



universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

WIE VIEL PROZENT SIND DAS?

- Grundvorstellungen zu Prozent- und Bruchrechnung

Verfasserin

Sabrina Vincenz

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Studienkennzahl lt. Studienblatt: A 190 406 299

Studienrichtung lt. Studienblatt: Lehramt: Mathematik, Psychologie und Philosophie

Betreuer: Privatdoz. Mag. Dr. Bernhard Krön

Wien, am 8. Februar 2012

DANKSAGUNG

Ich möchte mich bei allen Menschen bedanken, die mich auf dem Weg meines Studiums begleitet und mich bei meiner Diplomarbeit unterstützt haben.

Insbesondere möchte ich mich bei meinem Betreuer Mag. Dr. Bernhard Krön bedanken, der mich während der gesamten Diplomarbeit unterstützt hat. Er hat mich in jeder Situation beraten und mir wertvolle Ratschläge gegeben. Eine bessere und vorbildlichere Betreuung hätte ich mir nicht vorstellen können. Vielen herzlichen Dank!

Besonders möchte ich mich an dieser Stelle auch bei meiner Familie bedanken. Ohne die finanzielle und persönliche Unterstützung meiner Eltern hätte ich mein Studium nicht absolvieren können. Außerdem möchte ich mich bei meiner ehemaligen Professorin Mag. Irene Strömer und meinen engsten Freundinnen Christina Hösch und Barbara Faltynek bedanken, die mich sehr unterstützten. Weiters danke ich meinen beiden Studienkolleginnen Eva-Maria Pfeifer und Theresa Schäfer für die gute Zusammenarbeit während des Studiums. Natürlich gilt auch ein ganz spezieller Dank meinem Freund, Christian Vogt, der mir beim Überarbeiten meiner Diplomarbeit stets zur Seite stand.

Ehrenwörtliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, die vorgelegte Arbeit selbständig verfasst und ausschließlich die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben. Alle wörtlich oder dem Sinn nach aus anderen Werken entnommenen Textpassagen und Gedankengänge sind durch genaue Angaben der Quellen in Form von Anmerkungen bzw. In-Text-Zitationen ausgewiesen, bei kursiven Textstellen handelt es sich um eine wörtliche Zitierung. Dies gilt auch für Quellen aus dem Internet, bei denen zusätzlich URL und Zugriffsdatum angeführt sind. Ferner versichere ich, diese Arbeit nicht bereits andernorts zur Beurteilung vorgelegt zu haben.

Obersdorf, Februar 2012

INHALTSVERZEICHNIS

1. Einleitung	7
2. Allgemeiner Teil	8
2.1 Definition	9
2.2 Ursprünge des Grundvorstellungskonzeptes in der deutschen Mathematikdidaktik	10
2.3 Grundvorstellungen im Mathematikunterricht.....	12
2.4 Ausbilden von Grundvorstellungen	14
2.5 Komponenten mathematischer Denkstile.....	16
2.6 Grundvorstellungen und fundamentale Ideen	17
2.7 Themenstellung und Ziele	19
2.8 Bildungsstandards	20
3. Grundvorstellungen zu Bruchzahlen.....	22
3.1 Arten von Grundvorstellungen.....	25
3.1.1 Grundvorstellung 1: Bruchzahl als Teil (eines Ganzen): $\frac{a}{b}$ (von 1).....	25
3.1.2 Grundvorstellung 2: Bruchzahl als relativer Anteil: $\frac{a}{b}$ von c.....	26
3.1.3 Grundvorstellung 3: Bruchzahl als Vergleichsoperator: $\frac{a}{b}$ mal so viel wie c, $\frac{a}{b}$ mal so groß wie c, $\frac{a}{b}$ mal so schwer wie c,	27
3.1.4 Grundvorstellung 4: Bruchzahl als Resultat einer Division: $\frac{a}{b} = a : b$	27
3.1.5 Grundvorstellung 5: Bruchzahl als Verhältnis: $\frac{a}{b} = a : b$ (a zu b).....	28
3.1.6 Grundvorstellung 6: Bruchzahl als Quasikardinalzahl: $\frac{2}{5} = 2$ Fünftel	29
3.1.7 Grundvorstellung 7: Bruchzahl als Quasiordinalzahl: $\frac{1}{5}$ jeder Fünfte / jede Fünfte	29
3.1.8 Grundvorstellung 8: Bruchzahl als absoluter Anteil: $\frac{4}{5}$ vier von fünf	30
Erweitern und Kürzen	30

3.1.9 Grundvorstellung 9: Erweiterung als Verfeinerung und Kürzen als Vergrößern der Einteilung	30
Addition und Subtraktion von Bruchzahlen.....	32
3.1.10 Grundvorstellung 10: Addieren als Zusammenfügen/-legen oder Hinzufügen, Subtrahieren als Wegnehmen.....	32
3.1.11 Grundvorstellung 11: Addieren als Vorwärtsschreiten und Subtrahieren als Rückwärtsschreiten	34
3.1.12 Grundvorstellung 12: Multiplikation als abgekürzte Addition	34
3.1.13 Grundvorstellung 13: Von-Deutung der Multiplikation	35
Multiplikation von Bruchzahlen.....	36
3.1.14 Grundvorstellung 14: Von-Deutung der Multiplikation	36
Division von Bruchzahlen.....	37
3.1.15 Grundvorstellung 15: Dividieren als Teilen (bzw. Verteilen).....	37
3.1.16 Grundvorstellung 16: Dividieren als Messen (bzw. Aufteilen)	38
3.2 Erfolgreiche Lösungen auf der Basis von Grundvorstellungen	40
3.3 Probleme der Bruchrechnung – fehlende Grundvorstellungen	42
3.4 Die Einführung der Dezimalbrüche – ein Selbstläufer?.....	44
3.4.1 Ausgewählte Ergebnisse	45
3.5 Grundvorstellungen zu Bruchzahlen – auch für leistungsschwache Schülerinnen und Schüler?	50
3.6 Bildungsstandardsaufgabe „Zahlengerade“	53
4. Grundvorstellungen zur Prozentrechnung.....	54
4.1 Grundvorstellungen zum Prozentbegriff.....	55
4.1.1 Grundvorstellung 1: Prozente als Hunderstelbruchteile.....	55
4.1.2 Grundvorstellung 2: Prozente als beliebige Bruchteile.....	55
4.1.3 Grundvorstellung 3: Vermehrung bzw. Verminderung um einen Faktor	57
Prozente als Zinseszinsrechnung.....	58
Prozente als Kapitalertragssteuer	61

4.2 Grundaufgaben zur Prozentrechnung.....	63
4.2.1 Algebraische Lösung versus Lösung als Dreisatzaufgabe	66
4.3 Der Proportionalitätsbegriff	69
4.3.1 Dreisatzaufgaben im täglichen leben	69
4.3.2 Dreisatzaufgaben als Hilfe zur Entwicklung des Proportionalitätsbegriffs	70
4.4 Kompetenzorientiertes Lernen der Prozentrechnung.....	71
4.4.1 Konkretisierung des Unterrichts.....	72
4.5 PISA- Ergebnisse zur Wahrscheinlichkeit und Statistik.....	75
4.6 Bildungsstandardsaufgaben zur Prozentrechnung	76
4.7 Prozente begreifen.....	78
4.7.1 Grundvorstellungen aufbauen	78
4.8 Ein Einkaufsbummel: Realistische Angaben zur Prozentrechnung.....	82
4.8.1 Fazit.....	84
4.9 Prozente in der Zeitung: Prozentangaben aus Texten und Grafiken entnehmen und überprüfen	85
4.9.1 Welche Artikel sind geeignet?	85
4.9.2 Wie verwende ich Fundstücke?.....	86
4.9.3 Wann setze ich Artikel ein?	87
4.10 Ein starkes Trio: Prozente mit Brüchen und Dezimalzahlen verknüpfen	88
4.11 Prozente erwürfeln: Wahrscheinlichkeit als Bruch, Dezimalzahl und in Prozent beschreiben.....	91
4.11.1 Eine Versuchsreihe durchführen	91
4.11.2 Absolute und relative Häufigkeiten.....	93
4.11.3 Relative Häufigkeiten in Prozent	93
4.11.4 Würfeln – würfeln – würfeln.....	95
4.12 Gut geschätzt ist halb gewonnen!.....	95
Prozente schätzen und begründen!	95
4.12.1 Brüche und Prozentsatz.....	96

4.12.2 Grafische Darstellungen	97
4.12.3 Realistische Situationen aufgreifen	98
4.12.4 Fazit	99
5. Fazit: Ziele und Wünsche	100
6. Literatur	101
5.1 Verwendete Bücher	101
5.2 Verwendete Zeitschriften	101
5.3. Verwendete Internetseiten	103
6. Lebenslauf	104
7. Abstract	105

1. EINLEITUNG

Wie man dem Titel meiner Diplomarbeit entnehmen kann, habe ich mich mit Grundvorstellungen zu Bruch- und Prozentrechnung beschäftigt. Das Ziel meiner vorliegenden Arbeit ist es vor allem, auf die Probleme der Grundvorstellungen von Schülerinnen und Schüler einzugehen, um diese in Folge im Unterricht in besonderer Weise berücksichtigen zu können. Zuerst, um dem Leser ein generelles Verständnis von Grundvorstellungen zu geben, werde ich auf die Verwendung und Definition eingehen. Anschließend werden die Grundvorstellungen der Bruchzahlen erläutert und einige Vorschläge, wie diese innerhalb einer Schulklasse umgesetzt werden können, gegeben. Den letzten Schwerpunkt habe ich auf die Prozentrechnung gelegt. Besonders in diesem Themenschwerpunkt liegen noch viele Defizite vor.

Die Leistung meiner Diplomarbeit beruht darauf, eine grobe Zusammenfassung der bis jetzt publizierten Literatur zu geben und eine Gegenüberstellung der offenen Probleme aufzugreifen.

In den letzten Jahren gab es zahlreiche Versuche, den Unterricht zu verändern und verständlicher zu machen. Trotzdem gibt es viele Menschen, die unter dem Bruch- bzw. Prozentbegriff keine Vorstellung besitzen. Dies sollte als Anlass genommen werden, die Problematik neu aufzugreifen und zu überarbeiten, um besonders österreichischen Schülerinnen und Schüler zu helfen.

Die Berichterstattung in den Medien zu den äußerst bedenklichen Ergebnissen in der PISA Studie hat mich dazu veranlasst, ein aktuelles Thema zu wählen. Mein Ziel ist es, diese vorhandenen Defizite aufzuzeigen, um in Folge Vorschläge zu geben, wie die Vorstellungsebene im Unterricht verständlicher gemacht werden kann.

2. ALLGEMEINER TEIL

Wozu benötigt man Grundvorstellungen? Meiner Meinung nach kann ohne sie Mathematik nicht richtig verstanden werden. Sie werden beinahe in jedem Stoffgebiet, insbesondere in der Schulmathematik, benötigt. Bereits in der vierten Klasse Volksschule beginnt man mit der Einführung dieses Stoffgebiets. Oft sind aber Volksschullehrer und Volksschullehrerinnen damit überfordert, sich mit den Grundvorstellungen näher auseinanderzusetzen und diese den Schülerinnen und Schülern auf einer logischen Basis zu vermitteln. Sie erwähnen diese inhaltlichen Vorstellungen oftmals nur kurz und gehen rasch in den Teil der Operationen über. Schulkinder verstehen daraufhin die einzelnen Schritte nicht und können sie nicht nachvollziehen, da der Lehrer bzw. die Lehrerin zu schnell zum regelhaft-formalen Teil übergeleitet hat und nicht auf die Vorstellungsebene eingegangen ist.

Welche Auswirkungen folgen, wenn man diese spezielle Ebene nicht berücksichtigt? Einzelne Prozesse werden nicht verstanden und es wird versucht, sich gewisse Regeln oder Vorgehensweisen einzuprägen und auswendig zu lernen. Oft klagen Schülerinnen und Schüler, dass sie Mathematik als das schwierigste Schulfach ansehen, da es das Komplexeste von allen sei. Warum dies so ist, fragen sich zahlreiche Lehrerinnen und Lehrer, Eltern, Direktorinnen, Direktoren und Schülerinnen und Schüler. Ich sehe den Hauptgrund im Fehlen der Grundvorstellungen, welche im Unterricht zu wenig behandelt wurden. Deshalb wird in diesem Bereich jetzt versucht, Änderungen vorzunehmen, damit auch die österreichischen Schülerinnen und Schüler ein besseres Verständnis mathematischer Themenkomplexe bekommen. Wichtig wäre es, kompetenzorientiertes Lernen in den Vordergrund zu stellen.

2.1 DEFINITION

„Viele Vorstellungen, die hinter mathematischen Inhalten stehen, sind so wichtig und für die Allgemeinbildung unverzichtbar, dass man sie als Grundvorstellungen bezeichnet.“
(MALLE, 2003/04, S. 7)

Es ist wichtig zu wissen, dass Grundvorstellungen nicht angeboren sind. Sie müssen im Mathematikunterricht schrittweise erlernt und erarbeitet werden.

Der Mathematikunterricht sollte in zwei Phasen aufgebaut sein:

1. Phase: inhaltlich-anschaulich
2. Phase: formal-regelhaft

Die erste Phase basiert darauf, die notwendigen Grundvorstellungen zu entwickeln, wobei das Arbeiten mit bestimmten Formeln und Regeln vermieden wird. Schülerinnen und Schüler sollen hier eine intuitive Vorstellungsebene entwickeln und logische Schlüsse erkennen.

In der zweiten Phase beschäftigt man sich mit dem jeweiligen formalen Kalkül und versucht es einzuüben. Das Hauptproblem besteht darin, dass man auf die erste Phase oft zu wenig eingeht und sie lediglich kurz erwähnt. Das bedeutet, dass den meisten Schülerinnen und Schülern das tatsächliche Verständnis fehlt, was zur Folge hat, dass sie sich eine bestimmte Vorgehensweise zwar einprägen, sich aber nicht bewusst sind, weshalb sie jene Schritte vollziehen. Die Konsequenzen daraus hat man in den letzten Jahren den Ergebnissen der PISA Studie entnehmen können. Es wäre überraschend, falls man ohne Grundvorstellungen bessere Resultate erzielen würde. (Vgl. MALLE, 2004, S. 4)

2.2 URSPRÜNGE DES GRUNDVORSTELLUNGSKONZEPTES IN DER DEUTSCHEN MATHEMATIKDIDAKTIK

Bevor der Versuch eines Grundvorstellungskonzeptes gestartet wurde, muss man sich einige Fragestellungen genau überlegen:

„Gibt es überhaupt d a s Grundvorstellungskonzept, oder gibt es viele unterschiedliche, vielleicht sogar gegensätzliche Konzepte?

Lassen sich Ursprünge dieser Ideen ausmachen, und wo liegen diese?

Welche Rolle spielt dabei die Psychologie, welche die mathematische Fachwissenschaft?

Lassen sich Elemente der Kontinuität, der Entwicklung oder eines didaktischen Fortschrittes herausarbeiten?

Welche Rolle spielen diese Kategorien in Theorie und Praxis der verschiedenen mathematikdidaktischen Traditionen bzw. Richtungen?

Worin liegt dabei ihr Erklärungswert, wo ihr Anwendungsbereich?

Inwieweit lassen sich daraus Perspektiven für Theorie und Praxis des heutigen Mathematikunterrichts ableiten?“ (VOM HOFÉ, 1995, S. 15)

Im Mathematikunterricht wurden sehr oft Fragen der Sinnhaftigkeit bezüglich eines bestimmten mathematischen Sachverhaltes gestellt. Daraufhin versuchte man, das Fehlen zahlreicher Grundkenntnisse der Schülerinnen und Schüler durch neu entwickelte Methoden zu bewältigen, doch in vielen Fällen erreichte man diese Ziele nicht. Grund dafür waren zum Teil zu hohe Erwartungen an den Lehrer bzw. die Lehrerin oder an die Schüler bzw. Schülerinnen. Oft gab es Reflexionen über die verschiedenen Methoden, wobei manche erfolgreich in didaktische Kompetenzen umgesetzt werden konnte. Diese wurden in den Begriff der „Grundvorstellung“ zusammengefasst. Bei einer Grundvorstellung zu einem bestimmten mathematischen Sachverhalt gibt es unterschiedliche Schwerpunktsetzungen. Es geht dabei um eine bestimmte Beziehung zwischen individuellen Lernprozessen, mathematischen Inhalten und realen Sachzusammenhängen.

(Vgl. VOM HOFÉ, 1995, S. 15/16)

„So drücken etwa die Begriffe ‚Vorstellung‘, ‚Anschauung‘ oder ‚Verinnerlichung‘ jeweils eine Tätigkeit des Individuums aus, die auf reale (sichtbare, fühlbare bzw. erfahrbare) Gegenstände oder Handlungsabläufe gerichtet ist und eine psychische Repräsentation dieser (vorgestellten, angeschauten oder verinnerlichten) Elemente der Außenwelt zur Folge hat.“ (VOM HOFE, 1995, S. 16)

Zusätzlich ist zu erwähnen, dass auch das Ergebnis einer Aufgabenstellung als „Vorstellung“, „Anschauung“ oder „Verinnerlichung“ bezeichnet wird und in einem praktischen Bezug zur Realität steht. Die Entwicklung mit der Auseinandersetzung dieser drei Begriffe beginnt bereits in der Rechenmethodik der Volksschule, wo die Ursprünge der Grundvorstellungen und somit auch das tatsächliche Grundvorstellungskonzept entstehen. Speziell im Bereich des Rechnens und Operierens finden sich zahlreiche Überlegungen zu den Begrifflichkeiten mathematischer Inhalte, wie man diese exakt entwickeln und konkretisieren soll. Man wollte versuchen, zuerst die Begriffe der konkreten Zahlen und Größen und die damit zusammenhängenden Grundvorstellungen im Vordergrund zu positionieren. Später untersuchte man dann, inwieweit Schülerinnen und Schüler von dieser Ebene aus Verknüpfungen zu anderen Gebieten erkennen und anwenden können. Nebenbei angemerkt ist die Vorstellungsebene von mathematischen Inhalten weitaus älter als die Rechenmethodik der Volksschule. Teilweise findet man diverse Vorstellungen auch in strukturell-systematischen Anleitungen wieder, aus denen sich schließlich ein Leitfaden des Mathematikunterrichts in höheren allgemeinen oder berufsbildenden Schulen entwickelt. Obwohl man versucht hat, einen psychologischen Bedeutungshintergrund nicht außer Acht zu lassen, konnte man die Semantik im Mathematikunterricht erst in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts feststellen, wobei ab diesem Zeitpunkt auch eine zunehmende Berücksichtigung von Fachkompetenz im Bereich der Volksschulmathematik nicht außer Acht gelassen wurde. (Vgl. VOM HOFE, 1995, S. 16/17/18)

2.3 GRUNDVORSTELLUNGEN IM MATHEMATIKUNTERRICHT

Universitätsprofessor Dr. Günther MALLE hat sich sehr intensiv mit den Grundvorstellungen im Mathematikunterricht auseinandergesetzt. Die einleitende Frage an die Studierenden in seinen Seminaren lautet oft folgendermaßen: „Sei $f(x) = x^2$. Wie groß ist dann $f'(3)$?“ (MALLE, 2004, S. 1)

Jeder, der im Mathematikunterricht aufgepasst hat, sollte mit der richtigen Antwort keine Schwierigkeiten haben. Ein Schüler oder eine Schülerin würde als Antwort schreiben: $f'(x) = 2x$, $f'(3) = 6$. (MALLE, 2004, S. 1). Diese formale Schreibweise müsste daher jedem klar sein, doch dann sollte man noch die Zusatzfrage „*Sie haben die Zahl 6 erhalten. Jetzt sagen Sie mir bitte, was diese Zahl bedeutet!*“ beantworten können (MALLE, 2004, S.1). Das verblüffende Resultat dieser Frage war, dass kaum jemand eine Antwort darauf wusste. Manchmal murmelt ein Schüler oder eine Schülerin etwas von einer Steigung der Tangente an der Stelle drei, doch das ist relativ selten. Von einer anderen (zum Beispiel geometrischen) Deutung oder dem Begriff einer Ableitung bekommt man nichts zu hören.

Genau diese Situationen sollten den Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrern zu denken geben. Es wird an den meisten Schulen der formal-regelhafte Teil viel zu sehr ins Rampenlicht gestellt und der inhaltlich-anschauliche Teil außer Acht gelassen. Das Kernproblem liegt dann schließlich darin, dass die meisten Schülerinnen und Schüler sich nur noch auf die Operationen beim Lösen eines Beispiels beschränken und nicht mehr logisch überlegen, was man damit nun tatsächlich zeigen möchte bzw. was hinter dieser Aufgabe steckt. Man vergisst darauf, anschauliche und intuitive Vorstellungen zu entwickeln und konzentriert sich lediglich auf die formal-regelhafte Ebene.

Als Beispiel könnte man hier das Multiplizieren anführen. Schulkinder können das schriftliche Multiplizieren nach einigen Aufgaben richtig ausführen, da sie sich ein gewisses Schema angeeignet haben. Sie können nun alle Multiplikationen lösen, doch sie haben keine Ahnung davon, was sie tatsächlich machen. Die Vorstellungsebene wird hier nicht berücksichtigt. Diese Entwicklung läuft in der Unterstufe weiter, als Beispiel hierfür könnte man die Multiplikation von Bruchzahlen nehmen. Schülerinnen und Schüler wissen zwar, wie man zwei Brüche miteinander multiplizieren kann, doch die „Von-Deutung“ bei der Multiplikation von Bruchzahlen möchte fast niemand verstehen. (Vgl. MALLE, 2004, S. 1)

In der Didaktik der Mathematik versucht man daher, sich immer mehr mit dem Begriff der „Grundvorstellung“ zu beschäftigen. Einige Mathematikerinnen und Mathematiker der Universität Wien haben in den letzten zehn Jahren ein Forschungsprogramm durchgeführt, bei dem sie sich auf diese Thematik konzentriert haben. Dabei wurden in allen Bereichen der Schulmathematik Listen zu den Grundvorstellungen entwickelt und zusätzliche Kontrollaufgaben gestellt. Diese Aufgaben dienten dazu, dass man das Verständnis der Schülerinnen und Schüler überprüfen konnte. Es wurden daraufhin empirische Untersuchungen durchgeführt, wobei man mit den Ergebnissen nicht zufrieden war, denn beinahe keine Schülerin bzw. Schüler konnte eine Grundvorstellung zu einem Stoffgebiet in der Mathematik vorweisen. Daher muss in diesem Bereich noch einiges getan werden, denn in österreichischen Schulen sind Grundvorstellungen und die damit verbundenen Kompetenzen zum Teil noch sehr unterentwickelt bzw. noch nicht vorhanden. (Vgl. MALLE, 2004, S. 1)

Wie man bereits der Definition entnehmen hat, sind Grundvorstellungen für die Allgemeinbildung notwendig. Die Gründe dafür sind, dass sie für das mathematische Problemlösen und für das Anwenden der Mathematik unverzichtbar sind. Speziell beim zweiten Aspekt, dem Anwenden der Mathematik, bilden die Grundvorstellungen ein wichtiges Bindungsglied zwischen dem mathematischen Modell und der zu beschreibenden Situation. Dabei werden gewisse Grundvorstellungen in der Situation oder Aufgabenstellung erkannt, die man anschließend im mathematischen Modell wieder erkennt und daraufhin anwendet. Hingegen würde das Nichtvorhandensein von Grundstellungen dazu führen, dass man die einzelnen Schritte nicht nachvollziehen kann und somit auch keinen fortschreitenden Prozess erreicht. Man kreist dann immer wieder um das Grundproblem.

