Axiom handelt) gerade dadurch erwirkt, dass uns der Beweis auf eine spezielle Weise davon überzeugt, dass wir den ihn abschließenden Satz als Regel heranziehen sollen: Indem der Beweis den Satz auf eine gewisse Weise konstruiert, bestimmt er uns dazu, den Satz auf eine gewisse Weise zu gebrauchen. Daher ist auch auf den Beweis zurückzugehen, sobald Unklarheit über den Sinn (u. d. i. der Gebrauch) eines mathematischen Satzes herrscht.

> Der Beweis konstruiert einen Satz; aber es kommt eben darauf an *wie* er ihn konstruiert. Manchmal z.B. konstruiert er zuerst eine *Zahl* und dann folgt der Satz, daß es eine solche Zahl gibt. Wenn wir sagen, die Konstruktion müsse uns von dem Satz *überzeugen*, so heißt das, daß sie uns dazu bestimmen muß, diesen Satz so und so anzuwenden. Daß sie uns bestimmen muß, das als Sinn, das nicht als Sinn anzuerkennen. (54r)

Welcher Sprachbewegung Vorbild der bewiesene Satz ist, zeigt sich in den Transformationen des Beweises, an dessen Ende er sich findet. Er nämlich liefert die allgemeine Idee der Anwendung des ihn abschließenden Satzes, sprich ein Schema dafür, in welcher Art und Weise die durch ihn generierte Regel zu befolgen ist, wie wir uns nach ihr zu richten haben. Mathematische Sätze sind „ein für allemal in die Sprache aufgenommene Instrumente“ (55r), von denen aber erst der Beweis zu verdeutlichen mag, welche Rolle sie einnehmen und wie sie zu gebrauchen sind. Er führt die Zusammenhänge vor Augen, die zwischen der neu konstituierten Regel und dem Geflecht an bereits etablierten bestehen. Damit ist nicht gesagt, dass es *eigentlich* stets der ganzen Beweiskonstruktion bedürfe, wo die Mathematiker tatsächlich nur den bewiesenen Satz anführen; aber es heißt, dass erst der Beweis uns lehrt, wie mit diesem Satz umzugehen ist – und man also im Zweifelsfalle zu ihm zurückgehen muss, ehe Spekulationen über seinen Sinn angestellt werden. Besteht hingegen keine Schwierigkeit in der Verwendung eines regulativen Ausdrucks, braucht es auch den Beweis nicht, um den Sinn einer womöglich implizit befolgten Regel zu explizieren.

3 Begriffskonstitution in der Logik

Im Rahmen der geometrischen Betrachtungsweise erscheint der Beweis als Figur, die bestimmte räumliche Ordnungen zwischen den sie konstituierenden Zeichen (als jenen Symbolen, Sätzen, Formeln oder Formen, die zueinander in mathematische Beziehung gesetzt werden) aufweist. Der bewiesene Satz, mit dem ein Beweis abschließt, ist dann selbst ein Teil dieser Beweisbildordnung. Folglich gelangt man dahin zu sagen, der Sinn eines bewiesenen Satzes sei dadurch zu eruieren, dass man auf den gesamten Beweiszusammenhang blickt. Diese, unser Augenmerk stark auf die innermathematischen Verbindungen zwischen den Sätzen und Symbolen richtende Betrachtungsweise trägt ihren Namen nicht umsonst, denn sie drängt sich besonders dann auf, wenn man auf geometrische Beweisformen sieht. Geometrische Konstruktionen, wie die des regelmäßigen Pentagons oder auch der Winkelsummensatz, zeigen uns Zusammenhänge (zwischen Linien und Winkeln; allgemein: Begriffen), die wir in der Anwendung (etwa zur trigonometrischen Abstandsbestimmung oder in der Architektur) fruchtbar machen. Mit Blick auf solche Bereiche der Mathematik scheint es vollauf plausibel, von Begriffsgenesen im Sinne des mit ihrer Herstellung zugleich einhergehenden Festlegens neuer Beziehungen zwischen bereits bestehenden Begriffen, und damit von der Bildung neuer

Begriffe zu sprechen. Hat man dergleichen geometrische Beweise vor Augen, wirkt daher Wittgensteins Charakterisierung des Beweises als eines Begriffsvorbildes treffend.*

Wie verhält es sich aber beispielsweise mit logischen, von Satz zu Satz fortschreitenden Beweisen? Vorbild wovon ist ein solches Fortschreiten? Gilt dabei unser Hauptaugenmerk gleichfalls der aufgezeigten Konstruktionsmöglichkeit von Symbolen im Ausgang von anderen Symbolen? Oder liegt bei logischen Beweisen nicht das Interesse wo anders: nämlich in der Tatsache, dass der am Ende der Deduktion stehende Satz aus gegebenen Axiomen und unter Anwendung explizierter Regeln gefolgert werden kann (vgl. 49r); der Zweck wäre dann, *dass* dieser Satz gewonnen werden kann, und nicht so sehr, *wie* dies geschieht?

> Was hat der Zweck einer Euklidischen Konstruktion, etwa der Halbierung der Strecke, mit dem Zweck der Ableitung einer Regel aus Regeln mittels logischer Schlüsse gemein?
> Das Gemeinsame scheint zu sein, daß ich durch die Konstruktion eines Zeichens die Anerkennung eines Zeichens erzwinge. (54v)

Die hier gegebene Antwort möchte einerseits dem Faktum Raum geben, dass uns bei logischen Deduktionen hauptsächlich daran gelegt ist, einen Schlusssatz abzuleiten, ihn als wahren Satz des Kalküls auszuweisen. Zugleich aber soll nicht außer Acht gelassen werden, dass die Anerkennung des Abgeleiteten als etwas Bewiesenem nicht anders zu etablieren ist als indem wir die Konstruktion tatsächlich durchführen. Der Begriff des bewiesenen (d.i. im Kalkül gefolgerten) Satzes ist eben nicht da, ehe wir ihn bewiesen. Die Rede von der ‚Anerkennung eines Zeichens‘ durch seine Konstruktion besagt folglich, dass der spezifische Sinn des konstruierten Satzes nicht unabhängig seiner Konstruktion gegeben ist. Zwar kann der so konstituierte Satz dann losgelöst vom Beweis weiterverwenden werden; aber was genau mit ihm anzufangen ist (dass er z. B. künftig als *gültiger* Satz des Kalküls, als Ausgangspunkt weiterer Beweise zu gebrauchen ist), das wurde durch den Beweis verdeutlicht. Wenn sich Wittgenstein daher im Anschluss an das Obige fragt, ob es nicht besser sei zu sagen, die Mathematik schaffe „neue Ausdrücke, nicht neue Sätze“, so deute ich dies dahin, dass uns der

---

* Der Einwand, es käme uns zuletzt auch bei solchen Konstruktionen nur darauf an, *dass* sie sich machen ließen, erwächst aus der irrigen Meinung, der Begriff (bspw.) der Konstruktion eines regelmäßigen Heptagons sei bereits vollkommen bestimmt, noch ehe ein regelmäßiges Heptagon konstruiert worden ist. Dabei konnte der allgemeine Begriff der konstruierbaren regelmäßigen Polygone in Wahrheit nur ausgehend von den tatsächlich konstruierten regelmäßigen Polygonen gebildet werden. Somit liegt keinerlei Rechtfertigung oder gar Nötigung dafür vor, den Begriff der regelmäßigen Konstruierbarkeit mit Sinn auch auf jene Vieleckformen anzuwenden, von denen wir eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal nicht kennen. Wenn wir es dennoch tun, so deshalb, weil wir meinen, die mathematische Ordnung, mit der wir einen aus dem Alltag genommenen Begriff (z. B. den der Fünfzahl) umgeben, müsse gleichfalls auch auf jene passen, die im Alltag eine ähnliche Verwendung haben (z. B. der Begriff der Siebenzahl). Wir entwickeln Methoden und zugleich Begriffe für die regelmäßige Konstruktion von Drei- Fünf und anderen Vielecken und gelangen schließlich zu der irritierenden Frage, was der Begriff „regelmäßig konstruiertes Siebeneck“ eigentlich bezeichnet, da sich auf das, was wir im Alltag „Siebeneck“ nennen, jene Konstruktionsmethoden nicht anwenden lassen. Daraus wieder zieht man den Schluss, es gäbe mathematische Entitäten, zu denen wir jedoch aufgrund unzureichender Beweismethoden keinen Zugang hätten. Die Konfusion beginnt allerdings schon dort, wo wir aufgrund oberflächlicher Analogien zwischen Begriffsgebräuchen dahin gelangen, Wortverbindungen zu generieren, deren wirkliche Anwendung völlig unklar ist. Der Begriff eines „regelmäßig konstruierten Heptagons“ ist von genau dieser Art: ohne eine Methode zu kennen, ein Siebeneck mit Zirkel und Lineal zu konstruieren, bildet man aufgrund oberflächlicher Vertrautheit auch diese Wortverbindung. Da aber ihre Bedeutung durch den Gebrauch nicht gedeckt ist, wird eine Welt hinter der mathematischen Praxis angenommen, die dem Mathematiker bedauerlicherweise nicht immer zugänglich ist. Das Reich der Zahlen und ähnliche „realistische“ Mythen werden so geboren.

Begriff des ‚mathematischen Satzes' ganz einfach sein Eingebettetsein in spezifische Beweiskonstruktionen, die seine Gebrauchszusammenhänge allererst verdeutlichen, leichter aus dem Blickfeld geraten lässt; während die Redeweise vom Schaffen ‚neuer Ausdrücke' dem paradigmatischen, begriffsbildenden Status mathematischer Operationen eher gerecht wird. – Inwiefern sind aber logische Sätze überhaupt als Paradigmen der Sprache aufzufassen? Wofür dienen uns denn Russells Tautologien als Vorbild?

> Der Beweis bringt mich dazu zu sagen: das *müsse* sich so verhalten. — Nun, das versteh ich im Fall eines Euklidischen Beweises oder eines Beweises von „25×25=625", aber ist es auch so im Fall eines Russellschen Beweises etwa von „⊢ p ⊃ q . p. ⊃. q"? Was heißt hier ‚es *müsse* sich so verhalten', im Gegensatz zu ‚es verhält sich so'? Soll ich sagen: „nun ich nehme diesen Ausdruck als Paradigma für alle nichtssagenden Sätze dieser Form an"? (55v)

In den *PM* sind die Transformationsregeln, nach denen die als Axiome festgesetzten Sätze miteinander verknüpft und füreinander ersetzt werden dürfen, explizit genannt. Wendet man diese Regeln wiederholt auf die Axiome und die bereits aus ihnen abgeleiteten Sätze an, gelangt man zu neuen, bewiesenen, wahren (nichtssagenden) Sätzen des Kalküls. Betrachtet man dieses Vorgehen (oder verfährt vielleicht sogar selbst nach dieser Weise), neigt man dazu, den Sinn des so bewiesenen Satzes aus ihm selbst entnehmen zu wollen. Möglich scheint dies deshalb, weil die Konstruktion mit Zeichen beginnt, unter denen sich ‚Konstanten' befinden, die „in der Sprache schon Bedeutung haben." (61r)

> So ist es wesentlich daß „∨" und „~" schon eine uns geläufige Anwendung besitzen und die Konstruktion eines Beweises in den Principia Mathematica nimmt ihre Wichtigkeit, ihren Sinn, daher. Die Zeichen aber des Beweises lassen diese Bedeutung *nicht* erkennen. (ebd.)

Der Sinn eines konstruierten Satzes hängt also mit der außermathematischen Anwendung derjenigen Zeichen zusammen, die im Kalkül konstant bleiben. Zugleich aber stellen wir fest, dass es uns beim beweisenden Fortschreiten (dem den Regeln gemäßen Umformen, Ersetzen, Zusammenfassen von Formeln) auf die Bedeutung, die jene Zeichen im Alltag haben, gar nicht ankommt. Erst wenn wir den bewiesenen Satz vor uns haben, machen wir wieder jenen Brückenschlag zur Anwendung, indem wir seine Zeichen mit den aus dem alltäglichen Gebrauch bekannten Bedeutungen füllen. („p ⊃ q . p. ⊃. q" wird angereichert und wir sagen: „Wenn der Himmel blau ist, dann scheint die Sonne. Der Himmel ist blau. Also scheint die Sonne.") Wenn daher Wittgenstein im letzten Satz der oben zitierten Bemerkung meint, die Zeichen des logischen Beweises ließen ihre Bedeutung nicht erkennen, so soll dies verdeutlichen, dass beim Operieren mit logischen Formeln die Zeichengeometrie, und nicht ein den Symbolen äußerliches Faktum, dasjenige sei, was uns dazu bringt, einen Satz als bewiesen anzuerkennen: „Es ist ein bildlicher Vorgang, was Dich überzeugt, oder *bestimmt*." (56v) — Aber auch wenn zugegeben wird, dass uns der Beweis das Entstehen eines Gebildes aus anderen vorführt, so scheint doch das Interesse einer solchen Überleitung in der Logik nur darin zu liegen, eine neue Tautologie, sprich einen Satz, der für alle Fälle seiner Anwendung wahr ist, zu erzeugen. (55r) Das wieder würde zu der Aussage leiten, man schreite im Kalkül nur von einer Wahrheit zur nächsten fort, indem den Regeln entsprechend vorgegangen wird. Wer das sagt, ist aber mit der nun schon so oft geschilderten Problematik konfrontiert, dass das nach einer Regel schielende Vorgehen keine Garantie dafür abgeben kann, das richtige Ergebnis zu erhalten, da stets eine Deutung der Regel denkbar bliebe, die auch ein gegenteiliges Vorgehen mit ihr in Übereinstimmung bringt: wodurch die Rede vom richtigen Ergeben belanglos würde. (vgl. PU, § 201) Da der Begriff einer Regel nicht anders als durch ihre Applikation, unser Befolgen derselben bestimmt ist, kann deren Status nicht ihrerseits damit begründet werden, dass man auf eine andere deutet, deren Applikationserzeugnis sie ist. Wenn auch der Beweis nach gewissen Regeln fortschreitet, „so ist er doch das Paradigma für *diese* Fortschreitung.“ (MS 122, 59v)

Wir stehen hier vor dem Problem, dass der logische Beweis scheinbar aus Aussagesätzen besteht; zugleich jedoch zugestanden werden muss, dass mathematische Gültigkeit nur beanspruch werden kann, wenn wir von einer Ausdrucksform zur nächsten weitergehen. Letzteres ist jedenfalls der Standpunkt, zu dem sich Wittgenstein bei seinen um das Regelfolgeproblem kreisenden Gedankengängen führen ließ, und der Grund, weshalb er sagen möchte: „das Muß entspricht einem Gleise, das ich in der Sprache lege.“ (56r)

> Man möchte sagen: der Beweis ändert die Grammatik unserer Sprache, ändert unsere Begriffe. Er macht neue Zusammenhänge und er schafft den Begriff dieser Zusammenhänge. (Er stellt nicht fest, daß sie da sind, sondern sie sind nicht da, ehe er sie nicht macht.) (57r)

Die Neigung dies zu sagen spießt sich daran, dass man dasselbe dann auch von einer „primitive proposition“ in den *PM* behaupten können sollte, insofern sie die „Eizelle eines Beweises“ darstellt. Passt aber die Rede vom Vorbild auch auf sie? „Welchen Begriff legt ‚p ⊃ p‘ fest?“ (57v) Ist der Ausdruck „p ⊃ p“ eine Beschreibung oder eine Anweisung, die unser Beschreiben lenkt? Nach der von Russell/Whitehead gegebenen Charakteristik wohl eher ersteres. „p ⊃ p“ stellt hier eine Formel dar, die wir durch eine Substitution ihrer Argumente auf empirische Sachverhalte anwenden: „da Schnee weiß ist, folgt nach der Formel „p ⊃ p“, dass Schnee weiß ist.“ – Wittgenstein möchte jedoch geltend machen, dass es sich nur dann um Mathematik (Unbedingtheit) handeln kann, wenn der Beweis als Leitbild für außermathematische Sprachbewegungen dient. Es kommt folglich nicht auf die inhaltliche Ergänzung einer noch variablen Formel an, sondern darauf, dass diese Formel ein vorbildliches Schema des Schließens darstellt. Der Formelausdruck wäre dann nicht als etwas zu betrachten, das erst mit Inhalt gefüllt werden muss, um sprachlichen Sinn zu erhalten, sondern er wäre als Anweisung zu verwenden, die vorzeichnet, wie man vorgehen soll: „Zieh’ aus diesem Satz die Konsequenz auf die Art…“

> Ich wollte sagen: Der mathematische Beweis wird außerhalb der Mathematik verwandt und ist da das Paradigma eines unserer Begriffe. – Aber inwiefern ist das wahr?
> Nimm einen Russellschen Beweis des ersten Teils der Principia Mathematica: inwiefern kann man ihn Vorbild eines Begriffs nennen? Nun, er ist Vorbild des Begriffs eines bestimmten Übergangs. (60r)

Der Beweis eines Satzes der *PM* belegt nicht allein seine Gültigkeit (Wahrheit) im Rahmen des Kalküls, sondern schafft im Selben den „Begriff des Folgens *dieses* Satzes aus *diesem* Satze.“ (57r) Wie schon zuvor will Wittgenstein damit hervorheben, dass gar nicht klar ist, was ‚wahrer Satz‘ im Kalkül überhaupt heißt, noch ehe man weiß, in welchem Sinne er dies ist, d. h., auf welchem Wege er erhalten wurde. Erst die Beweisstraße, auf der wir zum bewiesenen Satz gelangten, „gibt dem Satz seinen Ort in einem System." (58v) Damit lenkt Wittgenstein das Interesse wieder auf die Form des Ergebens, auf die innermathematischen Beweisstrukturen, in deren Gefüge der mathematische Satz seinen spezifischen Platz einnimmt, definiert durch die vielfältigen und sich wandelnden Beziehungen zu den in seinem Umfeld stehenden Sätze. Wenn wir auch im Kalkül einen Satz aus einem anderen nach Regeln ableiten, kreieren wir doch zugleich einen Standard, der diese Beziehung zwischen beiden für ihre unhinterfragte Anwendung allererst fruchtbar macht: Schöpfung eines neuen Begriffes, der zwar hinsichtlich seiner Genese, nicht aber hinsichtlich seines vorbildlichen Status von anderen Regeln kausal (d. h., begründend, als deren Applikation) abhängen kann. Die Genese einer Norm wird selbst zur Norm erklärt. Seine Autorität erhält das Begriffskonstrukt einzig daher, dass wir es zum Vorbild nehmen: damit wir das aber können, muss der Beweis anschaulich sein. Entsprechend begreift die geometrische Betrachtungsweise den Beweis vorrangig als Konstrukt, das durch sich selbst definiert ist.

> Ich will sagen: Durch die Konstruktion des Fünfecks schaffe ich den *Begriff* dieser Konstruktion, und durch den Aufbau des Beweises von … den Begriff dieses Beweises. (60v)

Da es nicht genügt, die Konstruktion bloß als Beweis des sie abschließenden Satzes anzuerkennen, es vielmehr darauf ankommt, wie dieser Satz zu gebrauchen (und dies im Beweis vorbildlich zu sehen) ist, ist es nötig den Beweis zu betrachten, ehe man zur Anwendung schreiten kann. Und insofern nur die Anwendung den Status des Mathematischen sichert (eine Regel ist dies, sofern wir nach ihr handeln), ist der Blick auf den Beweiszusammenhang unerlässlich, trachten wir die funktionale Wesenheit mathematischer Sätze und Beweise, ihre Rollen in der Sprache und unserem Leben zu verstehen. Wenn man dies berücksichtigt, wird deutlich, dass die Begriffsbildung natürlich mit Nützlichkeitserwägungen in Zusammenhang steht, und insoweit auch durch die Empirie provoziert ist: zugleich ist hieraus aber auch zu entnehmen, dass dieser Zusammenhang nicht mehr in Frage gezogen wird, sobald man sich in und mit dem einmal angenommenen Kalkül bewegt. Der Beweis ist dann ein „Ausschnitt aus einem System von Zeichen" (63v), in dem wir aufgrund der Verhältnisse, in denen der bewiesene Satz zu den ihn umgebenden steht, das Vorbild seiner außerhalb des Kalküls zu machenden Anwendung sehen. Wenn daher auch nach dem zuvor Gesagten gewisse konstante Zeichen („∨", „~", etc.) anfänglich die Brücke zwischen logischem Kalkül und empirischen Gegenstandsaussagen schlagen, so ist doch die Weise der Anwendung einer neu konstruierten Formel aus der im Kalkül niedergelegten Struktur zu entnehmen; wobei dieser Kalkül wächst, indem wir mit ihm beweisen.*

* Obwohl er also betont, dass es zum Verständnis logischer Sätze, wie sie in der *PM* aufscheinen, ihres Beweises bedarf, und zwar um anhand der von ihnen eingenommenen Rolle im Kalkül die Weise ihre Anwendbarkeit zu begreifen, unternimmt es Wittgenstein dennoch, auch die vom Beweis gelöste Rolle von „$p \supset p$" zu erläutern. Den Hintergrund für dieses Bemühen gibt die Tatsache ab, dass gerade im Rahmen der *PM* das vorgegebene Interesse weniger am Beweis selbst, denn am dadurch als beweisbar ausgewiesenen Satze liegt. Während er im Vorhergehenden gezeigt hatte, dass der bewiesene Satz zusammen mit seinem Beweis als Vorbild einer bestimmten Sprachbewegung aufgefasst werden kann, stellt er sich nun die Frage, was passiert, wenn wir den bewiesenen logischen Satz für sich betrachten.

4 Geometrische vs. Arithmetische Auffassung des Beweises

Wenngleich diese Charakteristik, die den bewiesenen Satz im größeren Zusammenhang eines mathematischen Systems betrachten möchte, stimmig scheint, ist sich Wittgenstein dennoch bewusst, dass es sich hierbei nur um *eine unter mehreren möglichen* Betrachtungsweisen handelt. Von seiner Warte aus gesehen, erscheint das logizistische Projekt deshalb fraglich, weil mittels der Definitionen allererst jene beweisgeometrischen Strukturen geschaffen werden, aufgrund der wir die Schlussketten als zwingende Beweise anzuerkennen vermögen, ja eigentlich alles, dem konstruktive Wichtigkeit im Sinne der Mathematik zukommt, durch die Definitionen in Erscheinung tritt. Dass aber die Definitionen in gerade der Hinsicht gewählt werden, um daraus die einfachsten Beziehungen der Arithmetik zu entwickeln, legt den Schluss nahe, dass die etablierte Arithmetik bereits Pate stehen musste, ehe im logischen Kalkül ein entsprechendes Korollar auf die Beine gestellt werden konnte. Diese Überlegungen waren zumindest der Grund, weshalb Wittgenstein anfangs zu der Aussage neigte, „daß der Russellsche Beweis nichts Interessantes der Transformation hinzufügt, die durch die Definitionen allein bewerkstelligt wird." (MS 122, 15v) Schon an dieser Stelle bemerkte Wittgenstein allerdings, ihm erscheine auch an dem, was er sage, „etwas falsches." – Worin diese selbst vorgeworfene Dogmatik besteht, können wir nun aus der folgenden, etwas längeren Passage entnehmen, in der er zunächst seine eigene Position (das, wozu er neigt; was er sagen möchte) nochmals auf den Punkt bringt (findet sich in den *BGM* III, § 38b), demgegenüber aber eine ebenso plausibel wirkende Gegenposition entwirft (findet sich in den *BGM* nicht), die dem logizistischen Projekt seine Berechtigung insofern sichern könnte, als nicht die Zeichengeometrie als das Wesentliche betrachtet wird, sondern die Tatsache, dass die von Zeichen ausgehende Deduktion anderer Zeichen gewissen, klar spezifizierbaren Regeln folge.