(Vgl. MALLE, 2003/04, S. 7)

Es drängt sich die Frage auf, wie sich der Begriff einer Grundvorstellung theoretisch einordnen lässt und worin der genaue didaktische Nutzen besteht. Als Antwort auf diese Frage würden die meisten Mathematiker bzw. Mathematikerinnen auf die elementaren Beispiele Bezug nehmen. Andererseits versteht man darunter aber auch einen komplexeren Begriff, der mit vielen Beziehungszusammenhängen zu mathematischen, pädagogischen, psychologischen und philosophischen Problemfeldern assoziiert wird.

(Vgl. VOM HOF, 1995, S. 13)

Meistens wird der Begriff einer Grundvorstellung in der didaktischen Literatur exemplarisch oder pragmatisch verwendet. Man hat zwar versucht, der systematischen Herkunft der Grundvorstellungen nachzugehen und die damit in Verbindung stehenden theoretischen Implikationen zu finden, jedoch war man nicht sehr erfolgreich. Das Kernproblem liegt darin, dass dem pragmatisch-exemplarischen Umgang in der Praxis einige Defizite einer theoretisch-konzeptionellen Einordnung gegenüber stehen. Der Begriff „Grundvorstellung“ wird in der mathematisch-didaktischen Literatur oft mit der Beschreibung zentraler didaktischer Problemfelder assoziiert. Daher sind alle Bereiche, die man mit den Grundvorstellungen verbindet, von zentraler didaktischer Bedeutung. Daraus ergibt sich, dass Versuche im Sinne von theoretisch-konzeptionellen Aufarbeitungen ein wesentlicher Beitrag zur Klärung von grundlegenden didaktischen Zusammenhängen sein können.

(Vgl. VOM HOFE, 1995, S. 13)

Grundvorstellungen beschreiben fundamentale Begriffe bzw. Verfahren in der Mathematik und klären uns über die genaue Bedeutung dieser Inhalte in der Realität auf. Es handelt sich außerdem um *„Beziehungen zwischen mathematischen Strukturen, individuell-psychologischen Prozessen und realen Sachzusammenhängen oder kurz: Beziehungen zwischen Mathematik, Individuum und Realität.“* (VOM HOFE, 1995, S. 98)

2.4 AUSBILDEN VON GRUNDVORSTELLUNGEN

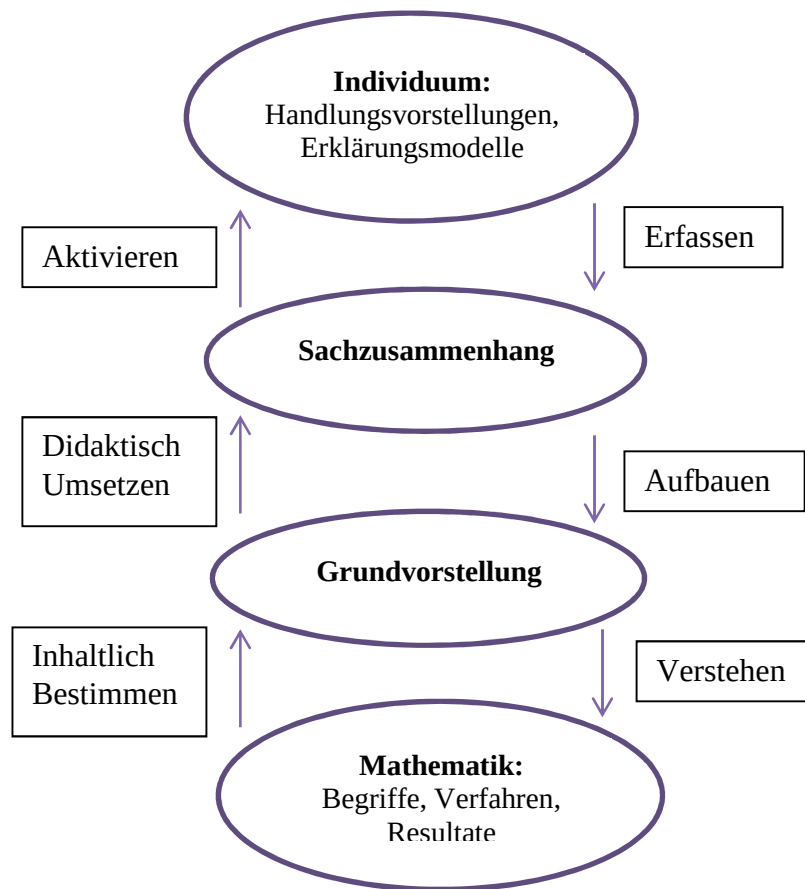
Hierbei muss man vorerst eine Unterscheidung treffen, nämlich zwischen „normativen Grundvorstellungen“ und „individuellen Erklärungsmodellen“.

(Vgl. VOM HOFE, 1995, S. 123)

„Die Schülervorstellungen geben dabei Aufschluss über die individuellen Erklärungsmodelle des Schülers, die in das System seiner Erfahrungsbereiche eingebunden und entsprechend aktivierbar sind.“ (VOM HOFE, 1995, S. 123)

„Bei der normativ geprägten Grundvorstellung handelt es sich hingegen um eine didaktische Kategorie des Lehrers, die im Hinblick auf ein didaktisches Ziel aus inhaltlichen Überlegungen hergeleitet wurde und Deutungsmöglichkeiten eines Sachzusammenhangs bzw. dessen mathematischen Kerns beschreibt.“

(VOM HOFE, 1995, S. 123)



(VOM HOFE, 1995, S. 123)

Die linke Seite dieser Skizze stellt die didaktischen Entscheidungen dar, wobei man hier die Mathematik als Fundament ansieht und sich danach durch inhaltliche Bestimmungen den Grundvorstellungen annähert. Durch das didaktische Umsetzen gelangt man schließlich zu den Sachzusammenhängen, die aktiviert werden müssen, um auf das Individuum eingehen zu können.

Auf der rechten Seite kann man die einzelnen Schritte des Schülers bzw. der Schülerin erkennen. Der Ausgangspunkt ist das Individuum, bei dem der erste Prozess aus dem Erfassen besteht, um zu einem Sachzusammenhang zu gelangen. Von dort aus wird dann ein Aufbau kreiert und zu den Grundvorstellungen übergeleitet. Anhand dieser wird die Mathematik immer verständlicher und nachvollziehbarer.

Es stellt sich jedoch die Frage, ob Mathematik auch ohne einen bestimmten Sachzusammenhang existieren kann. Betrachten wir als Beispiel die Primfaktorzerlegung. Man führt sie im Prinzip ohne einen bestimmten Sachzusammenhang durch. Aber im Unterricht könnte ein Schüler oder eine Schülerin fragen, warum wir diese Thematik durchnehmen, wenn es keine weiteren Verbindungen zu diesem Schwerpunkt gibt. Daraufhin könnte ein Lehrer oder eine Lehrerin erwidern, dass man die Primfaktorzerlegung auch für spätere mathematische Sachverhalte benötigt, wie zum Beispiel für die Bruchrechnung oder beim Vereinfachen von bestimmten Wurzelzahlen. Das heißt, es muss zwar nicht zu jedem mathematischen Inhalt einen Sachverhalt geben, jedoch möchten die Schülerinnen und Schüler Informationen darüber erhalten, wofür man einen bestimmten Bereich der Mathematik lernt. Schließlich gibt man eine Erklärung ab und versucht, auf einen Sachverhalt hinzuweisen. Daher stellt der Sachzusammenhang eine sehr wichtige Bedeutung im Unterricht dar.

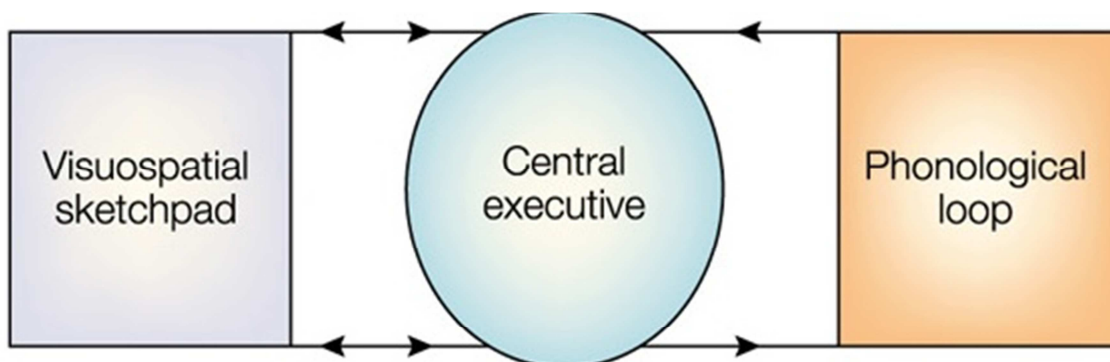
2.5 KOMPONENTEN MATHEMATISCHER DENKSTILE

Der Mathematikdidaktiker Riding unterscheidet zwischen zwei verschiedenen Dimensionen der Kognition:

1. Wholist-Analytic (ganzheitlich-zergliedernde) Dimension
2. Verbal-Imagery (verbal-bildliche) Dimension

(Vgl. Borromeo Ferri, 2003, S. 143)

Man könnte Ridings Theorie mit der Konzeption des Arbeitsgedächtnisses von Baddeley und Hitch (1974) gleichsetzen. Baddeley spricht von einem Aufmerksamkeitssystem namens „zentrale Exekutive“, welches aus dem visuell-räumlichen Notizblock und der artikulatorischen bzw. phonologischen Schleife besteht.



(TRIMMEL, 2009, S. 72)

1) *Visuospatial sketchpad*

Der visuell-räumliche Notizblock verarbeitet visuell-räumliche Information (Farbe, Ort, Form).

2) *Central Executive*

Die zentrale Exekutive leitet Aufmerksamkeitsressourcen an die beiden „Sklavensysteme“ (die phonologische Schleife und den visuell-räumlichen Notizblock) weiter und ist modalunabhängig.

3) *Phonological loop*

Die phonologische Schleife besteht aus einem artikulatorischen Kontrollsystem und einem phonologischen Speicher. Diese beiden Subsysteme handeln vom Sprechen und vom Verstehen der Sprache. Es gibt also einerseits eine Artikulationsmöglichkeit, um sprechen zu können und andererseits einen phonologischen Speicher, um bestimmte Inhalte verstehen zu können bzw. Informationen aufzunehmen.

(Vgl. TRIMMEL, 2009, S. 72/73)

Demnach ist es wichtig, dass im Unterricht viel mit unterschiedlichen Darstellungsformen gearbeitet wird, sodass auch der visuell-räumliche Notizblock beansprucht wird. Viele Kinder finden es einfacher, wenn ein mathematischer Sachverhalt zusätzlich durch eine bildliche Darstellung erklärt wird. Dadurch werden alle Teile des Arbeitsgedächtnisses angesprochen und die Informationen besser verarbeitet.

2.6 GRUNDVORSTELLUNGEN UND FUNDAMENTALE IDEEN

Die Ideen zu den Grundvorstellungen in der Mathematik haben sich auch erst während der konkreten Auseinandersetzung zwischen theoretischen und praktischen Aufgabenstellungen entwickelt. Es wurden dazu unterschiedlichste Methoden eingesetzt, die sich immer wieder an didaktischen traditionellen Aufgaben festhalten. Dabei spielen natürlich auch empirische Erfahrungen von Mathematikdidaktikern eine wesentliche Rolle.

(Vgl. VOM HOFER, 1995, S. 97)

„Die Grundvorstellungsidee beschreibt Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und dem Phänomen der individuellen Begriffsbildung. In ihren unterschiedlichen Ausprägungen charakterisiert sie mit jeweils unterschiedlichen Schwerpunkten insbesondere drei Aspekte dieses Phänomens:

- ✓ *Sinnkonstituierung eines Begriffs durch Anknüpfung an bekannte Sach- oder Handlungszusammenhänge bzw. Handlungsvorstellungen*
- ✓ *Aufbau entsprechender (visueller) Repräsentationen bzw. ‚Verinnerlichungen‘, die operatives Handeln auf der Vorstellungsebene ermöglichen*
- ✓ *Fähigkeit zur Anwendung eines Begriffs auf die Wirklichkeit durch Erkennen der entsprechenden Struktur in Sachzusammenhängen oder durch Modellieren des Sachproblems mit Hilfe der mathematischen Struktur“*

(VOM HOFE, 1995, S. 97/98)

Die Ideen der Grundvorstellungen werden auch als Vermittlungselemente bzw. als Übergangsobjekte zwischen der Mathematik und der Welt von individuellen Begriffen des Schülers bzw. der Schülerin bezeichnet. Lernende müssen erkennen, dass sich Grundvorstellungen und ihre damit verbundenen Ideen weiterentwickeln und sich zum Teil auch gegenseitig ergänzen. Man könnte demnach sagen, sie haben eine Art dynamischen Charakter. (Vgl. VOM HOFE, 1995, S. 98)

In der Didaktik der Mathematik wird zwischen Grundvorstellungen und fundamentalen Ideen unterschieden. Die fundamentalen Ideen basieren auf dem Fachsystem und beinhalten fachtypische Inhalte, Verfahren und Resultate und sind unabhängig von einer bestimmten Schulform, Klassenstufe oder Lerngruppe. Es geht darum, ein Fachgebiet in einer globalen Sichtweise zu repräsentieren, das gilt vom Kindergarten bis hin zum Abitur. Die fundamentale Idee umfasst also mehrere Kategorien, die in einer gewissen Art und Weise sachlogische Strukturierungen widerspiegeln. Die Grundvorstellungen hingegen konzentrieren sich viel mehr auf den Lernprozess der einzelnen Schülerinnen und Schüler. Sie sind zwar zum Teil auch an sachlogischen Inhalten ausgerichtet, doch die inhaltlichen Kriterien sind zugleich an ein bestimmtes didaktisches Ziel gebunden.

Das Konzept der Grundvorstellungen bezieht sich somit auf konkrete Sachverhalte einer Lerngruppe und geht auf die Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler und auf ihren kognitiven Entwicklungsstand ein. (Vgl. VOM HOFE, 1995, S. 128)

Betrachtet man nun die individuellen Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler, welche bei bestimmten Aufgabestellungen auftreten, so gelangt man von den Grundvorstellungen schrittweise zu den konkreten Bedingungen eines individuellen Lernprozesses.

„Durch die Möglichkeit der vergleichenden Analyse normativer und deskriptiver Elemente entwickelt das Grundvorstellungskonzept dabei [...] eine direkt umsetzbare konstruktive Kraft.“ (VOM HOFER, 1995, S. 128)

2.7 THEMENSTELLUNG UND ZIELE

Es ist äußerst wichtig, dass man im mathematischen Bereich in allen Schulstufen einen Bezug zur Praxis herstellt und womöglich eine Verbindung zur momentanen Lebenssituation der Schülerinnen und Schüler sucht. Auf diese Art und Weise kann man im Unterricht womöglich einfacher von der Ergebnisorientierung zu einem Lösungsprozess gelangen. Außerdem sollte man durch die Beschäftigung mit mathematischen Themen hin zu Auseinandersetzungen mit Aspekten der Allgemeinbildung kommen. In vielen Situationen haben Schülerinnen und Schüler das Gefühl, dass der Mathematikunterricht aus zahlreichen komplexen Schwerpunkten besteht, wobei die einzelnen Beispiele fortlaufend immer schwieriger werden. Viele Schulkinder verstehen nicht, für welchen Zweck sie diese komplexen Aufgaben und ihre Lösungswege in der Zukunft benötigen, da für sie mathematische Aufgaben oft keinen Sinn ergeben. (Vgl. MALLAUN, 2006, S. 5)

„Der wahrscheinlich größte Fehler des traditionellen Mathematikunterrichts besteht darin, dass zu schnell auf eine formal regelhafte Ebene aufgestiegen wird, bevor noch ausreichende intuitive und anschauliche Vorstellungen vom jeweiligen Stoff erworben werden.“ (MALLE 2004, S. 4)

2.8 BILDUNGSSTANDARDS

Wofür steht der Begriff „Bildungsstandards im Mathematikunterricht“? Es handelt sich hierbei um Standards, die versuchen, Leistungen im Mathematikunterricht zu messen. Außerdem werden dadurch Fähigkeiten und Kenntnisse überprüft. Es geht nicht darum, mathematische Bildung zu definieren oder ein standardisiertes Verfahren zu entwickeln. Das Ziel beruht auf der Identifizierung und Beschreibung von mathematischen Fähigkeiten, die für jeden einzelnen Schüler bzw. jede einzelne Schülerin unverzichtbar sind. Dadurch wird mathematische Bildung möglich gemacht. Falls ein Lehrer oder eine Lehrerin im Mathematikunterricht lediglich erzielt, dass Schülerinnen und Schüler Standardaufgaben rasch bewältigen können, so hat er oder sie etwas missverstanden. Der Erfolg sollte hingegen darauf beruhen, dass Lösungswege begründet werden können und weiters ein generelles Verständnis aufgebaut wird.

(Vgl. NEUREITER, 2010, S. 6/7)

„Eine weitgehend unbestrittene Aufgabe der (Pflicht-)Schule ist es, die Schülerinnen und Schüler auf das Leben in unserer Gesellschaft vorzubereiten, ihnen das für eine selbstbestimmte und aktive Teilnahme am Leben in dieser Gesellschaft notwendige Rüstzeug mitzugeben. Für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe I wird es also vor allem darum gehen, die Lernenden mit jenem mathematischen Wissen und Können auszustatten, das für eine aktive, unbehinderte, reflektierte, kritische, emanzipierte Teilnahme am Leben in unserer Gesellschaft erforderlich/unerlässlich ist.“

(NEUREITER, 2010, S. 7)

Im Weiteren werde ich kurz die verschiedenen Bereiche der Bildungsstandards erläutern, um die Abkürzungen (welche in späteren Beispielen zu finden sind) zu erklären. Die Bildungsstandards sind ein hochaktuelles Thema, welches bereits im Unterricht vermittelt wird. Selbst bei den Grundvorstellungen zu Bruch- und Prozentrechnung kommen sie oft zum Vorschein. Sie stellen eine gute Basis dar und dürfen nicht außer Acht gelassen werden.

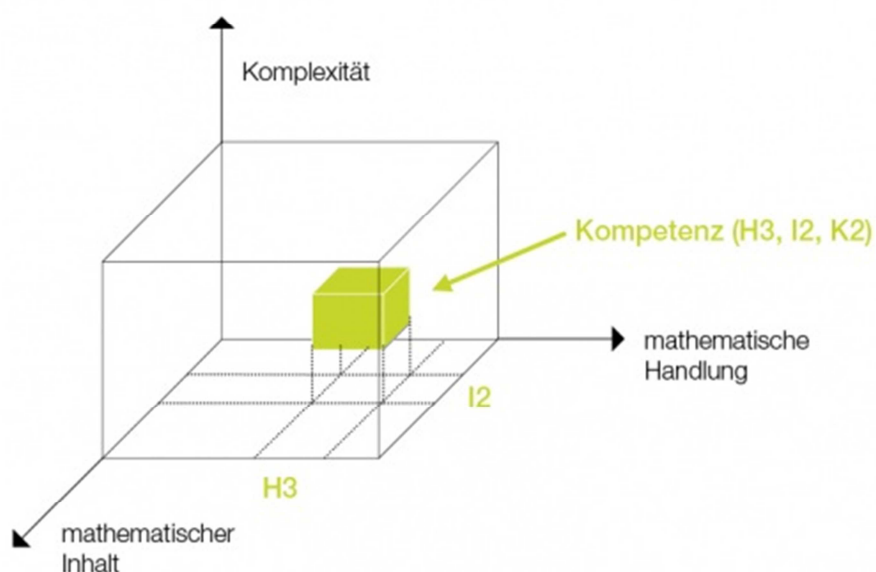
Bei den Bildungsstandards gibt es insgesamt drei verschiedene Bereiche, die nochmals in einige Punkte untergliedert sind:

Inhaltsbereich	Handlungsbereich	Komplexitätsbereich
• I1: Zahlen und Maße	• H1: Darstellen, Modellbilden	• K1: Einsetzen von Grundkenntnissen und -fertigkeiten
• I2: Variable, funktionale Abhängigkeiten	• H2: Rechnen, Operieren	• K2: Herstellen von Verbindungen
• I3: Geometrische Figuren und Körper	• H3: Interpretieren	• K3: Einsetzen von Reflektionswissen, Reflektieren
• I4: Statistische Darstellung und Kenngrößen	• H4: Argumentieren, Begründen	

(www.BIFI.Ee.at/node/49, 16.12.2011)

Dazu gibt es ein Kompetenzmodell, das sich aus der Handlungsdimension, der Inhaltsdimension und der Komplexitätsdimension zusammensetzt.

Kompetenzmodell Mathematik 8. Schulstufe



(www.BIFI.Ee.at/node/49, 16.12.2011)

3. GRUNDVORSTELLUNGEN ZU BRUCHZAHLEN

Bereits Ende der vierten Klasse Volksschule werden die Bruchzahlen zum ersten Mal eingeführt. Für die Schülerinnen und Schüler ist eine Bruchzahl etwas Neues, das sie höchstwahrscheinlich noch nie in dieser Art und Weise gesehen haben. Bei der Einführung eines neuen Denkobjektes in der Mathematik ist es besonders wichtig, es sehr präzise zu erklären und schrittweise vorzugehen. Es ist besser, man erklärt etwas doppelt oder dreifach, auch wenn man dabei das Gefühl hat, dass an dieser Stelle der Unterricht stockt und man nicht vorwärts kommt. Geht man aber zu rasch mit dem neuen Stoffgebiet voran und hofft lediglich, den zeitlichen Rahmen des Lehrplans einzuhalten, kann das bedenkliche Folgen haben, die womöglich später nicht mehr oder nur mehr sehr schwer zu beheben sind. Manche Mathematikprofessoren und Mathematikprofessorinnen sind nach einiger Zeit glücklich, dass sie der Einführung bestimmter mathematischer Themen sehr viel Zeit gewidmet haben, da ihre bzw. seine Schülerinnen und Schüler nun tatsächlich eine Grundvorstellung (zum Beispiel) der Bruchzahlen entwickelt haben und für sie manche logischen Aufgaben einfach zu lösen sind, während andere absolut keine Lösungsansätze haben.

„Bruchrechnen ohne dahinter stehende Vorstellungen ist ein totes Wissen, das man nicht anwenden kann. Welche Vorstellungen sind dabei so wichtig, dass man sie als Grundvorstellungen bezeichnen kann?“ (MALLE, 2004, S. 4)

Den bereits zuvor erwähnten Fehler vom zu raschen Übergang auf eine formal-regelhafte Ebene kann man besonders bei der Bruchrechnung gut erkennen. In zahlreichen Heften von Schülerinnen und Schülern liest man bereits am Anfang *„Man multipliziert zwei Brüche, indem man...“* (MALLE, 2004, S. 4) oder ähnliches. Das bedeutet, dass bereits bei der Einführung eines neuen Denkobjektes Regeln verwendet werden, mit denen die Schülerinnen und Schüler dann versuchen, die Aufgabenstellung zu bewältigen. Um diese Regeln zu erlernen, werden viele Analogaufgaben gestellt, die man immer mit derselben Vorgehensweise löst. Das Bedenkliche dabei ist, dass man in den Heften keine Abbildungen von Torten oder anderen geeigneten Skizzen sieht, die den Schülerinnen und Schülern eine bildhafte Darstellung vermitteln würde. (Vgl. MALLE, 2004, S. 4)

Die bloße Einführung der Bruchrechnung - ohne eine gewisse Entwicklung einer Vorstellungsebene - ergibt keinen Sinn. Man lernt lediglich Regeln auswendig und versteht das Stoffgebiet nicht. Die Folge davon ist eindeutig negativ, denn es handelt sich hierbei um die Bestätigung für die Annahme, dass der Mathematikunterricht sehr komplex und unverständlich sei. Bei dieser Art der Vorgehensweise ist dieses Argument auch gut nachvollziehbar. Bei der Einführung der Bruchzahlen sollte man in einer „inhaltlich-anschaulichen“ Phase eine Grundlage zur Vorstellung und Rechnung von Bruchzahlen entwickeln. Später, nachdem die erste Phase intensiv und ausführlich behandelt wurde, kann man in die zweite Phase übergehen. Diese nennt man „formal-regelhaften Phase“, in der das formale Bruchrechnen anhand von bestimmten Vorgehensweisen erlernt werden soll. So sollte sich die Vorstellungsebene in der ersten Klasse Gymnasium bereits vollständig entwickelt haben, sodass man in der zweiten Klasse anschließend in die Operationsphase übergehen kann (Vgl. MALLE, 2004, S. 4). Denn in der 6. Schulstufe bilden die positiven rationalen Zahlen bzw. Bruchzahlen das Kernthema des Mathematikunterrichts, wie man dem Lehrplan entnehmen kann (Vgl. PADBERG, 1995, S.10).