> Wie ist es aber mit ‚p ⊃ p'? Ich sehe in ihm einen degenerierten Satz, der auf der Seite der Wahrheit ist.
> Ich lege ihn als wichtigen Schnittpunkt von sinnvollen Sätzen fest. Ein Angelpunkt der Darstellungsweise. (MS 122, 59v)

Diese Rede von der Tautologie als eines „degenerierten Satzes" scheint mir deshalb wichtig, weil hier ein Thema anklingt, das er später in den mit *Über Gewissheit* betitelten, in Auswahl herausgegebenen Bemerkungen (MSs 172, 174–177) wieder aufnimmt. Dort beschäftigt er sich intensiv mit der Frage nach der Abgrenzbarkeit grammatischer, d. h. die Weise unserer Darstellung betreffender Sätze, von empirischen Sätzen, bei denen jene Darstellungsformen funktional zur Anwendung kommen. Im Rahmen dieser Überlegungen gelangt er dahin, dass unsere Sprache Sätze kennt, die zwar der Form nach empirischen Gehalt zu haben scheinen, zugleich aber derart feststehende Pfeiler unseres Denksystems bilden, dass die für Erfahrungssätze charakteristische Eigenschaft, wonach auch ihr Gegenteil denkbar sei, für jene zu Absurditäten führt. Jene „Angelsätze" bilden also gemeinsam mit den sprachlichen Regeln das unhinterfragte Muster, in dem sich das Denken bewegt. – Wenn man diese Überlegungen wieder auf den fraglichen Status logischer Sätze zurückführt, würde dies heißen, dass der Fehler von Russell und Whitehead bei ihrem Begründungsversuch der Arithmetik analog dem von Moore ist, dem Wittgenstein vorwirft, zur Zurückweisung des Skeptikers der Außenwelt, Sätze vorzulegen, die ganz einfach zum Gerüst unserer Welterfahrung gehören und insofern begründungstechnisch auf dem selben Level stehen wie das, was es dem Anspruch nach zu begründen gelte. Der logische Satz spiegelt uns eine engere Verbindung zur Welt vor, indem er in der Form eines Erfahrungssatzes auftritt; seine Rolle aber ist ganz ähnlich dem mathematischen: er stiftet oder präzisiert den Sinn von sprachlichen Ausdrucksmitteln, indem er andere Bewegungen ausschließt. Der Glaube, wonach logische Sätze näher an der empirischen Welt seien als die mathematischen und sich daher als der Brückenschlag zwischen Empirie und Mathematik erböten, erwächst daraus, dass man nicht auf ihre Anwendung acht, sondern nur ihre Oberflächengrammatik im Auge hat. (Diese Anmerkung soll nur als ein Hinweis dienen, inwiefern man Wittgensteins spätere epistemologische Bemerkungen in Beziehung setzen könnte zu den hier verhandelten Grundlegungsansprüchen in der Mathematik.)

> Kann ich nun aber sagen, daß die Auffassung des Beweises als ‚Beweises der Konstruierbarkeit' des bewiesenen Satzes in irgend einem Sinn(e) eine einfachere, primärere, als jede andre Auffassung ist?
> Kann ich also sagen: „Der Beweis beweist *vor allem*, daß diese Zeichenform herauskommen muß wenn ich diese Regeln auf diese Zeichenform anwende"?
> Oder: „Der Beweis beweist vor allem, daß diese Zeichenform entstehen kann, wenn man nach diesen Transformationsregeln mit diesen Zeichen operiert." – Das würde auf eine geometrische Anwendung deuten. Denn der Satz dessen Wahrheit, wie ich sage, hier bewiesen ist, ist ein geometrischer Satz – ein Satz der Grammatik[,] das Transformieren von Zeichen betreffend. Man könnte z.B. sagen: es sei bewiesen, daß es *Sinn* habe zu sagen, jemand habe das Zeichen … nach diesen Regeln aus … und … erhalten, aber keinen Sinn etc. etc… (69r)
>
> Und doch könnte ich sagen, daß im Beweis *vor allem* anerkannt werden müsse, daß diese Stufen wirklich den Regeln der Übergänge *gemäß* seien. […]
> Der Beweis müsse also vor allem als Konstruktion den Regeln gemäß anerkannt werden. –
> Oder: Wenn man die Mathematik jeden Inhalts entkleide, so bleibe, daß gewisse Zeichen aus andern nach gewissen Regeln sich konstruieren lassen. (69v)

Die beiden sich hier gegenüberstehenden (und in je drei verschiedenen Varianten formulierten) Betrachtungsweisen, die ‚geometrische' und die ‚arithmetische', unterscheiden sich hinsichtlich ihrer Gewichtung des Verhältnisses von Konstruierbarkeit und Regelkonformität. Wittgenstein, demzufolge „die Mathematik wesentlich die Rolle der Grammatik ihrer Zeichen spielt" (71r), möchte geltend machen, dass wir Beweise als Paradigmen von Figuren anerkennen, die aus anerkannten anderen Figuren (zuweilen durch Anwendung ausformulierter Regeln) entwickelt werden. Das Vorrangige ist hierbei die Konstruierbarkeit, die uns aufgrund ihrer Übersicht, ihres ‚Passens' (62r) einen neuen Darstellungsstandard annehmen lässt. Das Augenmerk liegt nicht auf einzelnen Zeichen oder Sätzen, sondern auf den durch die Beweise etablierten zeichengeometrischen Verbindungen zwischen bestehenden Ausdrucksformen. Die arithmetische Auffassungsweise hingegen, die als Eigenart des Beweises hervorhebt, „daß das Bewiesene am Ende ohne den Beweis feststeht" (71v), möchte geltend machen, dass wir Beweise als nach klar ausgewiesenen Regeln gemäße Satzhierarchien verstehen müssen. Primär von Interesse sei daher die Tatsache, dass die Anwendung gewisser Regeln auf gegebene Sätze zu dem immer selben Resultat führt. Die Anerkennung richte sich demnach auch nicht auf die Gesamtheit des Beweises als eines anschaulichen Begriffsvorbildes, sondern man lässt ihn als die richtige, d. h. den Regeln gemäße Ableitung eines Satzes (etwa einer neuen Schlussregel) aus vorausgesetzten anderen gelten.

5 Ist die geometrische Deutung *primär*?

Mir kommt es darauf an, die Verwobenheit des Übersichtsdiktums mit den Überlegungen zum Regelfolgen sowie der anti-realistischen Kritik am Logizismus aufzuzeigen. So wird nachvollziehbar, wieso Wittgenstein unaufhörlich zu Aussagen gedrängt wird, von denen er selbst dann meint, sie seien zu dogmatisch oder einseitig. Die Zurückführung der Mathematik auf logische Regeln impliziert eine Auffassung derselben, die der seinigen diametral entgegensteht: dass nämlich das Wesentliche der Mathematik darin liege, neue wahre Sätze zu finden, indem man Regeln auf alte wahre Sätze anwendet. Ein solches Verständnis nimmt den mathematischen Satz nicht selbst als Regel wahr, sondern als eine wahre, obgleich tautologische, Gegenstandsaussage. Wittgenstein aber ist überzeugt gezeigt zu haben, dass der Zwang mathematischer Sätze nur nachvollziehbar ist, wenn man sie als Regeln der Darstellung begreift; und sie diesen paradigmatischen Status darüber hinaus nur daher nehmen, dass wir sie als solche Regeln der Darstellung gebrauchen, wir uns also nach ihnen richten. (Vgl. Kap. III) „Einen Satz als unerschütterlich gewiß anzuerkennen – will ich sagen – heißt, ihn als grammatische Regel zu verwenden: dadurch entzieht man ihn der Ungewißheit." (72v) Wenn dem aber so ist, kann der mathematische Satz nicht als ein solcher begründet werden, indem man auf die Regelkonformität seines Erhaltens verweist. Mithin wird der Beweis nicht erschöpfend erklärt, wenn man sagt, der an seinem Ende stehende Satz komme heraus, wendet man Regeln auf gewisse Axiome an. Daher erklärt sich Wittgensteins Kritik an der eben skizzierten Position und seine Forderung nach Übersichtlichkeit des Beweises. Denn insoweit wir im Beweis den Grund dafür sehen zu sagen, dass sich das Ergebende ergeben *muss*, ist dasjenige kein Beweis, von dem dies erst eine Untersuchung zeigen müsste – wie dies bei jenen der Fall wäre, die ganz in den primitiven logischen Termen abgefasst sind. Der Beweis ist kein Experiment, sondern ein Bild des Ergebens, das wir zur Beurteilung empirischer Zusammenhänge heranziehen:

> Dasjenige ist der Beweis, was uns überzeugt: Das Bild, was uns nicht überzeugt, ist der Beweis nicht, auch dann nicht, wenn von ihm gezeigt werden kann, daß es den bewiesenen Satz exemplifiziert. 2.1. [1940]
> Das heißt: es darf keine physikalische Untersuchung des Beweisbildes nötig sein um uns zu zeigen was bewiesen ist. (73v)

Diese Einwände erscheinen, mir jedenfalls, gerechtfertigt und nachvollziehbar. Die Schwierigkeiten fangen aber an, sobald von diesem Standpunkt der geometrischen Betrachtung aus eine entsprechende Beschreibung logischer Beweisfolgen gefordert wird. Wie herausgestellt, liegt nämlich dort das Interesse nicht so sehr auf dem Wie (der Art) der Konstruktion, sondern es geht vor allem darum, einen Satz aus anderen abzuleiten: um das Dass (die Tatsache) der Deduktion. Das Vorrangige scheint bei logischen Beweisen demnach nicht das geometrische Faktum der Konstruierbarkeit von Zeichen im Ausgang anderer, sondern das arithmetische Faktum ihrer regelkonformen (d. h. richtigen oder falschen) Ableitbarkeit zu sein. Daher wirkt Wittgensteins Charakteristik des Beweises als eines Begriffsvorbildes zunächst ein wenig gezwungen, wenn man sie auf logische Beweisformen anwenden will. Da er den mathematischen Satz als grammatische Regel denkt, muss der logische Beweis für ihn das Vorbild eines Begriffes darstellen, der die Regel (den abgeleiteten Satz) als Ergebnis gewisser Transformationen markiert. „Der neue Begriff: Diese Regel als Resultat dieser Umwandlungen." (74r) Und die Frage, die über die Angemessenheit der angedachten Charakteristik entscheidet, ist dann die, inwiefern bei logischen Beweisen tatsächlich von einem solchen Begriffsvorbild die Rede sein kann.

> Von was soll aber der Übergang von „(x)·ϕx" auf „ϕa" ein Vorbild sein? Höchstens davon, wie von Zeichen der Art „(x)· ϕx" geschlossen werden kann.
> Das Vorbild dachte ich mir als eine Rechtfertigung, hier aber ist es keine Recht-

> fertigung. Das Bild (x)· ϕx ∴ ϕa *rechtfertigt* einen Schluß nicht.
> Wenn wir von einer Rechtfertigung des Schlusses reden wollen, so liegt sie außerhalb dieses Zeichenschemas. (75v)

Das Außerhalb des Zeichenschemas, auf das Wittgenstein hier deutet, ist wohl die alltagssprachliche Verwendungsweise der Ausdrücke „und“ und „folgen“. Es ist nicht zuletzt dieser „zivile“ Gebrauch, aufgrund dessen wir das Zeichenschema als rechtfertigendes Vorbild für eine gewisse Zeichenverwendung, den Schluss von einem Zeichen auf ein anderes, begreifen. Man kann dies als ungemeines Zugeständnis Wittgensteins an den logizistischen Zugang zur Mathematik lesen: es ist nämlich dann nicht nur die Zeichengeometrie alleine, die uns einen mathematischen Satz annehmen lässt, sondern es wird auch die außermathematische Verwendung seiner Zeichen relevant. Allerdings fährt er gleich darauf fort:

> Und doch ist etwas daran, daß der mathematische Beweis einen neuen Begriff schafft. – Der Beweis ist gleichsam ein besonderes Bekenntnis zu einer bestimmten Zeichenverwendung. (76r)

Nachdem er oben kurz eingelenkt hatte und einen Bezug der im logischen Satz vorkommenden Zeichen zu Ausdrücken der Alltagssprache (wenngleich in „übertragener Bedeutung“) gelten ließ, schwenkt Wittgenstein hier wieder in die geometrische Betrachtungsweise ein und betont, dass die im Beweis niedergelegten Verhältnisse der Zeichen zueinander ihre Rechtfertigung nicht abermals aus dem Alltag nehmen können. Der neue Begriff, den der Beweis schafft, besteht darin, ein Zeichen als Ergebnis anschaulich überzeugender Transformationen zu erhalten. Selbst wenn dieses Zeichen bereits seine außermathematische Verwendung hat, so stiftet doch der Beweis solche Zusammenhänge zu anderen Zeichen, wie man sie vorher nicht kannte. „Der neue Begriff erlaubt, einen Satz als die Konsequenz aus dem und dem Satz darzustellen.“ (77r) Mit diesem Wechsel der Perspektive kann der logische Beweis als ein Vorbild eines neuen Begriffes betrachtet werden: als die Genese eines neuen Behelfs der Darstellung, indem man Verbindungen zwischen bereits bestehenden knüpft. Allerdings wird mit diesem Schwenk die Möglichkeit der Konstruktion von Zeichen im Ausgang von anderen Zeichen wiederum als primäres Interesse logischer Beweisformen begriffen, während gerade das zuvor in Frage gestellt worden war. Wir fragten vorhin, ob es nicht in der Logik *vor allem* darauf ankäme, einen Satz gemäß gegebenen Regeln aus den Axiomen ableitbar auszuweisen. (71v) Wittgensteins Beharren, dass der Beweis ein anschaulicher Vorgang sei, der durch den Anschein überredet („Nicht etwas hinter dem Beweise, sondern der Beweis beweist.“), widerspricht dem aber insofern, als das Konstrukt seine Beweiskraft verliert, sobald uns nicht mehr überzeugt „was wir sehen.“ (80r, 81v) Die Frage also bleibt bestehen, ob es in der Mathematik in allen Fällen auf die geometrische Konstruierbarkeit (das augenscheinliche Passen der Zeichen) ankommt, und folglich erst in zweiter Linie auf die Regelgemäßheit der Ableitung eines Satzes aus anderen – oder ob nicht doch bei manchen Beweisen vorrangig ist, *dass* sich *dies* aus den Axiomen ableiten lässt.

> Der Beweis läßt etwas offenbar genug erscheinen, daß wir ihn als Paradigma gelten lassen.
> Was muß er denn (als) offenbar erscheinen lassen?
> Was lässt z.B. der Beweis: 1 : 3 = 0,3 als offenbar erkennen? Daß 0,333 + $\frac{1}{3000}$ der 3te Teil von 1 ist – oder, daß sich bei der voll ausgeführten Division nach drei

> Stellen dieser Quotient und dieser Rest ergeben muß? In anderen Worten: Ist das Ergebnis des Beweises ein arithmetisches oder ein geometrisches?
> Es ist offenbar beides. Aber ist das eine primär? (82r)

Wenn wir den Beweis für die Periodizität von 1:3 vor uns haben, würden wir in der Regel sagen wollen, der Beweis überzeuge uns von dem arithmetischen Faktum, dass bei jeder weiteren Anwendung der Divisionsregel derselbe Rest bleibe – wie weit immer wir auch gehen. Aber, und das ist die dringende Frage: beweist er dies nicht, *indem* er zeigt, dass es an *dieser* und *dieser* und *dieser* Stelle (etc.) der Fall ist? Ist es nicht das tatsächlich Konstruierte, das geometrisch Vorliegende, was uns dahin führt zu sagen, dass dies (drei als Rest) sich an allen weiteren Stellen so wiederholen werde. Das würde darauf deuten, dass das „Ergebnis des Beweises“ zuvörderst „ein geometrisches“ und nur vermittels dessen „ein arithmetisches“ sei. Dass also *diese* Substitution an der vierten, fünften, sechsten, … Nachkommastelle *diesen* Ausdruck ergibt, muss offenbar und klar einsichtig sein. – „Und besteht darin nicht eben die Übersehbarkeit?“ (82v)

> Ich möchte sagen, daß, wo die Übersehbarkeit nicht vorhanden ist, wo also für einen Zweifel Platz bleibt, ob (hier) wirklich das Resultat dieser Substitution vorliegt, der *Beweis* zerstört ist. Und nicht – in einer dummen und unwichtigen Weise, die mit dem *Wesen* des Beweises nichts zu tun hat.
> Oder: Die Logik als Grundlage aller Mathematik tut’s schon darum nicht, weil die Beweiskraft der logischen Beweise mit ihrer geometrischen Beweiskräftigkeit fällt.
> D.h.: Der logische Beweis, etwa von der Russellschen Art, ist beweiskräftig nur solange, als er auch geometrische Überzeugungskraft besitzt. Und eine ‚Abkürzung‘ eines solchen logischen Beweises kann diese Überzeugungskraft haben und durch sie ein Beweis sein, wo die ungekürzte *logische* Konstruktion es nicht wäre.
> Wir neigen dazu, es anzunehmen, daß der *logische* Beweis eine eigene, absolute Beweiskraft hat, welche von der unbedingten Sicherheit der logischen Grund- und Schlußgesetze herrührt. Während doch die so bewiesenen Sätze nicht sicherer sein können, als die Richtigkeit der *Anwendung* jener Schlußregeln (es) ist.
> Die logische Gewißheit der Beweise – will ich sagen – reicht nicht weiter, als ihre geometrische Gewißheit. (83r)

So überzeugend diese Erörterung zur Beweiskräftigkeit sein mag – auffallend ist doch, dass Wittgenstein sie nicht von einem logischen Beweisbeispiel aus entwickelt, als derjenigen Beweisform, für die wir die Charakteristik des Beweises als eines Begriffsvorbildes doch geltend machen wollten. Insofern kommt es vielleicht nicht ganz überraschend, wenn er in Klammern hinzusetzt:

> (Ich habe das bestimmte Gefühl, daß ich sehr unvorsichtig bin. Also irgendwie im seichten Wasser des Dogmatismus herumschwimme.) (84r)

Wirft man einen Blick auf die sich hieran anschließenden Bemerkungen, sieht man Wittgenstein von Neuem die Frage aufnehmen, ob mittels abkürzender Definitionen nicht Beweismöglichkeiten entstehen, die vorher nicht bestanden. Er widmet sich also einer Fragestellung wie sie auch im vorhergehenden Kapitel bereits behandelt wurde und die darauf zielt, die mangelnde Beweiskräftigkeit von längeren, in primitiven logischen Termen abgefassten Konstruktionen herauszustellen. Fasst man dieses Vorgehen als Reaktion auf die vorhergehende Bemerkung auf, dann liegt es nahe, den Dogmatismusvorwurf darauf gerichtet zu deuten, dass noch nicht gehörig geklärt ist, inwiefern die Überzeugungskraft eines Beweises nicht ebenso auf ein ihm zuordenbares Korollar übertragbar sein soll. Es geht also darum, die obige Aussage, wonach eine nach Definitionen abgekürzte Notation beweiskräftig sein könne, wo es die unabgekürzte nicht ist, auf ihre Stichhaltigkeit hin zu überprüfen. Es soll daher im nächsten Kapitel näher darauf eingegangen werden, was es heißt, Kalküle einander zuzuordnen bzw. von Entsprechungen zwischen Beweissystemen zu reden. Die Überlegungen drehen sich wieder weg von der Beweiskonstruktion als eines anschaulich vorliegenden Zeichenkonglomerats, um sich dem Einwand des Logizisten zuzuwenden, demzufolge die Übersichtlichkeit des Beweisbildes mittels entsprechender Abkürzungen seiner Ausdrücke sichergestellt werden könne.

Gegen Ende des letzten Kapitels hörten wir Wittgenstein sagen, dass die Logik deshalb nicht als Grundlage der Mathematik tauge, weil die Russellschen Beweise nur solange beweiskräftig sind, als ihre Übersehbarkeit garantiert ist. Die auf diesen Einwand nun schon so oft wiedergekehrte Reaktion besteht darin, die Überschaubarkeit gewährleistenden Definitionen als abkürzende Symboladaptionen hinzustellen, die bloß das menschliche Überzeugtsein von für sich bestehenden Wahrheiten tangieren. Worauf Wittgenstein wiederum kontert, dass es uns doch einzig um den Anschein zu tun sei, wenn wir Mathematik treiben: mithin die augenscheinliche Überzeugungskraft gerade das Charakteristikum mathematischer Beweise ist. In den nun folgenden Erörterungen lässt er die bei jenem Einwand implizierte Ansicht, wonach lange Russellsche Zeichenketten aufgrund ihrer Unüberschaubarkeit per se nicht als Beweise fungieren können, zunächst fallen. Die Überlegungen wenden sich der Frage zu, was es denn überhaupt heißt, wenn man sagt, zwei Beweistechniken *entsprächen* einander. Es wird also erst einmal unterstellt, dass der in primitiven Termen abgefasste Kalkül tatsächlich als Beweissystem anzusehen ist; um dann zu fragen, in welchem Sinne man von Entsprechungen zwischen ihm und dem Dezimalkalkül reden kann. Die Erörterung der Entsprechungsbedingungen zweier Beweissysteme führt dann zu Betrachtungen einzelner (vorgeblicher) Äquivalenzpaare, anhand deren Wittgenstein zu zeigen versucht, dass mit dem Definieren, welches jene Äquivalenzen generiert, zugleich neue Techniken für den Umgang mit den Symbolen des Kalküls etabliert werden: weshalb man besser nicht von bloß definitorischen Abkürzungen, sondern eher von der Einführung neuer Begriffe sprechen sollte. Er gelangt also schließlich dahin zu sagen, dass der Übergang von einem Zeichensystem zum anderen selbst bereits eine mathematische Transformation darstellt, deren Anerkennung sich (in den meisten Fällen) nicht auf Logik stützt.

Da die mittels der Definitionen hergestellte Entsprechung des primitiven und des Dezimalkalküls unter dem Aspekt der sich ändernden Beweisgeometrie betrachtet wird, läge es nahe, die vorderhand angenommene Beweistauglichkeit des Russellschen Systems zuletzt wieder zu beanstanden. Nichtsdestoweniger bleibt der Fokus auf die Frage nach den Kriterien der Gleichheit von Beweisstrukturen gerichtet. Obwohl man also geneigt sei könnte, dem logischen Kalkül seine Funktion als Beweisalgorithmus generell abzusprechen, sobald die Formelketten ihre offensichtlich erkennbaren Strukturen einbüßen, geht Wittgenstein hier nicht weiter, als allein die Rede von der Identität zwischen Beweissystemen auf ihren Sinn hin zu befragen. Meine Mutmaßung ist die, dass er es zwar als sein philosophisches Anliegen begreift, die Begründbarkeit der Mathematik durch Logik zu hinterfragen: daher die angestrebte Zurückweisung der Auffassung, jede mathematische Beweisstruktur fände eine ihrem Wesen angemessene Entsprechung im logischen Kalkül. Da es aber von höchster Wichtigkeit ist, nicht mit dem praktizierenden Mathematiker in Konflikt zu geraten, scheut sich Wittgenstein, seine Kritik dahin zu erweitern (wie dies zumindest in jüngeren Passagen oft den Eindruck machte), dem logischen Kalkül selbst mangelnde mathematische Beweiskraft zu unterstellen. Diese Interpretation würde eine Antwort auf die Frage erlauben, wogegen sich die zuvor erhobenen Selbstbezichtigungen und Dogmatismusvorwürfe gewendet haben.

Wittgenstein möchte nicht zeigen, dass die Beweise in den *PM* keine Beweise sind, d. h., es geht nicht darum, etwas als mathematisch korrekt oder inkorrekt zu entlarven – sondern die Idee, dass der logische Kalkül der *eigentliche* Kalkül sei, der aller Mathematik zugrundeliege, gilt es als eine metaphysische Hypostase zu erkennen. Russell/Whitehead entdeckten nicht *das* System, das die ganze Mathematik durchzieht, sondern sie etablierten einen Kalkül, der auf derselben Stufe steht wie all die anderen. Wenn dieser Kalkül seine einzige Anwendung aber darin findet, durch definitorische Setzungen die Verschiedenheiten einzuebnen, die zwischen den vielen anderen Kalkülen bestehen, wird fraglich, wozu man ihn entworfen hat. Nicht die Wahrheit des Kalküls steht auf dem Spiel, sondern seine Brauchbarkeit, der Zweck, weshalb man ihn erfand. In jedem Fall ist der Gestus kaum zu verkennen, wenn Wittgenstein immer dort Unterschiede auszumachen sucht, wo die Grundlagentheoretiker sie nicht sehen wollen. Schließlich ist zwar eine „Ähnlichkeit aller Zweige der Mathematik“ nicht zu leugnen, wenn immer wieder dieselben Zeichen – „+“, „−“, Funktions- und Argumentsausdruck (etc.) – verwendet werden. Aber, so sein Bedenken, „ist es nicht auch irreführend? wie der Gebrauch von Subjekt und Prädikat als Rahmen für tausenderlei Bilder.“ (MS 122, 103r) Das Anliegen dürfte demnach weniger darin bestehen, den Logizisten der Falschheit zu bezichtigen. Eher soll auf Verschiedenheiten hingewiesen werden, wo man sie aufgrund oberflächlicher Gemeinsamkeiten gerne übersieht: mit dem Anspruch, einen freieren Blick auf die Dinge zu erhalten, der nicht alles in vorgegebene Formen presst.

1 Aspekte hervorheben, Begriffe erfinden: Techniken der Regelgenese

Entgegen der logizistischen Auffassung hält Wittgenstein die Mathematik für „ein *buntes Gemisch* von Beweistechniken“ (86r), und er ist der Meinung, auf diese Weise ihre „mannigfache Anwendbarkeit und ihre Wichtigkeit“ begreiflich machen zu können. Von dieser Warte aus gesehen erscheint der Versuch einer Rückführung all der unterschiedlichen mathematischen Beweisformen auf die des logischen Kalküls als ein witzloses Unterfangen. Immerhin ist jede Beweistechnik gerade durch den ihr eigenen Zeichenraum gekennzeichnet, innerhalb dessen die zum Operieren mit ihren Zeichen nötigen Identitäts- und Vergleichsstrukturen allererst aufscheinen können. Daher wundert sich Wittgenstein über die Ansicht, „25×25 = 625“ sei logisch begründbar: denn wie soll eine Beweistechnik „*das Wesen*“ einer anderen erklären? (85r) Zwar ist für kleinere Gleichungen eine Äquivalenz des logischen und des arithmetischen Formelausdrucks offenbar nicht zu leugnen (obgleich auch hier von einer *Begründung* des einen durch den anderen nicht unbedingt zu sprechen ist), für Ausdrücke wie den obigen wären die zum Vergleich der Faktoren nötigen Muster aber nicht länger gegeben, wollte man die Multiplikation auch auf der Ebene des in primitiven Termen abgefassten Kalküls durchführen.