„Arbeiten mit Zahlen und Maßen“ (<http://www.bmukk.gv.at/medienpool/789/ahs14.pdf>)

„- Festigen und Vertiefen der Fähigkeiten beim Arbeiten mit positiven rationalen Zahlen, um vielfältige und komplexere Probleme in Sachsituationen bearbeiten zu können, Rechnen mit Brüchen (mit kleinen Zählern und Nennern), damit die Rechenregeln im Hinblick auf die Algebra sicher beherrscht werden,

- diese Rechenregeln für das Bruchrechnen begründen können,*
- Bruchdarstellung in Dezimaldarstellung überführen und umgekehrt,*
- wichtige Teilbarkeitsregeln kennen und anwenden können“*

(<http://www.bmukk.gv.at/medienpool/789/ahs14.pdf>)

Laut Friedrich Padberg gibt es vor allem zwei zentrale Punkte, weshalb die Bruchrechnung in der Schulmathematik eine äußerst wichtige Rolle spielt. Die erste Anschauung umfasst die genaue Behandlung von Bruchzahlen, um zu einer Lösung von praktischen bzw. alltäglichen Problemen unseres Lebens zu gelangen. Man benötigt sie zum Beispiel für verschiedene Messungen, bei denen die natürlichen Zahlen nicht mehr ausreichen.

(Vgl. PADBERG, 1995, S. 11)

Es handelt sich hierbei vor allem um Berechnungen von Volumina oder Flächen, Geldwerten und beispielsweise Zeitspannen. Bei diesen Berechnungen treten Dezimal- bzw. Bruchzahlen auf. Bei Temperaturskalen treten auch Bruchzahlen bzw. Dezimalzahlen auf, man kann sich auch hier nicht mehr auf die natürlichen Zahlen beschränken. Außerdem braucht man beim Teilen von Größen neu eingeführte Denkobjekte. Jemand möchte den fünften Teil einer sechs Meter langen Strecke berechnen, so wird er bzw. sie ohne Bruchzahlen nicht sehr erfolgreich sein. Außerdem kann eine Bruchzahldarstellung für eine Zeiteinheit sehr von Vorteil sein ($\frac{1}{4}$ Stunde, $\frac{1}{2}$ Liter). Als dritten Aspekt blicken wir zum Beispiel auf einen alltäglichen Einkauf, wo man häufig das Addieren oder Vervielfachen von Dezimalzahlen anwenden muss.

(Vgl. PADBERG, 1995, S. 11)

Um nun einen Blick auf die zweite Anschauung zu werfen, wenden wir uns den innermathematischen bzw. innerschulmathematischen Gründen zu. Bei den natürlichen Zahlen sind Multiplikationen und Additionen in unbeschränkter Weise durchführbar. Anders hingegen ist es bei der Division bzw. Subtraktion. Diese beiden Rechenvorgänge können nicht immer innerhalb dieses Zahlenbereichs ausgeführt werden, daher muss man eine Zahlenbereichserweiterung anstreben. Es kommt zu der Einführung der Bruchzahlen, wobei man ein Umdenken bei den Schülerinnen und Schülern hervorrufen muss. Der Spezialfall, dass man alle Rechenoperationen ohne Einschränkungen (ausgenommen ist die Division durch Null) durchführen kann, wird später behandelt, nämlich nach der Einführung der negativen rationalen Zahlen. (Vgl. PADBERG, 1995, S. 12)

Ein weiterer innermathematischer bzw. innerschulmathematischer Grund der Anwendung von Bruchzahlen umfasst die Bereiche der Prozent-, Zins-, Schluss-, Verhältnis- und Wahrscheinlichkeitsrechnung, doch es gibt noch unzählige weitere Anwendungsgebiete in der Mathematik. Diese Themenschwerpunkte werden oft in einem eingeschränkten Zeitrahmen mit der Bruchrechnung durchgenommen und sind sehr anwendungsorientiert. Besonders wichtig ist die korrekte Auffassung der Bruchrechnung für die Anwendung von bestimmten Formeln, wie beispielsweise die Zinsformel oder die Volumsformel in der Geometrie. Außerdem wird die Bruchrechnung auch für die Berechnung von Funktionswerten verwendet. (Vgl. PADBERG, 1995, S. 12/13)

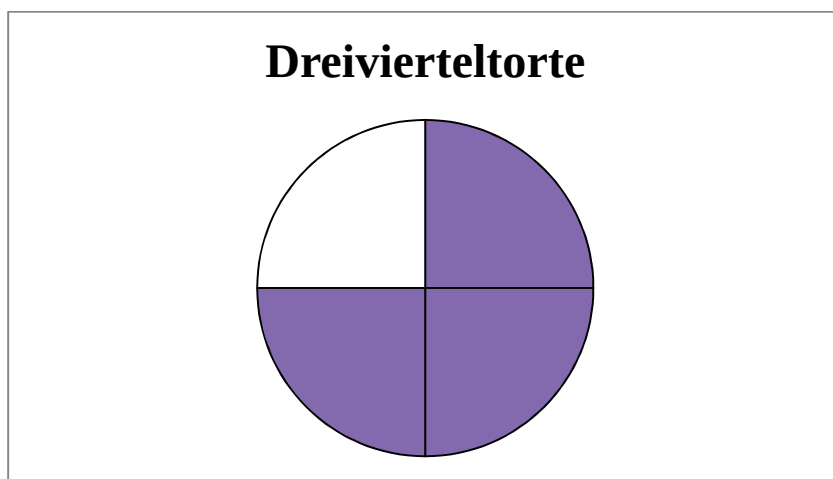
Doch es ist absolut notwendig, die erste Phase schrittweise zu erarbeiten und keine zu rasche Vorgehensweise anzustreben. (Vgl. MALLE, 2004, S. 4)

3.1 ARTEN VON GRUNDVORSTELLUNGEN

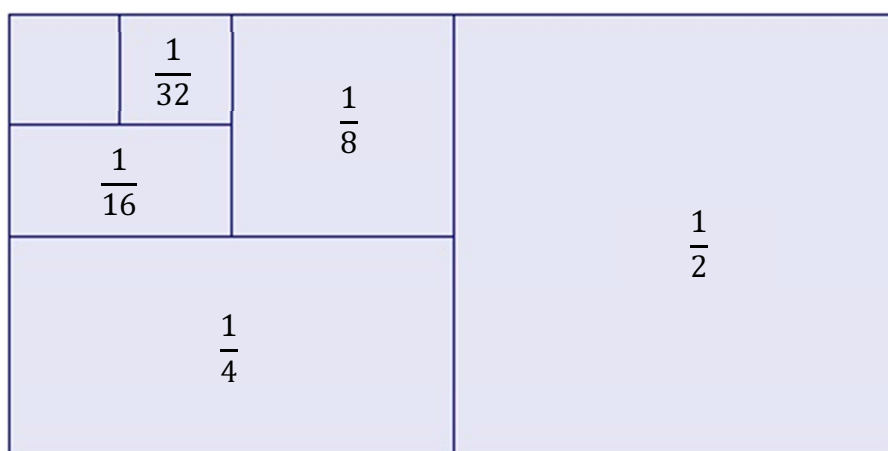
3.1.1 GRUNDVORSTELLUNG 1:

BRUCHZAHL ALS TEIL (EINES GANZEN): $\frac{a}{b}$ (VON 1)

Unter einem *Ganzen* versteht man ein Objekt oder eine Größe. Als Beispiel kann man eine Dreivierteltorte oder ein Blatt Papier wählen, um den Bedeutungshintergrund einer Bruchzahl näher zu erläutern. (Vgl. Malle, 2004, S. 4)

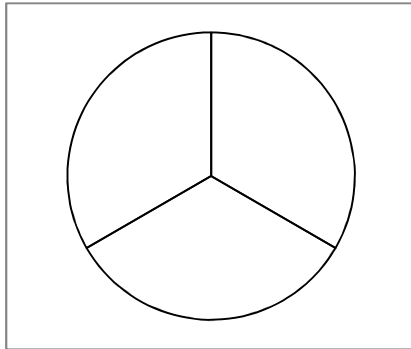


Bei diesem Beispiel wird gezeigt, was passiert, wenn ich ein Blatt Papier immer wieder in zwei gleich große Teile schneide.



Beispiel:

Bemale den angegebenen Bruchteil!



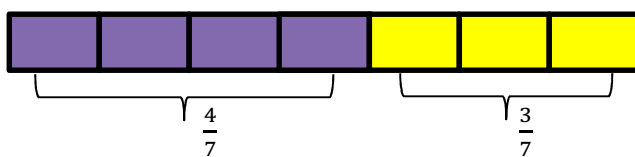
$\frac{2}{3}$

3.1.2 GRUNDVORSTELLUNG 2:

BRUCHZAHL ALS RELATIVER ANTEIL: $\frac{a}{b}$ VON C

Beispiel:

Klaus und Maria wollen auf Urlaub fahren. Die Reise nach Italien kostet für zwei Personen 2100 Euro. Da Maria mehr Geld als Klaus verdient, zahlt sie $\frac{4}{7}$ und Klaus $\frac{3}{7}$ des Betrags. Wie viel muss Klaus bzw. Maria für den Urlaub bezahlen?



$$\frac{4}{7} \cdot 2100 \text{ €} = 1200 \text{ €}$$

$$\frac{3}{7} \cdot 2100 \text{ €} = 900 \text{ €}$$

3.1.3 GRUNDVORSTELLUNG 3:

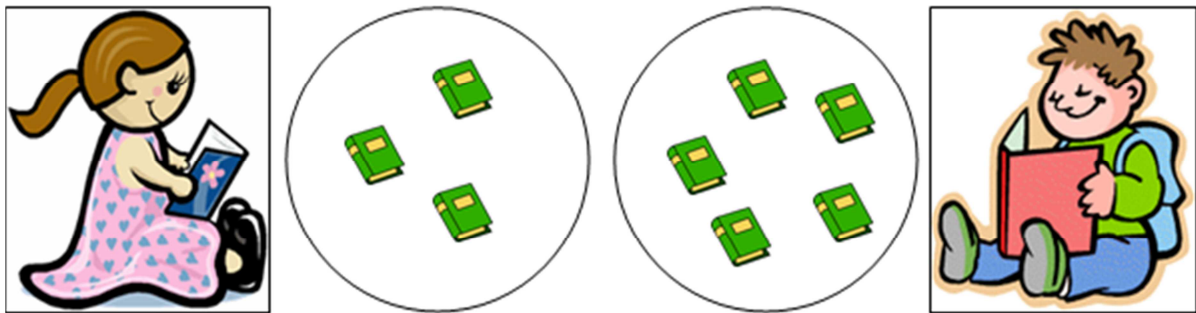
BRUCHZAHL ALS VERGLEICHOPERATOR: $\frac{a}{b}$ MAL SO VIEL WIE C,

$\frac{a}{b}$ MAL SO GROß WIE C, $\frac{a}{b}$ MAL SO SCHWER WIE C, ...

In diesem Fall hat man zwei verschiedene Mengen und vergleicht sie miteinander.

Beispiel:

Maria und Rene sind beide große Leseratten und verbringen viel Zeit mit dem Lesen spannender Bücher. Maria ist um ein Jahr jünger als ihr Freund Rene und liest daher ein wenig langsamer. Aus diesem Grund hat sie weniger Bücher gelesen. Wie viel mal so viele Bücher hat Maria gelesen?

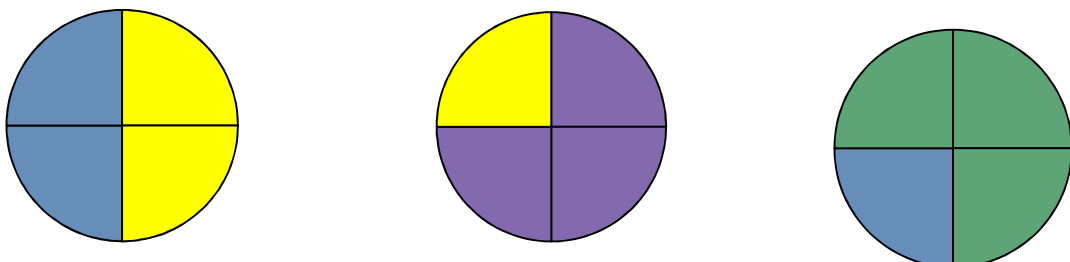


3.1.4 GRUNDVORSTELLUNG 4:

BRUCHZAHL ALS RESULTAT EINER DIVISION: $\frac{a}{b} = a : b$

Beispiel:

Carina, Martha, Tom und Lea bekommen drei Pizzen geliefert. Wie viel darf jeder bzw. jede von ihnen essen, damit die Aufteilung fair ist?



3.1.5 GRUNDVORSTELLUNG 5:

BRUCHZAHL ALS VERHÄLTNIS: $\frac{a}{b} = A : B$ (A ZU B)

Beispiel:

Die Länge zweier Laufbahnen verhalten sich wie $\frac{3}{5} = 3 : 5$



Man muss jedoch vorsichtig sein, denn bei dieser Grundvorstellung kann man den Doppelpunkt nicht mit einem Divisionszeichen vergleichen, es handelt sich hierbei nämlich um ein Verhältnis. Im heutigen Mathematikunterricht wird die Gleichung $\frac{a}{b} = 3 : 5$ als Äquivalenzumformung zu der Bruchgleichung $\frac{3}{5} = a : b$ angesehen. Doch diese Art der Anschauung war nicht immer so. Wenn man nämlich einen geschichtlichen Rückblick in das alte Griechenland wagt, so wurde die Proportion $a : b$ (a zu b) nicht als eigenständiges Denkobjekt aufgefasst. (Vgl. MALLE, 2004, S. 4/5)

Demzufolge sprach man hierbei nicht von einer Gleichheit zweier eigenständiger Denkobjekte, sondern vielmehr von einer gewissen Beziehung zwischen vier eigenständigen Denkobjekten, die sich – genauer gesagt – auf die natürlichen Zahlen „a, b, 3 und 5“ beschränken. Bei der Überleitung von der Bruchgleichung zur Verhältnisanschauung erfolgt ein Schritt der Abstraktion. Es handelt sich dabei um die Bildung von Bruchzahlen als eigenständiges Denkobjekt. Zu dieser Einsicht sind die griechischen Mathematiker jedoch nicht gekommen und konnten daher keine Weiterentwicklung im Denken der Bruchzahlen vollziehen. Sie haben sich deswegen lediglich auf das Arbeiten mit natürlichen Zahlen beschränkt. (Vgl. MALLE, 2004, S. 5)

Es wurden zwar in manchen Gebieten Ansätze der Bruchrechnung entwickelt, doch es fehlte schlussendlich der entscheidende Schritt, die Bruchzahl als eigenständiges Denkobjekt aufzufassen. Die tatsächliche Anerkennung erfolgte relativ spät, etwa im 15. Jahrhundert durch Petrus Ramus. Doch auch in der heutigen Zeit benötigen Schülerinnen und Schüler längere Zeiteinheiten, um die einzelnen Entwicklungsschritte zu begreifen und anzuwenden. Falls Schülerinnen und Schüler den Objektivierungsschritt nicht bewältigen können, versuchen sie das Denken in Bruchzahlen zu umgehen und rechnen mit natürlichen Zahlen, da sie in diesem Gebiet eine Vorstellungsebene besitzen.

(Vgl. MALLE, 2004, S. 5)

3.1.6 GRUNDVORSTELLUNG 6:

BRUCHZAHL ALS QUASIKARDINALZAHL: $\frac{2}{5} = 2$ FÜNFTEL

Hierbei wird der Nenner – also ein Fünftel – als eigene Einheit aufgefasst. Der Grund dafür ist ein Denken in natürlichen Zahlen, wobei man schließlich in ein Operieren mit natürlichen Zahlen überleiten kann. (Vgl. MALLE, 2004, S. 5)

Beispiel:

$$\begin{aligned} \frac{1}{9} + \frac{4}{9} &= \text{Ein Neuntel} + \text{vier Neuntel} \\ &= \text{Fünf Neuntel} \\ &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

3.1.7 GRUNDVORSTELLUNG 7: BRUCHZAHL ALS QUASIORDINALZAHL:

$\frac{1}{5}$ JEDER FÜNFTE / JEDE FÜNFTE

Diese Grundvorstellung kann man jedoch lediglich bei Stammbrüchen anwenden, der Zähler muss also immer „eins“ sein, sonst ist diese Auffassung nicht möglich. Es gibt zwei Arten, wie man den Satz „Jeder dritte Schmetterling ist rosa“ deuten kann.

- 1.) Im strikten Sinn: Nach zwei nicht angemalten Schmetterlingen folgt ein rosa bemalter Schmetterling.
- 2.) Im statistischen Sinn: Ein Drittel aller Schmetterlinge ist rosa.

(Vgl. MALLE, 2004, S. 5)



3.1.8 GRUNDVORSTELLUNG 8:

BRUCHZAHL ALS ABSOLUTER ANTEIL: $\frac{4}{5}$ VIER VON FÜNF

Diese Darstellung wird häufig im realen Leben bei statistischen Datenerhebungen angewendet. Jedoch sollte man beachten, dass man damit (meistens) keine sinnvollen Rechnungen durchführen kann. Oft passiert es in der Schule, dass Schülerinnen und Schüler genau diesen Fehler machen.

Beispiel:

$$\frac{1}{3} + \frac{4}{5} = \frac{5}{8}$$

Anhand von solchen Denkfehlern kann man erkennen, dass eine Vorstellungsebene jeder Art fehlt, da er oder sie ohne lange Überlegungen jeweils die beiden Zähler und Nenner addiert hat. Der Übergang vom Denken der Bruchzahlen in ein eigenständiges Denkobjekt hat hier noch nicht stattgefunden. (Vgl. MALLE, 2004, S. 5)

ERWEITERN UND KÜRZEN

3.1.9 GRUNDVORSTELLUNG 9:

ERWEITERUNG ALS VERFEINERUNG UND KÜRZEN ALS

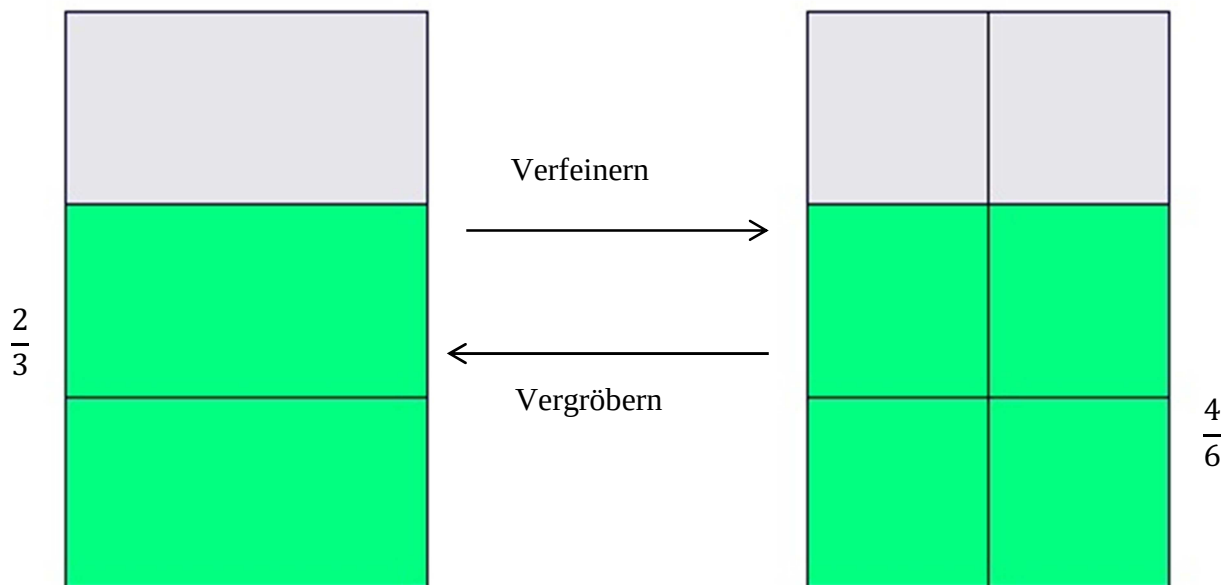
VERGRÖßERN DER EINTEILUNG

„Erweitern und Kürzen sind Umkehraufgaben voneinander (Verfeinern und Vergrößern heben einander auf).“ (Malle, 2004, S. 5)

Erweitern und Kürzen von Brüchen

Erweitern eines Bruchs bedeutet Verfeinern der Unterteilung des Ganzen und des betrachteten Bruchteils des Ganzen.

Kürzen eines Bruchs bedeutet Vergrößern der Unterteilung des Ganzen und des betrachteten Bruchteils des Ganzen. (ROTH, 2009, S. 6)



Wichtig ist jedoch, dass man die Bezeichnungen „Erweitern und Kürzen“ vorerst außer Acht lässt, denn es handelt sich hier um einen regelhaften Prozess, und das Anwenden von Formeln sollte erst später eingeführt werden. Die beiden Begriffe erläutern eine bestimmte Vorgehensweise von Regeln. Man multipliziert Zähler und Nenner mit derselben Zahl oder dividiert beide durch dieselbe Zahl. Um diese Technik zu verstehen, ist es aber wichtig, die inhaltlich-anschauliche Phase zu erfassen. (Vgl. MALLE, 2004, S. 6)

Schülerinnen und Schüler sollten sich zuerst mit der Umwandlung von einer Bruchzahl in eine andere befassen und diesen Prozess mit Hilfe der Verfeinerung bzw. Vergrößerung verstehen lernen. Dadurch wird ersichtlich, dass eine Bruchzahl unendliche viele Darstellungsmöglichkeiten hat. (Vgl. MALLE, 2004, S. 6)

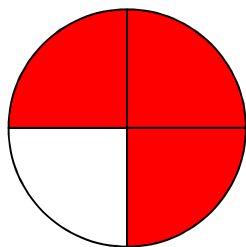
ADDITION UND SUBTRAKTION VON BRUCHZAHLEN

3.1.10 GRUNDVORSTELLUNG 10:

ADDIEREN ALS ZUSAMMENFÜGEN/-LEGEN ODER HINZUFÜGEN, SUBTRAHIEREN ALS WEGNEHMEN

Um die Begriffe „Addieren einer Bruchzahl“ und „Subtrahieren einer Bruchzahl“ anschaulicher zu machen, kann man das gut an einem Tortenbeispiel illustrieren.