> Die langen Beweise gehen nun (zuerst) immer mit den kurzen einher und bevormunden sie gleichsam. Aber endlich können sie den kurzen nicht mehr folgen und diese zeigen ihre Selbstständigkeit.
> Das Betrachten der *langen* unübersehbaren logischen Beweise ist nur ein Mittel um zu zeigen, wie diese Technik – die auf der Geometrie des Beweisens ruht – zusammenbrechen kann und neue Techniken notwendig werden. (85v)

Damit ist nicht bestritten, dass man zwei Beweissysteme einander zuordnen kann, indem man mittels gewisser Regeln die im einen System bewiesenen Sätze in die des anderen übersetzt. Ja es ließe sich sogar denken, „daß einige – oder alle – Beweissysteme der heutigen Mathematik auf solche Weise einem System, etwa dem Russellschen zugeordnet wären. So daß alle Beweise, wenn auch umständlich, in diesem System ausgeführt werden könnten.“ (86v) Dass es prinzipiell (und bei den technischen Gegebenheiten von heute vielleicht sogar praktisch) möglich ist, mittels entsprechender Algorithmen sämtliche Beweise der Algebra, der Trigonometrie, des Differentialkalküls etc. in Zeichen eines einzigen Kalküls zu simulieren, wird von Wittgenstein also zu keiner Zeit in Abrede gestellt. Er ist aber der Ansicht, dass bei einem solchen Vereinheitlichungsprozedere die jeweiligen strukturellen Eigenheiten der mathematischen Teilsysteme nicht aus demjenigen System genommen würden, in dem sie sämtlich simuliert werden: „*Ein* Teil des Systems wird die Eigentümlichkeiten der Trigonometrie besitzen, ein anderer die der Algebra, usw…“ (87r) Die unterschiedlichen Beweissysteme mit ihren jeweiligen Verfahren und Techniken weisen aufgrund ihrer veränderten Zeichenstrukturen auch unterschiedliche Möglichkeiten der Identitätsstiftung zwischen den verwendeten Symbolen auf: Begriffe also, die es in dem einen gibt, finden sich in einem anderen nicht. Wenn nun zugestanden wird, dass die zeichengeometrischen Merkmale des einen Beweissystems (bspw. eines arithmetischen) mittels entsprechender Übersetzungsregeln auch in den Zeichenraum eines anderen (der formalen Logik etwa) übertragen werden können, so scheint man auch umgekehrt die Möglichkeit einräumen zu müssen, dass die auf solche Weise erzeugte Beweisstruktur ganz im letzteren gefunden werden könnte – und zwar ohne an jenem ersteren Anleihen zu nehmen. Daraus ergibt sich, dass ein in Mathematik Ungebildeter, dem die *PM* vorliegen, die Rechnungsarten des Dezimalsystems hätte erfinden können, indem er mit lauter Russellschen Symbolen operierte. Wittgenstein gibt dies auch tatsächlich zu. Allerdings streicht er heraus, dass eine solche Erfindung *mathematischer* Art wäre: da aufgrund passender Zusammenfassungen sowie dem Schaffen von neuen Abgrenzungsmöglichkeiten der Zeichen (was wohl am ehesten mittels gehöriger Definitionen geschieht) neue Vergleichsstrukturen aufschienen, deren Genese nicht aus einer bereits etablierten Regel des Systems zu entnehmen war. Die mathematische Entdeckung käme hier also zustande, indem man im System einen „neuen *Aspekt*“ gewahrt. (87r) Als Beispiel für die Entdeckung eines solchen Aspekts im Russellschen Kalkül betrachtet Wittgenstein die Einführung des Exponenten, der die Anzahl der vor einer Aussagefunktion stehenden Negationswellen deutlicher hervorheben soll. An diesem Beispiel versucht er zu zeigen, dass die Definitionen, die den Logizisten zufolge bloß dem Zweck der Abkürzung dienen, häufig gänzlich neue Vergleichsstrukturen entstehen lassen und daher angemessener als Begriffe aufzufassen sind, die in den Kalkül eingeführt werden.

> Aber wie ist es–: Wenn ich zuerst ‚p∨q‘ und ‚~p‘ einführe und einige Tautologien mit ihnen konstruiere – und dann zeige ich (etwa) die Reihe ~p, ~~p, ~~~p, etc. vor und führe eine Notation ein wie $\sim^1$p, $\sim^2$p … $\sim^{10}$p … — ich möchte sagen: wir hatten vielleicht an die *Möglichkeit* so einer Reihenordnung ursprünglich gar nicht gedacht und wir haben nun einen neuen Begriff in unsre Rechnung eingeführt. Hier ist ein ‚neuer Aspekt‘. (88r)

Der neue Aspekt liegt darin, dass die *Anzahl* der NOT (‚~'), die vor den Propositionen stehen, eine besondere Wichtigkeit erhalten. Zwar stellt das Sehen dieses Aspekts die neuen Verbindungen bereits im bestehenden System (mit primitiven Termen) her, insoweit die Satzzeichen hinsichtlich der Anzahl ihrer Negationen betrachtet und verglichen werden. Dass sich dieser Aspekt aber zuletzt in einer neuen Notation manifestiert, deutet bereits darauf hin, dass jene Art des Vergleichs noch gar nicht vorhergesehen war, als man die einfachen Zeichen und ihre Verknüpfungsregeln entwarf. Indem das Augenmerk auf die Wiederkehr der Negationszeichen gelegt wird, generiert man gleichsam einen neuen Begriff dessen, was man fortgesetzte Wahrheitswertumkehr nenne könnte: jede ungerade Anzahl negiert den Wahrheitswert des Satzes, jede gerade hebt die Negation wieder auf. Diese Technik, bei der man den Wahrheitswert der Proposition mit der Anzahl der Negationszeichen identifiziert, ist Ausdruck der Anerkennung eines neuen Begriffes, insbesondere dann, wenn sich diese Vergleichstechnik in einem zusätzlichen Notationsschema niederschlägt, bei dem jene Reihenordnung gesondert hervortritt. Allerdings möchte Wittgenstein mit seiner Rede vom Erkennen eines neuen Aspekts gerade betonen, dass die Bildung des Begriffes auch mittels der ursprünglichen Zeichen vollzogen werden könne. Demnach stellt eine neue Notation zwar häufig das Erkennungsmerkmal, nicht aber unbedingt die eigentliche Genese des Begriffes dar. Vielmehr kann der entsprechende Vergleichsraum auch schon im ursprünglichen System hergestellt werden – wenngleich sich dessen Aussehen dadurch natürlich gehörig veränderte.

> In wiefern kann es richtig sein, zu sagen, man hätte mit der Reihe ~p, ~~p, ~~~p, etc. einen neuen Begriff in die Logik eingeführt? – Nun, vor allem könnte man sagen, man habe es mit dem ‚*etc.*' getan. Denn dieses ‚etc.' steht für ein mir neues Gesetz der Zeichenbildung. Dafür charakteristisch – die Tatsache, daß eine iterative Definition notwendig ist zur Erklärung der Dezimalnotation. (89r)

Wittgenstein hinterfragt die Idee, man hätte mit den allgemeinen Regeln der Satzbildung, wie sie am Beginn des Baus der *PM* stehen, schon alle möglichen damit in Übereinstimmung zu bringenden Zeichenverbindungen vorweggenommen oder antizipiert. Angenommen nämlich wir begännen im Russellschen Kalkül auf primitive Weise zu rechnen (wir beherrschten etwa die vier Grundrechnungsarten im Zahlenraum bis 1000), und wir gelangten eines Tages dahin, Potenzen zu bilden und Wurzeln zu ziehen: so wäre damit doch ein neues Stück Mathematik erfunden; selbst wenn dies in Termen der *PM* geschähe. Andererseits scheint es schwer zu sagen, worin es genau besteht, eine neue Rechnungsart innerhalb eines schon etablierten Systems zu finden. Was passiert denn etwa im Übergang vom gewöhnlichen Multiplizieren zum Rechnen mit Potenzen? Führt der bereits einen neuen Begriff ein, der eine neue Notation verwendet? –

> Offenbar die bloße ‚abgekürzte', oder *andere*, Schreibweise – ‚16^2' statt ‚16×16' – macht's nicht. Wichtig ist, daß wir jetzt die Faktoren bloß *zählen*. (92r)

Es liegt also nicht an der Notation allein, sondern an einer mit ihr einhergehenden neuen Identifikations*technik*, bei dem das Zählen der Faktoren in Verbindung mit dem Multiplizieren tritt. Daher nennt Wittgenstein die iterative Definition als ein Charakteristikum neuer Begriffsbildungen. (91v) Beim iterativen Definieren wird nicht nur ein Zeichen an die Stelle eines anderen gesetzt, sondern durch das fortlaufende in Beziehung setzen zweier Ausdrucksweisen etabliert man zugleich eine Verbindung zwischen den, diesen Ausdrucksweisen entsprechenden, Techniken des Zusammenfassens oder Vergleichens.

> Ich schreibe also, z.B. statt ‚a×a‘ ‚a^2‘. Dadurch beziehe ich mich auf die Zahlenreihe (spiele auf sie an), was früher nicht geschehen war. Ich stelle also doch eine neue Verbindung her! – Eine Verbindung – zwischen welchen Objekten? Zwischen der Technik des Zählens von Faktoren und der Technik des Multiplizierens.“ (93r)

Zum einen scheint also nicht allein die neue Schreibweise das Charakteristikum eines neuen Begriffes zu sein; denn, wie bereits erwähnt, wäre es wohl denkbar, jede Potenzmenge als Produkt gleicher Faktoren anzuschreiben. Zum anderen ist aber das Potenzieren gerade eine Technik, die über das gewöhnliche Multiplizieren hinausgeht; es wird die Anzahl der immer selben Faktoren gleichsam vorausgesetzt (und nicht erst langwierig gezählt), mit ihrem Wert verknüpft und ins Rechnen miteingebunden. Bedingt dieses Vorgehen aber nicht, dass man entsprechende Definitionen einführt – d. h. eine neue Notation? Oder anders gefragt: Ist das Neue, das hierbei in die Mathematik tritt, eine gewisse Technik oder eine zuvor nicht gebrauchte Notation? Man scheint beides nicht voneinander trennen zu können, obgleich man leicht dazu neigt, die der neuen Technik gerecht werdende Schreibweise als von eher zweitrangigem Interesse aufzufassen: denn wichtig ist, könnte man sagen, nicht die abgekürzte Schreibweise, sondern die besondere Vergleichsweise von Zahlausdrücken, die man dadurch ermöglicht.

> ‚Es ist nur eine andere Schreibweise.‘ Wo hört es auf – bloß eine andre Schreibweise zu sein?
> Nicht dort: wo nur die eine Schreibweise, und nicht die andre, so und so verwendet werden kann? (94r)

Die Schwierigkeit ist, dass wir meinen, die Rechnungen, die in dem einen Kalkül gesondert hervortreten (das Potenzieren), auch im anderen (durch einfaches Multiplizieren) ausführen zu können. Denn wir sagen, wer „x(a)“ statt „a×a“ schreibt, sehe bloß einen neuen Aspekt, indem er, was früher als Spezialfall einer Funktion mit zwei Argumentstellen betrachtet wurde, nun als Funktion mit einer Argumentstelle ansieht. – „Aber ist das nun eine *wichtige* Aspektänderung? *Nicht* solange sie nicht gewisse Konsequenzen hat.“

> Es ist schon wahr, daß ich mit dem Hineinbringen des Begriffs der *Anzahl* der Negationen von p den Aspekt der logischen Rechnung geändert habe: ‚So hab ich es noch nicht angeschaut‘ – könnte man sagen. Aber wichtig wird diese Änderung erst, wenn sie in die Anwendung des Zeichens eingreift. (95r)

Wenn daher auch die Technik des Potenzierens (bzw., wie im anderen Beispiel, des wiederholten Negierens) ihre Anfänge in einem Kalkül hat, der ohne Abkürzungen auskommt; so ist doch das entscheidende Merkmal, das uns überhaupt von einer neuen mathematischen Methode sprechen lässt, dass diese Technik sich in der ihr eigenen Art der Zeichenreproduktion niederschlägt. Schließlich ist das Gesetz der Zeichenbildung ganz eigentümlich und im bloßen Multiplikationskalkül nicht in dieser (nämlich: offenkundigen) Art präsent, wenn ich etwa durch Addieren der Exponenten zwei Potenzen miteinander multipliziere: „$10^5 \times 10^7 = 10^{12}$“. Nun ist nach dem obigen klar, dass sich eine Entsprechung zwischen diesem Ausdruck und dem Russellschen Kalkül herstellen ließe. Die Vergleichsmodi jedoch, wie sie bei der einen

Schreibweise zur Anwendung kommen, sind bei der anderen schlicht nicht gegeben. Und nachdem es zwar in der Arithmetik gleichgültig ist, „wie Anzahlengleichheit zweier Klassen festgestellt wird“ – nicht aber, „wie ihre Zeichen miteinander verglichen werden“ (95v), scheint es möglich, in jenem Kalkül Berechnungen durchzuführen, die in diesem nur einer Reihe von Zeichen gleichen. Wer trotzdem von einer Entsprechung zwischen beiden Systemen sprechen möchte, verlässt sich dabei seinerseits auf Rechnungen, bei denen zwei Zeichensysteme (gewissen Übersetzungsregeln gemäß) koordiniert werden. Die Kriterien *desselben* sind dann in dieser Übertragungsmethodik niedergelegt. Wird daher obige Gleichung in Russellschen Termen konstruiert, macht man die Wahrheit des Resultats abhängig von der „Geometrie der Übertragung“. (96v) – Und das tückische an dieser Rhetorik ist, dass sie einen eher vergessen lässt, dass den Übergängen zwischen den unterschiedlichen Zeichensystemen, die durch rekursive Definitionen vermittelt sind, eben auch je neue Techniken der Zeichenreproduktion entsprechen. Weshalb Wittgenstein auch „sagen möchte“:

> Russells Begründung der Mathematik schiebt die Einführung neuer Techniken hinaus, – bis man endlich glaubt, sie sei (gar) nicht mehr nötig.
> (Es wäre vielleicht so, als philosophierte ich über den Begriff der Längenmessung so lange, bis man vergäße, daß zur Längenmessung die tatsächliche Festsetzung einer Längeneinheit nötig ist.) (89v)

2 Konstruktions*praxis* statt Probier*vorsatz*

Wittgenstein ist also geneigt, dem Dezimal- gegenüber dem Strichkalkül ein gewisses Eigenleben zuzusprechen, quasi die Dezimalnotation als unabhängig vom Rechnen mit Einerstrichen zu betrachten. Dazu führt ihn auch der Gedanke, „[d]aß man in Russells Logik zwar einen Satz $a\colon b = c$ *beweisen* kann, daß sie uns aber einen richtigen Satz dieser Form nicht konstruieren lehrt, d.h. daß sie uns nicht *Dividieren* lehrt.“ (MS 122, 100r) Damit bewegen sich die Überlegungen weg von der Frage, ob wir unserer Schlüsse gewiss sein können, wenn wir Russellsche Logik betreiben, und hin zu derjenigen, ob wir dabei noch dasselbe wie beim Rechnen der vier Grundarten tun. Der Fokus liegt auf dem Problem der Konstruierbarkeit von ganz in Strichen abgefassten Rechnungen, wie uns deren Endergebnisse aus dem Dezimalsystem her bekannt sind. Denn der Konstruktionsvorgang wäre in diesem Fall nicht, wie dies im Dezimalsystem der Fall ist, aktiv in der Weise, dass Zähler und Nenner so miteinander verknüpft werden, dass eine dritte Zahl als der Wert des Ganzen entspringt. Sondern der Vorgang des Dividierens „entspräche z.B. dem eines *systematischen Probierens* Russellscher Beweise zu dem Zweck etwa den Beweis eines Satzes von der Form $37 \times 15 = x$ zu erhalten.“ (100r) Der Einwand, der sich an diese Betrachtung wie von selbst anschließt, ist dann: dass etwaige Fehler bei einem solchen Herumprobieren kaum feststellbar wären; daß ein falsches Ergebnis erhalten wurde, scheint nicht dadurch etablierbar zu sein, dass man die Konstruktion nochmals in übersichtlicher Form anschreibt; sondern die Kriterien dafür, was als wahres oder falsches Ergebnis zu gelten hat, müssten von den Ergebnissen des Dezimalsystems hergenommen werden. Allerdings ist auch die Erwiderung des Logizisten wieder leicht nachvollziehbar: dass nämlich die Technik jenes „systematischen Probierens“ selbst auf Logik gegründet werden könne: „‚Man kann doch wieder logisch beweisen, daß diese Technik zum Ziel führen muß.'" (100r) Es würde also darauf beharrt werden, dass der Beweis für die Richtigkeit eines Divisionsausdrucks im Russellschen Kalkül abermals mittels logischer Terme beweisbar, und man also keineswegs auf die Ergebnisse des Dezimalsystems angewiesen sei. – Wie aber kann uns ein solcher Beweis von irgendetwas überzeugen: wo doch sein völliger Mangel anschaulicher Struktur nur Spekulationen darüber zulässt, was eigentlich bewiesen wurde. Womit wir zuletzt doch wieder zu der Frage gelangen, ob wir etwas Beweis nennen sollen, von dem uns erst eine eingehende Untersuchung des Konstruktionsbildes, bei der mittels gewisser Abkürzungsschemata für Übersicht gesorgt wird, versichert, dass das auf diesem Weg erhaltene Resultat auch erhalten werden *müsse*. Wittgensteins Antwort hierauf ist klar:

> Für das Resultat eines Experiments machen wir oft das Wirken eines unsichtbaren Mechanismus verantwortlich; der Beweis liegt offen vor unsern Augen. (100v)

Der erhobene Einwand gegen eine auf Logik zu gründende Entsprechung zwischen dem Dezimalkalkül und dem primitiven Zeichensystem kann auch ausgehend von der Frage formuliert werden, in welcher Weise die beiden miteinander zu korrelieren wären. Denn es scheint einerseits die Möglichkeit zu bestehen, den Weg durch den Beweis des sekundären (des Dezimal-) Systems zu gehen, von seinem Ende aus den Schritt ins primäre (Russellsche) zu machen, um dann zu sehen, wo man so hingelangte. Oder aber man schreitet in beiden Systemen fort, um dann die jeweils erreichten Endpunkte zu verbinden. Wenn die Entsprechung zwischen beiden Systemen sich tatsächlich auf Logik stützte, müsste es ein logisches Entscheidungskriterium dafür geben, „daß wir im primären System in beiden Fällen zum gleichen Resultat gelangen". (101v) Es bräuchte demnach einen zwingenden Beleg dafür, dass die langwierigen Konstruktionen im System der *PM* zum selben Resultat führen, als wie wenn wir im Dezimalsystem vorgehen. Es reicht nicht, dem Beweis des Dezimalsystems einen aus primitiven Termen bestehenden Ausdruck zuzuordnen, der sein mittels gehöriger Umformungsregeln konstituiertes Korollar darstellt. Sondern es müsste zusätzlich gezeigt werden, dass die aus den Ausgangsaxiomen gewachsene Konstruktion des Beweises im primären System zum *richtigen* Resultat gelangte: woher sollte ein dies entscheidendes Kriterium aber anders zu nehmen sein, wenn nicht aus dem übersehbaren sekundären Beweis; denn der langwierige Beweis führt ja noch nicht einmal Überzeugungskraft mit sich!

> Was aber kann mich sicher machen, daß die Beweise in den beiden Systemen wirklich parallel laufen werden? – Dies können nicht die Beweise im Strichsystem sein, da ich ja im Dezimalsystem unabhängig von diesem vorgehe. Es ist also denkbar, daß es sich am Ende der Wege zeigt, daß sie nicht parallel liefen. So wie es denkbar ist, daß die Zahlbestimmung mittels eines Rhythmus und die Zahlbestimmung durch Zählen zu verschiedenen Resultaten führt. (108v)

Mit diesem Einwand konfrontiert, möchte man (als Begründestheoretiker) vielleicht sagen, es sei doch wenigstens *prinzipiell vorstellbar*, dass jede Konstruktion des einen Beweissystems auch im anderen geführt werden könnte. Um derart spitzfinderische Unstimmigkeiten, wie sie eben ausgedacht wurden, hätte sich der Mathematiker nicht zu kümmern. (109v) Wir erinnern uns, dass die besprochenen Logizisten (siehe TEIL II) ja durchgängig der Ansicht waren, es ließen sich Mathematik betreibende Wesen vorstellen, die nicht wie wir Menschen auf den Sinnen gemäße Vergleichsstrukturen angewiesen sind, und welche daher der abkürzenden

Definitionen auch nicht bedürften, um mathematische Wahrheiten als solche zu erkennen. Analog zu der Kritik, die Wittgenstein gegen diese Ansicht vorbrachte, kann auch an dieser Stelle geltend gemacht werden, dass es sich bei der Mathematik ganz einfach um ein anthropologisches Phänomen handelt: folglich die Rede von den *eigentlichen* mathematischen Strukturen, die alle menschliche Erkenntniskraft transzendierten, eine metaphysische Verbrämung darstellt: Hypostasierungen, die nicht weiterhelfen, sondern verblenden, wenn wir verstehen wollen, was *wir* tun, wenn wir Mathematik betreiben. Daher die etwas lakonische Antwort Wittgensteins auf diese Ausflucht des Logizisten.

> „Aber wir können uns doch bei jedem Schritt im sekundären System denken, daß er auch im primären gemacht werden könnte!" – Das ist es eben: *wir können uns denken, daß er gemacht werden könnte* – ohne, daß er gemacht wird. (102r)

3 Die induktive Definition als Eigenheit des Zeichenraums

Schon weiter oben hatte Wittgenstein gefragt, ob nicht vielleicht die iterative Definition (d. i. eine wiederholende Operation, bei der das Definiendum mit Hilfe jenes Definiendums erklärt wird, das sich im vorhergegangenen Definitionsschritt ergab) charakteristisch sei für die Einführung eines neuen Begriffes im Rahmen von Beweisalgorithmen:

> Kann man sagen, daß ich, zwar nicht durch eine, einfache, aber durch eine iterative Definition einen neuen Begriff einführe? – Warum aber? Führt eine iterative Def. nicht nur eine *Reihe* von Abkürzungen ein – statt *einer* Abkürzung? (MS 122, 91v)

Diese Frage beantworteten wir zuvor mithilfe einer anderen Passage, in der Wittgenstein andeutet, der Ausdruck des ‚etc.', der die Methode des iterativen Definierens abschließend kennzeichnet, stehe für ein „neues Gesetz der Zeichenbildung" (89r): eine neue Technik in unserem Umgang mit Zeichen. (PU, § 208: „Das „usw. ad. inf." ist *keine* Abkürzung der Schreibweise.") Ich werde gleich ein Argument skizzieren, mit dem Wittgenstein den geometrischen Sprung, wie er im Übergang vom Strich- ins Dezimalsystem passiert, durch mangelnden ‚induktiven Gehalt' seitens des Strichkalküls zu erklären versucht. Indem er zeigt, dass wir im primären Kalkül über nicht genügend Darstellungskraft verfügen, um darin die Konstruierbarkeit eines induktiven Beweises im Dezimalsystem zu beweisen – verdeutlicht er, dass mittels der iterativen Definitionen, die zwischen beiden Beweissystemen vermitteln könnten, bereits der Schritt in eine neue Zeichengeometrie unternommen wird: ein Schritt, wie er in den Termen des primitiven Kalküls jedoch nicht ausgeführt werden kann. Auf eindrucksvolle Weise verknüpft Wittgenstein hier zwei Themen, die uns in bisher noch loser Verbindung stets begleiteten: einerseits seine Überlegung, wonach jedes Beweissystem durch die ihm eigene Zeichengeometrie charakterisiert ist; sowie andererseits der Gedanke, dass mathematische Definitionen vorrangig nicht als Abkürzungen aufgefasst werden sollten, sondern als Zeichen*transformationen*. Eben weil sie eine Transformation der Zeichen darstellen, führen die Definitionen über in eine neue Geometrie, in einen neuen Kalkül.