Beispiel:



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

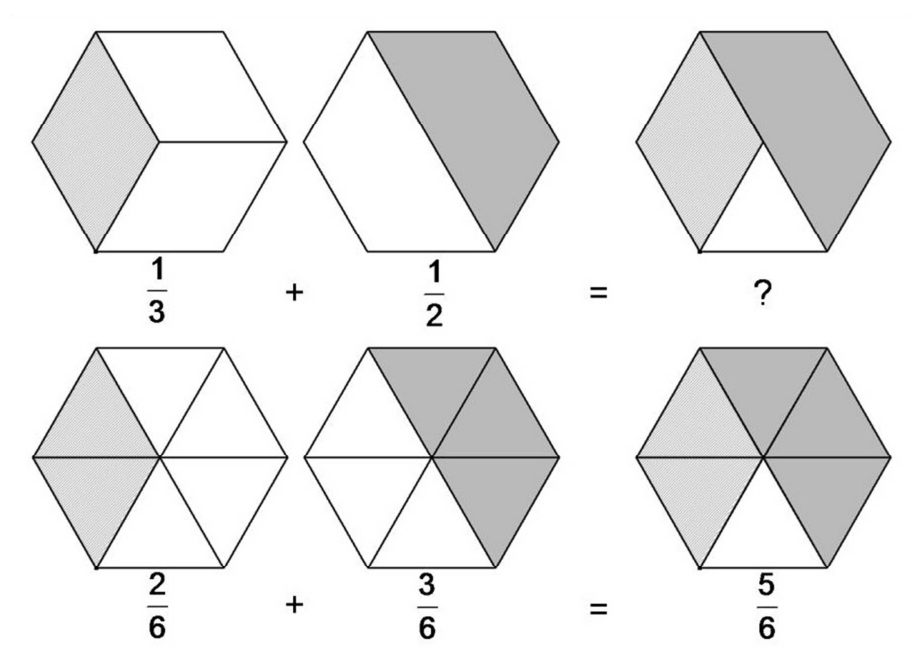
$$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Addieren zweier Brüche bedeutet Zusammenlegen der beiden Bruchteile.

Subtrahieren eines Bruchs von einem andern Bruch bedeutet Wegnehmen des einen Bruchteils.

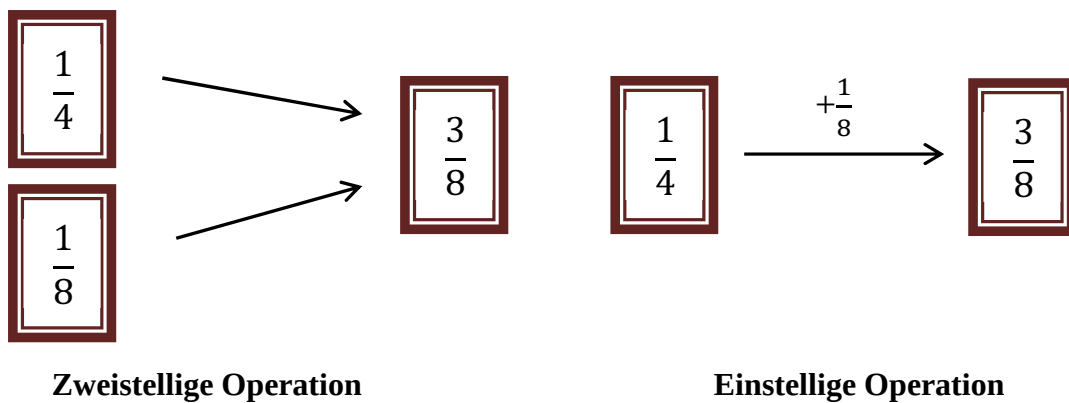
In beiden Fällen muss in der Regel die Einteilung des Ergebnisses verfeinert werden, damit dessen Wert abgelesen werden kann. (ROTH, 2009, S. 8)

Beispiel:



(ROTH, 2009, S. 8)

Man muss jedoch zwischen den Begriffen „Hinzufügen“ und „Zusammenfügen“ eine Unterscheidung treffen, da die Semantik hier nicht übereinstimmt. Beim Zusammenfügen handelt es sich um eine zweistellige Operation, beim Hinzufügen jedoch nur um eine.

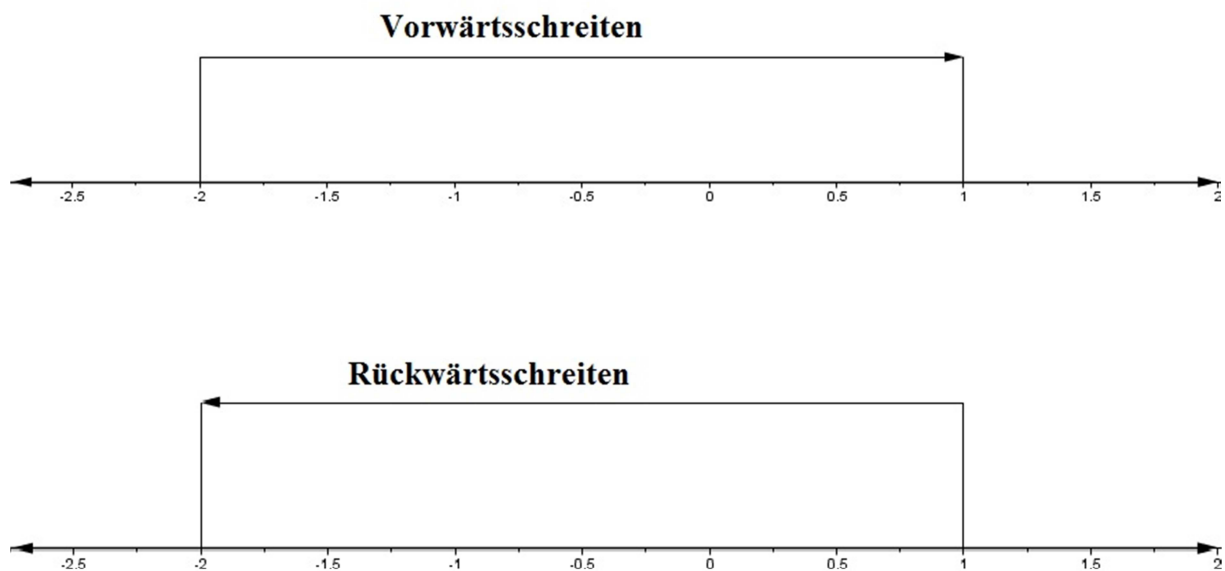


(Vgl. MALLE, 2004, S. 6)

3.1.11 GRUNDVORSTELLUNG 11:

ADDIEREN ALS VORWÄRTSSCHREITEN UND SUBTRAHIEREN ALS RÜCKWÄRTSSCHREITEN

Am besten wird ein Zahlenstrahl gezeichnet und versucht, sich das „Addieren als Vorwärtsschreiten“ und das „Subtrahieren als Rückwärtsschreiten“ zu verinnerlichen. Durch die Skizze eines Zahlenstrahls wird die Darstellung dieser Grundvorstellung besonders anschaulich gemacht.



(Vgl. MALLE, 2004, S. 6)

3.1.12 GRUNDVORSTELLUNG 12:

MULTIPLIKATION ALS ABGEKÜRZTE ADDITION

Beispiel:

$$4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \qquad n \cdot \frac{a}{b} = \underbrace{\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \dots + \frac{a}{b}}_{n\text{-Summanden}}$$

Die Zahl 4 wird als „Operator“ bezeichnet und immer als erste Zahl angeschrieben. Die andere Zahl (in dem Fall die Bruchzahl $\frac{3}{5}$) nennt man Operand. (Vgl. MALLE, 2004, S. 6)

3.1.13 GRUNDVORSTELLUNG 13:

VON-DEUTUNG DER MULTIPLIKATION

Beispiel:

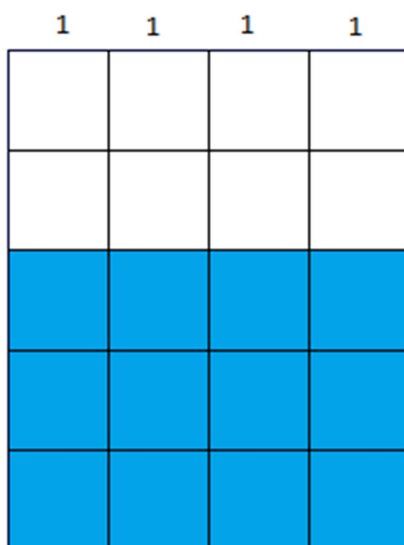
$$\frac{3}{5} \cdot 4 = \frac{3}{5} \text{ von } 4$$

$$\frac{a}{b} \cdot n = \frac{a}{b} \text{ von } n$$

Dabei gilt zu beachten, dass diese besondere Deutungsweise nur dann gilt, wenn der erste Faktor eine Bruchzahl ist. Umgekehrt ist die „Von-Deutung“ nicht möglich, da man zum Beispiel $4 \cdot \frac{3}{5}$ nicht als 4 von $\frac{3}{5}$ deuten kann. Doch bei genauerer Überlegung fällt auf, dass die Schwierigkeit vor allem in unserer Sprache liegt, denn es würde logisch klingen, wenn man $\frac{3}{5} \cdot 4$ als das $\frac{3}{5}$ -fache von 4 und demzufolge $4 \cdot 5$ als das Vierfache von 5 bzw. $4 \cdot \frac{3}{5}$ als das Vierfache von $\frac{3}{5}$ deutet. (Vgl. Malle, 2004, S. 6)

Man darf jedoch die abgekürzte Addition ($3 \cdot 4$ statt $4 + 4 + 4$) nicht auf die Rechenoperation $\frac{3}{5} \cdot 4$ anwenden, da man den Summanden 4 nicht $\frac{3}{5}$ -mal anschreiben kann. Trotzdem kommt man in manchen Situationen zu der Auffassung, dass $\frac{3}{5} \cdot 4$ als $\frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5}$ angesehen wird, die Voraussetzung dafür ist das Kommutativgesetz, welches angewendet wird. Doch ob man die Kommutativität tatsächlich verwenden darf, muss zuerst geprüft werden. Dazu werden die Grundvorstellung 12 sowie die Grundvorstellung 13 angewendet. (Vgl. Malle, 2004, S. 6)

Beispiel zur Begründung der Kommutativität der Multiplikation einer natürlichen Zahl mit einer Bruchzahl: (MALLE, 2004, S. 6)



$$4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{12}{5}$$



$$\frac{3}{5} \cdot 4 = \frac{3}{5} \text{ von } 4 = \frac{12}{5}$$

MULTIPLIKATION VON BRUCHZAHLEN

3.1.14 GRUNDVORSTELLUNG 14:

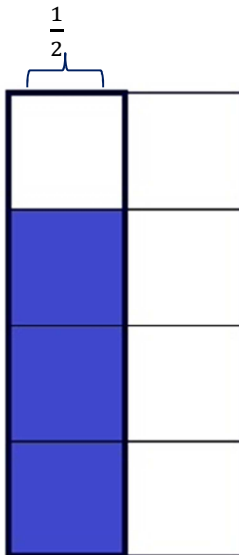
VON-DEUTUNG DER MULTIPLIKATION

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{9} = \frac{3}{7} \text{ von } \frac{4}{9}$$

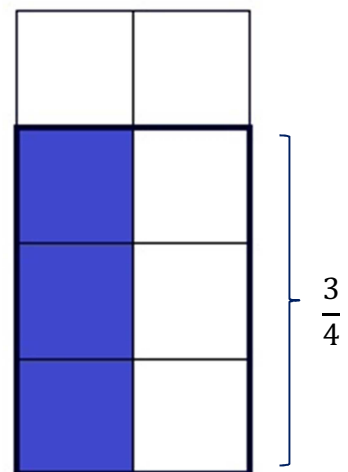
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \text{ von } \frac{c}{d}$$

Nun muss man wieder die Kommutativität prüfen, die man anhand eines Beispiels zeigen kann.

Beispiel: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}$



$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \text{ von } \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$



$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \text{ von } \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

Bei der Multiplikation von Bruchzahlen ist es äußerst wichtig, dass das Denken in natürlichen Zahlen aufgegeben wird. Der Grund dafür ist, dass das Produkt zweier natürlicher Zahlen stets größer wird als jede Ausgangszahl. Bei der Multiplikation von Bruchzahlen ist das nicht der Fall. Daher muss bei den Schülerinnen und Schülern ein Umdenken stattfinden, um in neuen (Bruch-)Zahlen zu denken.

(Vgl. Malle, 2004, S. 7)

DIVISION VON BRUCHZAHLEN

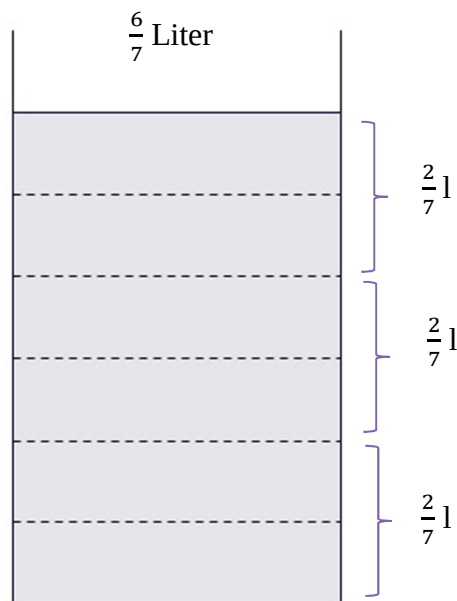
3.1.15 GRUNDVORSTELLUNG 15:

DIVIDIEREN ALS TEILEN (BZW. VERTEILEN)

Hierbei handelt es sich um eine Größe, die durch eine Bruchzahl beschrieben wird. Diese soll in mehrere Teile geteilt und anschließend verteilt werden. Wie groß wird nun ein Teil dieser Menge sein?

Beispiel:

$\frac{6}{7}$ Liter Orangensaft sollen auf Peter, Simone und Tom verteilt werden. Wie viel Liter darf jeder von ihnen trinken?



$$\frac{6}{7} 1 : 3 = \frac{2}{7} 1$$

Peter, Simone und Tom erhalten jeweils $\frac{2}{7}$ Liter Orangensaft.

Bei diesem Beispiel ist zu beachten, dass der Divisor eine natürliche Zahl sein muss.

Die Rechenoperation $\frac{6}{7} : \frac{2}{5}$ kann jedoch nicht in dieser Art und Weise gedeutet werden, da es sinnlos erscheint, $\frac{6}{7}$ Liter auf $\frac{2}{5}$ Personen aufzuteilen. (Vgl. Malle, 2004, S. 7)

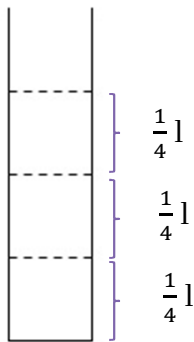
3.1.16 GRUNDVORSTELLUNG 16:

DIVIDIEREN ALS MESSEN (BZW. AUFTEILEN)

Diese Art der Grundvorstellung handelt von einer Größe und einem Maß, die durch Bruchzahlen erläutert werden. Es geht darum, wie oft ein bestimmtes Maß in einer vorgegebenen Größe enthalten ist.

Beispiel:

$\frac{3}{4}$ Liter Cola soll in $\frac{1}{4}$ Liter Dosen verpackt werden. Wie viele Dosen können damit gefüllt werden?



$$\frac{3}{4} \text{ l} : \frac{1}{4} \text{ l} = 3$$

3 Dosen Cola können mit der Menge gefüllt werden.

Diese Aufgabenstellung ist nur sinnvoll, wenn der Dividend größer oder gleich dem Divisor ist. Ist der Quotient keine natürliche Zahl, so kann das zu Schwierigkeiten führen. Wäre das beim obigen Beispiel der Fall, so müsste man entweder runden oder zu dem Schluss kommen, dass eine Dose nicht vollständig gefüllt werden kann.

Doch man könnte diese Divisionsaufgabe auch als fortlaufende Subtraktion behandeln. Das

Ergebnis würde beispielsweise lauten: $\frac{3}{4} \text{ l} - \underbrace{\frac{1}{4} \text{ l} - \frac{1}{4} \text{ l} - \frac{1}{4} \text{ l}}_{\text{3 Subtrahenden}} = 0$ also $\frac{3}{4} \text{ l} : \frac{1}{4} \text{ l} = 3$

(Vgl. MALLE, 2004, S. 8)

Eine andere Möglichkeit wäre, das Beispiel durch Addition zu lösen. Man müsste überlegen,

wie oft man $\frac{1}{4} \text{ l}$ addieren müsste, damit man auf $\frac{3}{4} \text{ l}$ kommt. $\underbrace{\frac{1}{4} \text{ l} + \frac{1}{4} \text{ l} + \frac{1}{4} \text{ l}}_{\text{3 Summanden}} = \frac{3}{4} \text{ l}$

38

Aber es existieren auch Divisionen, die man nicht in eine der beiden Grundvorstellungen einordnen kann, zum Beispiel die Division $\frac{4}{9} : \frac{3}{5}$. Für diese Rechnung gibt es leider keine passende Grundvorstellung, man kann sich daher nur auf formale Regeln beziehen. Hier muss man zu der Erkenntnis kommen, dass auch Grundvorstellungen Grenzen haben. (Vgl. MALLE, 2004, S. 8)

Doch im Großen und Ganzen gelten Grundvorstellungen als Voraussetzungen für die Anwendung des Bruchrechnens. Sie bestehen darin, dass in einem mathematischen Sachverhalt bestimmten Größen konkrete Bruchzahlen zugeordnet und anschließend gewisse Rechenoperationen durchgeführt werden. Oft haben Schülerinnen und Schüler keine Idee, welche Art der Rechenoperationen sie auf das Beispiel anwenden sollen.

„Die Mittlerrolle zwischen der Situation und den zu wählenden Rechenoperationen spielen die Grundvorstellungen:

Situation ↔ Grundvorstellungen ↔ Rechenoperationen“ (MALLE, 2004, S. 8)

Verknüpfung	Zugehörige Grundvorstellung
Addition zweier Größen	Zusammenfassung (Vereinigung) Repräsentanten
Subtraktion zweier Größen	Abtrennung des einen Repräsentanten von einem anderen
Multiplikation einer Größe mit einer natürlichen Zahl n	Zusammenfassung (Vereinigung) von n äquivalenten (paarweise disjunkten) Repräsentanten der Größe
Division einer Größe durch eine natürliche Zahl n	Zerlegen eines Repräsentanten der Größe in n äquivalente paarweise disjunkte Teilrepräsentanten
Division einer Größe a durch eine Größe b	Zusammensetzen bzw. Zerlegen eines Repräsentanten der Größe a bzw. in Repräsentanten der Größe b.

(VOM HOFE, 1995, S. 89)

Man könnte diese Grundvorstellungen als didaktische Leitlinien auffassen. Erstens sind sie von grundlegender Bedeutung für ein gutes Verständnis der mathematischen Begrifflichkeiten und zweitens eine Beschreibung für ein Unterrichtskonzept, wobei man auch spielerische Methoden einbauen kann. (Vgl. VOM HOFE, 1995, S.89)

3.2 ERFOLGREICHE LÖSUNGEN AUF DER BASIS VON GRUNDVORSTELLUNGEN

Beispiel:

Gib einen Bruch an, der kleiner als $\frac{1}{8}$ ist. (WITTMANN, 2006, S. 59)

Für dieses Beispiel werden unterschiedliche Lösungen von zwei Schülern und einer Schülerin vorgestellt. Der erste Schüler namens Patrick würde die Aufgabe folgendermaßen lösen:

„Patrick: Da muss ich ja bloß einen Bruch, der größer/ der kleiner als ein achtel ist, ein tausendstel?

Interviewer: Schreib mal hin. [4 sec] Du sagst, ein tausendstel ist kleiner als ein achtel[!]?

Patrick: Und ein hundertstel, ja, ich schreib' ein tausendstel.

Interviewer: Ein hundertstel wäre eine zweite Lösung, sagst du, ja, und warum ist ein tausendstel[!] jetzt kleiner als ein achtel?

Patrick: Weil es tausend Teile von einem Ganzen ist, und ein achtel sind bloß acht Teile von einem Ganzen.

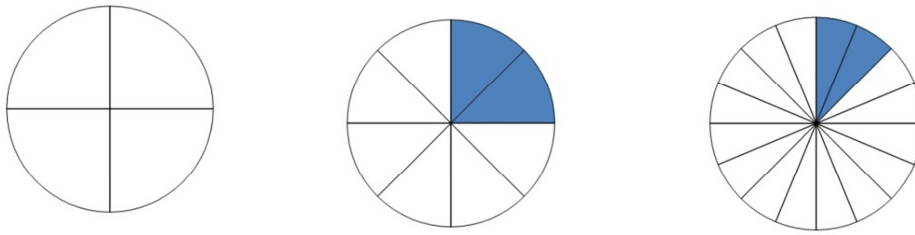
Interviewer: Ja, aber tausend Teile sind doch mehr als acht Teile.

Patrick: Ja, das ist schwer [4 sec] aber das sind halt kleinere Stücke, das sind halt, wie wenn man ein Blatt zerreißt, das sind tausend kleine Teile, wenn man ein Blatt zerreißt und wenn man tausend hat, dann sind sie so klein, und bei acht sind die halt größer.“ (WITTMANN, 2006, S. 59)

Der Schüler Patrick gibt zwei Lösungen an, nämlich $\frac{1}{1000}$ und $\frac{1}{100}$. Als daraufhin der Interviewer mehrmals nachfragt, erläutert Patrick ein sehr anschaulich-prozesshaftes Denken und erklärt den Grund, weshalb $\frac{1}{1000}$ tatsächlich kleiner ist als $\frac{1}{8}$. Man kann erkennen, dass Patrick die Grundvorstellung „Bruchzahl als Teil eines Ganzen“ auf dieses Beispiel anwendet und somit eine korrekte Begründung angibt.

(Vgl. WITTMANN, S. 59)

David wählt für sein Beispiel eine bildliche Darstellung, um sich zu orientieren.



„David: Eigentlich ist die auch leicht, das ist dann ein viertel.

Interviewer: Warum ist ein viertel kleiner als ein achtel?

David: Weil ein/ [3 sec] nein, halt.

Interviewer: Du darfst auch was schreiben oder zeichnen/ [wird unterbrochen]

David: Nein, ein viertel ist viel größer, weil ein viertel, sagen wir jetzt/ das ist ja vier viertel, dann ist ein viertel das und ein achtel ist dann so, also hier, und deshalb ist ein sechzehntel noch kleiner, das ist dann, sagen wir/ da ist so ein viertel/ ein achtel also das, das Ganze ist ein viertel, das ist dann ein achtel, und dann jetzt/ noch einmal so [4 sec] ist dann [3 sec] ja dann ist dann so ein Kleines ein sechzehntel.“
(WITTMANN, 2006, S. 60)

David bezeichnet die Aufgabenstellung zuerst als einfach und gibt als spontane Antwort „ein Viertel“. Als der Interviewer jedoch eine Begründung seiner Aussage verlangt, bemerkt er seinen Denkfehler. Anschließend kommt er zu der Lösung von einem Sechzehntel. Bei diesem Punkt nimmt David einen Stift in die Hand und zeichnet die oben abgebildeten Kreise. Er malt in der zweiten Skizze zwei Kreissektoren (also zwei Achtel des Kreises) an und zwei Sechzehntel bei der rechten Skizze. David erklärt zusätzlich, dass $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ und $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ ergibt.

(Vgl. WITTMANN, 2006, S. 60)

Zusätzlich verwendet er die Grundvorstellung von der Bruchzahl als Teil eines Ganzen, wobei Davids Lösung auf einer bildlichen Darstellung basiert.

(Vgl. WITTMANN, 2006, S. 60)

Jasmin entschließt sich für einen völlig anderen Lösungsweg als ihre beiden Mitschüler David und Patrick. Sie beginnt drei Rechnungen auf ein Blatt Papier zu schreiben:

$$1:8 = 0,125$$

$$\frac{1}{3} = 1:3 = 0,3\bar{3}$$

$$\frac{1}{9} = 1:9 = 0,1\bar{1}$$

„Jasmin: Ich habe jetzt den Bruch in Dezimalbruch umgewandelt und jetzt schaue ich, welcher Bruch kleiner ist [3 sec] ein fünftel ist jetzt null Komma zwanzig (...)

Interviewer: [62 sec] Ja.