Ausgangspunkt des Gedankens ist die Betrachtung eines typisch induktiven Beweises, dem der Teilbarkeit. Der Beweis im Dezimalsystem zeigt, dass jede Zahl, deren Ziffernsumme ohne Rest gedrittelt werden kann, selbst durch drei teilbar ist. Der Beweis erlaubt also Prognosen von der Art: „Wenn die Ziffernsumme *dieser* Zahl durch drei teilbar ist, dann ist es auch *sie* selbst.“ Wer von der Entsprechung zweier Beweissysteme sprechen will, muss sich jetzt die Frage gefallen lassen, „wie [er] in *einem* System beweisen kann, daß die Rechnung in einem anderen eine gültige Vorhersage ist?“ (MS 122, 104r) Denn insofern es dem Beweis wesentlich ist, „eine richtige Vorhersage begründen zu können“, muss er „mit der besondern Geometrie eines Zeichenraumes“ übereinstimmen. Folglich ermöglicht ein Beweis, der die Konstruierbarkeit eines Beweises in einem anderen System beweist, nicht dieselben Voraussagen als ein konstruktiver Beweis, der das zu Beweisende auf bestimmte Weise hervorbringt. Wozu der Beweis als Vorhersage herangezogen werden kann, hängt schließlich davon ab, mit welchen Zeichen er geführt wurde. Die Prognosefähigkeit eines Beweises betrifft immer nur das, wovon er tatsächlich ein Vorbild abgibt, und sie bleibt daher von der zeichnerischen Ordnung des Beweises abhängig. Der logische Beweis, der die Konstruierbarkeit des Dezimalbeweises beweist, ist folglich nicht dieser selbst: denn jener vermag nicht als Instrument für Vorhersagen zu dienen, für die allein der letztere herangezogen werden kann. Es mangelt den Beweisen der Konstruierbarkeit eines Beweises daher eine wesentliche Eigenschaft: im Gegensatz zu konstruktiven Beweisen kann man mit ihnen keine Vorhersagen machen – außer derjenige, dass etwas, das Vorhersagen zu machen erlaubt, irgendwie konstruiert werden könne. Da dies ‚irgendwie‘ aber im Beweis der Konstruierbarkeit nicht gezeigt wird, bleibt unklar, welche Vorhersagen das als konstruierbar Nachgewiesene erlauben würde. Selbst wenn die Zeichen des Dezimalsystems als Abkürzungen der Zeichen des Strichsystems betrachtet werden, ist *daraus alleine* daher noch nicht zu folgern, dass auch der Induktionsbeweis im Dezimalsystem als die Abkürzung eines Beweises im Strichsystem zu betrachten sei. Das Gesetz der Zeichenreproduktion ist ein jeweils anderes, insofern bei induktiven Beweisen im Dezimalsystem andere Regeln zur Geltung treten als dies bei induktiven Beweisen im Strichsystem der Fall ist.

> Darf ich es so sagen: „[1] Die Übertragung des Strichsystems ins Dezimalsystem setzt eine induktive Definition voraus. [2] Eine solche Definition führt aber nicht die Abkürzung *eines* Ausdrucks durch einen andern ein. [3] Der induktive Beweis im Dezimalsystem aber enthält natürlich nicht die Menge jener Zeichen die durch die induktive Definition in Strichzeichen zu übertragen wären. [4] Dieses Beweiszeichen kann daher durch die rekursive Definition nicht in ein Beweiszeichen des Strichsystems übertragen werden.“?
> [5] Der rekursive Beweis führt eine neue Zeichentechnik ein. – Er muß also den Übergang in eine neue ‚Geometrie‘ machen.
> [6] Es wird ein neues Kriterium für die Gleichheit von Zeichen eingeführt. (105r)

Diese Bemerkung ist nicht leicht nachzuvollziehen, daher versuche ich eine detaillierte, an den nummerierten Sätzen entlanglaufende Aufbereitung dessen, was Wittgenstein hier „sagen möchte“. [1–2] Die zwischen den beiden Zeichensystemen vermittelnde induktive Definition, die eine allgemeine Regel an die Hand gibt, wie Strichzeichen in Dezimalziffern zu übertragen sind, ist nicht die einmalige Gleichsetzung aller solcherart konstruierbaren Dupeln, sondern wir lernen eine allgemeine Methode oder Technik kennen, wie im einzelnen Fall vorzugehen ist, wo den Strichen eine Ziffer korreliert werden soll. [3] Wer aufgrund dieser Methode Dezimalziffern konstruiert hat, die gewissen Strichzeichen entsprechen, hat damit aber nicht zugleich den Sinn der Rede von Entsprechungen zwischen irgendwelchen Strichzeichen und jenen Dezimalziffern etabliert, wie sie sich nun durch einen induktiven Beweis im Dezimalsystem konstruieren lassen. [4] Es lässt sich daher keine Entsprechung zwischen einer induktiven Beweiskonstruktion im Dezimalsystem und einer solchen im Strichsystem herstellen, deren Kriterien sich nur auf die formale Umkehr jener induktiven Definition stützte, mit der anfangs zwischen den Strich- und Dezimalzeichen korreliert wurde. [5–6] Schließlich folgt die Vergleichung der Zeichen beim induktiven Beweis im Dezimalsystem einer Ordnung, die durch die vermittelnde induktive Definition allererst ermöglich worden war: daher die Strichzeichen einer solchen Vergleichsstruktur nicht zu folgen vermögen. – Der „Übergang in eine neue ‚Geometrie'" ist also gleichsam irreversibel: indem wir uns von der iterativen Definition in sie hineinführen lassen, eröffnen sich Vergleichsmöglichkeiten, die wir vorher schlicht nicht kannten. Es werden andere Kriterien der Identität festgelegt, bzw. anerkennen wir die zeichentechnische Ordnung eines uns zuvor unbekannten Raumes. (Wobei „Anerkennung" hier nicht mehr heißt, als dass wir gewogen sind uns hinfort in diesem Raum zu bewegen.) Da die sinnvolle Vorhersage der Konstruierbarkeit eines Zeichens die Anerkennung des Zeichenraumes, darauf sich die Prognose bezieht, voraussetzt, wird deutlich, dass der Beweis der Dreiteilbarkeit, wie wir ihn vom Dezimalsystem her kennen, auch ganz in diesem aufgehoben ist. Beziehungsweise können wir umgekehrt schließen, dass wenn wir die entsprechende Russellsche Zeichenverbindung einen *Beweis* der Teilbarkeit nennen wollen, sich diese Anerkennung solange nicht auf den primitiven Kalkül stützt, als wir denselben nicht auch zur Prognose der Teilbarkeit einer singulären Zahl heranziehen können. Es wird also nicht geleugnet, dass sich für jeden Beweis des Dezimalsystems ein Russellscher konstruieren ließe; obiges Argument soll aber zeigen, dass die Anerkennung einer solchen Entsprechung nicht auf den primitiven Kalkül gegründet wäre. Wenn man daher mit dem Logizisten die abkürzenden Definitionen als die Übertragungsregeln begreift, die zwischen dem Grundkalkül und den vielfältigen Teilsystemen vermitteln, so ist Wittgenstein zu der Auffassung geneigt, es sei nicht der Überzeugungskraft des logischen Kalküls geschuldet, dass wir gerade jene Definitionen wählen, die zu den uns bekannten Formen der Mathematik führen.

> Warum nennen wir einen Teil des Russellschen Kalküls den der Differentialrechnung entsprechenden? – Weil in ihm die Sätze der Differentialrechnung bewiesen werden. – Aber doch nicht am Ende post hoc. – Aber ist das nicht gleichgültig? Genug, daß man Beweise dieser Sätze im Russellschen System finden kann! [–] Aber sind es Beweise dieser Sätze nicht nur dann, wenn ihre Resultate sich nur in *diese* Sätze übertragen lassen?
> Aber stimmt das sogar im Fall des Multiplizierens im Strichsystem mit numerierten Strichen? (110v)

Eine denkbare Methode zum Ermitteln des Produktes zweier Strichmengen bestünde darin, die Multiplikandenstriche im rechten Winkel zu den Multiplikatorenstrichen anzuordnen, den eröffneten rechteckigen Raum mit Einheitsstrichen im je selben Abstand auszufüllen, und zuletzt die so generierten Striche zu zählen. In der Regel wird dieses Vorgehen mit den Ergebnissen der Dezimalnotation übereinstimmen. Falls es zu Abweichungen kommen sollte, wäre mehrfaches Durchspielen dieser Methode durch mehrere Leute ein probates Mittel, um Übereinstimmung herzustellen; wie dies auch im Falle von Rechnungen mit sehr großen Zahlen im Dezimalsystem zuweilen gemacht wird. Die Ergebnisse beider Systeme werden einander normalerweise zwar entsprechen, im Falle einer Unsicherheit verlassen wir uns jedoch auf jene Berechnungsart, nach der wir gewöhnlich vorgehen. Das heißt, „daß nicht die Beweise im Strichsystem – die Beweise im Dezimalsystem zu zwingenden Beweisen machen." (111r) – Diese Argumente zeigen, dass es nicht funktioniert, die Mathematik konstruktiv aus dem primitiven Kalkül zu entwickeln, ohne sie immer schon als jenes Objekt vorauszusetzen, das es zu rekonstruieren gilt. Die Wahl der Abkürzungen in gerade der Weise, dass aus dem logischen Kalkül jene Beweisformen entspringen, die sich in der Mathematik finden lassen, weist nicht die Logik, sondern die tatsächlich bestehende Mathematik als Maßstab aus.

4 Kriterien des Gleichen

Auf die letztgenannte Schlussfolgerung lässt Wittgenstein seinen Widerpart sagen, dass man aber doch, kennte man den Beweis im Dezimalsystem nicht, den mit Strichen geführten Beweis gebrauchen könnte, um *dasselbe* zu beweisen. Die charakteristische Reaktion Wittgensteins hierauf besteht in dem erstaunten Ausruf: „Das Gleiche – was ist das Gleiche?"

Eine zunächst sehr nahe liegende Antwort wäre die, dass man aufgrund gleicher Anwendung auf die Gleichheit des durch die Kalküle Bewiesenen schließt – und dieserart auch das Kriterium der Entsprechung zweier Beweissysteme davon abhängig macht, dass ihre Sätze gleich angewandt werden können. Allerdings ergeben sich auch hier Probleme.

> Wenn wir von ‚einander entsprechenden' Kalkülen reden, so denken wir oft an die mögliche *Anwendung* dieser Kalküle und nennen ‚entsprechend' solche, die gleich *angewandt* werden könnten. (Man denkt etwa an irgend eine charakteristische Anwendung des Multiplizierens.) Aber auch dies hilft uns nicht. (Könnte Einer nicht den Beweis für ‚3×3 = 9' als Beweis dafür verwenden, daß ‚9×9 = 81' ist, ich meine: könnte er aus dem Gang jenes Beweises nicht unmittelbar auf ‚9×9 = 81'schließen? Er schließt: „3×3 = 9 – also muß ich für 9 Nüsse á 9 Groschen 81 Groschen zahlen.") (110r)

Dieses Argument klingt zwar absurd, ist es aber nicht, wenn man bedenkt, wozu es dienen soll. Wittgenstein richtet sich gegen die Idee, man bekäme mit Blick auf die Anwendung ein eindeutiges Kriterium der Identität, das zwischen zwei unterschiedlichen Beweissystemen vermitteln kann. Es geht nicht darum, zu sagen, es sei wirklich plausibel, wenn einer aufgrund des Beweises für „3×3 = 9" zu dem Urteil gelangt, dass er 81 Groschen zahlen muss, wenn er 9 Nüsse zum Wert von 9 Groschen kaufen möchte. Dennoch ist es nicht *per se* oder *„a priori"* ausgeschlossen (d. h. es gibt keine weitere Instanz, die es auf ewig verunmöglicht), dass jemand auf diese Weise schließt. Zwar kann die Anwendung („für 3 Nüsse á 3 Groschen muss ich 9 Groschen zahlen") einer Regel („3×3 = 9") durch weitere Regeln (z. B.: „wende diese Rechnung nur auf Gegenstände an, deren Anzahl kleiner 10 ist!") geregelt sein. Das garantiert jedoch nicht, dass man diese weitere Regel nicht ihrerseits auf eine Weise deutet (z. B. indem man sagt, die zusätzliche Regel beziehe sich nur auf die Faktoren, nicht aber auf das Produkt einer Multiplikation), wodurch andere Anwendungen (z. B.: „für 9 Nüsse á 9 Groschen muss ich 81 Groschen zahlen") möglich werden. Ein mathematischer Beweis legt zwar nahe, wofür der durch ihn errichtete Maßstab dienen soll, das Regelfolgeproblem stellt sich aber letztlich auch dort, wo wir vom Beweis eines Satzes zu seiner Applikation übergehen. D. h., wir können uns schon wundern, wenn uns jemand begegnet, der in der geschilderten Weise schließt (unter Umständen würden wir sie/ihn vielleicht für ein mathematisches Wunderkind halten). Wir sollen uns aber nicht einbilden, dass ein von all unseren Urteilen unabhängiger Standard besteht, der ein solches Vorgehen unterbindet. Und stellen wir selbst einen solchen Standard auf, so ist es dennoch möglich, ihn in einer Weise zu deuten, dass er dem von uns intendierten Zweck nicht länger dient. Wenn aber die Anwendung von zwei verschiedenen Sätze *desselben* Systems („3×3 = 9", „9×9 = 81") gleich ausfallen kann, dann kann man die Anwendung erst recht nicht dafür heranziehen, um die in *unterschiedlichen* Kalkülen abgefassten Beweise miteinander zu identifizieren. Die gleiche Anwendung ihrer Sätze liefert also nicht jenes absolute Entscheidungsmerkmal, das uns erlaubt, von „einander entsprechenden" Kalkülen zu reden.

Es gibt noch einen weiteren Einwand gegen die Idee, dass der Blick auf die Anwendung die Identifizierung zweier Beweissysteme erlaube. *Ein* Moment der Anwendung eines Kalküls ist schließlich dadurch gegeben, dass sich in ihm bestimmte Sätze beweisen lassen und andere nicht; d. h. die Beweisbarkeit innerhalb eines Systems kann als Merkmal des so erhaltenen mathematischen Satzes betrachtet werden. Insofern wir aber im vorangegangenen Kapitel (6.3) sahen, dass der primitive Kalkül über nicht genügend Darstellungskraft verfügt, um die Konstruierbarkeit eines Satzes im Dezimalsystem zu beweisen, fehlt dem im primitiven Kalkül bewiesenen Satz jedenfalls ein Moment der Anwendbarkeit, die der im Dezimalsystem bewiesene aufweist: nämlich die, im Dezimalsystem konstruierbar zu sein. – Diesem Gedanken geht die Idee voraus (oder sie geht einher damit), dass der Sinn eines mathematischen Satzes davon abhängt, wie er erhalten wird.

> – Wie, wenn ich sagte: "Der Platz an den uns ein Beweis führt, kann nicht unabhängig von diesem Beweis bestimmt / angegeben werden." – (111v)

Jeder Satz der Mathematik wäre unter dieser Betrachtungsweise als Bestandteil eines größeren Beziehungsgeflechts zu denken, welch selbiges allein eine exakte Verortung des Satzes ermöglicht. Der mathematische Satz wäre etwas, das es mit Blick auf den Beweis, der zu ihm führt, auf seine Rolle und seinen Sinn hin zu bestimmen gilt. Die Untersuchung der Mathematik bestünde dann wesentlich in der Topographie ihrer Sätze, die durch Beweise untereinander verbunden, und deren Brauchbarkeit durch sich überkreuzende Formen der Anwendung belegt sind.

Nun ist es aber eine Tatsache mathematischer Praxis, dass wir von unterschiedlichen „Beweisen desselben Satzes" sprechen. Und da unser begriffliches Denken keinen Standard außerhalb der Gepflogenheiten tatsächlicher sprachlicher Praxis haben kann, käme es Wittgenstein nicht in den Sinn, diese Redensart als falsch zu beeinspruchen. Da aber dennoch all seine Überlegungen dahin gelangen, dass der Sinn eines mathematischen Satzes von seinem Beweis abhängig ist, kann er diesen Gedanken auch nicht so ohne weiteres aufgeben. Zumal, da andernfalls die Idee unabhängig vom jeweiligen rechnerischen System bestehender mathematischer Tatsachen geltend gemacht werden müsste: eine Vorstellung, von der bereits in den ersten Kapiteln gezeigt worden ist, dass sie einen äußerst schnell in platonische Mystizismen oder verwegene Psychologismen verfallen lässt.

> Es wäre natürlich Unsinn zu sagen, daß *ein* Satz nicht zwei Beweise haben kann – denn so sagen wir eben. Aber kann man nicht sagen: *Dieser* Beweis zeigt daß … herauskommt, wenn man *das* tut; der andre Beweis zeigt, daß dieser Ausdruck herauskommt, wenn man etwas andres tut.
> Ist denn z.B. das mathematische Faktum, daß 129 durch 3 teilbar ist, unabhängig davon, daß *dies* Resultat bei *dieser* Rechnung herauskommt? Ich meine: besteht das Faktum dieser Teilbarkeit unabhängig von dem *Kalkül*, in dem es sich ergibt; oder ist es ein Faktum dieses Kalküls? (112r)

Wer die mathematische Tatsache als vom Kalkül unabhängig begreift, für den stellt das Rechnen eine Art der Untersuchung dar, die den Menschen zur Einsicht in die unwandelbaren Eigenschaften der Zahlen verhelfen soll: der Beweis ist quasi ein Forschungsutensil, das dem Menschen auf ihm verträgliche Weise vor Augen führt, was immer schon da war. (Vgl. Hardy 1929, S. 4; siehe auch Teil III, Kap. 3.) So gesehen schiene es auch denkbar, dass zwei verschiedene Beweismethoden dieselbe mathematische Wahrheit offenbaren. Die Frage ist nur: wie wissen wir davon? was ist unser Kriterium dafür, dass zwei unterschiedliche Beweise uns vom Gleichen überzeugen? Denn macht nicht der eine Beweis die Überzeugungsarbeit auf diese, der andere auf jene Weise? Eine gängige Ausflucht besteht darin, die Introspektion geltend zu machen: als den genialen Blick des mathematisch/logisch Geschulten, der die ewigen mathematischen Wahrheiten auch ohne Beweise zu erkennen vermag; der also gleichsam am Beweis vorbei lugt, um hinter ihm die *eigentliche* Wahrheit zu entdecken. Wenn ihm dies gelänge, hätte er auch *sein* Kriterium dafür, dass zwei verschiedene Beweise dasselbe beweisen. – Gegen diese verbrämende und vorgebliche Antwort führt Wittgenstein eine Charakteristik des Beweises ins Feld, die ihn an der Oberfläche ernst zu nehmen trachtet. („Nicht etwas hinter dem Beweise, sondern der Beweis beweist", MS 122, 80r) Nun gerät aber sein an den offen daliegenden Beweisstrukturen orientierter Betrachtungsstandpunkt mit gewissen Sprachgepflogenheiten in Konflikt. Nur die wenigstens würden schließlich sagen wollen, dass der Sinn der durch die folgenden beiden Rechnungen bewiesenen Sätze ein verschiedener ist – wohingegen die gegebene Charakteristik gerade darauf hinausläuft:

$$\begin{array}{l} 1000:3=333+\frac{1}{3} \\ \ \ 10 \\ \ \ \ \ 10 \\ \ \ \ \ \ \ 1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} \underline{10}00:3=333+\frac{1}{3} \\ \ \underline{10} \end{array}$$

Wittgenstein ist also versucht, „*eine Deutung zu erfinden*, nach welcher man sagen kann, daß der Sinn der Sätze" ein verschiedener ist, wenn sie durch ungleichartige Rechnungen bewiesen sind. (113r) Auf die beiden obigen Rechnungen gemünzt, hieße das, dass man ihr Ergebnis zwar beide Male mit demselben Ausdruck (1000:3=333+1/3) ausspricht, dass aber dieser Ausdruck, entsprechend dem jeweiligen Beweis, auch jeweils unterschiedlich verstanden werden kann. Zugleich ist es aber, so Wittgenstein, keineswegs ausgeschlossen, dass es weitere Kriterien gibt, die uns dennoch vom „gleichen Resultat" zu sprechen erlauben.

> D.h.: ich will die Worte „Sinne eines mathematischen Satzes" so deuten, daß der Sinn auch davon abhängig wird, wie der Satz erhalten wird. So eine Betrachtung

> kann natürlich nicht zeigen, daß es *falsch* ist zu sagen, zwei Beweise bewiesen das Gleiche! […] Es ist vielmehr ein besonders wichtiges Mittel unserer Sprache zu bestimmen, daß verschiedene Kriterien als Kriterien des Gleichen gelten sollen. (113v)

Als analogen Fall nennt er die Bedeutung des Ausdrucks „Eintritt des Todes", der gemäß den verwendeten Bestimmungskriterien verschieden sein kann. Geht der Aussage „Er starb vor zwei Stunden" die Auswertung eines Elektroenzephalogramms voran, wird man sie unter Umständen anders verstehen, als wenn aufgrund zyklischer Herz-Kreislaufmessungen auf den Todeszeitpunkt geschlossen wurde. (Manche Menschen leugnen sogar die Gleichsetzung des Gehirntods mit dem Tode des Menschen.) Wenn wir hier dennoch von Kriterien für dasselbe sprechen, deutet dies daraufhin, dass der Begriff des ‚Eintritts des Todes' selbst nicht vollkommen klar umrissen ist: er vielmehr unterschiedliche, ihn charakterisierende Facetten aufweist, von denen die einen schärfer ins Auge stechen, andere weniger stark. Im Unterschied zum mathematischen Satz ist allerdings das Phänomen des menschlichen Todes eine klar in Raum und Zeit verortbare Tatsache, die die nötige Identität stiftet, wenn wir von verschiedenen Todeseintrittsbestimmungen sprechen. Im Fall zweier Beweise, die mit demselben Ausdruck endigen, können wir uns, wenn wir nicht den platonischen Himmel oder geheimnisvolle Introspektionen anrufen wollen, seiner Identität nicht mit Blick auf irgendeine von ihm bezeichnete Tatsache verbürgen. Genausowenig ist es aber die Deckungsgleichheit des Satzzeichens, die uns davon zu sprechen erlaubt, es werde beidesmal dasselbe bewiesen: denn wie ein Satz tatsächlich zu gebrauchen ist, ist nicht aus ihm allein zu entnehmen; daher es durchaus denkbar ist, dass zwei gleichlautende Sätze in unterschiedlichen Gebrauchszusammenhängen auftreten, mithin verschiedener Bedeutung sind. Was uns daher sagen lässt, zwei Beweise bewiesen dasselbe, scheint eine Verhaltensähnlichkeit der beiden sie abschließenden Sätze sein zu müssen; ihre Rolle in der Mathematik (sowohl innermathematisch als auch hinsichtlich ihrer außermathematischen Anwendung) bedarf gehöriger Überschneidungen, damit wir sagen können, das auf zweierlei Art Bewiesene sei das Gleiche. Insoweit aber der Unterschied besteht, dass zu den aufgrund gehöriger sonstiger Überlappungen als gleich ausgewiesener Sätze zwei verschiedenartige Beweise führen, kann schon allein dadurch ihre Rolle in der Mathematik als voneinander geschieden betrachtet werden. Man könnte also geneigt sein zu sagen, dass mehr Präzision gewahrt würde, wenn man den Sinn des bewiesenen Satzes mit dem zu ihm führenden Beweis identifiziert. Jeder einzelne Beweis eines Satzes wäre damit bereits deswegen interessant, „weil er eine neue Zeichen-geometrische Methode zeigt. Oder: er überzeugt uns von einer neuen Möglichkeit der Konstruktion." (114v)

Wir werden im abschließenden TEIL VII diese Frage nach den Kriterien des Gleichen bzw. die problematisierte Trennung des Beweises von dem ihn abschließenden Satz erneut aufgreifen. Zunächst möchte ich aber im letzten Unterkapitel auf einen mir wichtig scheinenden Zusammenhang hinweisen, der es vielleicht noch besser nachzuvollziehen erlaubt, was einen zur geometrischen Betrachtungsweise leiten kann. Ehe das Manuskript gewechselt wird (von MS 122 auf MS 117-II), kommen wir noch auf den Beweis der algebraischen Grundgesetze zu sprechen: als einen womöglich starken Beleg dafür, dass Wittgensteins Standpunkt, wie er bislang umrissen wurde, zumindest mit einigen unserer mathematischen Praktiken im Widerspruch steht.

5 Beweistechnikengemisch statt Sätzearchiv

Die Zuspitzung der Äquivalenzproblematik zweier Beweissysteme auf die Frage hin, was als das Identitätskriterium mathematischer Sätze zu gelten hat, erlaubt es einen bisher noch eher im Dunkeln liegenden Zusammenhang zwischen verschiedenen Aspekten der Wittgensteinschen Betrachtungsweise deutlicher herauszustellen. Indem nämlich nicht der einzelne, den Beweis abschließende Satz für sich betrachtet, sondern das ganze mathematische Gefüge in den Blickpunkt gezogen wird, verliert der einzelne Satz an Wichtigkeit gegenüber unterschiedlichen Zeichentransformationen, worin er seine Rollen spielt. Entscheidend ist nunmehr nicht das einzelne Faktum, wie es der den Beweis abschließende Satz ausspricht, sondern die mathematische Operation, wie sie am gesamten Beweiszusammenhang zum Ausdruck kommt. (Vergleiche die beiden Weisen des Periodizitätsnachweises.)

Nicht von ungefähr schreibt daher Wittgenstein:

> (Man könnte mein Problem auch so ausdrücken: Ist es richtig die Mathematik als eine Klasse von wahren *Sätzen* aufzufassen?) (MS 122, 115r)

Dieser Gedanke stellt einen Zusammenhang her zwischen zwei Überlegungen, die immer wieder Platz in unserer Darstellung fanden, aber kaum je so überzeugend in Beziehung gesetzt worden sind. Einerseits die Überlegung, dass mathematische Sätze als grammatische Regeln zu fassen, und daher auch nicht deskriptiven Gehaltes, sondern von präskriptivem Status sind. Andererseits die Einsicht in die Schwierigkeit, einem solchen Begriffsvorbild den gehörigen Sinn zuzuweisen, wenn dieser nicht aus der Übereinstimmung mit einer ihm entsprechenden Tatsache resultieren kann. Den Blick auf das genuin Rechnerische in der Mathematik zu wenden, d. h. das Absehen von einzelnen Sätzen zu Gunsten der Operationen, darin jene gewisse Funktionen einnehmen: dieser Schwenk der Optik macht es nachvollziehbar, wie wir von etwas, das eigentlich nur ein Bild (Vorbild) darstellt, dennoch überzeugt werden können. Wenn wir das mathematisch Eigentümliche nicht in einem einzelnen Satz verorten wollen, uns vielmehr auf dessen Rollen im mathematischen Beziehungsgeflecht einlassen, dann schwindet auch die Schwierigkeit, wie etwas uns seine Annahme nahe legen kann, ohne doch etwas auszusagen. Verharrt man hingegen auf dem Standpunkt, dass mathematische Sätze von einer logischen Sub- (Empirismus) oder Superwelt (Platonismus) handelnde Tautologien sind, dann kann der uns von jener Wahrheit überzeugende Beweis keine besondere Wichtigkeit haben, da ja das genuin Mathematische ohnehin ganz im Satze selbst zur Aussage gelangt. Im Zuge des Beweisens gesetzte Definitionen sind für die zuletzt Genannten folglich bloße Hilfsmittel der Darstellung ursprünglich mathematischer Wahrheiten; während nach Wittgensteins Betrachtungsart gerade die durch die Operationen des Definierens vollzogenen Darstellungswechsel das eigentümlich Mathematische ausmachen, denen besondere Beachtung zu schenken daher geboten ist. Die zu Beginn dieser Arbeit angesprochene Kritik an der quasiempirischen Fassung mathematischer Sätze gelangt also immer mehr dahin, die Mathematik gar nicht erst als Sammlung wahrer Sätze, sondern als ein Gemisch von Beweistechniken, operativen Verfahren oder zeichengeometrischen Transformationen verstehen zu wollen. An die Stelle des Satzes tritt gleichsam die Tat.

Schwierigkeiten ergeben sich für diese Perspektive allerdings spätestens dort, wo sie nicht in der Lage ist, gewisse in der Mathematik geltend gemachte Identitäten zu erklären: was v. a. dann der Fall ist, wenn zwei Sätze als synonym behandelt werden, obgleich der eine im Beweissystem des jeweils anderen Satzes nicht bewiesen ist. Als Beispiel erörtert Wittgenstein in diesem Zusammenhang den von Thoralf Skolem erbrachten Beweis für das Kommutative Gesetz. Dieses Gesetz wird beim Addieren (68+57 = 57+68) und Multiplizieren (2×3 = 3×2) im Dezimalsystem als gültig vorausgesetzt, obwohl der Nachweis in Termen des primitiven Kalküls erbracht worden ist.[*] Wir haben hier also einen Fall, wo die Gültigkeit eines mathematischen Zusammenhangs für einen Kalkül anerkannt ist, in dem er gar nicht bewiesen wurde.

> Ist nicht folgendes ein *starker* Einwand gegen mich: Niemand wird sich die Mühe nehmen, das Kommutative Gesetz für das Rechnen im Dezimalsystem zu beweisen, wenn es für das Strichsystem bewiesen ist. Man wird vielmehr auf diesen Beweis hin sagen: es *müsse* nun auch fürs Dezimalsystem gelten – und käme dort etwas anderes heraus, so müsse man sich verrechnet haben. Daraus folgt: Man wird in diesem Falle dem Resultat einer Multiplikation im Dezimalsystem weniger trauen als einem Induktionsbeweis im Strichsystem. (115r)

Es ist bezeichnend, dass Wittgenstein gerade diesem Fall, der von seiner eigenen Auffassungsweise her zunächst nicht begreifbar zu sein scheint, besondere Aufmerksamkeit schenkt. Er nimmt ihn sogar zum Anlass, seine Position von Neuem in Frage zu stellen, wenn er fortfährt:

> Und damit hängt diese Frage zusammen: Sind es nur *so uninteressante* Fälle, wie z.B. lange Sätze im Dezimalsystem, in denen die ‚kürzere' Rechnungsweise mehr als eine ganz triviale Transformation der ‚langen' ist?
> Kann man nicht sagen, daß alle *interessanten* Sätze über die Kardinalzahlen (und daher alle Sätze über die Zahlen) im Strichsystem überzeugend bewiesen werden können und daher jedes andere System nur das Interesse der *Kürze* hat?! (115v)

Die Tatsache, dass wir ein Gesetz in einem Kalkül als bewiesen anerkennen, obwohl der Beweis in einem anderen geführt worden war, scheint ein deutliches Kennzeichen dafür abgeben zu können, dass die beiden Beweissysteme einander entsprechen und daher dem einen nur der Vorzug der kürzeren Schreibweise eingeräumt zu werden braucht. Zu denken gibt hier aller-

---

[*] Skolem, Thoralf: *Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich* (1924).

Der Skolemsche Beweis arbeitet mit freien Variablen, die durch ihren jeweiligen Vorgänger rekursiv bestimmt sind. Anhand eines speziellen Falles zeigt man zunächst, dass die Rechnung zum gleichen Resultat gelangt, auch wenn Multiplikator und Multiplikand, bzw. die Summanden, miteinander vertauscht werden. Da der Einzelfall beliebig gewählt werden kann, wertet man dies als allgemeinen Nachweis für die Gültigkeit des in freien Variablen abgefassten Gesetzes des Kommutativität. Es ist dies ein typisches Beispiel eines Beweises durch vollständige Induktion.

Obwohl er in vielerlei Hinsicht deren Programm fortführt, verzichtet Skolems auf den ungebundenen Gebrauch der Begriffe „alle" ($\forall x\ \varphi(x)$) und „einige" ($\exists x\ \varphi(x)$), mit denen Russell und Whitehead über Funktionen unbestimmten Gegenstandsbereiches quantifizieren zu können glauben. Hier findet sich ein entscheidender Grund, weshalb sich Wittgenstein immer wieder gerade auf Skolems rekursive Beweismethoden bezieht. Ausgehend von Wittgensteins Kritik an der Auffassung der reellen Zahlen als Gesamtheiten, stellt M. Marion in seinem Aufsatz *Wittgenstein and Finitism* (1995) pointiert dar, was Skolems Arbeit für Wittgenstein so interessant macht. (Marion 1995, v. a. S. 151–156.)

dings, dass die algebraischen Grundgesetze schon in Gebrauch waren, noch ehe überhaupt der Versuch unternommen wurde, sie zu beweisen. Von daher liegt es nahe zu fragen, wie es kommt, dass uns die Skolemschen Induktionsbeweise des Assoziativen, Distributiven oder Kommutativen Gesetzes (die, grob gesagt, mit Strichen arbeiten) allgemein von der Wahrheit dieser Gesetze auch im Dezimalsystem überzeugen?

> Wäre – könnte man sagen – diese Überzeugung, was sie ist, wenn nicht beim Rechnen (etwa im Strichsystem) tatsächlich normalerweise dies Gesetz, bestätigt würde? – Nun, man kann sagen: der Induktionsbeweis [d. Distr. Ges.] überzeugt uns davon, daß wir zu sagen haben $a+(b+c) = (a+b)+c$ und kommt das im besondern Fall nicht heraus, so haben wir einen Fehler anzunehmen. Wohl, aber das wäre also unter Umständen eine sehr unpraktische Regel und eine, die anzunehmen kein Grund vorhanden wäre. (116v)

Der Induktionsbeweis führt zwar ein allgemeines Bild vor Augen, das uns die Annahme eines Gesetzes nahe legt. Für seine Annahme bestünde jedoch kein Grund, würde das Gesetz nicht im je einzelnen Rechenfall bestätigt (sei dies nun im Strich- oder im Dezimalkalkül). Selbst wenn wir von der Konstruktion eines arithmetischen Faktums sprechen, ist das somit über die einzelnen Schritte des Induktionsbeweises vermittelt. Im Strichsystem fallen diese Schritte aber nicht so aus wie sie im Dezimalsystem ausschauen müssten. Daher beruht die Annahme des im Strichsystem geführten Beweises auf Prinzipien, die letzten Endes die Anwendung dieses Gesetzes auch nur für das (überschaubare) Rechnen mit Strichen verbürgen. Wenn wir nun das Distributive Gesetz für das Rechnen mit Dezimalzahlen gelten machen, so kann demnach unsere Sicherheit in der Anwendung dieses Gesetzes nicht allein dem Beweis mit Strichen geschuldet sein. Entsprechend könnte man meinen, dass wir das Gesetz für das Dezimalsystem zwar aufgrund einer im Strichkalkül geführten Überlegung als *bewiesen* anerkennen; für diese Anerkennung aber kein Grund vorhanden wäre, hätten wir es nicht im Dezimalkalkül schon immer verwendet. – Wenn wir so sprechen, setzen wir allerdings voraus, dass bereits klar sei, was der Ausdruck ‚Beweis des Distributivität' im Dezimalsystem überhaupt besagt. Laut Wittgenstein ist aber der Sinn eines solchen Ausdrucks durch die entsprechende Beweiskonstruktion aufzuzeigen. Wie können wir daher, wenn das Bewiesene durch den zu ihm führenden Satz bestimmt ist, die Identität des Distributiven Gesetzes im Strich- und im Dezimalsystem gewährleisten: nachdem im Dezimalsystem eine solche Konstruktion gar nicht existiert und folglich auch unklar bleibt, was genau der Ausdruck nun besagen soll? Wir müssen also weitere Kriterien haben, die uns dieser Identität versichern und aufgrund derer wir den Beweis der Distributivität für Dezimalzahlen gelten lassen. Jedenfalls scheint das tatsächliche Vorgehen der Mathematiker – die den im einen Beweissystem konstruierten Satz auch im anderen als wahr voraussetzen – gegen Wittgensteins These zu sprechen, wonach der Sinn eines mathematischen Satzes von dem zu ihm führenden Beweis abhängig sei. Diese Schwierigkeit bringt Felix Mühlhölzer in seinem Kommentarband eindrücklich auf den Punkt, wenn er schreibt: „daß W. zwar einerseits die starke Neigung hat, den Sinn eines mathematischen Satzes als durch dessen Beweis bestimmt anzusehen, zugleich jedoch anerkennen muß, dadurch mit unserer mathematischen Praxis, deren Respektabilität außer Frage steht, in Widerstreit zu treten." (Mühlhölzer 2010, S. 391)

Mit dem Wechsel zum letzten Teil dieser Arbeit, der mit dem Übergang zu Manuskript 117 (das die Bemerkungen aus MS 122 ab S. 148 fortsetzt) einhergeht, wird diese Problematik nicht weggeschoben, sondern es wird noch deutlicher auf die Schwierigkeiten der geometrischen Auffassung des Beweises eingegangen. Zunächst wird die bereits zuvor kurz angedeutete Kritik an jener Idee vertieft, derzufolge ein konstruktiver Beweis durch denjenigen ersetzt werden könne, der die Beweisbarkeit von jenem beweist. Der diese Kritik motivierende Gedanke ist, dass die Anwendung eines mathematischen Satzes durch den zu ihm führenden Beweis vorbereitet werde: mithin der Beweisbarkeitsbeweis etwas auslässt, das im konstruktiven Beweis deutlich zum Ausdruck kommt – nämlich das *Wie* des Ergebens. Allerdings problematisiert Wittgenstein diesen Gedanken, wonach der jeweilige Beweis zugleich mit dem Bewiesenen das Wie seines Ergebens behaupte, zuletzt wieder dahingehend, dass man durch ihn darauf verfallen könne, den Beweis als Experiment misszuverstehen. Die geometrische Betrachtungsweise richtet das Augenmerk schließlich auf die in Raum und Zeit sich vollziehende Transformationstätigkeit und steht daher in der Gefahr den Status des Beweises, wie wir ihn durch unseren paradigmatischen Gebrauch des Bewiesenen geltend machen, zu verkennen. Ich deute die eingehenden Überlegungen Wittgensteins zum Unterschied von Beweis und Experiment daher als Versuch, der geometrischen Auffassung gewisse Schranken zu ziehen, zugleich aber auch die durch jene Betrachtungsweise gewonnene Einsicht (dass die Anwendbarkeit des bewiesenen Satzes in Zusammenhang steht mit der Weise, wie er sich im Beweis ergab) zu wahren. Die Pointe wird schlicht sein, dass es zwei unterschiedliche Sprachspiele darstellt, wenn wir einmal fragen, welche Zeichenstrukturen die meisten Menschen zu überzeugen vermögen, und ein andermal die Frage stellen, was als Paradigma für welches Vorgehen dient. Wer beides nicht auseinanderhält, vermengt eine anthropologische Tatsache menschlichen Geneigtseins mit dem mathematischen Fakt einer sich im Kalkül ergebenden Wahrheit.

> Sowenig, eine Handlung ‚gut‘ nennen und danach handeln und urteilen, heißt, sie *nützlich* nennen – obwohl oft das offenbar Nützliche gut genannt wird und was wir gutheißen als irgendwie nützlich dargestellt wird – sowenig heißt eine Rechnung *annehmen* (sie für eine *richtige* Rechnung erklären): sie für eine *nützliche* Rechnung erklären. Obwohl *enger* Zusammenhang besteht zwischen dem Finden der Nützlichkeit oder Nutzlosigkeit einer Rechnung und dem Annehmen oder Ablehnen des Kalküls. Aber die beiden sind verschiedene anthropologische Erscheinungen, so wie das Gutheißen und das als nützlich Befinden von Handlungen. (MS 117, 267)

Die geometrische Betrachtungsweise reißt den mathematischen Satz aus seiner Vereinzelung, indem der Betrachter in größere Entfernung zu ihm tritt und ihn so als Teil eines feingesponnenen Geflechts an Beweisstrukturen wahrnimmt. Mit dem Blick auf ganze Ausschnitte innermathematischer Beweisbeziehungen rückt jedoch etwas in den Hintergrund, das für jenen nicht zu übersehen war, der nur vor dem einzelnen mathematischen Satze stand. Nämlich, dessen „Selbstherrlichkeit“. (Vgl. MS 124, 13) – Wer den Beweis eines Satzes studiert, fragt danach, wie wir zu seiner Annahme bewegt werden; welche Schritte uns zu ihm führen. Wer den Satz aber angenommen hat, den kümmert diese Frage nicht weiter: er erkennt in ihm einen Standard richtigen Vorgehens, Schließens und Urteilens. Beides ist nicht dasselbe, weshalb nicht *notwendig* ein direkter Zusammenhang zwischen dem Gebrauch eines Satzes als einer grammatischen Regel und der Anerkennung eines Beweises als des zu ihr führenden Wegs zu bestehen braucht. Es handelt sich vielmehr um zwei verschieden Sprachspiele, die je für sich unter Beschau zu nehmen sind; wobei man einmal das anthropologische Phänomen der Anerkennung einzelner Beweisschritte zum Gegenstand des Interesses hat, das andere Mal dasjenige, dass Menschen gewissen Regeln gemäß urteilen, untersuchen und handeln. Freilich sind Kohäsionen zwischen Mechaniken der Begriffsbildung und dem Feld ihres Gebrauchs nicht von der Hand zu weisen. Wenn aber Wittgenstein gegen die logizistische Grundlegung der Mathematik vom geometrischen Betrachtungsstandpunkt aus spricht, steht er in der Gefahr die beiden Momente zu sehr in eins fließen zu lassen. Ich denke, die anfänglich so oft erhobenen Selbsteinwürfe und Dogmatismusbezichtigungen haben hierin ihren Ursprung: eine vor allem auf die Genese der Begriffsbildung eingestellte Perspektive übersieht leicht, dass der Übergang von den Beweismechanismen auf die Weise des Gebrauchs der dadurch bewiesenen Sätze nicht notwendig der Logik ebenjener Mechanismen folgen muss. Wir können Sätze auch auf eine Art gebrauchen, in der sie sich mit ihren innermathematischen Anwendungen (d. h. ihren Beweisen) zwar überschneiden, nicht aber unbedingt deckungsgleich sind. In anderen Worten: wir ziehen gewisse, in einem bestimmten Kalkül bewiesene Sätze zuweilen auch für Anwendungen heran, die in jenem Kalkül gar nicht vorbereitet waren. (Ein gutes Beispiel geben die angesprochenen Beweise der algebraischen Grundgesetze ab.) Das bedeutet nicht, dass es belanglos wäre sich für den oder die Beweis/e eines Satzes zu interessieren; es heißt aber, dass die Untersuchung des Beweiskonstrukts nicht automatisch Aufschluss über *alle möglichen* Fälle der Anwendung des dadurch geschaffenen Begriffes geben muss. Der Begriffsgebrauch folgt nicht immer und in jedem Fall der Logik seiner innerbegrifflichen (mathematischen) Genese. Das Regelfolgeproblem stellt sich also auch dort, wo wir nach der Kohärenz zwischen dem Beweis und der Anwendung des durch ihn bewiesenen Satzes fragen.

In den noch folgenden Kapiteln möchte ich Wittgensteins Weg zu dem eben skizzierten Gedanken nachzeichnen – der, wie so oft, nicht in einer Linie verläuft, sondern immer wieder Umwege, Kehrtwendungen und Kreise beschreibt. Aus Gründen des bereits fortgeschrittenen Umfangs der vorliegenden Arbeit werde ich allerdings nicht mehr in derselben Nähe zum Text bleiben wie ich das in den vorangegangen Abschnitten mit dem Manuskript 122 gehandhabt habe. Die am 3. Februar 1940 auf Seite 148 von Manuskript 117 fortgesetzte Untersuchung der von uns bereits dargestellten Probleme hält etwa bis Seite 222 an. Ab diesem Zeitpunkt (2. März) beginnt Wittgenstein eine intensive Auseinandersetzung mit sich innerhalb von Kalkülen ergebenden Widersprüchen sowie der von Mathematikern oft erhobenen Forderung nach Beweisen der Widerspruchsfreiheit. Auch hier kreisen die Gedanken stets aufs Neue um die Frage, wie die Beziehung zwischen den Bewegungen in einem Kalkül und der Anwendung der dabei erlangten Sätze zu denken sei. Obgleich ich der Ansicht bin, dass die zuletztgenannten Betrachtungen (MS 117, 222–270) in einem nicht zu vernachlässigenden Zusammenhang mit der in dieser Arbeit dargestellten Kritik an Russells und Whiteheads Begründungsunternehmen stehen – insbesondere was Anspruch und Reichweite derselben betrifft –, werde ich (unter Ausnahme des Eingangszitates) auf jenen letzten Teil von MS 117 nicht mehr eingehen. Der Grund ist nicht allein der schon erreichte Umfang, sondern auch meine Ansicht, dass die bisherigen Überlegungen (mit Seite 222) insoweit einen guten Abschluss erhalten, als Wittgenstein verdeutlicht, dass die geometrische Betrachtungsart ein anthropologisches Phänomen zum Gegenstand hat. Die Tatsache, dass Menschen gemeinhin darin übereinstimmen was als *passender* oder *richtiger* Transformationsübergang gilt, kann daher zwar Aufschluss über allgemeine anthropologische Voraussetzungen einer Wissenschaft wie der Mathematik geben. Da wir jedoch im Unterricht auch auf gewisse solcher Inklinationen hin *aufgezogen* werden, von denen ausgehend wir dann neue Begriffsverbindungen herstellen, ist nicht auszuschließen, dass wir dabei manchmal überkommenen Neigungen nachgehen, die keineswegs einer geometrischen, d. h., einer auf übersichtlichen Zeichenstrukturen beruhenden Ordnung gehorchen. Eine Zurückweisung des logizistischen Begründungsprojekts *qua* Begründungsprojekt scheint nichtsdestoweniger angebracht, insofern die Gründe für die Annahme gewisser Transformationskriterien wohl nur in den seltensten Fällen *logischer* Natur sind; sie sich weit eher auf Erfahrungstatsachen, Brauchbarkeitserwägungen, Analogieschlüsse, aber eben auch geometrische Überschaubarkeit stützen. Ich denke also, dass die Kritik an Russell und Whitehead bis zuletzt aufrecht bleibt: dass aber zugleich viele Urteile, die sich ergeben, wenn man auf dem geometrischen Betrachtungsstandpunkt verharrt, als zu starr und einseitig ausgewiesen werden. Diese Konklusion ist gewissermaßen unbefriedigend, weil sie uns nicht *die eine richtige Perspektive* auf die Mathematik an die Hand gibt – vielmehr provozieren Brüche und Unebenheiten des Betrachtungsgegenstands immer wieder eine Adaption der Betrachtungsart. Wittgenstein war jedenfalls nicht zufrieden, wenn er am

Schluss derjenigen Überlegungen, die hier an ein Ende geführt werden sollen, in einem nachgerade apokalyptischen Ton schreibt:

> Der Ausdruck der philosophischen Konfusion: Wir wissen nicht, was wir darüber sagen sollen.
> Ich weiß nicht, welche Ordnung ich den Begriffen geben soll. Ich weiß etwa nicht ob ich den Beweis unter die Experimente, die Mathematik unter die Spiele, die Widersprüche unter die Verwirrungen rechnen soll. Ob ich sagen soll, zwischen mathematischen und experimentellen Wahrheiten bestehe ein Unterschied des Grades, ob ich sagen soll ein neuer Beweis gebe dem Satz einen neuen Sinn.
> Ich kenne mich in den menschlichen Tätigkeiten, den Techniken des Gebrauchs der Wörter, der mathematischen Sätze, der Beweise nicht aus. Wenn ich sie beschreiben soll, so kann ich sie in keinem Sinne übersehen.
> Es ist, wie wenn ich ein winziges Gesichtsfeld und ein schlechtes Gedächtnis hätte, und nun, durch hin und her blicken, mich auf einer *großen* Landkarte auszukennen lernen sollte.
> Man würde in so einem Falle fortwährend Zusammenhänge vergessen, verkennen, sie langwierig suchen, wo sie nicht sind. (MS 117, 220)

1 Das *Mehr* eines neuen Beweises

Im vierten Kapitel vorherigen Abschnitts fragten wir nach den Kriterien, die uns erlauben zwei unterschiedliche Beweise als Beweise desselben Satzes zu bezeichnen. Die Dringlichkeit für diese Frage erwächst daher, dass die geometrische Betrachtung jedem einzelnen mathematischen Beweis eine gewisse, ihn allein charakterisierende Eigentümlichkeit einräumt, und daher die bloße Tatsache, dass zwei Beweise mit demselben Satzzeichen abschließen, nicht als Beleg für zweimaligen Beweis *desselben* heranzuziehen erlaubt. Damit soll nicht generell verboten werden von unterschiedlichen Beweisen des Gleichen zu sprechen; es wird aber ein Gesichtspunkt betont, demzufolge ein Beweis nicht nur als Beweis des ihn abschließenden Satzes aufzufassen ist. Ein Beweis zeigt schließlich nicht nur den bewiesenen Satz, mit dem er endet, sondern auch den spezifischen Weg, der *uns* zu seiner Annahme führt. In einem beispielhaften Dialog konfrontiert Wittgenstein seine in Anführungszeichen sprechende Neigung mit der erwartbaren Reaktion des Gegenparts (mögliche Antwort des Logizisten), der die Selbstständigkeit einzelner Beweise problematisiert, indem er auf Beweise der Beweisbarkeit rekurriert.

> "Jeder Beweis zeigt nicht nur die Wahrheit des bewiesenen Satzes, sondern auch, daß er sich *so* beweisen läßt." – Aber dies letztere läßt sich ja auch anders beweisen. – „Ja aber der Beweis beweist es auf eine bestimmte Weise und beweist daher, daß es sich auf diese Weise demonstrieren läßt." – Aber auch *das* ließe sich durch einen andern Beweis zeigen. – „Ja aber eben nicht auf diese Weise." (MS 117, 154)

Wer den Beweis dieserart als eigenständiges „mathematisches Wesen" betrachtet, „das sich durch kein anderes ersetzen läßt", wird dahin geführt zu sagen, „daß jeder Beweis uns von etwas überzeugt, wovon nur er uns überzeugen kann." (155) Streng gedacht, wird der bewiesene Satz dann sogar überflüssig: weil ja der Beweis selbst als das zu gelten hätte, was eigentlich bewiesen wurde. Der mathematische Satz verlöre seine ganze Selbstständigkeit und jeder neue Beweis bedeutete für sich bereits ein neues Stück Mathematik, in dem Zusammenhänge auftreten, die vorher nicht bestanden. Obwohl die Folgerung zwingend scheint, kann dies aber nicht die ganze Wahrheit sein. Schließlich ist es für viele Beweissysteme gerade charakteristisch, dass darin verschiedene Beweise desselben Satzes vorkommen: mithin das Interesse nicht auf gewisse Beweisstrukturen, sondern auf die Beweisbarkeitstatsache des jeweiligen Satzes gerichtet ist. Auch gibt es häufig triviale Abweichungen zweier Beweise, die so unerheblich sind, dass niemand von wirklichen Unterschieden des Beweisgedankens sprechen wollen würde – obwohl in der Zeichenfolge womöglich ein nachvollziehbarer Unterschied besteht. Trotzdem kann der Gedanke, wonach ein neuer Beweis einen neuen Zusammenhang zwischen bereits bestehenden Sätzen aufzeigt, nicht einfach als unsinnig fallen gelassen werden. Was ist also jenes *Mehr*, von dem Wittgenstein meint, dass es nur im Beweis selbst zum Ausdruck gelange – und das durch einen Beweis der Beweisbarkeit nicht eingeholt zu werden vermag? Ist es etwas Mathematisches? Und wenn nicht: welche Wichtigkeit käme dem dann zu?