Jasmin: Da müsste eigentlich ein neuntel kleiner sein.

Interviewer: Ja, das stimmt auch. Warum ist denn ein neuntel kleiner als ein achtel?

Jasmin: Also/ warum? [3 sec] Also bei dem Bruch ist es so, einhalb sind fünfzig, ein drittel sind dreiunddreißig, ein viertel sind fünfundzwanzig, ein fünftel sind/ um so größer der Zähler/ Nenner wird, um so kleiner wird die Dezimalzahl.“

(WITTMANN, 200, S. 61)

Die Schülerin Jasmin wandelt zuerst $\frac{1}{8}$ und anschließend noch andere Brüche in eine Dezimalzahl um. Sie überlegt sich diese Umwandlungen zum Teil selber im Kopf oder notiert sie auf einem Blatt Papier. Danach beginnt sie, die Bruch- bzw. Dezimalzahlen miteinander zu vergleichen und erläutert ihre Lösung. Auf den ersten Blick wirkt Jasmins Variante am schwierigsten und aufwändigsten. Betrachtet man ihre Methode jedoch genauer, so erkennt man das Anwenden der Grundvorstellung von einer Bruchzahl als Quotient, also als das Resultat einer Division. Sie arbeitet sich schrittweise vorwärts und erhält anschließend eine korrekte Lösung.

3.3 PROBLEME DER BRUCHRECHNUNG – FEHLENDE GRUNDVORSTELLUNGEN

„Katharina hatte, im Rahmen einer Hausaufgabe, unter ordnungsgemäßer Anwendung der Bruchrechenregeln die Zahl 2 durch $\frac{1}{4}$ dividiert und kam dann zu mir, weil sie sich über die 8 als Ergebnis wunderte. Wieso konnte das Ergebnis größer sein als der Dividend? Sie hatte doch ‚geteilt‘! Ich versuchte ihr einsichtig zu machen, weshalb das (im Bereich positiver Zahlen) bei Division durch Zahlen, die kleiner als 1 sind, so sein muss. Als Gegenbeispiel hielt sie mir vor, wenn sie einen Apfel ‚in Viertel‘ teile, seien die Stücke aber kleiner als der Apfel. Ich wies sie auf den Unterschied zwischen, ‚teilen in‘ und ‚teilen durch‘ hin. Abschließend meinte sie: ‚Okay, ich weiß jetzt, wie man das rechnen muss. Aber du willst mir doch wohl nicht weismachen, dass man in der Mathematik logisch denkt!‘“

(HEYMANN 1996, S. 206)

Dieses typische Beispiel zeigt, welche Fehlvorstellung bei einer bekannten Rechnung, nämlich der Division, auftreten kann. Bei den neuen Denkobjekten, den Bruchzahlen, treten

nun zahlreiche Unsicherheiten auf, da bereits gesammelte Grundkenntnisse, dass bei einer Division das Ergebnis kleiner wird, nicht anwendbar sind. Anschließend folgen von Schülerinnen und Schülern Meinungsäußerungen. Die Schülerin Katharina will damit erklären, dass sie keine Assoziationen zu dieser neuen Denkweise hat. Ihr Kernproblem liegt darin, dass sie keine inhaltlichen Vorstellungen bezüglich der Bruchzahlen besitzt. (Vgl. PREDIGER, 2004, S. 1)

Diese Art von Fehlern tritt häufig bei Schülerinnen und Schülern auf. Ein weiteres Beispiel wäre eine Rechnung, bei der man die Multiplikation anwendet. Während man bei einer Multiplikation mit natürlichen Zahlen stets darauf schließen kann, dass das Endergebnis größer sein wird als die beiden einzelnen Faktoren (ausgenommen sind die Faktoren Null und Eins), muss das bei der Multiplikation von Bruchzahlen nicht der Fall sein.

Betrachten wir das Beispiel $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. Hier ist das Ergebnis kleiner als die einzelnen Bruchzahlen, die man miteinander multipliziert. (Vgl. PREDIGER, 2004, S. 1)

Oft wollen Schülerinnen und Schüler verschiedene Aufgaben der Bruchrechnung auf mechanischem und formalem Weg lösen. Das führt dazu, dass man sehr starr vorgeht und keine Flexibilität aufweist. Als Beispiel hierfür könnte man die Operation $4 \cdot \frac{1}{7}$ ins Auge fassen. Ein Schüler bzw. eine Schülerin, die keine bildliche Vorstellung dazu hat, könnte als Ergebnis $\frac{4}{28}$ erhalten. Hat er oder sie jedoch bereits eine Vorstellungsebene der Bruchzahlen entwickelt, so würde sofort erkennbar sein, dass dieses Ergebnis falsch sein muss. (Vgl. PADBERG, 1995, S.144)

„Daher ist es äußerst wichtig, dass bei den Schülern vor dem Rechnen anhand von Regeln zunächst sorgfältig anschauliche Bruchvorstellungen aufgebaut werden und diese auch bewusst beim Lösen von Aufgaben [...] eingesetzt werden.“
(PADBERG, 1995, S. 144)

Außerdem ist es notwendig, dass Schülerinnen und Schüler selbstständig abschätzen können, ob das Resultat einer Rechnung überhaupt stimmen kann oder nicht. Auf dieses Abschätzen sollte im Unterricht große Sorgfalt gelegt werden, da es sonst zu einer Vielfalt von Fehler kommen kann.

3.4 DIE EINFÜHRUNG DER DEZIMALBRÜCHE – EIN SELBSTLÄUFER?

„Hat zu Beginn der Klasse 6 [...] der Übergang von den konkreten Dezimalbrüchen als Maßzahl von Größen (Beispiel: 3,45 €) zu den abstrakten Dezimalbrüchen (Beispiel: 3,45) schon bei der Mehrheit der Schülerinnen und Schüler stattgefunden?“ (PADBERG, 2004, S. 41)

Leider gibt es in den deutschsprachigen Ländern noch sehr wenige Literaturhinweise bzw. Stellungnahmen zu dieser Thematik. Die Untersuchung von Padberg wurde anhand von diagnostischen schriftlichen Tests und zum Großteil von Einzelinterviews durchgeführt. Das Resultat zeigte relativ eindeutig, dass der Übergang von den konkreten Dezimalbrüchen bis zu den abstrakten Dezimalbrüchen noch nicht stattgefunden hat. Man kann daher mit Sicherheit behaupten, dass die gestellte Frage, ob es sich bei der Einführung der Dezimalbrüche um einen Selbstläufer handelt, mit „Nein“ zu beantworten sei. (Vgl. PADBERG, 2004, S. 41)

Die Untersuchung wurde in insgesamt sechs Klassen durchgeführt, die sich in der sechsten Schulstufe befanden und dauerte eine Schulstunde. Es handelte sich dabei um drei unterschiedliche Realschulen mit insgesamt 165 Schülerinnen und Schülern. Die Klassen wurden bereits zu Schulbeginn getestet. (Vgl. PADBERG, 2004, S. 41)

3.4.1 AUSGEWÄHLTE ERGEBNISSE

Lesen von Dezimalbrüchen

„Wie liest du die Kommazahl 3,25?“

Kreuze nur eine Antwort an:

- ☐ Ich weiß es nicht
- ☐ Dreihundertfünfundzwanzig
- ☐ Drei-Rest-Fünfundzwanzig
- ☐ Drei-und-fünfundzwanzig
- ☐ Drei-Komma-fünfundzwanzig
- ☐ Drei-Komma-zwei-fünf
- ☐ Drei-ein-fünf-und-zwanzigstel“ (PADBERG, 2004, S. 41)

47% der Schülerinnen und Schüler haben bei dieser Aufgabe die richtige Antwort angekreuzt, nämlich *Drei-Komma-zwei-fünf*. Andererseits hat jedoch knapp die Hälfte der Klasse die Antwort *Drei-Komma-fünfundzwanzig* gewählt. Man erkennt hierbei, dass sie in natürlichen Zahlen gedacht und diese Denkweise schließlich auf die Dezimalzahldarstellung übertragen haben. Aufgrund dieser Denkweise können Fehler wie diese passieren:

$$0,4 < 0,35 \text{ denn } 4 < 35$$

$$0,27 + 0,7 = 0,34 \text{ denn } 27 + 7 = 34$$

Man kann erkennen, dass es bei der korrekten Bezeichnung der Dezimalzahlen noch viele Unsicherheiten gibt, die man im Unterricht behandeln muss. Dadurch können Fehlvorstellungen langsam abgebaut und schließlich vermieden werden.

(Vgl. PADBERG, 2004, S. 41/42)

Anschauliche Bilder des Dezimalbruches 0,5

Die Aufgabe lautete, dass die Schülerinnen und Schüler die Zahl 0,5 durch ein Bild (Strecke, Rechteck, Kreis, etc.) darstellen sollen. Es gab einige unterschiedliche Ansätze zu diesem Beispiel, wie die Schülerinnen und Schüler vorgehen. 14% haben den Wert 0,5 als die Hälfte einer Strecke dargestellt oder eine zweidimensionale Figur halbiert. Eine andere Methode, die aber nur sehr selten gewählt wurde, war den Wert 0,5 als 0,5cm an einer längeren Strecke zu kennzeichnen. Dabei lässt sich erkennen, dass diejenigen Schülerinnen bzw. Schüler an den Zahlenstrahl dachten und daraus ihre Lösung ableiteten. Knapp ein Viertel der Klasse entschied sich für die Strategie, den Dezimalbruch 0,5 als 0,5cm lange Strecke mit dem Lineal zu zeichnen. Oft wurde auch der Wert 0,5 unter der Skizze vermerkt. Etwa 9 % zeichneten lediglich ein Quadrat, ein Rechteck, einen Kreis oder eine Strecke mit einer Länge von 5 cm. Daraus lässt sich vermuten, dass das eine „Ausweichreaktion“ der Schülerinnen und Schüler darstellt. (Vgl. PADBERG, 2004, S. 42)

Dezimalbrüche und Skalen

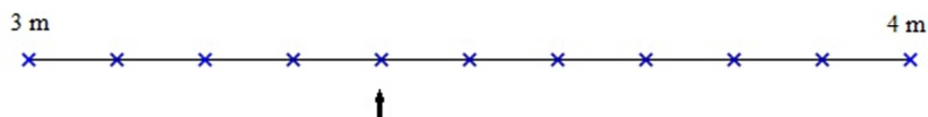
Beispiel 1:

Markiere durch einen Pfeil 4,7m.



Beispiel 2:

Welchen Wert markiert der dargestellte Pfeil?



Diese Aufgabenstellung konnten die meisten Schülerinnen und Schüler erfolgreich lösen. Das Überraschende dabei ist, dass der deutlich höhere Anteil von richtigen Lösungen im Gegensatz zum vorherigen Beispiel steht. Hier wird erkennbar, dass anschauliche Aufgaben viel weniger Schwierigkeiten bereiten als abstrakte Aufgaben. (Vgl. PADBERG, 2004, S. 42)

Stellenwertschreibweise

Es stellt sich die Frage, ob der Großteil der Schülerinnen und Schüler die Erweiterung der Stellenwertschreibweise vom Bereich der natürlichen bis hin zu den rationalen Zahlen ohne Probleme verstehen kann. Man könnte vermuten, dass der Übergang - aufgrund der intensiven Auseinandersetzung mit Größen von Dezimalzahlen als Maßzahlen – bereits stattgefunden hat. (Vgl. PADBERG, 2004, S. 43)

Beispiel:

„Kreuze die Hundertstel bei der Zahl 7,654 an.“ (PADBERG, 2004, S. 43)

Lediglich 12% konnten diese Frage richtig beantworten. Mehr als ein Viertel kreuzte die Zahl 6 an. Dieses Resultat lässt erkennen, dass bei vielen Schülerinnen und Schülern der Übergang von der Zahlenbereichserweiterung zu den rationalen Zahlen noch nicht vollständig stattgefunden hat. Dieser fehlerhafte Transfer deutet weiters darauf hin, dass die dritte Stelle (von rechts) nach dem Komma als Hundertstel gewertet wurde, wie es bei den natürlichen Zahlen (Hunderter statt Hundertstel) korrekt wäre. (Vgl. PADBERG, 2004, S. 43)

Insgesamt 9% der Schülerinnen und Schüler haben die Zahl 4 als Lösung angegeben. Bei dieser Denkweise handelt es sich womöglich um einen anderen fehlerhaften Übergang aus dem Bereich der natürlichen Zahlen. Sie haben aufgrund von Symmetriegründen gehandelt, die erste Stelle nach dem Komma als „Einer“ aufgefasst und daher die Zahl Vier als „Hundertstel“. Dieses Beispiel haben also nur sehr wenige Schülerinnen und Schüler korrekt beantwortet. Die Stellenschreibweise von Dezimalbrüchen muss daher im Unterricht noch intensiver und genauer behandelt werden, da es hier viele Defizite gibt.

(Vgl. PADBERG, 2004, S. 43)

Lokale und globale Sichtweise bei Dezimalbrüchen

Beispiel:

„Laura und Alex wollen Sarah die Kommazahl 0,75 erklären. Laura erklärt: 0,75 sind 75 Hundertstel. Alex erklärt: 0,75 sind 7 Zehntel plus 5 Hundertstel.“

Wer hat richtig erklärt? Kreuze an! Falls du ‚keiner‘ angekreuzt hast, erläutere dies kurz.

- ☐ Laura
- ☐ Alex
- ☐ beide
- ☐ keiner
- ☐ Ich weiß es nicht“

(PADBERG, 2004, S. 43)

Die Antworten der Schülerinnen und Schüler verteilten sich relativ gleichmäßig. Man konnte erkennen, dass sich viele rein gefühlsmäßig entschieden haben und ihre Antwort nicht begründeten. Sehr interessante Ansichten konnte man bei der Antwort „keiner“ finden, da hier eine detaillierte Begründung erforderlich war. Meistens wurde das Argument „0,75 besteht aus 7 Zehntel und 5 Einern (Einteln).“ (PADBERG, 2004, S. 43) genannt. Es wird hier ersichtlich, dass viele Schülerinnen und Schüler die Antwort 0,75 mit 75cm verbinden, also mit konkreten Größen.

Dezimalbrüche zwischen Dezimalbrüchen

Beispiel:

„Kannst du eine Kommazahl angeben, die zwischen 1,5 und 1,6 liegt?“

(PADBERG, 2004, S. 43)

Hier konnten die Schülerinnen und Schüler auch die Antwort „Nein“ ankreuzen.

Fast 40% konnten diese Frage richtig beantworten. Die häufigste richtige Antwort lautete 1,55. Manche gaben auch sehr „kreative“ Antworten wie zum Beispiel $1,5\frac{1}{2}$ oder 1,5,5.

Jene Schülerinnen und Schüler, die sich für die Antwort „Nein“ entschieden, gaben auch eine Begründung ab. Meistens lautete diese, dass es keine Kommazahlen zwischen den Zahlen 1,5 und 1,6 gibt oder dass zwar gewisse Zahlen dazwischen existieren, man diese aber nicht angeben kann. (Vgl. PADBERG, 2004, S.43)

In einer ähnlichen Untersuchung mit Brüchen konnten lediglich 5% der Schülerinnen und Schüler eine richtige Bruchzahl zwischen einem Viertel und einem Halben nennen. Es ist jedoch zu erwähnen, dass auch die Notation bei den Bruchzahlen eine wesentliche Rolle spielt.

„Zu Beginn des 6. Schuljahres befinden sich die Schülerinnen und Schüler bezüglich ihrer Kenntnisse über Dezimalbrüche in einer Phase des Überganges von den konkreten Dezimalbrüchen als Maßzahlen von Größen, die sie so schon seit langer Zeit im täglichen Leben wie in der Schule benutzen, zu den abstrakten Dezimalbrüchen als abstrakte Rechenzahlen, die im Laufe dieses Schuljahres systematisch thematisiert werden.“ (PADBERG, 2004, S.45)

Aus der Untersuchung lässt sich erkennen, dass das Lesen von Dezimalbrüchen bei den meisten schon relativ gut funktioniert. Beim Notieren von Dezimalbrüchen als Maßzahlen von Größen in Skalen kann man auch eine sehr hohe Erfolgsquote feststellen. Falls man jedoch eine bildliche Darstellung von einfachen Dezimalbrüchen möchte, so treten noch zahlreiche Unsicherheiten und Fehlvorstellungen auf. Höchstens zwei von zehn Schülerinnen bzw. Schülern können mit dem abstrakten Dezimalzahlbegriff (zum Beispiel 0,5) etwas anfangen, die restlichen verstehen darunter konkrete Größen, wie beispielsweise 0,5cm. Viele weisen bei diesen speziellen Aufgaben große Unsicherheiten auf und lassen diese Aufgabe schlussendlich aus.

Bei der Frage nach Dezimalbrüchen zwischen Dezimalbrüchen konnten zumindest 37% eine korrekte Antwort geben. (Vgl. PADBERG, 2004, S. 45)

Doch jene, die meinten, dass es keine Dezimalbrüche dazwischen gibt, müssen nochmals gut darüber aufgeklärt werden. Bei der Unterscheidung zwischen der lokalen bzw. globalen Sichtweise von Dezimalbrüchen sind die Defizite sehr hoch, denn die Antworten werden offensichtlich nach dem eigenen Gefühl entschieden und nicht aufgrund einer logischen Schlussfolgerung. Im Großen und Ganzen ist zu erkennen, dass man trotz einer guten Kenntnis von konkreten Dezimalbrüchen nicht automatisch auch ein ausreichendes Basiswissen bezüglich der abstrakten Dezimalbrüche beherrscht. Der Übergang von den konkreten zu den abstrakten Dezimalbrüchen muss schrittweise und detailliert erfolgen, so dass alle Schülerinnen und Schüler eine gute Kenntnis des neuen Themengebiets erlangen. Das bedeutet, dass man hier sicherlich mehr als nur eine Unterrichtsstunde benötigt, um die Schülerinnen und Schüler das nötige Wissen zu lehren. Besonders bei der Erweiterung der Stellenschreibweise muss man mit Sorgfalt umgehen. In der heutigen Zeit ist es – neben den zahlreichen Einsätzen von Computern und Taschenrechnern – äußerst wichtig, ein gutes Fundament der Dezimalbrüche zu schaffen, da es ohne dieser Grundlegung bei späteren Rechenoperationen und Darstellungen zu vermehrten Fehlvorstellungen kommen kann, die sich nur mehr sehr schwer beheben lassen. (Vgl. PADBERG, 2004, S. 45)

3.5 GRUNDVORSTELLUNGEN ZU BRUCHZAHLEN – AUCH FÜR LEISTUNGSSCHWACHE SCHÜLERINNEN UND SCHÜLER?

Die Schülerinnen und Schüler sollen bei Bruchrechnungen keine automatisch erlernten Prozesse anwenden, sondern sich bereits vor der Rechnung Gedanken und Vorstellungen über die mögliche Lösung machen. Es wäre erstrebenswert, ein anwendbares Verständnis sowie zahlreiche Grundvorstellungen zu entwickeln, sodass man ein breitgefächertes Basiswissen darüber besitzt. Außerdem dient die Bruchrechnung als Grundlage für die Prozentrechnung, Verhältnisse, Wahrscheinlichkeiten und relative Häufigkeiten. Ein derartiges Verständnis muss durch spezifische Aufgaben erworben werden, welche für die Grundvorstellungen förderlich wirken. Meist handelt es sich hierbei um offene Aufgaben, für die es mehrere Lösungswege gibt, die zum richtigen Resultat führen. Es wird wohl niemand bezweifeln, dass derartige Sachsituationen bei leistungsstarken Schülerinnen und Schülern einen inneren Reiz entwickeln können, sodass ihr zielstrebiges Verhalten immer größer wird.

(Vgl. WITTMANN, 2006, S. 50)

Diese prozessartigen Vorgangsweisen versuchen Lehrer und Lehrerinnen fortzusetzen. Doch nun stellt sich die Frage, ob dieser Prozess auch bei leistungsschwachen Schülerinnen und Schülern einsetzt. Können sie überhaupt erfolgreich sein? Würden analoge Aufgaben zum Unterricht eine bessere Förderung bewirken? Welche Methoden sollte man also anwenden, um eine positive Weiterentwicklung bei dem Themenschwerpunkt der Bruchzahlen zu erreichen? (Vgl. WITTMANN, 2006, S. 50)

„Die Antwort kann – insbesondere wenn es leistungsschwache Schüler betrifft – nicht auf fachlich-inhaltliche Aspekte reduziert werden, da das Lernen von Mathematik ein komplexer Prozess ist, der zahlreichen, miteinander verknüpften Einflussfaktoren unterliegt. Sie bedarf vielmehr eines mehrperspektivistischen Ansatzes.“

(WITTMANN, 2006, S. 50)

Außerdem sollte man auf die Verhaltens- und Vorgangsweisen der Schülerinnen und Schüler beim Lösen der Aufgaben, die Bezug auf zahlreiche Grundvorstellungen nehmen, genau beobachten. Es wurden daher fünf Fragen erstellt, auf die man sich gezielt konzentrieren sollte:

„- Welche Faktoren beeinflussen den Lösungsprozess bei geöffneten (offenen) Aufgaben zur Weiterentwicklung der Grundvorstellungen so, dass er erfolgreich verläuft?

- Welche Faktoren gibt es für ein Scheitern beim Lösen dieser Aufgaben?

- Welche Emotionen treten im Lösungsprozess auf, und wie wirken sie sich aus?

- Welche Beliefs (Verhaltensweisen) der Schüler sind hierbei zu erkennen, und in welcher Beziehung stehen sie zum Verhalten der Schüler im Lösungsprozess?

- Welche Konsequenzen für die Weiterentwicklung der Aufgabenkultur im Bereich der Bruchzahlen lassen sich daraus jeweils ziehen?“ (WITTMANN, 2006, S. 51)

Die Emotionen der Schülerinnen und Schüler spielen beim Lösen diverser Beispiele eine wesentliche Rolle. Sie beurteilen eine Aufgabe als einfach, wenn ihnen die Aufgabe bekannt vorkommt und sie mit ähnlichen Beispielen bereits Erfahrung gemacht oder einen bestimmten Lösungsweg erkannt haben. Andererseits wird eine mathematische Aufgabenstellung als schwierig aufgefasst, wenn man das Beispiel nicht versteht, da der formulierte Text zu komplex ist und man keinen Ansatz für eine Lösung besitzt.

(Vgl. WITTMANN, 2006, S. 65)

Bei leistungsschwachen Schülerinnen und Schülern tritt oft ein Gefühl des Versagens auf, wenn sie eine bestimmte mathematische Problemstellung nicht lösen können. Viele geben bereits am Anfang auf und versuchen nicht einmal, einen Lösungsansatz zu entwickeln. Manchmal gelingt es ihnen jedoch trotzdem – aufgrund einiger Hilfestellungen von anderen Personen, wie zum Beispiel des Lehrers bzw. der Lehrerin oder der Eltern – Aufgaben korrekt zu erledigen. Dieses Verhalten weist darauf hin, dass das mangelnde Selbstvertrauen mancher Schülerinnen und Schüler genauso einflussreich sein kann wie inhaltliche Defizite.

(Vgl. WITTMANN, 2006, S. 65)

In einem Interview, in dem es darum geht, komplexe mathematische Aufgaben zu lösen, erzählt ein Schüler, dass er Angst hat, wenn er derartige Aufgaben sieht und lösen muss. Es stellt für viele Schülerinnen und Schüler eine unangenehme Situation dar, wenn sie vor der Klasse ein Beispiel an der Tafel lösen müssen, bei dem sie keine Lösungsansätze kennen. Sie schämen sich vor der Klasse und somit sinkt ihr Selbstvertrauen enorm. Ein Schüler erläutert, dass ihm der Mathematikunterricht nur dann Freude bereitet, wenn er ein Beispiel rechnen muss, das er gut beherrscht. Unter dem Begriff „Freude“ versteht man eine aktivierend-positive Emotion. Ein Schüler bzw. eine Schülerin spürt dieses Gefühl, wenn er oder sie aktiv am Unterricht teilhaben kann, denn dadurch steigt wiederum das Selbstvertrauen.

(Vgl. WITTMANN, 2006, S. 66)

„Eine Aufgabe wird nicht als offene Lernsituation verstanden, sondern verlangt nach der Bearbeitung gemäß einem von der Lehrkraft mitgeteilten Schema. Dies deckt sich mit dem Befund, dass Schüler, die zu einer vorgelegten Aufgabe kein Lösungsschema wissen, oft relativ rasch aufgeben.“ (WITTMANN, 2006, S. 66)

Daher wünschen sich einige Schülerinnen und Schüler einen Mathematikunterricht, der auf der Methode „Vormachen – Nachmachen“ basiert. Sie wollen damit zu verstehen geben, dass sie mehr Hilfestellungen durch den Lehrer oder die Lehrerin benötigen, denn sie fühlen sich zahlreichen Aufgaben nicht gewachsen. Dazu kommt noch, dass man sich als Schüler bzw. Schülerin in einer gewissen Abhängigkeit zum Lehrenden wahrnimmt. Man fühlt sich in eine passive Rolle versetzt, aus der man nur sehr schwer wieder herauskommt. Es kommt zu einem Gefühl der eigenen Unfähigkeit, sodass man nicht mehr aktiv mitarbeiten kann.

(Vgl. WITTMANN, 2006, S. 66-67)

Hinzu kommt, dass weiters oft Disziplinstörungen auftreten. Demzufolge wird der Vortragende bzw. die Vortragende nicht mehr verstanden und somit sind auch seine bzw. ihre Schritte nicht nachvollziehbar. Vergleicht man nun einen Hauptschüler bzw. eine Hauptschülerin mit einem Gymnasiasten oder eine Gymnasiastin, so lässt sich erkennen, dass viele leistungsschwache Schüler bzw. Schülerinnen von Hauptschulen keine allgemeinen Vorstellungen von Mathematik haben. Bei Kindern aus Gymnasien kann man dagegen öfters ein Bestreben in eine bestimmte Richtung erkennen. Sie wollen eine Aufgabe auf jeden Fall lösen können und „opfern“ dafür sogar manchmal ihre Freizeit. Außerdem stellen sie im Unterricht viele Fragen zu dem Themenschwerpunkt, wodurch sie großes Interesse und Ehrgeiz zeigen. Man kann einen prozessorientierten Unterricht erkennen. Leistungsschwache Kinder lernen mathematische Inhalte oft lediglich deshalb, weil es die Lehrerin bzw. der Lehrer von ihnen verlangt und sie die einzelnen Schulstufen sonst nicht positiv absolvieren könnten. Sie erkennen beim Lernstoff keinen weiteren Zweck, für sie erscheint er als etwas Sinnloses. Der Realitätsbezug geht verloren, genauso wie jede Art von Motivation. Daher ist es besonders wichtig, sich als Lehrerin bzw. Lehrer dessen bewusst zu sein und zu versuchen, die Anschauungsweisen der Kinder zu verändern. Das bedeutet, dass man viel mehr Beispiele wählen und diese auf Grundvorstellungen aufbauen sollte, sodass ein mathematisches Verständnis entwickelt werden kann. (Vgl. WITTMANN, 2006, S. 67-68)

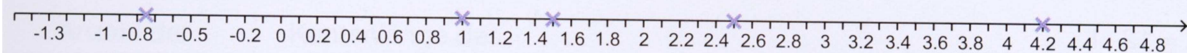
3.6 BILDUNGSSTANDARDSAUFGABE „ZAHLENGERADE“

Aufgabe „Zahlengerade“

Markiere auf einer Zahlengeraden die folgenden Zahlen:

1,5; $-\frac{6}{8}$; 1; $\frac{5}{2}$; 4,2

Lösung bzw. möglicher Lösungsweg:



(NEUREITER, 2010, S. 15)

Die Aufgabe aus dem Praxishandbuch der Bildungsstandards zielt auf eine bildliche Lösung ab. Es wird versucht, die Vorstellungsebene zu erweitern. Außerdem wird überprüft, inwieweit Kenntnisse und Fähigkeiten bereits erlernt wurden.

Die hier behandelten Kompetenzen gehen auf die Bereiche H1, I1 und K1 zurück. (Zur genauen Definition dieser Abkürzungen blättern Sie bitte zurück auf Seite 20).

H1: Darstellen: Es geht um den Wechsel zwischen der symbolischen Darstellung von Zahlen und ihrer Darstellung auf der Zahlengerade.

I1: Zahlen und Maße: Es geht um symbolische und grafische Darstellungen von Zahlen.

K1: Einsetzen von Grundkenntnissen: Die Aufgabe erfordert grundlegendes Wissen über die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten von Zahlen.

(NEUREITER, 2010, S. 15)

4. GRUNDVORSTELLUNGEN ZUR PROZENTRECHNUNG

Der Grund für meinen Themenschwerpunkt „Grundvorstellungen zur Prozentrechnung“ beruht auf der Tatsache, dass viele Menschen Fragen wie zum Beispiel „Ein Auto kostet 24 000 Euro. Ein Verkäufer lässt dem Kunden 25% des Betrags nach. Wie viel würde das Auto nun kosten?“ nicht beantworten können. Viele sagen, dass sie die Rechnung ohne Taschenrechner nicht lösen können. Offenbar verbinden diese Menschen Prozentrechnen mit einem komplizierten Vorgehen, mit dem sie sich nicht näher beschäftigen wollen. Die Aufmerksamkeit sinkt, sobald der Begriff „Prozent“ erwähnt wird, da er von vielen als „nicht-wissenswert“ eingestuft wird.

Ein anderes Beispiel entstammt meiner persönlichen Erfahrung vor etwa einem Jahr bei einer Kassa in einer Supermarktfiliale. Ich konnte mit einem Gutschein 10% Rabatt auf einen Einkauf erhalten. Daher beschloss ich, diesen Einkaufsbon in die Filiale mitzunehmen. Unglücklicherweise vergaß ich ihn vorzuweisen und bemerkte dies erst später. Als ich zur Frau an der Kasse zurückkehrte und ihr den Gutschein geben wollte, konnte sie nicht ausrechnen, wie viel sie mir bei meinem Einkauf im Wert von 8,90 € zurückgeben musste. Ich war sehr verwundert über diese Wissenslücke der Verkäuferin und beschloss, ihr zu helfen. Ich sagte, dass ich bitte „89 Cent“ zurückerhalten würde, da dieser Betrag 10% meines Einkaufs entspräche.

Nach diesem persönlichen Erlebnis beschloss ich, als zukünftige Professorin etwas gegen dieses Dilemma zu unternehmen. Die Kernproblematik liegt hauptsächlich darin, dass bereits im Unterricht viel zu wenig auf die bildlichen Darstellungen und realen Lebenssituationen eingegangen wird. Ich bin mir sicher, dass es bei Lehrerinnen und Lehrern oft an näheren Erklärungen scheitert, weshalb manche mathematischen Themenschwerpunkte nicht verstanden werden. Einmal sagte eine Nachhilfeschülerin zu mir: „Wenn ich gewusst hätte, dass man die Prozentrechnung für alltägliche Lebenssituationen so oft braucht, hätte mich das am Anfang sicherlich mehr interessiert. Aber unsere Professorin hat nur gemeint, dass das wichtig ist, doch das sagt sie immer.“ Ich sehe es nun als Notwendigkeit an, etwas zur Lösung dieses Problem beizutragen.

4.1 GRUNDVORSTELLUNGEN ZUM PROZENTBEGRIFF

4.1.1 GRUNDVORSTELLUNG 1:

PROZENTE ALS HUNDERSTELBRUCHTEILE

$1 \% = \frac{1}{100}$	$a \% = \frac{a}{100}$	$a \% \text{ von } b = \frac{a}{100} \cdot b$
------------------------	------------------------	---

Daraus ergibt sich:

$$100 \% = \frac{100}{100}$$

$$75 \% = \frac{75}{100}$$

$$50 \% = \frac{50}{100}$$

$$25 \% = \frac{25}{100}$$

$$10 \% = \frac{10}{100}$$

$$20 \% = \frac{20}{100}$$

Zunächst soll den Schülerinnen und Schülern erklärt werden, dass man mit Prozenten wie mit ganzen Zahlen rechnen kann, wenn der Nenner immer derselbe bleibt, nämlich $\frac{1}{100}$. Dabei werden die Hundertstel als Einheiten betrachtet (wie zum Beispiel cm, g, etc.). Anschließend konzentrieren sich die Kinder auf das Prinzip „Hundert steht für ein Ganzes“.

4.1.2 GRUNDVORSTELLUNG 2:

PROZENTE ALS BELIEBIGE BRUCHTEILE

$$100 \% = \frac{100}{100} = 1$$

$$75 \% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

$$50 \% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

$$25 \% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$$10 \% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

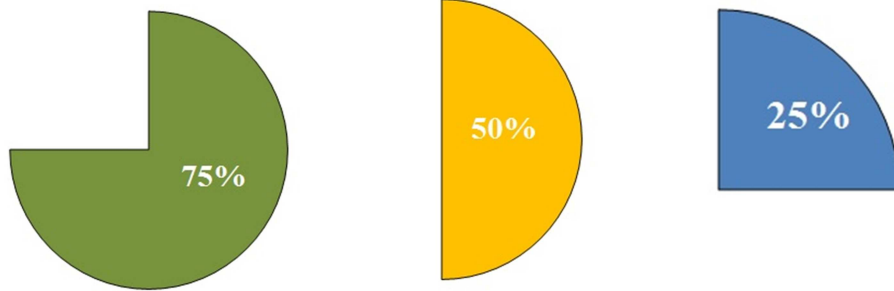
$$20 \% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

Es wird hier ein enger Zusammenhang mit der Bruchrechnung erkennbar.

Diese Verbindung zur Bruchrechnung kann man zum Beispiel mit einem Tortendiagramm gut zeigen:

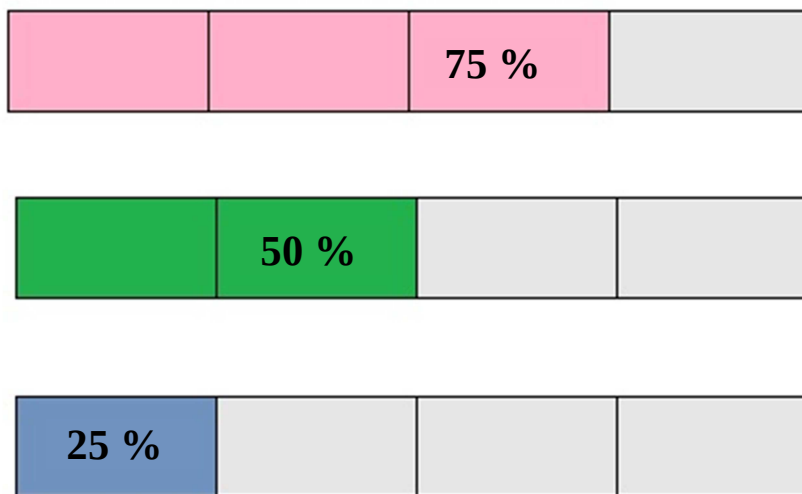
$$100 \% = 360^\circ$$

$$1 \% = 3,6^\circ$$



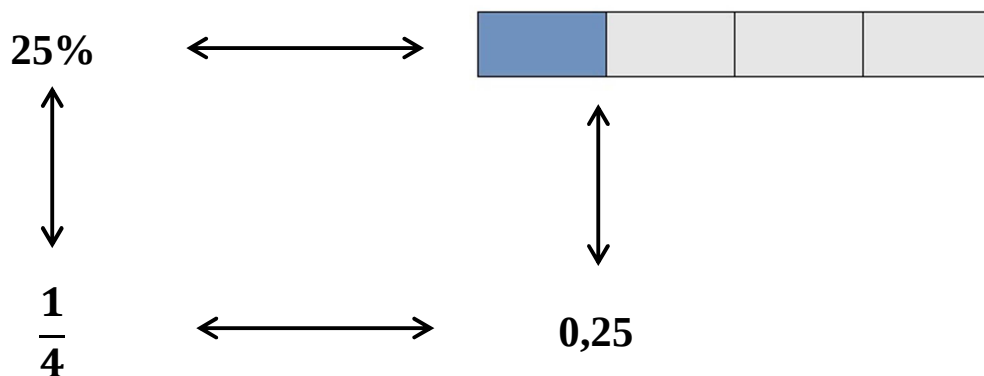
Eine andere Möglichkeit wäre, Prozentstreifen zu verwenden:

100% = 10cm langes Rechteck



(Vgl. KOTH, 2009)

Es gibt viele verschiedene Darstellungsformen der Prozentrechnung. Jeder Schüler und jede Schülerin sollte sich über die einzelnen Unterscheidungen bewusst sein und diese auch anwenden können.



(Vgl. KOTH, 2009)

4.1.3 GRUNDVORSTELLUNG 3:

VERMEHRUNG BZW. VERMINDERUNG UM EINEN FAKTOR

Zuerst überlegt man sich Folgendes:

„Eine Größe A wird um 5% vermehrt:

$$A + 5\% \text{ von } A = A + \frac{5}{100} \cdot A = A \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right) = 1,05 \cdot A$$

Eine Größe A wird um 7% vermindert:

$$A - 7\% \text{ von } A = A - \frac{7}{100} \cdot A = A \cdot \left(1 - \frac{7}{100}\right) = 0,93 \cdot A \quad (\text{MALLE, 2011, S. 37})$$

In dieser Art und Weise sollten die Schülerinnen und Schüler auch ohne eine bestimmte Aufgabenstellung diese Überlegungen im Kopf haben und notieren können. Denn schlussendlich überlegt man allgemein:

„Eine Größe A wird um 5% vermehrt:

$$A + p\% \text{ von } A = A + \frac{p}{100} \cdot A = A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

Eine Größe A wird um 7% vermindert:

$$A - p\% \text{ von } A = A - \frac{p}{100} \cdot A = A \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right) \quad (\text{MALLE, 2011, S. 37})$$

Es ist daher sehr wichtig, dass Schülerinnen verstehen, was genau eine Vermehrung bzw. eine Verminderung um $p\%$ bedeutet. Diese Kenntnis ermöglicht eine Erweiterung des bisher gelernten Grundwissens.

Vermehrung von A um $p\%$ bedeutet Multiplikation von A mit dem Faktor $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

Verminderung von A um $p\%$ bedeutet Multiplikation von A mit dem Faktor $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$.

(MALLE, 2011, S. 37)

PROZENTE ALS ZINSESZINSRECHNUNG

Begriffserklärungen:

K_0 Kapital: Geldbetrag, der eingezahlt wird

$p\%$Zinssatz: Prozentsatz, der angibt, wie viel Prozent des Kapitals an Zinsen in einem bestimmten Zeitraum berechnet werden

ZZinsen: Betrag, den der Sparer bzw. die Sparerin für den eingezahlten Geldbetrag als Vergütung erhält

nAnzahl der Jahre, für die das Kapital verzinst wird

(REICHEL, HUMENBERGER, 2009, S. 145)

Beispiel:

Tom legt zu Jahresbeginn 2 000 € auf ein mit 3% verzinstes Sparbuch. Wie hoch ist der Kontostand am Ende des a) 1. Jahres b) 2. Jahres c) 3. Jahres d) 4. Jahres?

Lösung:

- a) 3% des Kapitals $K = 2000$ € sind 60 €. Somit gilt für das Kapital K_1 , über das Tom am Ende des ersten Jahres verfügt:

$$K_1 = 2000 + 60 = 2060$$

$$\text{Allgemein: } K_1 = K_0 + K_0 \cdot \frac{p}{100}$$

- b) 3 % des Kapitals $K_1 = 2 060$ € sind 61,8 €. Somit gilt für den Kontostand K_2 am Ende des zweiten Jahres:

$$K_2 = 2 060 + 61,8 = 2 121,8 \text{ €}$$

$$\text{Allgemein: } K_2 = K_1 + K_1 \cdot \frac{p}{100} = K_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

- c) Analog dazu folgt: $K_3 = 2 121,8 + 63,65 = 2 185,45$ €

$$\text{Allgemein: } K_3 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$$

- d) $K_4 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^4 = 2 251,02$ € (KOTH, 2009)

Man erkennt, dass der Geldbetrag immer erst am Ende des Jahres verzinst wird. Das bedeutet, dass die anfallenden Zinsen zum Kapital hinzuaddiert und im darauffolgenden Jahr mitverzinst werden. Es handelt sich bei diesem Beispiel um Zinseszinsen.

Allgemeine Zinseszinsformel für die Höhe des Kapitals K_n am Ende des n -ten Jahres:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Wird der Zinssatz in Dezimalschreibweise angegeben, das bedeutet $i = \frac{p}{100}$, so lautet die Zinseszinsformel:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$$

(Vgl. KOTH, 2009)

Es gilt jedoch zu beachten, dass die im vorigen Beispiel geschilderte Situation für den Alltag einer Bank nicht typisch ist. Die Zinseszinsformel ist nämlich lediglich dann anwendbar, wenn das Anfangskapital K_0 für n volle Jahre jeweils vom 1. Jänner bis zum 31. Dezember auf dem Sparbuch liegt und sich der Betrag auf dem Sparbuch während der gesamten Verzinsungsdauer nicht verändert, weder durch eine Behebung eines Geldbetrags noch durch eine Einzahlung auf das Sparbuch. (Vgl. KOTH, 2009)

Verschiedene Aufgabentypen:

1. Aufgabentyp: geg.: Kapital (K_0), Zinssatz ($p\%$)

ges.: Kapital nach n Jahren (K_n)

Richard legt am 01. Jänner 2004 einen Betrag von 8000 € auf ein mit 2,75% verzinstes Sparbuch. Wie viel beträgt sein Vermögen am Ende des a) 5. b) 10. c) 13. Jahres?

2. Aufgabentyp: geg.: Kapital (K_0), Kapital nach n Jahren (K_n)

ges.: Zinssatz ($p\%$)

Maria hatte zu Jahresbeginn 7500 € auf ihrem Sparbuch.

- a) Drei Jahre später beträgt ihr Guthaben 8 195,45 €.
- b) Fünf Jahre später beträgt ihr Guthaben 8 485,56 €.
- c) Zehn Jahre später beträgt ihr Guthaben 11 101,83 €.

Wie hoch ist der Zinssatz?

3. Aufgabentyp: geg.: Kapital nach n Jahren (K_n), Zinssatz ($p\%$)

ges.: Kapital (K_0)

Wie hoch muss der einzulegende Betrag zu Jahresbeginn sein, um bei (1) 2% (2) 3% (3) 4% Zinseszinsen am Ende des a) 5. Jahres 5000 € b) 10. Jahres 10000 € c) 12. Jahres 12000 € ausgezahlt zu bekommen?

(Vgl. KOTH, 2009)

Zinsen für Teile eines Jahres

Wir betrachten nun den Fall, wenn ein Kapital lediglich für ein paar Monate oder Tage (innerhalb eines Kalenderjahres) verzinst wird.

„Jeder Monat wird mit 30 Tagen gerechnet, das (Bank-)Jahr mit 360 (=30 · 12) Tagen.

Pro Monat fallen also $\frac{1}{12}$ der Jahreszinsen und pro Tag $\frac{1}{360}$ der Jahreszinsen an.“

(REICHEL, HUMENBERGER, 2009, S. 145)

Zinsen für Teile eines Jahres

Zinsen für einen Monat: $Z = K_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{12}$

Zinsen für m Monate: $Z = K_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{m}{12}$

Zinsen für einen Tag: $Z = K_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{360}$

Zinsen für t Tage: $Z = K_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{t}{360}$

Wobei p% der Jahreszinssatz ist.

(REICHEL, HUMENBERGER, 2009, S. 145)

Außerdem ist es wichtig, dass Schülerinnen und Schüler wissen, wann die Verzinsung endet und beginnt:

„Die Verzinsung beginnt immer mit dem auf die Einlage folgenden Werktag (Montag – Freitag) und endet mit dem Tag der Abhebung. Ein an einem Freitag eingelegtes Kapital wird also erst ab dem folgenden Montag verzinst.“
(REICHEL, HUMENBERGER, 2009, S. 145)

PROZENTE ALS KAPITALERTRAGSSTEUER

In fast allen Ländern der Welt wird das Einkommen versteuert. Das bedeutet, dass man laut Gesetz einen gewissen Prozentsatz des Einkommens an den Staat abgeben muss. Wenn man nun ein Kapital anlegt, erhält man dafür Zinsen, die auch als Einkommen bezeichnet werden. Seit dem Jahre 2009 beträgt diese Steuer 25% der Zinsen und trägt den Namen *Kapitalertragssteuer* (KESt.). Diesen Anteil der Zinsen behält sich die Bank und leitet ihn an den Staat weiter. (Vgl. REICHEL, HUMENBERGER, 2009, S. 149)

Beispiel:

Susanne hat 700 € auf ihrem Sparbuch und erhält 4% Jahreszinsen.

- Welchen Betrag ergeben die Jahreszinsen?
- Wie viel beträgt die KESt.?
- Wie viel Euro hat Susanne nach einem Jahr auf ihrem Sparbuch?

Lösung

a) Jahreszinsen: $Z = K_0 \cdot \frac{p}{100} = 700 \text{ €} \cdot 0,04 = 28 \text{ €}$

Die Zinsen betragen 28 €.

b) KESt.: $25\% \text{ von } 28 \text{ €} = 28 \text{ €} \cdot 0,25 = 7 \text{ €}$

Die KESt. beträgt 7 €.

c) Guthaben: $700 \text{ €} + 28 \text{ €} - 7 \text{ €} = 721 \text{ €}$

Susanne hat nach einem Jahr 721 € auf ihrem Sparbuch.

(Vgl. REICHEL, HUMENBERGER, 2009, S. 149)

Nettozinsen:

Nettozinssatz $p_{\text{netto}}\%$ nach Abzug der KESt. vom Bruttozinssatz $p\% = p \cdot 0,75$

Die tatsächlich anfallenden Zinsen Z_{netto} sind daher: $Z_{\text{netto}} = K_0 \cdot \frac{p_{\text{netto}}}{100} = Z \cdot 0,75$

(REICHEL, HUMENBERGER, 2009, S. 145)

4.2 GRUNDAUFGABEN ZUR PROZENTRECHNUNG

Die Grundaufgaben der Prozentrechnung besitzen eine Darstellung der Form:

$x \text{ \% von } y \text{ sind } z \quad \longleftrightarrow \quad \frac{x}{100} \cdot y = z$

Die drei Variablen entsprechen den folgenden Definitionen:

- **y** bezeichnet den **Grundwert**
- **x** steht für den **Prozentsatz**
- **z** nennt man den zugehörigen **Prozentanteil** oder **Prozentwert**

Beispiel:

5% von 80 Kindern sind 4 Kinder

Daraus ergibt sich:

5%Prozentsatz

80Grundwert

4Prozentanteil

(Vgl. KOTH, 2009)

Bei diesen Aufgaben sind stets zwei Größen angegeben und die dritte wird gesucht. Es gibt daher insgesamt drei verschiedene Aufgabentypen, welche man unterscheiden muss:

1. Aufgabentyp: geg.: x, y ges.: z
2. Aufgabentyp: geg.: y, z ges.: x
3. Aufgabentyp: geg.: x, z ges.: y

Es wäre sinnvoll, die drei verschiedenen Aufgabentypen nach ihrer aufgelisteten Reihenfolge im Unterricht durchzunehmen. Die Schülerinnen und Schüler müssen erst eine Art des Selbstvertrauens aufbauen. Man sollte daher langsam und genau vorgehen, um bereits zu Beginn Defizite aufzuheben.