> Was *lernen* wir, wenn wir den neuen Beweis sehen – außer den Satz, den wir ohnehin schon kennen? Lernen wir etwas, was sich nicht in einem mathematischen Satz ausdrücken läßt?
> Wie, wenn ich sagte: „wir lernen den Satz *so* konstruieren“? Oder wir könnten sagen: „wir lernen, daß uns diese Konstruktion des Satzes *überzeugt*“ – – aber ist das etwas Mathematisches? (156)

Wenn wir die Beweisbarkeit eines mathematischen Satzes als Kriterium seiner Wahrheit heranziehen, dann zeigt uns die Weise seiner Konstruktion (seines Ergebens) *wie* bzw. in *welchem Sinne* der Satz wahr ist. *Dass* er wahr ist, ist durch die Tatsache verbürgt, dass es einen Beweis gibt, an dessen Ende der Satz steht. In *welchem Sinne* er wahr ist, darüber kann uns jedoch ein Beweis, der bloß seine Beweisbarkeit beweist, nichts sagen; dazu braucht es die Kenntnis eines konstruktiven, ihn konstruierenden Beweises. Interesse hat die Frage nach dem Wie des Ergebens in jedem Fall für den, der zur Anwendung schreiten will. Der Beweis zeigt schließlich, in welchen Zusammenhängen der ihn beendende Satz als Paradigma gelten kann. Wenn daher Wittgenstein fragt, ob wir durch einen neuen Beweis eines bereits als wahr ausgewiesenen Satzes etwas Neues erfahren, so scheint die positive Antwort die zu sein, dass sich durch eine neue Beweiskonstruktion das Spektrum seiner Anwendung ändert bzw. erweitert. Wir lernen also durch den neuen Beweis eine andere oder zusätzliche Gebrauchsart des Satzes. Man könnte die Richtigkeit dieses Gedankens folgendermaßen zu rechtfertigen versuchen: Die Reproduktion eines Beweises kann als eine Anwendung des ihn abschließenden Satzes betrachtet werden: aufgrund einer vorhergehenden Bekanntschaft mit dem Beweis ist man der Maßstäbe versichert, mittels derer man den durch ihn bewiesenen Satz gerade so anzuwenden in der Lage ist, dass sich abermals das Beweisgebilde ergibt. Mit dieser Wendung wäre ein direkter Zusammenhang zwischen dem Beweis eines Satzes und seiner Anwendung belegt, indem die Konstruktion des Satzes selbst als eine seiner vorbildlichen Anwendungen gedacht wird. Selbst wenn ein Russellscher Beweis für eine längere Multiplikation anerkannt würde, wäre die im Dezimalsystem geführte Rechnung zumindest insoweit von bereicherndem Nutzen, als sie die Möglichkeit zeigt, jenen Satz auch auf unsere gewöhnlichen Multiplikationsfiguren anzuwenden. Diese spezifische, an die Dezimalnotation gebundene Anwendungsmöglichkeit ist ja im Russellschen Schema nicht niedergelegt.

> Inwiefern hängt die Anwendung eines mathematischen Satzes davon ab, was man als seinen Beweis gelten läßt und was nicht?
> Ich kann doch sagen: Wenn der Satz 137 × 373 = 46793 im gewöhnlichen Sinne wahr ist, *dann muß es eine Multiplikationsfigur geben*, an deren Enden die Seiten der Gleichung stehen. Und eine Multiplikationsfigur ist ein Muster, das gewissen Regeln genügt.
> Ich will sagen: Erkennte ich die Multiplikationsfigur nicht als *einen* Beweis des Satzes an, so fiele damit auch die Anwendung des Satzes auf Multiplikationsfiguren fort.
> Der Begriff der ‚Anwendung' ist aber hier noch einigermaßen unklar. Ich meinte die Anwendung des unzeitlichen Beweises auf den zeitlichen Beweisvorgang. (158)

Dieses Argument für die Eigenständigkeit mathematischer Rechnungen hebt die Unterschiede vor allem hinsichtlich ihrer innermathematischen, kalkulatorischen Anwendungen hervor: wer einen Kalkül beherrscht, der vermag darin Rechnungen durchzuführen, die ihn auf eine Weise zu Sätzen führen, wie das ein von ihm verschiedener Kalkül nicht tut. (Was nicht gerade überraschen sollte: denn war nicht das ein hauptsächlicher Grund, weshalb wir den einen Kalkül vom anderen unterschieden?) Wie verhält es sich aber mit Bezug auf außermathematische Anwendungen: ist hier die Weise, wie der Satz erhalten wurde, von ebensolcher Wichtigkeit, wie sie es im Falle seines innermathematischen Gebrauches war? „Welche Rolle spielt der Beweisweg zu einer grammatischen Regel *in der Praxis* der Sprache?" (161) Hier fällt die Antwort tatsächlich etwas anders aus.

> Auf diesem Weg werde ich überzeugt – heißt nicht nur: *so* stellt man es an, um mich zu überzeugen – sondern: da liegt dasjenige, wovon ich überzeugt wurde. Der Beweis muß den Nutzen der Regel zeigen. Denn *dem* zuliebe nehme ich den Beweis ja an. (162)

Zuvor sagten wir, der Beweisgang zeige uns, in welcher Weise der bewiesene Satz *wahr* sei. Wahrheit war bestimmt durch die Ableitbarkeit oder Beweisbarkeit innerhalb eines Kalküls. Hier aber heißt es nun, der Beweisgang müsse uns den *Nutzen* der Regel zeigen; den praktischen Grund, weshalb wir den Beweis annehmen. Ist demnach Brauchbarkeit und Wahrheit gleichzusetzen, sobald wir von mathematischen Sätzen sprechen? Obgleich manche Bemerkungen Wittgensteins eine solche Deutung nahezulegen scheinen, glaube ich, dass es hier wichtig ist, die unterschiedlichen Ebenen zu gewahren, auf denen wir uns bewegen. Wenn wir von der *Nützlichkeit* einer Regel sprechen, betrachten wir den bewiesenen Satz im Verhältnis zu möglichen seiner Anwendungen; wir fragen gleichsam: wozu ist diese Regel zu gebrauchen, in welchen Zusammenhängen ziehen wir sie heran? Die *Wahrheit* des mathematischen Satzes scheint hingegen mehr auf die bloße Tatsache der Beweis*barkeit* bezogen: weniger auf das *Wie*, als auf das *Dass* des Beweisens. Da es aber kein *Dass* ohne ein wie immer geartetes *Wie* gibt, kann man sagen, dass jeder wahre (d. h. bewiesene) mathematische Satz dies immer schon aufgrund eines Beweisganges ist, der uns einen Grund an die Hand gibt, den ihn beschließenden Satz als Regel zu gebrauchen. Wir wären nie dahin gelangt, mathematische Sätze als wahr zu bezeichnen, hätten uns die Beweise nicht davon überzeugt, dass die dabei vorgegangenen Wege nützlich sind, in der Praxis ihre Anwendung finden. Diese Überlegung darf jedoch nicht darüber hinwegtäuschen, dass, ist ein Kalkül allererst einmal etabliert, mittels der daraus extrahierten Regeln auch Sätze gebildet werden können, deren Wahrheit einzig noch davon abhängt, dass sie unter Anwendung jener Regeln sich konstruieren lassen; wir würden wohl auch in solchen Fällen von bewiesenen Sätzen sprechen, obwohl noch völlig offen ist, ob sie auch als grammatische Regeln zu gebrauchen sind. Betreibt man Mathematik aber nicht aus bloßer Lust am Zeichengenerieren, sondern mit Blick auf ihre Rolle in der sprachlichen Praxis, dann liegt es nicht fern, nur jenen Sätze den Status des Mathematischen zuzuerkennen, die neben der Konstruierbarkeit innerhalb des Kalküls auch ihren praktischen Nutzen haben, d. h., tatsächlich als grammatische Regel fungieren. So gesehen, wäre der mathematische Satz dies immer insoweit, als er eine nützliche Regel der sprachlichen Praxis ist. Und unter diesem Gesichtspunkt ist dann auch der Beweis daraufhin anzuschauen, was einem die ihn abschließende Regel eigentlich bringen soll; welchen Grund man also hat, ihm überhaupt Aufmerksamkeit zu schenken. Deshalb die Frage, ob nicht ein Zusammenhang bestehen muss zwischen dem Beweisgang und der Art der Anwendung des so erreichten Satzes. Der Beweis scheint uns nämlich nur dann zu der Annahme eines Satzes als einer grammatischen Regel bewegen können, wenn er uns eine Synthese vorführt, von der wir sagen, sie hätte einen gewissen Witz, eine Pointe. Er muss uns gleichsam vor Augen führen, welchen Zweck es hat, die Regel anzunehmen. Konfrontiert man uns mit einem Beweis eines bereits bewiesenen Satzes, werden wir daher nur dann sagen, er lehre uns etwas Neues, wenn der Beweis eine neue Pointe setzt, einen neuen Grund für die Annahme der Regel stiftet und damit das Feld ihres Gebrauchs erweitert.

> „Der neue Beweis stellt die bewiesene Regel in einen neuen Zusammenhang. Er gibt *neue* Gründe für die Anerkennung dieser Regel.
> *Aber hier ist eine Unklarheit.* – Der neue Beweis zeigt die Regel im Zusammenhang mit andern Regeln, die ihr stehen (wie man sagt, ein Hut ‚stehe' jemand). Aber, daß sie ihr stehen – will ich sagen – ist doch kein mathematisches Faktum. Der neue Beweis zeigt den Satz in einer neuen Umgebung, die zu ihm paßt.“ (164)

Mit seiner Metaphorik des Beweises als eines Wegs, der uns in bestimmter Weise auf einen mathematischen Satz zuführt und diesen dadurch innerhalb eines größeren Beweissystems verortet, möchte Wittgenstein seine Neigung – wonach der Sinn eines mathematischen Satzes von seinem Beweis abhängt – mit der Tatsache in Einklang bringen, dass den einzelnen Sätzen in der mathematischen Praxis weitestgehende Autonomie eingeräumt wird, sobald sie einmal bewiesen sind. (Dieser Synthetisierungsgedanke findet sich in Mühlhölzer 2010, S. 391.) Der mathematische Satz wäre als ein zwar eigenständiger Ort zu denken, der aber dennoch nur über jene Beweiswege zu erreichen (sprich mit anderen Sätzen verbunden) wäre, deren Logik durch den Kalkül oder das Beweissystem bestimmt ist. Wie schon weiter oben fragt sich Wittgenstein allerdings, ob es einen *mathematischen* Unterschied bedeuten würde, lernte jemand einen neuen Weg zu einer mathematischen Ortschaft kennen, zu der er bislang auf andere Weise hingelangte. Ist es eine Einsicht mathematischer Art, wenn man einen bereits anerkannten Satz der Mathematik in einen anderen Zusammenhang gestellt sieht, in welchem er ebenfalls bewiesen erscheint? Wittgenstein scheint dies einerseits sagen zu wollen, –

dort nämlich, wo der Satz Teil einer Beweisüberlegung wird, durch die er eine neue Anwendungsmöglichkeit erhält, man aber trotzdem vom *selben* Satze sprechen möchte. Anderseits wirkt es oft so, als beträfe ein neuer Beweis nur die Tatsache, dass Menschen auf verschiedenen Wegen, vermittels disparater Überlegungen, zur Annahme *einer* Regel geführt werden können. Man erfährt dann durch einen zusätzlichen Beweis eines bereits anerkannten Satzes nichts von mathematischer, sondern bloß psychologischer oder behavioristischer Relevanz („auch *das* überzeugt uns von *dem*"); wenn auch der Beweis für sich genommen ein mathematisches Gebilde darstellt. – Die Ambivalenz ist hier, dass Wittgenstein die Mathematik einerseits nicht als Erfahrungswissenschaft deuten möchte, die von den menschlichen Inklinationen im Umgang mit Zeichen handelt, er aber zugleich der Tatsache gerecht werden möchte, dass wir Menschen in unterschiedlicher Weise von einem mathematischen Faktum überzeugt sein können. Die psychologischen Voraussetzungsbedingungen dafür, dass ein Satz als bewiesen erscheint, sind auch für Wittgenstein keine mathematischen Tatsachen; wohl aber ist er der Ansicht, dass wir zu verschiedenen mathematischen Einsichten gelangen, wenn uns zwei disparate Zeichensysteme zu dem gleichen Satzzeichen führen. Um die Frage beantworten zu können, inwiefern wir durch einen neuen Beweis etwas lernen, das von mathematischer (und nicht bloß psychologischer) Relevanz ist und das in den anderen Beweisen desselben Satzes noch nicht vorhanden war, geht Wittgenstein den Umweg über die Anwendungsmöglichkeit mathematischer Sätze. Ein neuer Beweis zeigt demnach nicht nur, dass wir auch auf jene Weise von demselben, hinsichtlich seiner Beweisbarkeits*tatsache* bereits anderweitig verbürgten Satz überzeugt zu werden vermögen; sondern er stiftet – sofern die neue Beweisüberlegung tatsächlich von der/n vorherigen abweicht – zudem ein neues Paradigma seines Gebrauchs. Die psychologische Tatsache, die zum Ausdruck kommt, wenn wir einen neuen Beweis führen oder durchgehen („auch *das* überzeugt uns von *dem*"), geht quasi einher mit einer mathematischen: die Konstruktion erweitert oder adaptiert den Anwendungsraum des bewiesenen Satzes.

> Was hat der gefunden, der eine neue Überlegung findet, die mich dorthin führt? Was ist der Nutzen einer neuen Überlegung, wenn ich schon an ihrem Ziel bin?
> […]
> Ich möchte etwas sagen, wie: daß die neue Überlegung eine neue Anwendungsmöglichkeit zeigt. Dort nämlich wo diese *neue* Überlegung interessant ist. (Denn wenn ich in einer Überlegung ein nur ‚a' durch ein ‚b' ersetze, so nennen wir was entsteht nicht einmal eine neue Überlegung.) (168)

Beim Beschreiben von Begriffsveränderungen stehen einem stets zwei Wege offen: entweder man sagt, der Anwendungsspielraum des in Frage stehenden Begriffes habe sich erweitert; oder aber man sagt, durch die Weitung des Anwendungsspielraums sei der Begriff selber ein anderer geworden. Wittgenstein neigt zum Zweiten, da ihn das Nachdenken über das Befolgen einer Regel zu der Ansicht geführt hat, dass jenseits unseres tatsächlichen Gebrauchs ohnehin keine Kriterien zu finden sind, die einen Begriff spezifizieren. Dieser Einschlag geht einher mit dem Anspruch, Unterschiede und Brüche der im Gebrauch befindlichen Begriffe hervorzuheben, wie sie im Gegenteil schwerer zu erkennen wären, hielte man Begriffe für fixe, unwandelbare Raster, die nur in ihren Applikationen einer gewissen Lebendigkeit und Umbildung unterworfen sind. Nun geht Wittgenstein nicht so weit, die Sinnhaftigkeit der

Rede von Begriffsveränderungen ganz generell in Frage zu stellen: wohin man zweifelsohne gelangen könnte, wenn man die Identität eines Begriffes allein durch die von ihm gemachten Applikationen definiert denkt. Er will uns aber verdeutlichen, dass jede neue, zu einem bestehenden Begriffsgebrauch hinzukommende Anwendung so aufgefasst werden *könnte*, dass dadurch ein neuer Begriff entsteht. In eben dieser Weise kann auch der Beweis eines bereits anderweitig bewiesenen Satzes, sofern die vorgeführte Überlegung eine neue Anwendungsmöglichkeit offenbart, als Schöpfung eines neuen Begriffes betrachtet werden. Will man aber an der Identität des bewiesenen Satzes festhalten (weil sich die beiden Beweise immerhin im selben Satzzeichen treffen), so soll zumindest nicht vergessen werden, dass durch den neuen Beweis sein Einsatzgebiet ein größeres oder spezielleres geworden ist. Die neue Beweisüberlegung fügt unserem Spiel mit jenem Satz ein weiteres Prinzip des ordnungsgemäßen Umgangs hinzu. „‚Eine Überlegung' – könnte man sagen – ‚zeigt Prinzipien des Überlegens.'" (168) — Das „Mehr" eines neuen Beweises (d. h. dasjenige, wovon uns der Beweis nur zu überzeugen vermag, insoweit er Teil einer bestimmten Zeichengeometrie ist) wäre demnach ein mathematisches „Mehr": er adaptiert, erweitert oder beschränkt unseren Umgang mit Sätzen, selbst wenn diese schon auf andere Art bewiesen sind. Der Nutzen eines neuen Beweisgedankens ist dann, dass er zu bereits bestehenden Satzgebrauchsparadigmen ein weiteres hinzusetzt und damit den Satzsinn spezifiziert.

2 Die Wissenschaft der konditionierten Rechenreflexe

Wie ist aber jetzt das Verhältnis zwischen der Beweiskonstruktion und den möglichen Anwendungen des bewiesenen Satzes genau zu denken? In welchem Abhängigkeitsbezug steht der Gebrauch eines mathematischen Satzes zu der Weise, auf die man ihn erhielt? Wir sagten früher, der Beweis würde dem mathematischen Satz nicht nur seinen Platz im Regelgeflecht anweisen, sondern uns zugleich von der Nützlichkeit jener Regel überzeugen. Wir nehmen die Regel an, weil der Beweis uns eindrücklich vor Augen führt, dass die in ihm vollzogene, und mittels des abschließenden Satzes zuletzt auf den Punkt gebrachte Begriffsadaption brauchbar ist. Wie tut er das aber? Auf welche Weise kann man aus einer Zeichnung die Nützlichkeit der dort niedergelegten Transformationen entnehmen? Wie antizipiert ein Bild, sozusagen, was wir mit ihm (oder einem Teil davon) anfangen sollen?

Wenn der Beweis als Transformation von Zeichen begriffen wird, die uns dahin führen soll, den Satz, mit dem sie abschließt, als Darstellungsregel anzunehmen – dann scheint doch der Beweis als Ganzes gerade nicht als ein in sich geschlossenes Bild betrachtet zu werden. Sondern man legt das Augenmerk auf die einzelnen, von uns je aufs Neue anerkannten Schritte: man geht bei dieser Betrachtungsart also gleichsam in den Beweis hinein, lässt sich von ihm führen und notiert, was dabei herauskommt. In den Fokus rückt damit die Tatsache, dass wir Menschen im Verfolg eines Beweises die Neigung teilen, *diese* und *jene* Schritte zu machen, vorausgegangene Überleitungen *so* weiterzuführen, aus einem Beweisgedanken gewisse Konklusionen zu ziehen oder zunächst vorausgesetzte Prämissen wieder zu verwerfen. Das bedeutet, wenn man den Beweis daraufhin befragt, wie er uns von dem ihn abschließenden Satz zu überzeugen vermag, dann sieht man ihn nicht als jenes paradigmatische Bild an, das einen spezifischen Begriff darstellt. Vielmehr macht ihn diese Frage zu einem Konstrukt, in dem zum Ausdruck kommt, wie wir Menschen gemeinhin auf Zeichen reagieren. Der Beweis wird also nicht als unwandelbares Begriffsvorbild genommen, sondern als ein sich in der Zeit konstituierendes Gebilde, das entsteht, wenn man Menschen, die im Mathematikunterricht auf die Beherrschung einer bestimmten Technik der Zeichenbildung getrimmt wurden, von gegebenen Axiomen weg ablaufen lässt. Der Beweisvorgang wird unter dem Gesichtspunkt betrachtet, dass die Glieder einer im Rechnen bewanderten Gesellschaft übereinstimmend gewisse Übergänge für passend, bzw. den Regeln gemäß befinden. Mathematische Sätze sind dann gleichsam Prophezeiungen, „indem sie voraussagen, was Glieder einer Gesellschaft, die diese Technik gelernt haben, in Übereinstimmung mit den übrigen Gliedern der Gesellschaft herausbringen werden.“ (MS 117, 173)

> “25×25=625“ hieße also, daß Menschen, wenn sie unsrer Meinung nach die Regeln des Multiplizierens befolgen, bei der Multiplikation 25×25 zum Resultat 625 kommen werden. – Daß dies eine richtige Vorhersage ist, ist zweifellos; und auch, daß das Wesen des Rechnens auf solche Vorhersagen gegründet ist. D.h., daß wir etwas nicht ‚eine Technik des Rechnens‘ nennen würden, wenn wir so eine Prophezeiung nicht mit Sicherheit machen könnten. Das heißt eigentlich: das Rechnen ist eine Technik. Und was wir gesagt haben, gehört zum Wesen einer Technik. (ebd.)

Unter dieser Perspektive erscheinen mathematische Sätze als Prophezeiungen, die das menschliche Reagieren auf Zeichen betreffen. Der mathematische Satz wäre dann insoweit von der Geometrie seines Beweises abhängig, als sich die durch ihn ermöglichten Prognosen nur auf jenen Zeichenraum beziehen können, in dem die Menschen von ihm auch überzeugt werden. Entscheidend ist in dem obigen Zitat jedoch der letzte Satz, der den Status dieser Bemerkung deklariert. Es handelt sich hier nicht um *die* Definition des Beweises, sondern um eine Anschauungsart, die das Rechnen als menschliche Gepflogenheit oder Technik betrachtet. Man sieht die Mathematik nicht unter dem Aspekt ihrer Normativität, sondern richtet den Blick auf die Behaviorismen derjenigen, die rechnen, kalkulieren und beweisen. So werden die anthropologischen Voraussetzungen sichtbar, ohne die an eine Mathematik – so wie *wir* sie betreiben – nicht zu denken wäre. Wer das Rechnen dieserart als Technik begreift, ist dann in der Lage, gewisse naturgeschichtliche Voraussetzungen des Rechnens in den Blick zu bekommen, die man nicht sehen kann, wenn man zu nahe an den einzelnen mathematischen Sätzen steht und sich von ihrer Selbstevidenz blenden lässt. – Nun ist aber gerade diese, für *uns* bestehende, Selbstevidenz (die sich geltend macht, indem *wir* den Satz als unhinterfragtes Paradigma gebrauchen) das Charakteristikum, welches den Satz als mathematischen kennzeichnet. Die in Frage stehende Betrachtungsweise bekommt die empirischen Bedingungen des Rechnens also gerade nur insoweit zu fassen, als sie mathematische Sätze *nicht* als grammatische Regeln begreift (d. h. *gebraucht*). Erst wenn wir, aus der Mathematik gleichsam heraustretend, die Sätze ihrer Normativität entkleiden, bemerken wir die empirischen Regelmäßigkeiten, auf denen das Rechnen beruht. Von daher kommt es, dass eine philosophische Behandlung, die das Rechnen als eine Technik auffasst, in gewisser Weise immer an dem vorbeigreift, was die Mathematiker für das Wesentliche ihrer Profession halten. (Vgl. MS 163, 16r) Die Auffassung der Mathematik als ein „*buntes Gemisch* von Beweistechniken“

(MS 122, 86r) vermag zwar „ihre mannigfache Anwendbarkeit und ihre Wichtigkeit“ (ebd.) zu erklären; allerdings gelingt dies nur unter der Voraussetzung, dass man den Betrachter von jenem Zwang befreit, durch den der beweisende Mathematiker den normativen Status der Mathematik belegt.

Nun geht die Einforderung der Übersichtlichkeit des Beweisbildes auf eben diese Auffassung zurück; denn die Kritik an Russell und Whitehead beruft sich auf anthropologischen Voraussetzungen des Rechnens, wenn sie deren Zeichenketten primitiver Terme als zur Beweisführung untauglich erklärt. Im Rahmen dieser Kritik wird der Beweis folglich nicht als das anerkannte Begriffsvorbild genommen, wie es uns zur Beurteilung empirischer Zusammenhänge dient. Er ist im Gegenteil der, sich im zeitlichen Wandel befindliche, Gegenstand der Beobachtung und erscheint als ein Prozess, bei dem die Anwendung von Regeln auf festgesetzte Sätze ein bestimmtes, zuvor aber oft nicht bekanntes Resultat ergibt. Die Mathematik rückt dann wieder in die Nähe der empirischen Wissenschaften – als derjenigen Wissenschaft, bei der die gemeinsamen Reflexe jener Menschen, die im Zuge des Unterrichts auf ein gewisses Reagieren hin konditioniert worden sind, die Untersuchungsgegenstände bilden. In der folgenden Bemerkung stellt Wittgenstein zunächst jenen Bezug zur Kritik an den *PM* her, um dann auf die Schwierigkeit überzuleiten, mit der sich ein solcher Einwand konfrontiert sieht.