Nun betrachten wir die unterschiedlichen Aufgabentypen. Für jeden Typ der Aufgabe gibt es drei verschiedene Methoden, durch welche man eine Lösung erhält.

1. **Aufgabentyp:** geg.: Grundwert (x), Prozentsatz (y)

ges.: Prozentanteil (z)

Beispiel:

Das Christkind besitzt 780 Weihnachtssterne. Es möchte 20% davon mit roter Farbe bemalen. Wie viele Sterne sind das?

a) Algebraische Lösung

$$20\% \text{ von } 780 = z$$

$$\frac{20}{100} \cdot 780 = z$$

$$0,2 \cdot 780 = z \rightarrow z = 156$$

b) Lösung als Dreisatzaufgabe

$$100\% \dots\dots\dots 780 \text{ Sterne}$$

$$20\% \dots\dots\dots x \text{ Sterne}$$

$$x = \frac{780}{100} \cdot 20 = 156$$

c) Lösung mit Formel

$$A = G \cdot \frac{p}{100}$$

$$A = 780 \cdot \frac{20}{100} = 156$$

(Vgl. KOTH, 2009)

2. **Aufgabentyp:** geg.: Grundwert (x), Prozentanteil (z)

ges.: Prozentsatz (y)

Beispiel:

180 Jugendliche stimmten auf Facebook ab, welcher Film ihnen am besten gefallen hat. Davon entschieden sich 72 für den Film „Avatar“. Wie viel Prozent sind das?

a) Algebraische Lösung:

$$x\% \text{ von } 180 = 72$$

$$\frac{x}{100} \cdot 180 = 72$$

$$x \cdot 1,8 = 72 \rightarrow z = 40$$

b) Lösung als Dreisatzaufgabe

180 Jugendliche100%

72 Jugendliche x%

$$x = \frac{100}{180} \cdot 72 = 40$$

c) Lösung mit Formel

$$A = G \cdot \frac{p}{100} \quad | \cdot 100$$

$$A \cdot 100 = G \cdot p \quad | : G$$

$$p = \frac{A \cdot 100}{G}$$

$$p = \frac{72 \cdot 100}{180} = 40$$

d) Lösung mit relativem Anteil

$$72 \text{ von } 180 = \frac{72}{180} = 0,4 = 40\%$$

In diesem Beispiel wäre der kürzeste Lösungsweg natürlich „die Lösung mit relativem Anteil“. Bei dieser Methode wird die Grundvorstellung der „Von-Deutung“ verwendet, die im Unterricht berücksichtigt werden sollte. (Vgl. KOTH, 2009)

3. **Aufgabentyp:** geg.: Prozentanteil (z), Prozentsatz (y)

ges.: Grundwert (x)

Beispiel:

Lydia möchte sich ein „American Cream Draft Pferd“ kaufen. Sie verdient monatlich 800 €, das sind 25% des Kaufpreises. Wie viel kostet das Pferd?

a) Algebraische Lösung

$$25\% \text{ von } y = 800$$

$$\frac{25}{100} \cdot y = 800$$

$$0,25 \cdot y = 800 \quad \rightarrow y = 3200$$

b) Lösung als Dreisatzaufgabe

25% 800 €

100% x €

$$x = \frac{800}{25} \cdot 100 = 3200$$

c) Lösung mit Formel

$$A = G \cdot \frac{p}{100} \quad | \cdot 100$$

$$A \cdot 100 = G \cdot p \quad | : p$$

$$G = \frac{A \cdot p}{100} = \frac{800 \cdot 100}{25} = 3200$$

(Vgl. KOTH, 2009)

4.2.1 ALGEBRAISCHE LÖSUNG VERSUS LÖSUNG ALS DREISATZAUFGABE

Betrachten wir zuerst die algebraische Lösung und die Dreisatzmethode. Wenn man die beiden Methoden miteinander vergleicht, kann man einige Gemeinsamkeiten feststellen. Erstens kommt die Struktur „x% von y sind z“ zum Vorschein, die man als Schülerin bzw. Schüler nicht übersehen darf. Anschließend muss man erkennen, welche Zahlen den jeweiligen Variablen entsprechen. Während diese Darstellungsform bei der algebraischen Lösung explizit angeschrieben wird, bleibt sie bei „der Lösung als Dreisatzaufgabe“ etwas im Hintergrund. Natürlich muss man die Variablen x, y und z nicht explizit anschreiben, man könnte sich auch in eigenen Gedanken überlegen: „Wie viel Prozent wovon?“ (Vgl. MALLE, 2011, S. 35).

Wichtig ist jedoch, dass diese Beziehung bei jedem bzw. jeder Lernenden vorhanden ist. Ansonsten würde man derartige Aufgaben nicht lösen können. Zusätzlich benötigt man bei beiden Methoden bestimmte Grundvorstellungen zur Prozentrechnung, wie beispielsweise die „Von-Deutung“. Doch auch diese Grundkenntnisse werden lediglich bei der algebraischen Lösung explizit ausgedrückt. Wenn man die letzte Rechenzeile der Dreisatzlösung mit der algebraischen Lösung vergleicht, erkennt man unterschiedliche Rechengänge. Der Grund dafür liegt in einem anderen Denkprozess. Bei der Aufgabe mit Dreisatz wird bewusst zum Beispiel $\frac{780}{100} \cdot 20$ angeschrieben und nicht etwa $780 \cdot \frac{20}{100}$ oder $\frac{780 \cdot 20}{100}$. In unserem Gehirn findet nämlich folgende Denkart statt: 100% sind 780 Sterne, 1% ist der hundertste Teil von 780 Sterne und 20% sind 20-mal so viele Sterne. Bei der algebraischen Vorgangsweise hingegen wird $\frac{780}{100} \cdot 20$ geschrieben, da man an 20 Prozent von 780 denkt.

(Vgl. MALLE, 2011, S. 35)

Bei der Methode des Dreisatzes wird die Rechenoperation in eine Division und Multiplikation aufgespalten. Wenn es zu keiner Dezimaldarstellung kommt, kann man im natürlichen Zahlenbereich bleiben. Falls es aber doch zum Auftreten von Dezimalzahlen kommen sollte, kann man sich trotzdem bei den Gedankengängen an natürlichen Zahlen orientieren. Dieses Verfahren, welches aus zwei Schritten besteht, wird in der algebraischen Methode durch eine abgekürzte Version ersetzt. (Vgl. MALLE, 2011, S. 35)

Es handelt sich hierbei um eine Multiplikation mit einer Bruchzahldarstellung der Form $\frac{p}{100}$. Jedoch muss als Voraussetzung gegeben sein, dass man die Bruchzahlen bereits als eigenständiges Denkobjekt erfasst hat. Die Variable x tritt in beiden Methoden auf. Auffallend ist jedoch, dass bei der Dreisatzaufgabe keine Kenntnisse zum Umformen von Gleichungen benötigt werden, bei der algebraischen Methode hingegen schon. Das x ist in der Dreisatzmethode nicht notwendig. Es wird hierbei durch eine direkte Folge von Rechnungen ermittelt. Bei der algebraischen Methode (2. und 3. Aufgabentyp) wird ein indirektes Denken vorausgesetzt, da man zunächst so vorgeht, als würde man das x bereits kennen und es erst später ausrechnet. (Vgl. MALLE, 2011, S.35)

Fazit ist, dass die Lösung von Dreisatzaufgaben etwas einfacher ist als die algebraischen Lösungswege. Daher wäre es im Unterricht gut, mit Dreisatzaufgaben zu beginnen und danach zu den algebraischen Aufgaben überzuleiten. Die Dreisatzmethode wird außerdem auch im realen Leben sehr oft angewendet. Trotzdem wäre es sehr von Vorteil, sich auch intensiv mit den anderen Methoden zu beschäftigen, da uns diese in der Mathematik ein viel größeres Spektrum bieten können. (Vgl. MALLE, 2011, S. 35)

In zahlreichen Schulbüchern der Mathematik wird großer Wert auf die folgende Formel gelegt:

$$A = G \cdot \frac{p}{100}$$

Die drei Variablen **A**, **G**, **p** haben folgende Bedeutung:

A.....Prozentanteil

G.....Grundwert

p.....Prozentsatz

Durch Umformen dieser Formel können die einzelnen Größen explizit ausgedrückt werden:

$A = \frac{G \cdot p}{100}$	$\longleftrightarrow$	$p = \frac{A \cdot 100}{G}$	$\longleftrightarrow$	$G = \frac{A \cdot 100}{p}$
-----------------------------	-----------------------	-----------------------------	-----------------------	-----------------------------

Der Lehrer bzw. die Lehrerin sollte jedoch darauf achten, dass die Schülerinnen und Schüler die einzelnen Formeln nicht bloß auswendig lernen, denn das wäre völlig sinnlos. Es ist vollkommen ausreichend, wenn man die erste Formel $A = \frac{G \cdot p}{100}$ kennt und die beiden anderen durch Umformungen erhält. Als Hilfestellung für die Schülerinnen und Schüler ist immer wieder zu fragen, wie groß der Grundwert, Prozentanteil oder Prozentsatz sind. Doch im Großen und Ganzen helfen diese Fragen nicht viel weiter. Worauf es tatsächlich ankommt, ist etwas völlig anderes.

„Man muss im Text eine Struktur der Form ‚x% von y sind z‘ sehen. Diese Struktur ist die Hauptsache, die Vokabeln sind die Nebensache. [...] Die Vokabeln sind möglicherweise sogar kontraproduktiv, weil dann die Analyse des Texts bloß in eine Suche nach diesen Vokabeln ausartet, statt sich auf das Auffinden der erwähnten Struktur zu konzentrieren.“ (MALLE, 2011, S. 36)

Oft gibt es Studierende, die die Formeln und Vokabeln der Prozentrechnung nur widerwillig lernen wollen. Daher kommt es zu einem Streitgespräch zwischen dem Lehrer bzw. der Lehrerin und dem bzw. der Lernenden.

Dies könnte in etwa lauten:

„LehrerIn: ‚Wenn $\frac{3}{4}$ von 248 zu berechnen sind, bezeichnen Sie dann auch die Zahl 248 als Grundwert, die gesuchte Zahl als Anteil und $\frac{3}{4}$ als Bruchteil? Schreiben Sie in diesem Fall auch eine Formel an, in die Sie dann die gegebene Zahl einsetzen.‘

StudentIn: ‚Nein, in diesem Fall natürlich nicht!‘

LehrerIn: ‚Wenn aber 3%, also $\frac{3}{100}$ von 248 zu berechnen sind, dann ist das doch genau dasselbe. Warum verwenden Sie hier eigene Vokabeln und eine Formel?‘“ (MALLE, 2011, S. 36)

Man kann nicht ausschließen, dass derartiges Vokabular in anderen Situationen mehr Sinn ergeben würde. Das wird nämlich nicht nur bei Grundaufgaben benötigt, sondern auch bei anderen Aufgabenstellungen wie zum Beispiel:

„Ein Prozentanteil A beträgt p Prozent eines Grundwertes G . Stelle Formeln für A , G und p auf!

Lösung: A sind $p\%$ von $G \rightarrow A = \frac{p}{100} \cdot G \rightarrow G = \frac{100 \cdot A}{p}$ und $\frac{100 \cdot A}{G}$.“

(MALLE, 2011, S. 36)

Beim Vergleich der Dreisatzaufgabe und der Lösung mit Formel ist zu erwähnen, dass es sich um dasselbe Grundprinzip handelt. Das Wesentliche beruht darauf, dass mit einem Faktor $(\frac{p}{100})$ multipliziert wird.

4.3 DER PROPORTIONALITÄTSBEGRIFF

4.3.1 DREISATZAUFGABEN IM TÄGLICHEN LEBEN

Bereits Volksschulkinder kennen den Begriff der Proportionalität. In der zweiten Klasse AHS bzw. HS beginnt man schließlich, sich intensiver damit auseinander zu setzen. Man versucht dafür, Beispiele aus dem alltäglichen Leben heranzuziehen.

Beispiel:

Für 8kg Äpfel bezahlt Christoph 12,50 €. Wie viel bezahlt er für 5kg?

Diese Art von Beispiel wird von den österreichischen Lehrerinnen und Lehrern meist „Schlussrechnung“ genannt. In Deutschland verwendet man dafür den Ausdruck „Dreisatzaufgabe“, welcher sinnvoller erscheint. Oft kennen österreichische Lehrerinnen und Lehrer diese Bezeichnung gar nicht. (Vgl. KOTH, 2009)

Das Wort „Schlussrechnung“ ist deshalb nicht gut gewählt, da man in der Mathematik immer Schlüsse zieht und nicht nur bei diesen bestimmten Aufgaben. Der Begriff „Dreisatzaufgabe“ weist darauf hin, dass drei der Größen gegeben sind und eine gesucht wird:

8kg.....	12,50 €
5kg.....	? (Vgl. KOTH, 2009)

Derartige Aufgabenstellungen wurden zwischen dem 15. und 16. Jahrhundert von den Mathematikern Adam Ries und Michael Stifel eingeführt. Die Absicht der Rechenbeispiele war, den Leuten aus dem Volk das „bürgerliche Rechnen“ (KOTH, 2009) beizubringen.

Bis heute wurden solche Rechnungen aufrecht erhalten und werden noch oft angewendet. Wer aber denkt, dass diese Aufgaben im realen Leben sehr oft angewendet werden, der irrt sich, denn im Supermarkt sind zum Beispiel die Preise fast immer pro kg angeschrieben. Falls man nun wissen möchte, wie viel 5 kg Äpfel kosten, muss man lediglich mit der Zahl 5 multiplizieren, bis man das gewünschte Ergebnis erhält. (Vgl. KOTH, 2009)

*„Ein ‚Schluss von einer Mehrheit auf eine andere Mehrheit‘ ist daher nicht nötig. Dies gilt auch für viele andere Situationen, denn man kennt oft den Literpreis, den Stückpreis, den Kilopreis, den Verbrauch pro km bzw. pro 10 km, den Stundenlohn, den Monatslohn usw. allgemein den **Wert pro Einheit** bzw. den **Wert eines geeigneten Vielfachen der Einheit**.“*
(KOTH, 2009)

4.3.2 DREISATZAUFGABEN ALS HILFE ZUR ENTWICKLUNG DES PROPORTIONALITÄTSBEGRIFFS

Im realen Leben benötigt man Aufgaben mit „Schluss von einer Mehrheit auf eine andere Mehrheit“ eher selten. Somit drängt sich die Frage auf, ob man diese Beispiele im Unterricht reduzieren sollte. Auf die Frage gibt es eine klare Antwort:

„Dreisatzaufgaben können und sollen ein Vehikel zur Entwicklung und Anwendung des Begriffs der direkten bzw. indirekten Proportionalität darstellen.“
(KOTH, 2009)

Es ist jedoch zu beachten, dass man hinter jeder Struktur einer Dreisatzaufgabe eine Proportionalitätsbeziehung zwischen zwei Größen erkennen kann. Diese Beziehung ist aber nicht sichtbar, weder durch eine bestimmte Formel, einen Graphen, eine Tabelle oder anders. Meistens werden bei dem Lösungsweg einer Aufgabe mit Dreisatz auch nicht die Begriffe der „Proportionalität“ bzw. „proportional“ benutzt. Das Resultat beruht schlussendlich darauf, dass viele Schülerinnen und Schüler nicht bemerken, dass sich hinter Rechenaufgaben mittels Dreisatz eine Proportionalitätsbeziehung verbirgt. Manche fassen den Entschluss, dass die beiden unabhängig zueinander sind. (Vgl. KOTH, 2009)

Möchte man nun als Lehrer oder Lehrerin gewisse Aufgaben mittels Dreisatz zur Weiterentwicklung des Proportionalitätsbegriffes verwenden, muss man eine Erweiterung durchführen. Dies kann man zum Beispiel durch Tabellen, verbale Beschreibungen, Bilder oder Formeln erreichen. (Vgl. KOTH, 2009)

Wie bereits erwähnt nehmen die Themenschwerpunkte Proportionalität und Prozentrechnung oft eine bedeutende Rolle in unserem Leben ein. Speziell die alltagsrelevanten Konfrontationen mit Prozenten gehören zur mathematischen Grundbildung. Das Kernproblem bei dem Themengebiet ist jedoch, dass vor allem in der Prozentrechnung einige Schülerinnen und Schüler Defizite aufweisen. Daher drängt sich die Frage auf:

„Wie verläuft die Kompetenzentwicklung in den Inhaltsbereichen Proportionalität und Prozentrechnung von der 5. bis zur 10. Klasse? Worin liegen besondere Schwierigkeiten beim Lösen entsprechender anwendungsorientierter Aufgaben bei Schülerinnen und Schüler?“ (HAFNER, 2009, S. 1)

4.4 KOMPETENZORIENTIERTES LERNEN DER PROZENTRECHNUNG

Laut dem Lehrplan der AHS-Unterstufe wird in der sechsten Schulstufe bereits mit der Prozentrechnung begonnen.

„Arbeiten mit Zahlen und Maßen:

Rechnen mit Prozenten in vielfältigen Zusammenhängen“

(<http://www.bmukk.gv.at/medienpool/789/ahs14.pdf>, 12.12.2011)

Schülerinnen und Schüler sollten davor bereits mit den Grundvorstellungen zu Brüchen und Dezimalbrüchen vertraut sein, deren Darstellungen erkennen und sie in Alltagssituationen richtig interpretieren können. Außerdem wäre es gut, wenn sie Brüche und Dezimalzahlen der Größe nach ordnen können und im Stande sind, sie zu kürzen, um sie so miteinander vergleichen zu können. Lernende sollten Grundvorstellungen von Zuordnungen besitzen und diese auch richtig interpretieren können.

4.4.1 KONKRETISIERUNG DES UNTERRICHTS

Bei der Einführung in das Thema der Prozentrechnung könnte man die Klasse zuerst fragen, ob sie sich schon einmal mit Prozentangaben auseinandergesetzt hat. Es gibt zahlreiche Darstellungen in Prospekten, Zeitungen aber auch auf Verpackungen. Es ist wichtig, dass das Vorwissen und die Kenntnisse der Schülerinnen und Schüler aktiviert werden, bevor man mit den Begriffen der Prozentrechnung beginnt. Nach den Auseinandersetzungen kann man schließlich zur Einführung des Prozentbegriffes überleiten. Ein guter Tipp wäre, dass man speziell bei diesem Themengebiet einen fächerübergreifenden Unterricht, beispielsweise mit Biologie oder Chemie, durchführt. Damit wird das Interesse der Schülerinnen und Schüler an der Prozentrechnung sicherlich steigen. Man könnte einen Exkurs zum Schwerpunkt „Gesunde Ernährung“ machen. (Vgl. VOSS, ZWEILING, 2008, S. 1)

Schülerinnen und Schüler nehmen leere Verpackungen von bereits verzehrten Lebensmitteln in den Unterricht mit und man betrachtet diese näher. Ein Beispiel dafür könnte eine leere Verpackung eines Schokolade-Müslis sein. Auf der Vorderseite steht „Flakes mit 5% Schokolade überzogen“. Nun könnte man ausrechnen, wie viel Gramm Schokolade das nun sind. Auch auf zahlreichen anderen Lebensmitteln finden sich Prozentangaben, wobei man den Grundwert, den Prozentwert oder den Prozentanteil ausrechnen kann. Es gibt viele verschiedene Möglichkeiten dafür, den Mathematikunterricht kreativ zu gestalten, doch das wichtigste ist, dass man sich im Vorhinein Gedanken über einen gewissen Themenschwerpunkt macht. Im weiteren Verlauf des Unterrichts versuchen die Schülerinnen und Schüler, die Anteile der Nährstoffe in Lebensmitteln als Bruchzahl darzustellen.

Anschließend könnte man eine kleine Diskussion über das Thema „Naschereien“ durchführen, wobei man Begründungen zu den ausgerechneten Prozentsätzen und Werten angeben muss. Als zusätzliche Aufgabenstellung müssen die Schülerinnen und Schüler anschließend ein Kreisdiagramm in ihr Heft zeichnen und die Nährstoffanteile eines Lebensmittels in einer Bruchzahl und einer Prozentzahl angeben. Natürlich sollte der Lehrer bzw. die Lehrerin Hilfestellungen geben und sie unterstützen. In diesem Fall ist es wichtig, dass Schülerinnen und Schüler ihre Kenntnisse selber einzuschätzen lernen und sich damit von Anfang an intensiv befassen.

(Vgl. VOSS, ZWEILING, 2008, S. 1)

Nachdem im Unterricht die Einführung der Prozentrechnung vorgenommen wurde, sollte man als Lehrer bzw. Lehrerin eine Überprüfung des gelernten Stoffes vornehmen. Schülerinnen und Schüler sollten nun in der Lage sein, einzelne Situationen zu nennen, in denen Aufgaben zur Prozentrechnung auftreten. Sie sollten danach zum Begriff „Prozent“ überleiten und ihn definieren können. Es wäre gut, wenn sie Beispiele aus ihrem Alltag erzählen und Querverbindungen zur Bruchrechnung erkennen. (Vgl. VOSS, ZWEILING, 2008, S. 1-2)

Bereits während des Unterrichts muss ein Lehrer bzw. eine Lehrerin darauf achten, realitätsbezogene Beispiele aus dem Alltag miteinzubeziehen und die Lernenden schon hier schätzen zu lassen. Dadurch können die Schülerinnen und Schüler ein Gefühl dafür aufbauen, ob eine Lösung bei einer Aufgabe tatsächlich stimmen könnte oder nicht. Entscheidend ist jedoch vor allem, dass man die konkrete Unterscheidung zwischen den Begriffen der Prozentrechnung, nämlich Prozentsatz, Prozentwert und Grundwert weiß und richtig erläutern kann. Denn diese Begriffe können in Sachtexten der Grund sein, weshalb man manche Aufgabenstellungen nicht lösen kann. Anschließend sollte der Lehrer bzw. die Lehrerin darauf eingehen, wie man Prozente am besten anschaulich darstellt.

(Vgl. VOSS, ZWEILING, 2008, S. 1-2)

Zuerst wäre das Herstellen einer Prozentscheibe von großem Nutzen. Dann können sich Sitznachbar und Sitznachbarin gegenseitig Fragen dazu stellen. Im weiterführenden Unterricht sollte man auf den Zusammenhang zwischen Winkelgröße und der Prozentdarstellung im Kreisdiagramm eingehen. Daraufhin sollten Schülerinnen und Schüler in der Lage sein, Kreisdiagramme zu vorgegebenen Prozentsätzen zu zeichnen. Erfreulich wäre es, wenn ein Schüler oder eine Schülerin fragen würde, ob man Prozentsätze auch auf eine andere Art und Weise darstellen könnte. Derartige Fragestellungen zeigen ein großes Interesse zum Thema, daher sollte man als Lehrer bzw. Lehrerin auf diese Fragen besonders gut eingehen.

(Vgl. VOSS, ZWEILING, 2008, S. 1-2)

Es werden Prozentsätze in verschiedensten Grafiken dargestellt, und als mögliche Hausübung könnte man den Schülerinnen und Schülern den Auftrag geben, sich noch andere Grafiken (zum Beispiel mit Hilfe des Internets) zu überlegen und anschließend die Vor- und Nachteile einer Darstellung zu diskutieren. Eine gute Idee wäre, die Schülerinnen und Schüler verschiedene symbolische und graphische Darstellungen selbstständig vergleichen zu lassen und danach eigenständige Vergleichsaufgaben zu entwickeln. Daraufhin könnten auch Anteile in Sachaufgaben unterschieden werden und eine Auswertung erfolgen.