> Könnte man nicht sagen, was ich sagen wollte, sei gewesen: daß, wo im Rechnen das richtige Prophezeien aufhörte (auch wenn dies z.B. in den Rechnungen der *Logik* der Fall ist), das *Rechnen* selber sein Ende findet. (174)
>
> Gleite ich aber hier nicht in die Feststellung hinein, die Mathematik bestehe aus Voraussagen, Naturgesetzen, bezüglich unserer Ausübung einer (gewissen) eingelernten Technik?? (175)

Die Gefahr besteht darin, den mathematischen Satz als eine Hypothese betreffs des menschlichen Verhaltens im Umgange mit Zeichen zu begreifen, wie sie durch den Beweis als ihr Experiment zu verifizieren sind. Mathematische Sätze wären also Prophezeiungen, ihre Beweise die sie bestätigenden Experimente. Die Mathematik würde unter diesem Blickwinkel eine „Wissenschaft von den konditionierten Rechenreflexen“ (185) darstellen, eine Wissenschaft, die das Verhalten von auf ein gewisses Reagieren abgerichteten Menschen interessiert. Das durch den Beweis artikulierte Experiment wäre dann klarerweise keines mit Zeichen, sondern mit uns selbst, die wir sämtlich dieselbe Neigung haben, auf jene Zeichen auf gleiche Weise fortzufahren, oder aus ihnen dieselben Schlüsse zu ziehen. Die Rechnung zeigte quasi experimentell, „wie die Allgemeinheit der Menschen rechnen wird“: wo also der Treffpunkt liegt, zu dem wir alle eilen, wenn wir uns – sind wir erst gehörig aufgezogen – ablaufen lassen. — Nun ist nicht zu leugnen, dass wir zuweilen mit Spannung auf den Ausgang einer Rechnung warten. Aber sollen wir deshalb auch sagen, beim Beweisen experimentierten wir mit uns selbst? Ist nicht das Interesse des Beweises ein völlig anderes als das eines Experiments? Denn zwar sind wir auch beim Beweis zuweilen neugierig auf das Resultat; aber doch „nicht als auf das, was ich wohl sagen werde, sondern auf das, was ich sagen *soll*.“ (180)

> Wir lassen uns ablaufen und erhalten das Resultat der Rechnung. Aber nun – will ich sagen – interessiert uns nicht, daß wir etwa unter diesen und diesen Bedingungen – dies Resultat erzeugt haben – – uns interessiert das Bild des Ablaufs – aber nicht als das Resultat eines Experiments, sondern als ein *Weg*. (182)

Unser Interesse an einer Multiplikation nimmt sich schlicht nicht daher, dass die Allgemeinheit der Menschen so rechnen wird, wie das in der richtigen Rechnung zum Ausdruck kommt. Wir verfolgen einen Beweis gemeinhin nicht, um zu erfahren, wie Menschen auf Zeichen reagieren. („Wir sagen nicht: „also *so* gehen wir!“, sondern: „also *so* geht es!““, 182) Und doch ist klar, dass dieser Konsensus wesentlich zum Phänomen unseres Rechnens dazugehört; dass also in einer Rechentechnik Prophezeiungen möglich sein müssen, die sich auf unser übereinstimmendes Ablaufen stützen. Mit der Hinwendung des Interesses auf das Bild des Beweisgangs möchte Wittgenstein diese beiden ambivalenten Momente der Mathematik in den Griff bekommen: dass sie also einerseits gewissen anthropologischen Kontingenzen unterworfen ist, sie uns aber andererseits die unhinterfragten Paradigmen zur Verfügung stellt, mittels derer wir empirische Sachverhalte allererst beurteilen. Er läuft dabei allerdings Gefahr, etwas zu tun, was er anderen Philosophen oft zu Recht unterstellt: einen Unterschied in Eins fließen zu lassen, um eine geschmeidigere Erklärung der vielschichtigen Phänomene zu ermöglichen. Seine Neigung, den Sinn mathematischer Satzes durch den Beweis bestimmt zu denken, drängt ihn dazu, die Anerkennungsgründe eines mathematischen Satzes mit den Anwendungsmöglichkeiten zu identifizieren, die sein Beweis vor Augen führt. Die geometrische Betrachtungsweise steht somit vor dem Problem, einen direkten Zusammenhang zwischen dem Ablauf der Beweisschritte, die uns einen Satz als bewiesen anerkennen lassen, und der Weise, wie dieser Satz sodann als grammatische Regel zum Einsatz gelangt, annehmen zu müssen. Stellen wir jedoch fest, dass es sich dabei um zwei disparate anthropologische Phänomene handelt, indem der Beweis das eine Mal quasi als Experiment menschlicher Zustimmungsabläufe betrachtet wird, das andere Mal aber als ein Paradigma des richtigen Satz- oder Zeichengebrauchs – dann scheint der Brückenschlag von der Beweiskonstruktion zum Sinn des bewiesenen Satzes keineswegs so unproblematisch zu sein, wie es zunächst vielleicht schien. Die in TEIL V, Kapitel 4, erhobene Frage, ob die geometrische Tatsache der arithmetischen vorzuziehen sei oder umgekehrt, löst Wittgenstein daher nun dahingehend auf, dass es sich um zwei verschiedene Sprachspiele handelt, wenn wir das Augenmerk einmal auf die Überzeugungsarbeit leistende Zeichengeometrie legen, und das andere Mal auf das arithmetische Faktum, wie es der arithmetische Satz ausspricht.

> Wir haben ein Experiment gemacht – aber im Experiment wurde ein *Satz* erzeugt (wie sonst etwa eine chemische Verbindung). Und nun gibt es einen andern Satz, der sagt, daß jener Satz erzeugt wurde. – Aber wie, wenn ich zum Ausdruck hierfür eben jenen Satz gebrauchte? So daß also „25×25=625“ mir sagen soll, daß die Menschen, so und so abgerichtet, allgemein *dies* herausbringen. Nun, so eine Aussage gibt es doch, hat doch einen guten Sinn. Und wenn das so ist – könnte man fragen –, sollte es dann wirklich *zwei* Sätze geben: einen, der dieses anthropologische Faktum ausspricht, das doch offenbar für die Möglichkeit einer Arithmetik wesentlich ist, und einen andern, der ein davon unabhängiges arithmetisches Faktum 25×25=625 aussprechen soll?
> Hier liegt der gewisse Unsinn nahe: „Es kommt darauf an, wie wir den Satz *meinen*.“ Man kann aber sagen: es kommt drauf an, wie wir den Satz verwenden, was wir mit ihm tun. (183a)

Auch wenn sich in der Mathematik wie vielleicht nirgendwo sonst unsere Übereinstimmung im Zustimmen zeigt, so verwenden wir doch die Mathematik nicht (bzw. höchstens unter anderem) dazu, das Verhalten von Mathematik Treibenden vorherzusagen. „Unsre Zustimmung läuft gleich ab, – aber wir bedienen uns dieser Gleichheit des Ablaufs nicht bloß, um Zustimmungsabläufe vorauszubestimmen.“ (184a) Insoweit daher die geometrische Betrachtungsweise das Hauptaugenmerk auf die Zeichengeometrie legt und eine den psychologischen Bedingungen des Menschen gerecht werdende Übersichtlichkeit einfordert, wird der Beweis gerade nicht als jenes Gebilde betrachtet, als das es in der mathematischen Praxis für gewöhnlich seine Anwendung findet. Dort nämlich führen wir Beweise, um Sätze als Darstellungsstandards auszuweisen – nicht aber, um zu *sagen*, was Menschen solche Standards anerkennen lässt. Die Übereinstimmung von uns Menschen hinsichtlich der Anerkennung gewisser Beweisschritte als beweisender (u. d. h. zwingender) Übergänge oder Zeichentransformationen wird in der Mathematik selbst nicht thematisch; obgleich es, wie schon erwähnt, für eine Rechentechnik wesentlich ist, dass diese Übereinstimmung besteht. Für die Möglichkeit der Mathematik ist es demnach zwar von entscheidender Wichtigkeit, dass wir wissenschaftlich vorauszusagen vermögen, „was Menschen bei einer Rechnung herausbringen werden, indem wir selbst sie rechnen.“ (184b) Aber die Tatsache, dass wir darin übereinstimmen, was uns als *passender* oder *richtiger* Übergang gilt, ist nicht selbst wieder eine mathematische; und das, obwohl die Konditionierungen im Rahmen des Mathematikunterrichts mit dafür verantwortlich sind, dass diese Übereinstimmung besteht. (Indem wir zur Technik des Rechnens mit Dezimalzahlen abgerichtet werden, wird uns zugleich eine Betrachtungsart eingebläut, die die Vorstellung vom stetigen, in ungeheure Dimensionen sich fortsetzenden, Übergehen von einer Potenz zur nächsten zur Selbstverständlichkeit werden lässt. – Und daher kommt es, dass wir sagen wollen, 10^{1000} sei *eigentlich* $10\times10\times10\times10\ldots$)

3 Der Beweis ist kein Experiment

Die Schwierigkeit, um es nochmals zu sagen, besteht also darin, dass Wittgenstein einen Zusammenhang herstellen möchte zwischen dem Anwendungsfeld eines mathematischen Satzes und der Weise, auf die man ihn erhielt. Der Beweis sei ein Anwendungsvorbild der durch ihn generierten grammatischen Regel, und verleihe ihr dadurch auch ihren Sinn. (Deshalb sollen wir auf seinen Beweis schauen, wollen wir den Sinn eines mathematischen Satzes verstehen.) Wenn man aber nun genauer zusieht, beginnt der Ausdruck des ‚Beweises‘ in dieser Wendung zu flimmern. Er soll konstitutiv für den Sinn eines seiner Teile (des ihn abschließenden Satzes) sein, zugleich aber ein bloßes Begriffsvorbild darstellen, in dem Kausalität keine Rolle spielt: ein Bild, das als Begriffsstandard dient, uns zugleich aber auch sagt (nicht nur zeigt!), wozu wir diesen Standard annehmen, wofür wir ihn gebrauchen sollen. Es handelt sich also bei genauerem Hinschauen um zwei verschiedene anthropologische Phänomene, indem der Beweis entweder als Begriffsvorbild (die spezifische Anwendungsmöglichkeit des bewiesenen Satzes darstellend) oder aber als Überzeugungsmaschinerie des ihn abschließenden Satzes gedeutet wird.

> Wenn „$25 \times 25 = 625$“ die Zuversicht ausspricht; wir werden uns immer wieder leicht dahin einigen können, daß der Weg, der mit jenem Satz endet, zu nehmen sei – wie drückt dann dieser Satz nicht die andere Zuversicht aus, wir würden uns

immer wieder über *seinen* Gebrauch einigen können.
Wir spielen mit den beiden Sätzen nicht das gleiche Sprachspiel. (MS 117, 193)

Wie wir von der Wahrheit eines Satzes überzeugt werden, spielt sich auf einer anderen Ebene ab, als wozu wir diesen Satz sodann gebrauchen. Und doch ist nicht zu leugnen, dass im Beweis auch die Verwendungsweise des ihn abschließenden Satzes in irgendeiner Weise antizipiert sein muss. Wie soll also der Zusammenhang zwischen dem Beweis als einer in der Zeit fortschreitenden Konstruktion und der Gebrauchsweise des ihn abschließenden Satzes (der ja letztlich erst durch diesen Gebrauch zu einer Regel wird) gedacht werden? Oder anders: wie ist das Verhältnis zwischen den anthropologischen Tatsachen über die menschliche Übereinstimmung im Ablaufen (d. h. dass wir auf bestimmte Zeichen hin gleich reagieren: manche Übergänge für zwingend, andere für abwegig halten etc.) und den mathematischen Wahrheiten zu denken? Denn einerseits ist der Konsens darüber, was wir Übereinstimmung nennen, für das Rechnen wesentlich; andererseits aber sagt der mathematische Satz nichts über diesen Konsens aus: wir wenden der Tatsache, dass wir in unseren Zustimmungsabläufen (mittels derer wir uns von der Wahrheit des mathematischen Satzes überzeugten), gleichsam den Rücken zu, wenn wir ihn als Regel gebrauchen. (Vgl. MS 125, 54r) Da dieser Konsens also Voraussetzung dafür ist, Sätze als wahr anerkennen zu können, er jedoch selbst im Zuge des mathematischen (regulativen) Gebrauchs dieser Sätze nicht (oder jedenfalls nicht stets) thematisch wird, geht er auch nicht in ihre Wahrheit ein, sondern ist vielmehr für deren Sinn konstitutiv. Unser Übereinkommen darüber, was uns im Beweis als *passender* Übergang gilt, tangiert nicht die Wahrheit, sondern die Brauchbarkeit der so erhaltenen mathematischen Sätze. Im Umkehrschluss heißt das, dass ein mathematischer Satz nicht falsch, sondern schlicht nutzlos ist (und insofern vielleicht besser nicht als ‚mathematischer Satz' bezeichnet werden sollte), wenn Uneinigkeit darüber besteht, ob *dieser* Ablauf (sein vorgeblicher Beweis) wirklich zu ihm führt oder nicht.

> Das Rechnen verlöre seinen Witz, wenn *Verwirrung* einträte. Wie der Gebrauch der Worte „grün" und „blau" seinen Witz verlöre. Und doch scheint es Unsinn zu sein, zu sagen, – daß ein Rechensatz behaupte: es werde keine Verwirrung eintreten. – Ist die Lösung einfach die, daß der Rechensatz nicht *falsch* werde, sondern nutzlos, wenn Verwirrung einträte?
> Sowie der Satz dieses Zimmer ist 16 Fuß lang dadurch nicht *falsch* würde, daß Verwirrung in den Maßstäben und im Messen einträte. Sein Sinn, nicht seine Wahrheit basiert auf dem ordnungsgemäßen Ablauf der Messungen. (Sei aber hier nicht dogmatisch. Es gibt Übergänge, die die Betrachtung erschweren.) (192)

Die Mathematik beruht demzufolge darauf, dass wir im Beweisfortgang gleich ablaufen, obwohl der Begriff des *richtigen* Ablaufens allererst durch eben diesen Beweis konstituiert wird. Der Standard erwächst aus empirischen Regelmäßigkeiten (gleiche Urteilsneigungen), kann aber durch diese nicht begründet werden. Schließlich erhält der mathematische Satz seinen regulativen Status nicht dadurch, dass wir, wenn wir seinen Beweis wiederholen, so gut wie immer zu ihm gelangen – sondern indem wir die Gleichheit unseres dabei beobachtbaren Ablaufens nach ihm beurteilen. Die Feststellung, dass die Genese des mathematischen Satzes eine Übereinstimmung in den einzelnen Schritten voraussetzt, kommt somit immer etwas zu kurz: sie bedient sich eines Begriffes der Gleichheit, der den durch den Beweis neu etablierten

Begriff gerade nicht einzuholen vermag; obwohl dieser, sozusagen, aus jenem entstand. Diese Problematik betrifft jeden Versuch der Begründung dafür, weshalb wie einen neuen Standard annehmen. Wann immer wir eine Rechtfertigung für unser Vorgehen – warum wir etwa einen Beweis anerkennen – geben wollen, müssen wir dabei entweder den durch den Beweis etablierten Begriff bereits voraussetzen (Zirkelschluss), oder aber auf einen Begriff der Gleichheit zurückgreifen, über den der durch den neuen Beweis etablierte hinausgeht (Unterbestimmtheit). Daher schreibt Wittgenstein:

> Die Gefahr ist hier, glaube ich, eine Rechtfertigung unsres Vorgehens zu geben, wo es eine Rechtfertigung nicht gibt und wir einfach sagen sollten; *so machen wir's*. (190)

Mit dieser Wendung ist die Idee eines unmittelbaren Zusammenhanges zwischen der Begriffsgenese (Annahme eines neuen Begriffes aufgrund einer Beweisüberlegung) und dem Paradigmengebrauch (Beurteilung empirischer Fakten mit Hilfe des neuen Begriffes) zurückgewiesen: empirische Regelmäßigkeiten (psychologische Konstanten, materielle Beständigkeiten) mögen zwar wesentlich sein für das Funktionieren der mathematischen Wissenschaft, können diese aber nicht begründen. Man spielt nicht das gleiche Sprachspiel, wenn man einen Satz als Standard gebraucht, oder aber auf der Basis bestehender Standards zur Annahme einer neuen Regel gelangt. Die mathematische Synthesis birgt stets dieses unbestimmte (bzw. allein *durch sich selbst* bestimmte) Moment in sich, welches weder durch Rekurs auf bereits bestehende Regeln (Regelfolgeproblem), noch auch mittels empirischer Regelmäßigkeiten (Kategorien- bzw. Sprachspielsprung) erklärt werden kann. Der Beweis liefert gleichsam ein Mehr, das man nicht zu begreifen vermag, wenn man ihn entweder auf seine Bestandteile und entsprechende Wohlformungsregeln, oder auf das psychologische Phänomen gleicher Zustimmungsabläufe reduziert. Indem die Mathematik als solche stets das Maß abgibt, nach dem wir empirische Regelmäßigkeiten beurteilen, vermögen vermeintliche Regelmäßigkeiten unserer Zustimmungsabläufe sie auch nicht zu begründen. Folglich wird es der Mathematik nicht gerecht, wenn ihre Beweise als der Ausdruck menschlicher Neigungen betrachtet werden, auf Zeichen *so* und *so* zu reagieren. Der Beweis ist kein Experiment, das zeigt, in welcher Weise ein Mensch, der im Zuge des Mathematikunterrichts gehörig konditioniert wurde, auf Zeichen reagiert. Wenn sich auch gewisse Ähnlichkeiten zum Experimentieren ausmachen lassen (man ist gespannt auf das Ergebnis; weiß zuvor nicht, was herauskommen wird) liegt ein entscheidender Unterschied darin, dass der Beweis nachgerade durch seinen Ausgang definiert ist. Er ist abhängig von der ihn abschließenden Regel zu denken; mithin stehen ihm nicht, wie dies beim Experiment (entsprechend der jeweiligen Rahmenbedingungen) der Fall ist, mehrere alternative Resultate offen. Auf diesen wichtigen Unterschied möchte Wittgenstein hinweisen, wenn er wiederholt hervorhebt, dass ein Beweis kein Experiment ist. Es soll nicht geleugnet werden, dass das Beweisen, wie fast alles auf dieser Welt, einen materiellen, in Raum und Zeit sich vollziehenden Vorgang darstellt. Zum einen ist aber wichtig zu sehen, dass wir mit bewiesenen Sätzen im Alltag völlig anders umgehen, als mit dem ausformulierten Ergebnis einer wissenschaftlichen Untersuchung – wir sie nämlich zum Standard der sinnvollen Rede machen. Und zum anderen schließen wir in Bezug auf die Beweisgenese mathematischer Sätze die Möglichkeit von Alternativen als undenkbar aus, wohingegen das Experiment eine wissenschaftliche Hypothese zunächst nur verifiziert, obgleich ihr Komplement durchaus vorstellbar wäre. Damit hängt zugleich zusammen, dass die durch das Experiment bestätigte Annahme ihren vollen Sinn bereits hatte, noch ehe der Versuch überhaupt durchgeführt worden war. Der mathematische Satz aber wird dadurch gehaltvoll, dass er Teil seiner Beweiskonstruktion ist.

4 Die Reichweite von Betrachtungsweisen

Ich betrachte diese Überlegungen zum Unterschied von Beweis und Experiment, wie erwähnt, in zweifacher Hinsicht. Einerseits richten sie sich gegen die von Russell und Whitehead geteilte Auffassung, wonach die ganz in primitiven (logischen) Termen gehaltenen Formelreihen die *eigentlichen* Beweisgebilde von Sätzen darstellen, die uns Menschen nur vermittels entsprechender Abkürzungen erschlossen werden könnten. Immerhin geht mit diesem Gedanken einher, dass erst eine Untersuchung der Zeichengeometrie uns wirklich Aufschluss darüber geben könne, was eigentlich bewiesen worden sei. Dagegen richtet sich die Gegenüberstellung von Beweis und Experiment, indem verdeutlicht wird, dass in ersterem keine geheimen Kausalitäten verborgen sind, sondern die klar einsehbaren Zeichenstrukturen gerade das Charakteristikum des Beweises ausmachen: wir gebrauchen ihn als ein *Bild*.

> “Der Beweis muß übersichtlich sein“ heißt: im Beweis gibt es nicht (wie im Experiment) verborgene Vorgänge, die das Resultat, wir wissen nicht wie, hervorbringen. Und das ist eine *grammatische* Bemerkung! Wer dies nicht versteht, mißversteht sie. (199)

Andererseits aber deute ich Wittgensteins Gegenüberstellung auch als ein Zurechtrücken seiner eigenen Herangehensweise an mathematische Beweise. Im Rahmen der vom geometrischen Betrachtungsstandpunkt aus erhobenen Einwände gegen den logizistischen Begründungstheoretiker wird der Beweis nämlich vorrangig als ein Gebilde angesehen, das gewisse raum-zeitliche Beziehungen aufweist. Das starke Motiv für diese Perspektive ist ganz einfach, dass die Anwendung des mathematischen Satzes in ihm selbst ja irgendwie niedergelegt sein muss: daher man den Beweis des Satzes als seine paradigmatische Anwendung betrachtet. Dadurch eröffnet sich aber die Gefahr, den Beweis als Experiment zu missverstehen, bei dem die Reaktionskonstanten rechnender Menschen untersucht werden. („*Diese* Übergänge erscheinen dem Menschen als zwingend“ etc.) Die Einsicht, dass die durch einen neuen Beweis geleistete Überzeugungsarbeit nicht dasselbe Sprachspiel repräsentiert wie die Anwendung des bewiesenen mathematischen Satzes, führt Wittgenstein aber dahin, die von ihm zuvor unternommene Identifizierung der durch den Beweis erwirkten Begriffskonstitution mit seiner außermathematischen Applikation von Neuem zu problematisieren. Dass sich, wie es im obigen Zitat heißt, die Forderung nach Übersichtlichkeit des Beweises auf eine grammatische Beobachtung stützt, verweist gerade darauf, dass man sich von dieser Bemerkung nicht dahin leiten lassen solle, die Mathematik als Wissenschaft des menschlichen Umgangs mit bzw. des Reagierens auf Zeichen zu deuten. Es handelt sich um keine Feststellung, die das psychologische Verhalten von uns Menschen, sondern um das Resultat einer grammatischen Beobachtung, die unseren Umgang mit Wörtern betrifft. Der entscheidende Punkt ist demnach, dass der mathematische Satz, wie wir ihn aufgrund seines Beweises anerkennen, nicht die Rolle eines Satzes der menschlichen Naturgeschichte spielt: er ist Regel der Darstellung und keine Verhaltensbeschreibung; normativ, nicht deskriptiv. Wer den mathematischen Satz mit einer Aussage über die Reflexe von Menschen auf Zeichen gleichsetzt, übersieht genau diesen gravierenden Rollenunterschied zwischen mathematischen und naturwissenschaftlichen Sätzen. Wenn auch beim Rechnen ein psychologischer Vorgang stattfindet, so ist doch die mathematische Untersuchung keine psychologische.

Wittgenstein lässt sich von dieser Einsicht zwar nicht so weit drängen, den Zusammenhang zwischen der uns (aufgrund offensichtlicher Zusammenhänge der Symbole) überzeugenden Zeichengeometrie und der Weise, wie wir mathematische Sätze gebrauchen, vollständig aufzukündigen. Aber er möchte zuletzt doch „die transformierende Beweistätigkeit als Tätigkeit zu anderm Zweck, zu anderm Nutzen als dem des Beweises auffassen." (200) — Die Brauchbarkeit unserer Wörter stützt sich auf die Tatsache, dass wir in ihrem Gebrauch weitestgehend übereinstimmen. Darüber aber verlieren wir im Gebrauch für gewöhnlich kein Wort. Und ganz ähnlich verhält es sich hinsichtlich unserer Übereinstimmung in dem, was uns Menschen als zwingender Beweis gilt: sie ist wesentlich für das Funktionieren der Technik der Mathematik als eines anthropologischen Phänomens, wird in ihr jedoch nur in den seltensten Fällen thematisch. In der Regel interessiert den Mathematiker nur die Tatsache, dass ein Beweis für einen bestimmten Satz gegeben werden kann, wobei ihm die gewählte Methode (d. h. die jeweilige Zeichengeometrie) als bloßes Mittel erscheint, welches ihm zur Erreichung des eigentlichen Zwecks dienlich ist. Natürlich stellt es eine empirische Tatsache dar, dass Menschen auf *gewisse Weise* rechnen: das aber macht den Rechensatz zu keinem empirischen. Dies bedeutet nicht, dass die Weise, wie wir zu einem Satz gelangen, für sein Verständnis unerheblich wäre. Es heißt aber, dass der Mathematiker sein hauptsächliches Augenmerk auf die Beweisbarkeitstatsache des mathematischen Satzes legt; und weniger auf die zeichnerischen Mittel, die uns dahin führen, ihn als bewiesen anzuerkennen.

> ‚Man kann den Satz auch *so* einsehen.' Dabei ruht der Blick nur auf *diesem* Satz, als (dem) Ziel des Beweises. Wir zielen nur auf diesen Satz, nicht auf die Flugbahn des Geschoßes. Nicht *diese Flugbahn* wollen wir es zu jenem Punkt durchlaufen lassen; sondern es soll, gleichgültig wie, diesen Punkt erreichen. – Aber, *unter andern Umständen*, mag es gerade die Flugbahn sein, auf die's uns ankommt. (202)

Was Menschen dahin bringt einen Satz als bewiesen anzuerkennen, ist demnach eine für die Mathematik zwar wesentliche Frage, aber eben (in der Mehrzahl der Fälle) keine genuin mathematische. Eher zielt sie auf die psychologischen, aber auch andere, die mögliche Anwendung (z. B. das Prognostizieren von physikalischen Ereignissen) betreffende Voraussetzungsbedingungen unserer Mathematik. Damit bestätigt sich auch, was wir zu Beginn der Arbeit vermerkten: dass die mit der Übersichtsforderung gekoppelten Einsprüche gegen das logizistische Begründungsunternehmen nicht selbst mathematischer Natur sein dürfen. Wie wir uns erinnern, hatte Wittgenstein als oberstes Credo seines Philosophierens über die Mathematik festgehalten, keinesfalls mit den Mathematikern als solchen in Konflikt zu geraten. Die Kritik an Russell und Whitehead betrifft daher nicht logisch-mathematische Tatsachen: – in den *PM* geführte Beweise werden nicht als *falsch* ausgewiesen. Sondern das Anliegen kann nur sein, den Status des Buches und unser Interesse dafür zu hinterfragen. Wittgenstein möchte auf

Aspekte hinweisen, wie sie die Begründungstheoretiker gemeinhin bewusst vernachlässigen oder anderweitig übergehen, durch die wir jedoch dahin bewegt werden können, das Unterfangen einer Grundlegung der Mathematik in neuem Lichte zu sehen. Es geht um die Weise, in der wir die Mathematik betrachten, und nicht um eine Reformation ihrer Inhalte. Wer nämlich darauf aufmerksam wird, dass sich das Anerkennen von Beweisgängen auf gewisse, von uns geteilte Dispositionen und eingeübte Techniken stützt, der ist auch nicht länger geneigt, die unübersehbaren Zeichenreihen des logischen Beweissystems als *das* Fundament unserer Mathematik zu bezeichnen. Da es sich aber um eine Perspektive handelt, die den Beweis nicht mit Blick auf seinen regulativen Status, sondern hinsichtlich der uns Menschen überzeugenden Zeichenstruktur betrachtet, ist keiner der sich hieraus ergebende Einwände gegen das Fundierungsprojekt mathematischer Art. Der die Beweiskonstruktion abschließende Satz wird im Rahmen der geometrischen Auffassung schließlich nicht als Regel wahrgenommen, sondern als Phänomen oder Ausdruck des menschlichen Reagierens auf Zeichen. Jegliche daraus gezogenen Konklusionen sind deshalb zwar von anthropologischem Interesse, geben aber kein Mittel ab, welches gegen das Projekt der *PM* als eines *mathematischen* Unterfangens gerichtet werden könnte. Wir können uns von jenen Überlegungen dahin führen lassen, den Versuch einer ‚Grundlegung der Mathematik' als müßiges Unternehmen zu betrachten, von dem wir nicht länger verstehen, welches Interesse ihm zukommen soll. Aber keineswegs sind wir deshalb schon berechtigt, Andere, die dieser Aufgabe große Wichtigkeit beilegen, des Irrtums zu bezichtigen. (Wohl eher noch des Aberglaubens.)

Wie bereits erwähnt, belässt es Wittgenstein selbst nicht bei dieser Wendung, wonach die geometrische Auffassung des Beweises den mathematischen Satz als Teil eines anderen Sprachspiels als dem der Mathematik behandelt. Das will sagen, dass sich die Schlussfolgerungen, zu denen ich hier gelange, in Wittgensteins Überlegungen zwar finden lassen, nicht jedoch ihren Abschluss bilden. Seine Gedanken spinnen sich von hier aus vielmehr fort zu den Problemen der Widerspruchsfreiheit und der Frage, was es eigentlich heißt, wenn jemand sich in einem mathematischen Kalkül nicht mehr auskennt. Ohne hier den Platz zu haben, die Zusammenhänge herauszustellen, erscheint es als eine sehr spannende Aufgabe, die Verbindungen zwischen seiner Kritik am logizistischen Begründungsunternehmen und den Überlegungen über das Ordnung-Machen in Kalkülen genauer zu untersuchen (die Betrachtungen zum Gödelschen Unvollständigkeitssatz, die Einwände gegen übertriebene Konsistenzforderungen, die Zurückweisung der Idee einer mechanischen Sicherung gegen den Widerspruch, etc.). Allerdings bin ich überzeugt, dass diss nur dann wirklich fruchtbar ist, wenn man auf die Manuskripte zurückgreift.

Nichtsdestoweniger glaube ich, dass meine hier vorgeschlagene Abrundung seiner Gedankenbewegung eine wichtige Pointe setzt. Das Entscheidende ist, dass die Kritik am Logizismus die Einnahme eines Standpunkts voraussetzt, von dem aus die Einwände erhoben werden. Während die anfänglichen Formulierungen zuweilen den Eindruck entstehen ließen, dass diese Perspektive für sich selbst den Status alleiniger Gültigkeit beanspruche (indem sie leugnete, was sie nicht zu fassen vermochte), kommt mit der nun vollzogenen Wendung ihre eigene, am menschlichen Reagieren orientierte Perspektivität zum Ausdruck. Insofern trifft sich diese Konklusion mit dem, was Wittgenstein ein paar Monate später an anderer Stelle (MS 163, geschrieben von 22.06.1940 bis 22.06.1941) über seine Einsprüche sagen wird.

> Hier darf man nicht dogmatisch sein wollen: Von manchem neuen Beweis wird man zu sagen geneigt sein, er ändere unsern Begriff, von manchem – sozusagen trivialen – nicht. Aber für uns ist gerade der Übergang zwischen der Geneigtheit, das eine, und der, das andere zu sagen, wichtig. (MS 163, 55r)
> Es ist oft ganz genügend für uns, zu zeigen, daß man etwas nicht *so* nennen *muß*; daß man es *so* nennen kann. Denn *das* schon ändert das Gesicht der Dinge.
> In diesem Sinne waren meine dogmatischen Äußerungen unrichtig. Aber sie können richtig gestellt werden wenn man dort, wo ich sagte: „das ist so anzusehen", sagt: „man kann das auch so ansehen". Und es wäre falsch, nun zu glauben, daß dem Satz dadurch sein eigentlicher Witz genommen ist. (MS 163, 58r)

Anstatt daher zu sagen, man könne mit den *PM* nicht multiplizieren, sollte es besser heißen, dass man die Sache auch so *betrachten* kann, wonach es witzlos scheint, mit den *PM* multiplizieren zu *wollen*. Die anthropologische Darstellung des Phänomens unseres Rechnens ermöglicht uns, die Mathematik mit anderen Augen anzusehen und in der Folge auch mit anderen Erwartungen an sie heranzugehen. Der Witz dieser Darstellungsart geht nicht verloren, bloß weil man erkennt, dass sie nicht die einzig mögliche ist. — Dagegen gewinnt das Philosophieren ungemein viel: man ist stets aufs Neue aufgefordert, die Reichweite seines eigenen Standpunkts auszuloten – und kann zusehen, wo man so hingelangt.

SIGLENVERZEICHNIS

<u>Frege, Gottlob</u>

GLA	*Die Grundlagen der Arithmetik*
GGA I	*Grundgesetze der Arithmetik*, Band 1
GGA II	*Grundgesetze der Arithmetik*, Band 2
NS	*Nachgelassene Schriften*
ÜBG	*Über Begriff und Gegenstand*

<u>Kant, Immanuel</u>

KrV B	*Kritik der reinen Vernunft*, zweite Fassung

<u>Russell, Bertrand</u>

IMP	*Introduction to Mathematical Philosophy*
PP	*The Problems of Philosophy*

<u>Whitehead, Alfred N. / Russell, Bertrand</u>

PM	*Principia Mathematica*
PM^{de}	*Principia Mathematica*, deutsche Übersetzung
PMnd	*Principia Mathematica*, zweite, geänderte Auflage

<u>Wittgenstein, Ludwig</u>

BGM	*Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*
BT	*The Big Typeskript*
LPA	*Logisch-philosophische Abhandlung*
LFM	*Lectures on the Foundations of Mathematics, 1939*
PU	*Philosophische Untersuchungen*
BEE	*The Bergen Electronic Edition*

Das Kürzel wurde meist weggelassen, da die Bezeichnung durch **MS** (Manuskript) oder **TS** (Typoskript) (plus der entsprechenden darauffolgenden Zahl) für sich bereits klar ersichtlich macht, dass man sich auf die *Bergen Electronic Edition* bezieht.

Damit der Leser das jeweilige Werk zeitlich verorten kann, führe ich in der Regel sämtliche Literatur im Text zusammen mit der Jahreszahl der Erstausgabe an. Falls die Erstausgabe nicht zur Hand war, wird im Literaturverzeichnis die entsprechende spätere Ausgabe genannt.

Je nach Sinnhaftigkeit, wird nach dem Werk, Sigel oder Manuskript entweder die Seite (*Der Gedanke*, S. 69) oder der jeweilige Paragraph (PU, § 109) oder aber die Blattnummer (MS 122, 75r) angegeben. Das oft gebräuchliche „ebd.“ wird fortgelassen, wo es überflüssig ist; überall, wo ein Zitat nur durch die Seiten-, Paragraphen-, oder Foliennummer belegt ist, handelt es sich um einen Verweis auf das zuletzt genannte Werk, Sigel oder Manuskript.

Ambrose, Alice: „Wittgenstein on Mathematical Proof”. *Mind*, Vol. 91 (1982), S. 264–272.

Benacerraf, Paul / Putnam, Hilary (Hg.): *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*. Basil Blackwell: Oxford 1964.

Biggs, Michael / Pichler, Alois: „Wittgenstein: Two Source Catalogues and a Bibliography. Catalogues of the Published Texts and of the Published Diagrams, each Related to its Sources“. *Working Papers from the Wittgenstein Archives at the University of Bergen*, No. 7: Bergen 1993.

Carnap, Rudolf (1931): „Die logizistische Grundlegung der Mathematik“. *Erkenntnis*, 2. Bd. (1931), S. 91–105. Englische Übersetzung in Benacerraf, P. / Putnam, H. (Eds.): *Philosophy of Mathematics*, S. 31–41.

Fogelin, Robert J.: *Wittgenstein*. Routledge & Kegan Paul: London 1976.

Fogelin, Robert J.: *Taking Wittgenstein at His Word*. Princeton University Press: Oxford 2009.

Frege, Gottlob (1879): *Begriffsschrift. Eine der Arithmetischen Nachgebildete Formelsprache des Reinen Denkens*. Nachdruck. Georg Olms: Hildesheim 1998. [BS]

Frege, Gottlob (1884): *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine Logisch Mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Felix Meiner: Hamburg 1986. [GLA]

Frege, Gottlob (1892): „Über Begriff und Gegenstand“. *Vierteljahresschrift für wissenschaftliche Philosophie*, Vol. 16 (1892), S. 192–205. [ÜBG]

Frege, Gottlob (1893): *Grundgesetze der Arithmetik. 1. Band*. Hermann Pohle: Jena 1893. [GGA I]

Frege, Gottlob (1903): *Grundgesetze der Arithmetik. 2. Band*. Hermann Pohle: Jena 1903. [GGA II]

Frege, Gottlob (1914): „Logik in der Mathematik“. In *Nachgelassene Schriften*, S. 219–270.

Frege, Gottlob (1918): „Der Gedanke“. *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus*, Vol. 2 (1918–1919), S. 58–77.

Frege, Gottlob (1924/25): „Neuer Versuch der Grundlegung der Arithmetik“. In *Nachgelassene Schriften*, S. 298–302.

Frege, Gottlob: *Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel. Bd. 1: Nachgelassene Schriften*. Herausgegeben von Hans Hermes, Friedrich Kambartel, Friedrich Kaulbach. Felix Meiner: Hamburg 1983^{2}. [NS]

Frege, Gottlob: *Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel. Bd. 2: Wissenschaftlicher Briefwechsel*. Herausgegeben von Gottfried Gabriel, Hans Hermes, Friedrich Kambartel, Christian Thiel, Albert Veraart. Felix Meiner: Hamburg 1976.

Griffiths, A. Phillips (Hg.): *Wittgenstein. Centenary Essays*. University Press: Cambridge 1991.

Hanna, Gila / Jahnke, Hans Niels / Pulte, Helmut (Hg.): *Explanation and Proof in Mathematics. Philosophical and Educational Perspectives*. Springer Verlag: New York 2010.

Hardy, G. H. (1929): „Mathematical Proof". *Mind*, Vol. 38, No. 149 (1929), S. 1–25.

Heijenoort, Jean van (Hg.): *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic.1897–1931*. Harvard University Press: Cambridge (Mass.) 1976.

Heinrich, Richard: „Bedeutungslose Offenbarung. Philosophiegeschichtliche Anmerkungen zu Wittgensteins Gödel-Notizen". In Ramharter, E. (Hg.): *Prosa oder Beweis?*, 117–151.

Kant, Immanuel (1781/1786): *Kritik der reinen Vernunft*. Herausgegeben von W. Weischedel. Suhrkamp: Frankfurt 1974. [KrV B]

Klenk, V. H.: *Wittgensteins's Philosophy of Mathematics*. Martinus Nijhoff: The Hague 1976.

Kroß, Matthias (Hg.): *„Ein Netz von Normen" Wittgenstein und die Mathematik*. Parerga: Berlin 2008.

Marion, Mathieu: „Wittgenstein and Finitism". *Synthese,* Vol 5, No 2 (1995), S. 141–176.

Marion, Mathieu: *Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics*. University Press: Oxford 1998.

Mill, John Stuart (1843): *A System of Logic Ratiocinative and Inductive. Being a Connected View of the Principles of Evidence and the Methods of Scientific Investigation*. Books I–III. Edited by J. M. Robson and introduced by R. F. McRae. Routledge & Kegan Paul: London 1973.

Mühlhölzer, Felix: „"A Mathematical Proof Must be Surveyable." What Wittgenstein Meant by This and What it Implies". *Grazer Philosophische Studien*, No. 71 (2005), S. 57–86.

Mühlhölzer, Felix: *Braucht die Mathematik eine Grundlegung? Ein Kommentar des Teils III von Wittgensteins ‚Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik'*. Vittorio Klostermann: Frankfurt 2010.

Mühlhölzer, Felix: „On Live and Dead Signs in Mathematics". Soll erscheinen in Detlefsen, Michael / Linkt, Godehart (Hg.): *Formalism and Beyond*. Ontos Verlag: Frankfurt 2012 (?).

Nedo, Michael: „Anmerkungen zu Wittgensteins Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik". In Kroß, M. (Hg.): *„Ein Netz von Normen"*, S. 79–103.

Nordmann, Alfred: „Proof as Experiment in Wittgenstein". In: Hanna, G. / Jahnke, H. N. / Pulte, H. (Hg.): *Explanation and Proof in Mathematics,* S.191–204.

Peano, Giuseppe (1889): *Arithmetices principia, nova methodo exposita*. Bocca: Torino 1889. Englische Übersetzung in Heijenoort, J. (Hg.): *From Frege to Gödel*, S. 85–97.

Pears, David: *Paradox and Platitude in Wittgenstein's Philosophy*. University Press: Oxford 2006.

Ramharter, Esther / Weiberg, Anja: *„Die Härte des Logische Muss" Wittgensteins Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*. Parerga: Berlin 2006.

Ramharter, Esther / Rieckh, Georg: *Die* Principia Mathematica *auf den Punkt gebracht. Kurzfassung und Erläuterungen*. Öbv & htp: Wien 2006.

Ramharter, Esther (Hg.): *Prosa oder Beweis? Wittgensteins ‚berüchtigte' Bemerkungen zu Gödel. Texte und Dokumente*. Parerga: Berlin 2008.

Ramsey, Frank P. (1925): „The Foundations of Mathematics". In *The Foundations of Mathematics and other Logical Essays*, S. 1–61.

Ramsey, Frank P. (1926): „Mathematical Logic". In: *The Foundations of Mathematics and other Logical Essays*, S. 62–81.

Ramsey, Frank P.: *The Foundations of Mathematics and other Logical Essays*. Edited by R. B. Braithwaite, with a Preface by G. E. Moore. Kegan Paul: London 1931.

Rodych, Victor: „Wittgenstein's Philosophy of Mathematics". *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2011 Edition), Herausgegeben von E. N. Zalta; http://plato.standford.edu/archives/sum2011/entries/wittgenstein-mathematics/

Rodych, Victor: „Wittgenstein's Critique of Set Theory". *The Southern Journal of Philosophy*, Vol. 38 (2000), S. 281–319.

Russell, Bertrand (1903/1937^2): *The Principles of Mathematics*. Kimble & Bradford: London 1937.

Russell, Bertrand (1912): *The Problems of Philosophy*. Henry Holt: London 1912. [PP]

Russell, Bertrand (1919): *Introduction to Mathematical Philosophy*. Allan & Unwin: London 1919. Ausgewählte Textteile in Benacerraf, P. / Putnam, H. (Hg.): *Philosophy of Mathematics*, S. 113–133. [IMP]

Sheffer, Henry M. (1912): „A Set of Five Independent Postulates for Boolean Algebra, With Application to Logical Constants". *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 14, S. 481–488.

Skolem, Thoralf (1923): „Begründung der elementären Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich". Deutsche Übersetzung in Skolem, Th.: *Selected Works in Logic*, S. 153–188. Englische Übersetzung in Benacerraf, P. / Putnam, H. (Hg.): *From Frege to Gödel*, S. 302–333.

Skolem, Thoralf: *Selected Works in Logic*. Edited by Jens Erik Fenstad. Universitetsforlaget: Oslo 1970.

Stekeler-Weithofer, Pirmin: „Philosophie der Mathematik nach Wittgenstein". *Wittgenstein-Studien*, Bd. 7 (2003).

Stroud, Barry: „Wittgenstein and Logical Necessity“. *The Philosophical Review*, Vol. 74, No. 4 (1965), S. 504–518.

Weiberg, Anja: „Rechnung versus Experiment. Mathematische Sätze als Grammatische Sätze“. In Kroß, M. (Hg.): *„Ein Netz von Normen“*, S. 17–39.

Whitehead, Alfred N. (1911): *An Introduction to Mathematics*. Henry Holt: Cambridge 1911.

Whitehead, Alfred N. / Russell, Betrand (1910): *Principia Mathematica. Volume 1.* : The University Press: Cambridge 1910. [PM]

Whitehead, Alfred N. / Russell, Betrand (1927*): Principia Mathematica. Volume 1*. Second Edition. The University Press: Cambridge 1927. [PM^nd]

Whitehead, Alfred N. / Russell, Betrand: *Principia Mathematica. Vorwort und Einleitungen*. Mit einem Beitrag von Kurt Gödel. Suhrkamp: Frankfurt 1994. [PM^de]

Wittgenstein, Ludwig (1922): *Logisch-Philosophische Abhandlung*. Suhrkamp: Frankfurt 2003. [LPA]

Wittgenstein, Ludwig: *Lectures on the Foundations of Mathematics, Cambridge, 1939*. From the Notes of R. G. Bosanquet, Norman Malcolm, Rush Rhees and Yorick Smythies. Edited by Cora Diamond. The University of Chicago Press: London 1976. [LFM]

Wittgenstein, Ludwig: *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik.* Herausgegeben von G. E. M. Anscombe, Rush Rhees, G. H. v. Wright. Suhrkamp: Frankfurt 1989 (1956[1]). [BGM]

Wittgenstein, Ludwig: *The Big Typeskript*. Wiener Ausgabe. Bd. 11. Springer: Wien 2000.

Wittgenstein, Ludwig: *Philosophische Untersuchungen*. Kritisch-genetische Edition. Herausgegeben von Joachim Schulte. Suhrkamp: Frankfurt 2001. [PU]

Wittgenstein, Ludwig: *Über Gewissheit*. Herausgegeben von G. H. v. Wright, G. E. M. Anscombe. Suhrkamp: Frankfurt 1970. [ÜG]

Wittgenstein, Ludwig: *Wittgensteins Nachlass: The Bergen Electronic Edition*. Past Master Preface. InteLex Corporation: Charlottesville 2003. [BEE]

Wright, Crispin: „Wittgenstein on Mathematical Proof“. In Griffiths, A. P. (Hg.): *Wittgenstein*, S. 79–99.

ZUSAMMENFASSUNG

Diese Diplomarbeit befasst sich mit der Kritik, die Wittgenstein am logizistischen Begründungsprojekt der Mathematik übt, sowie der von ihm daran angeschlossenen kritischen Hinterfragung jenes Standpunkts, den er selbst dabei einnimmt. Dazu sollen seine Einsprüche gegen den von Russell und Whitehead in den *Principia Mathematica* (1910) entworfenen Kalkül, auf den ihrem Vorgeben nach die gesamte Arithmetik reduziert werden könne, aufbereitet werden. Der Fokus liegt auf jenen Aufzeichnungen, die Wittgenstein zwischen Oktober 1939 und März 1940 in die beiden Manuskriptbände MS 122 und MS 117 eintrug, und die – in allerdings stark reduziertem Umfang – als Teil III der *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* (1956) vorliegen. Ein wesentliches Anliegen der Arbeit ist es, unter Heranziehung der Originalmanuskripte nachzuweisen, dass Wittgenstein den Standpunkt, von wo aus er seine Kritik vorbrachte, selbst keineswegs als so unproblematisch erlebte, als dies für den Leser erscheinen könnte, der nur die in Buchform publizierten Bemerkungen konsultiert. In einer nahe am handschriftlichen Text bleibenden Aufbereitung seiner Gedankenbewegungen sollen also besonders die gegenläufigen und selbstkritischen Momente hervorgehoben werden. Als leitendes Paradigma dient dabei das von Wittgenstein oft wiederholte Credo, dass der Philosoph die Tätigkeit des Mathematikers in keiner Weise stören darf, sondern einzig nur unser *Interesse* für einzelne ihrer Rechnungen einer Prüfung unterziehen kann.

ABSTRACT

This thesis explores Wittgenstein's critique of reducing mathematics to logic as well as those self-directed critical remarks which bring into question the very point of view he himself adopts in the course of this critique. Of particular interest are his objections to the logical calculus developed by Russell and Whitehead in *Principia Mathematica* (1910) to which they argued the whole of arithmetics could be reduced. I shall focus on those manuscripts MS 122 and MS 117 dating from the period between October 1939 and March 1940, published posthumously (in selections) as Part III of *Remarks on the Foundations of Mathematics* (1956). One key aim of this paper is to show that the published remarks belie the extend to which Wittgenstein took his own critical standpoint to be problematic. By staying close to the handwritten text I will try to present his reflections in such a way as to bring out their dialectical and self-critical aspects. This is in line with Wittgenstein's credo that the philosopher may in no way interfere with the practice of mathematicians, but only elucidate the role their formulæ play in our lives and to scrutinize the *interest* we take in them.

Franz Schörkhuber

15. März 1986, Haag am Hausruck

Wissenschaftliche Mitarbeit

SoSe 2012	Studienassistent für den *Forschungsbereich Wissenschaftsphilosophie,* Institut für Philosophie, Wien (Martin Kusch)
WiSe 2011	Studienassistent für den *Forschungsbereich Wissenschaftsphilosophie,* Institut für Philosophie, Wien (Martin Kusch)
SoSe 2011	Tutor für den Seminarkurs „Wittgensteins *Philosophische Untersuchungen*“, Institut für Philosophie, Wien (Anja Weiberg)
WiSe 2010	Associated Research Assistant, *The Wittgenstein Archives at the University of Bergen,* Norway (Alois Pichler)
SoSe 2010	Tutor für den Seminarkurs „Wittgensteins *Philosophische Untersuchungen*“, Institut für Philosophie, Wien (Anja Weiberg)

Studium

2012 – 2013	Publizistik- u. Kommunikationswissenschaft (Bakk.), Universität Wien
2007 – 2012	Philosophie (Dipl.), Universität Wien
2010 – 2011	*Erasmus*auslandsaufenthalt, University of Bergen (NO)
2006 – 2009	Publizistik- u. Kommunikationswissenschaft (Bakk.), Universität Wien

Schule

2000 – 2005	Höhere Technische Bundeslehranstalt für Elektrotechnik, Wels
1996 – 2000	Bundesgymnasium, Ried im Innkreis
1992 – 1996	Volksschule, Altenhof am Hausruck