(Vgl. VOSS, ZWEILING, 2008, S. 2-3)

Im fortlaufenden Unterricht sollte auch die Berechnung des Prozentwertes mithilfe der drei verschiedenen Methoden der Prozentrechnung geübt werden. Zu Beginn wäre die Dreisatzmethode eine gute Wahl. Natürlich kann es sein, dass ein Schüler bzw. eine Schülerin sich sehr für die Prozentrechnung interessiert und ihre Basiskompetenzen erweitern möchte. In diesem Fall sollte sie bzw. er von seinem Lehrer bzw. seiner Lehrerin intensiv unterstützt werden. Überfachliche Kompetenzen sind dann zu erkennen, wenn die Lernenden in der Lage sind, eigene Kreisdiagramme ohne Vorlage zu zeichnen, einzelne Formeln zu begründen, Prozentsätze in Sachsituationen zu überprüfen und den Grundwert in konkreten Sachsituationen zu bestimmen. Oft erkennt man Schülerinnen und Schüler mit überfachlichen Kompetenzen auch an ihrem sozialen Verhalten. Sie lernen sehr schnell, ihre eigenen Fähigkeiten realistisch einzuschätzen und sich an Gesprächen zu beteiligen. Außerdem versuchen sie, angemessen auf ihren Gesprächspartner bzw. Gesprächspartnerin einzugehen und kooperativ zu arbeiten. In ihrer Freizeit entnehmen sie Informationen aus Medien und versuchen oft Zusammenhänge zu einem bestimmten Themengebiet herzustellen und damit zu arbeiten.

(Vgl. VOSS, ZWEILING, 2008, S. 2-3)

4.5 PISA- ERGEBNISSE ZUR WAHRSCHEINLICHKEIT UND STATISTIK

OECD-weit gibt es bezüglich dieser beiden Themengebiete noch sehr große Defizite. Bei vielen Aufgabenstellungen zeigen die Schülerinnen und Schüler Schwächen, die teilweise ziemlich stark ausgeprägt sind. Manches lässt sich sicherlich darauf zurückführen, dass vereinzelte Grundkenntnisse benötigt werden, die sie jedoch nicht haben, da diese im Unterricht nicht durchgenommen wurden. Der Grund dafür ist offensichtlich, denn dieses Grundwissen ist nicht im mathematischen Lehrplan der Unterstufe des österreichischen Schulsystems enthalten. Den Schülern fehlen daher die nötigen Vorstellungen, Interpretationen, Reflexionen, Begründungen sowie Vernetzungen zu anderen Themenschwerpunkten. Somit wird ersichtlich, dass vor allem in diesen Bereichen noch sehr vieles zu verändern ist. Doch wie gesagt, dadurch dass man die Stoffgebiete in keinem Lehrplan der Unterstufe finden kann, sind diese negativen Ergebnisse nicht sehr überraschend.

(Vgl. SCHNEIDER, PESCHEK, S. 4-5, 2006)

Meiner Meinung nach gibt es vor allem in der Unterstufe viele Beispiele (wie zum Beispiel Termumformungen), die man weitgehend kürzer behandeln könnte und stattdessen Zeit hätte, sich auf zentrale, alltagsrelevante Aufgaben zu konzentrieren.

Ein anwendungsorientiertes Gebiet in der Mathematik umfasst die Zinseszinsrechnung.

Teilweise gibt es auch hier große Defizite bei Schülerinnen und Schülern. Nun betrachten wir die Grundbegriffe, welche nicht außer Acht gelassen werden dürfen.

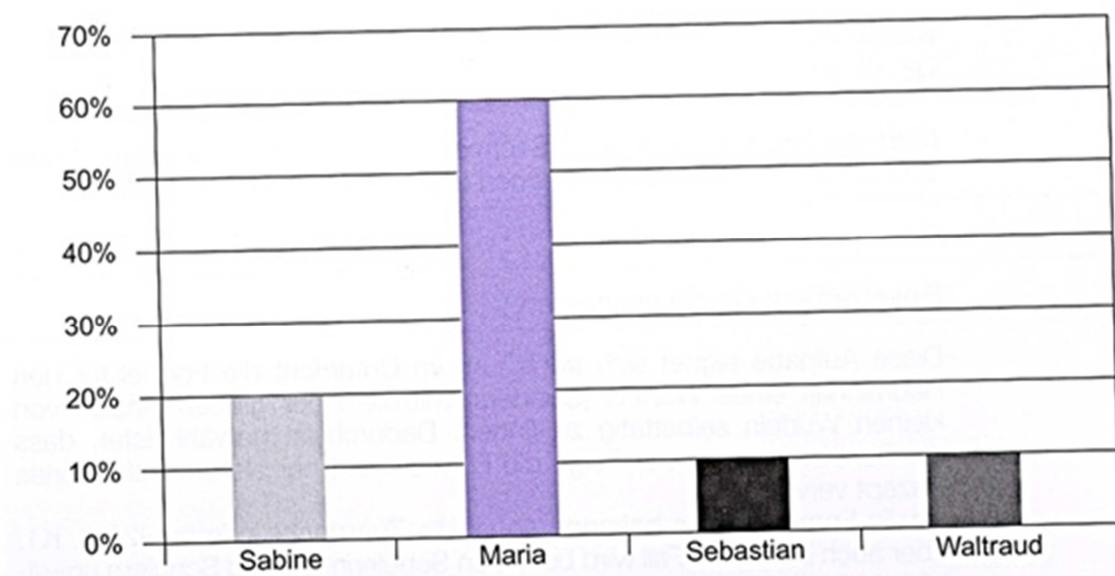
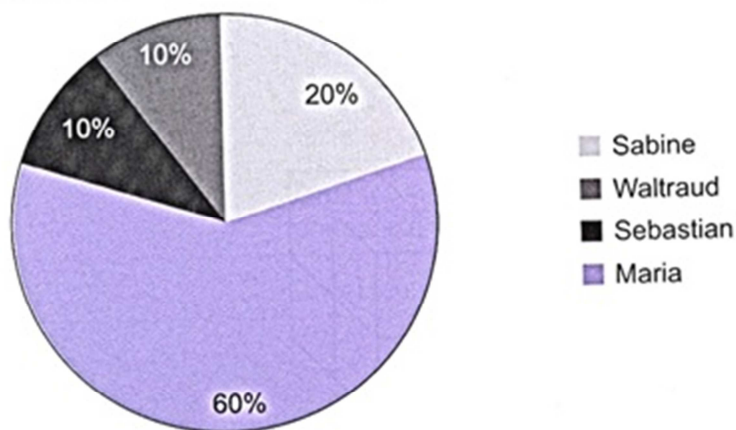
4.6 BILDUNGSSTANDARDAUFGABEN ZUR PROZENTRECHNUNG

Beispiel 1: Klassensprecherwahl

Stelle das Ergebnis der Klassensprecherwahl mithilfe eines geeigneten Computerprogramms in einem passenden Diagramm dar.

Kandidat/in	Stimmenanzahl
Sabine	4
Maria	12
Sebastian	2
Waltraud	2

Lösung bzw. möglicher Lösungsweg:



(NEUREITER, 2010, S. 18)

Die hier behandelnden Kompetenzen gehen auf die Bereiche H1, I4 und K1 zurück. (Zur genauen Definition dieser Abkürzungen blättern Sie bitte zurück auf Seite 20).

H1: Darstellen: Es geht um den Wechsel zwischen der symbolischen Darstellung von Zahlen und ihrer Darstellung auf der Zahlengerade.

I4: Statistische Darstellungen.

K1: Einsetzen von Grundkenntnissen: Die Aufgabe erfordert grundlegendes Wissen über die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten von Zahlen.

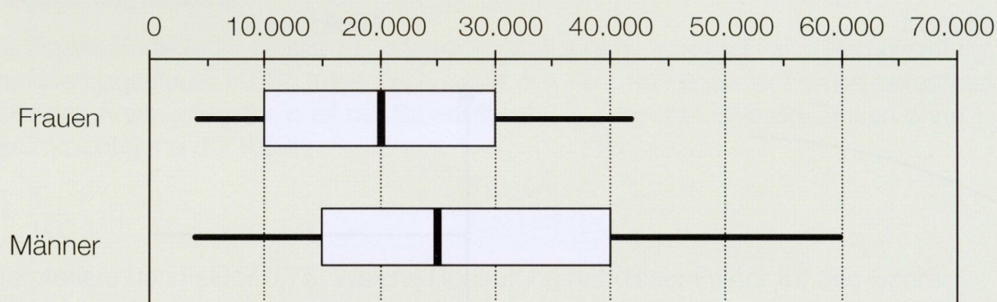
(NEUREITER, 2010, S. 18)

Beispiel 2: Boxplot

Aufgabe „Boxplot“

Der Boxplot in der Abbildung gibt einen Überblick über das Bruttojahreseinkommen in € der Angestellten eines Unternehmens.

Notiere möglichst viele Informationen, die du der Darstellung entnehmen kannst.



Lösung bzw. möglicher Lösungsweg:

Das höchste Einkommen der Männer beträgt 60 000 €, das der Frauen 42 000 €.
25 % der Frauen verdienen weniger als 10 000 €.
25 % der Männer verdienen mehr als 40 000 €.
50 % der Frauen verdienen zwischen 10 000 € und 30 000 € usw.

(NEUREITER, 2010, S. 28)

Die hier behandelnden Kompetenzen gehen auf die Bereiche H3, I4 und K1 zurück.

H3: Interpretieren: Aus einer graphischen Darstellung (Boxplot) müssen Daten abgelesen werden. Diese Daten sind im Zusammenhang mit dem Einkommen der Angestellten zu deuten.

I4: Statistische Darstellungen.

K1: Einsetzen von Grundkenntnissen: Die Aufgabe erfordert grundlegendes Wissen über die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten von Zahlen.

(NEUREITER, 2010, S. 28)

4.7 PROZENTE BEGREIFEN

„In der Zeitung, im Supermarkt und sogar in der Alltagssprache – überall begegnen uns Prozente. Daher nimmt die Prozentrechnung traditionell einen wichtigen Platz im Mathematikunterricht ein. Gleichzeitig ist sie für viele auch eines der schwierigsten und unbeliebtesten Themen. Es muss aber nicht bei diesem schlechten Image bleiben.“
(SCHILLING, 2010, S. 4)

4.7.1 GRUNDVORSTELLUNGEN AUFBAUEN

Viele Professoren und Professorinnen denken, dass Prozente erst spät in der Schulmathematik durchgenommen werden. Doch das ist ein Irrglaube, denn Schülerinnen und Schüler begegnen ihnen in alltäglichen Lebenssituationen sehr häufig. Trotzdem kann man auf Kenntnisse bzw. Vorerfahrungen der Lernenden nicht zurückgreifen. Es ist ihnen zwar meist bewusst, wie viel sie beispielsweise für ein Kleidungsstück oder Spielzeug zahlen müssen, wenn es um 50% reduziert ist, aber die einzelnen Begriffe und Anschauungsweisen der Prozentrechnung müssen erst erlernt werden. Das Wesen der Prozente steht nämlich dafür:

„Sie geben ein normiertes Maß für das Verhältnis von Teil und Ganzem an. Fast kaum jemand hat Erfahrungen damit, Anteile zu vergleichen.“ (SCHILLING, 2010, S. 4)

Es ist daher eine Normierung in der Prozentrechnung nötig, welche die Schülerinnen und Schüler nicht verstehen. Speziell dies macht aber schließlich den Prozentbegriff aus. Brüche mit verschiedenen Nennern kann man nur sehr schwer miteinander vergleichen, daher nimmt man eine Erweiterung um beispielsweise Hundertstel vor, wodurch man hier bei der Prozentrechnung angelangt wäre. Oft werden im Unterricht Bruchrechnung und Prozentrechnung getrennt voneinander behandelt. Es wäre jedoch gerade hier wichtig, einen Bezug zwischen den beiden Themenschwerpunkten herzustellen, da dieser etwas Grundsätzliches ist.

„Bei der Entwicklung der Grundvorstellungen von Brüchen ist es naheliegend, den Sonderfall pro cento beziehungsweise von Hundert als Bruchzahlen mit dem Nenner 100 herauszuarbeiten.“ (SCHILLING, 2010, S. 4)

Man kann auch bei der Dezimalzahlentwicklung Bruchzahlen, Dezimalzahlen und Prozentzahlen nebeneinander anschreiben, sodass die Beziehung zwischen ihnen verdeutlicht wird. Je mehr unterschiedliche Darstellungsformen im Unterricht herangezogen werden, umso besser wird das Verständnis der Schülerinnen und Schüler.

(Vgl. SCHILLING, 2010, S. 5)

In der fünften und sechsten Klasse muss vorerst verstanden werden, weshalb die grundlegenden Kenntnisse der Prozentrechnung wichtig sind. Es geht zuerst um die Behandlung, Schreibweisen und ihre Bedeutung.

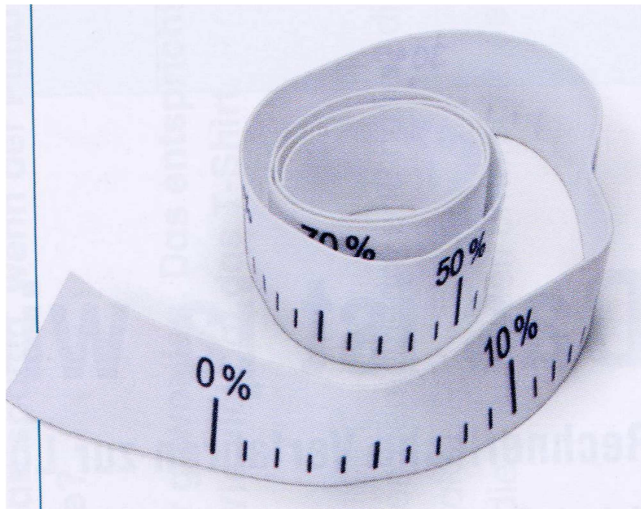
„Berechnungen von Prozentwert, Prozentsatz und Grundwert sind zu einem späteren Zeitpunkt dran. An dieser Stelle soll vielmehr der Grundstein für das Verstehen der Prozente gelegt werden.“ (SCHILLING, 2010, S. 5)

4.7.2 EIGENE RECHENWEGE ENTWICKELN

Oft sind Schülerinnen und Schüler von Stolz erfüllt, wenn sie die Regeln und Formeln der Prozentrechnung beherrschen. Trotzdem können sie aber ihr Wissen nicht in realen Situationen anwenden, da sie nicht verstehen, was sie eigentlich gelernt haben. Der Grund liegt häufig in der vorschnellen Algorithmisierung der Prozentrechnung, welche entweder über den Dreisatz oder über Formeln entsteht. Es kann möglich sein, dass sich die Lernenden am Beginn der Prozentrechnung an einem Grundkonzept orientieren wollen, damit sie den Grundwert, Prozentsatz und Prozentwert berechnen können. Sinnlos ist es jedoch, den Schülerinnen und Schülern einen fertigen Algorithmus zu zeigen. Wesentlich besser wäre es, ihnen verschiedene didaktische Anschauungsweisen zu präsentieren. Diese sollten zu eigenen Lösungswegen und Überlegungen anregen. An dieser Stelle könnte man verschiedene Arbeitsmittel, wie beispielsweise ein Prozentgummiband, einsetzen.

(Vgl. SCHILLING, 2010, S. 5)

Prozentband



(SCHILLING, 2010, S. 17)

Die Prozentbänder können im Unterricht auch selber gebastelt werden. Anschließend kann jeder Schüler bzw. jede Schülerin einige Objekte im Klassenraum ausmessen und die Werte notieren, damit man später fehlende Werte berechnen kann. Der Vorteil des Prozentbandes beruht darauf, dass verschiedene Aufgaben der Prozentrechnung gelöst werden können, ohne dabei eine Formel zu verwenden.

(Vgl. SCHILLING, 2010, S. 5)

„Die Begriffe Prozentwert, Prozentsatz und Grundwert müssen in diesem Unterricht nicht fallen. Sie sind für die Verständigung sinnvoll, für das Verständnis jedoch nicht notwendig. Der Grundsatz ‚Das Ganze entspricht 100%‘ ist dagegen ein gut zu behaltender Merksatz. Anstelle von Prozent kann es ‚Teil‘ oder ‚Anteil‘ heißen.“
(Vgl. SCHILLING, 2010, S. 5)

4.7.3 REALE KONTEXTE ANBIETEN

Der mathematische Schwerpunkt „Prozentrechnung“ tritt im realen Leben sehr oft auf. Kaum ein anderes Stoffgebiet in der Mathematik kommt in der Häufigkeit im Alltag zum Vorschein. Manchmal befinden sich Schülerinnen und Schüler jedoch in einer Fantasiewelt, wenn sie nur den Begriff „Prozent“ hören. Eine gute Vorbereitung auf dieses Thema ist daher besonders wichtig. (Vgl. SCHILLING, 2010, S. 5)

Zuerst wäre es sinnvoll, einfache Beispiele zu wählen und sich einen konkreten Überblick über die Prozentrechnung zu verschaffen. Man kann die Klasse auch bitten, Zeitschriften und Magazine in den Unterricht mitzunehmen und mögliche Versprechen - zum Beispiel bei Krediten - zu überprüfen. Speziell bei diesen Aufgabenstellungen sollte man nicht nur die rechnerische Basis behandeln, sondern auch auf Begriffe wie „Kreditvergabe“ und „laufende Kosten“ die Aufmerksamkeit lenken. Hiermit wird ersichtlich, dass Mathematik mehr bedeutet als nur Rechnen. Es geht um tatsächliche „Realsituationen“, wie sie jedem begegnen können. Falls dies bei manchen abschreckende Wirkungsweisen auslöst, kann man auch versuchen, Rabatte oder Mehrwertsteuer im Kopf auszurechnen. Genau diese Art von Beispielen vermittelt Schülerinnen und Schüler die Überzeugung, dass Mathematik eine zentrale Rolle in unserem Leben einnimmt. Anhand dieser Inhalte wird einem bewusst, weshalb man Themenschwerpunkte wie „Prozent- und Bruchrechnung“ behandelt.

Oft wollen Lernende einen Bezug zur Umwelt haben, bei diesen Beispielen bekommen sie ihn sicherlich. (Vgl. SCHILLING, 2010, S. 5)

Zusätzlich kann man Prozente in verschiedenen Formen von Diagrammen darstellen. Der Unterricht sollte eine Möglichkeit dafür bieten, alle verschiedenen Typen kennenzulernen. Anschließend sollen Schülerinnen und Schüler die Vor- und Nachteile der Darstellungsmöglichkeiten ermitteln. Besonders oft wird das Stabdiagramm verwendet, da man hier eine gute Übersicht bezüglich der Prozente erhält. Ein Diagramm in Form eines Kreises oder Säulen kommt eher bei statischen Berechnungen zum Einsatz.

(Vgl. SCHILLING, 2010, S. 5)

4.8 EIN EINKAUFBSBUMMEL:

REALISTISCHE ANGABEN ZUR PROZENTRECHNUNG

Die meisten Schülerinnen und Schüler ahnen nicht, dass die Prozentrechnung uns beinahe überall begleitet. Sei es in Zeitschriften, Magazinen, im alltäglichen Sprachgebrauch oder auf Verpackungen und Flaschen, wo man beispielsweise den Vitaminanteil oder Alkoholgehalt in Prozentangaben abliest. Auch beim Einkaufen sieht man oft, dass etwas um einen gewissen Prozentsatz verbilligt ist oder Mengenrabatt gegeben wird. Aber nicht nur in diesen Situationen beschäftigen wir uns mit Prozenten. Es gibt auch Verkehrsschilder mit Prozenten, denen man im Straßenverkehr begegnet.

(Vgl. VERNAY, 2010, S. 28)



(<http://www.wien.gv.at/verkehr/verkehrszeichen/gefahr.html>, 01.12.2011)

Aus diesen Gründen ist es äußerst wichtig, das Themengebiet intensiv zu bearbeiten. Je mehr man sich als Schülerin und Schüler mit der Prozentrechnung auseinandersetzt, umso besser und verständlicher wird nicht nur die Prozentrechnung selbst, sondern auch die Mathematik. In aktuellen Mathematikschulbüchern wird immer mehr versucht, auf reale Sachsituationen Bezug zu nehmen. Oft stellt man jedoch fest, dass man diese Beispiele zwar gut als reine Übungsaufgaben verwenden könnte, jedoch sind sie manchmal völlig unrealistisch. Einige Rechenschritte sind gänzlich lebensfremd und kommen in derartiger Form bestimmt nicht im Alltag vor. Nun stellt sich die Frage, welche Aufgaben sind nun sinnvoll? Von welchen Beispielen können Schülerinnen und Schüler tatsächlich profitieren?

(Vgl. VERNAY, 2010, S. 28)

Betrachten wir unseren Alltag. Wie oft kommen Prozente in unserem Leben vor? Wo finden wir sie? Wir werden diesen Fragen nun auf den Grund gehen.

Alles beginnt mit einem Spaziergang. Man schlendert durch die Einkaufsstraßen und plötzlich entdeckt man das Schild:



-20% auf alles!

(Vgl. VERNAY, 2010, S.28)

In diesem Fall wäre es nützlich, mit Prozenten rechnen zu können. Zahlreiche Aktionen wie diese entdeckt man in Shoppingcentern oder anderen Kaufhäusern. Ab und zu kann es möglich sein, dass eine Ware verbilligt und dieses Angebot sofort angeschrieben wird. Bei diesem Beispiel wird kein Prozentsatz vermerkt. (Vgl. VERNAY, 2010, S. 28)



(http://www.zielpunkt.at/flugblatt/flugblatt_60.pdf, 01.12.2011)

In dem oben abgebildeten Flugblatt wird der bisherige Preis unter das neue Angebot geschrieben. Als Mathematiklehrer bzw. Mathematiklehrerin rechnet man im Kopf die Reduzierung des Preises in Prozent aus. Jedoch ist diese Rechnung nicht sehr sinnvoll, denn es kann kein weiterer Nutzen daraus gezogen werden.. (Vgl. VERNAY, 2010, S.28)

Ein anderes Beispiel wäre, falls ich mich für zwei Angebote interessiere. Nehmen wir an, ich möchte einen Fernseher kaufen. In dem ersten Geschäft könnte ich mir 2% des Preises sparen, da es einen Rabatt auf dieses Produkt gibt. Im zweiten Geschäft wäre der Fernseher ohne Rabatt billiger als der im ersten Shop. Ich rechne nach und erkenne, dass ich mir mehr Geld ersparen würde, wenn ich den Fernseher mit der 2% Rabattaktion nehmen würde. In dieser Situation hilft es mir sehr, wenn ich mir die Prozentwerte ausrechnen kann und dann vergleiche. (Vgl. VERNAY, 2010, S.28)

Ich schlendere weiter, als ich plötzlich ein Plakat der Post-Spar-Kasse entdecke:

KletterzinsSparbuch Mit der Laufzeit ansteigende, garantierte Zinssätze (Stufenzinssatz). Zinssatz im 1. Jahr 1,125% p.a., im 2. Jahr 2% p.a., im 3. Jahr 3% p.a. und im 4. Jahr 6% p.a., Durchschnittszinssatz 3,015% p.a. Bei vorzeitiger Behebung erfolgt die Verzinsung des behobenen Betrages lt. Auszahlungstabelle.	4 Jahre	6,000 % im 4. Jahr
---	---------	------------------------------

(http://www.bawagpsk.com/linkableblob/BAWAG/12566/data/Entgelte_und_Konditionen_Sparen-data.pdf, 01.12.2011)

Wenn man sich den Zinssatz von 6% am Ende der ersten Zeile ansieht, denkt man, dass es ein gutes Angebot sein muss. Doch man darf nicht übersehen, dass man diesen Zinssatz nur im vierten Jahr bekommt. Im ersten Jahr erhält man hier aber lediglich 1,125%.

Weiters sollte man auch bei Angeboten in Zeitungen zuerst nachrechnen. Oft beinhalten diese Werbungen von Geschäften, auf denen man groß angekündigt Angebote wie solche findet:



(<http://www.sparbote.de/3423/tommy-hilfiger-sale-50-auf-alle-artikel/>, 01.12.2011)

Falls man bei Angeboten wie diesen nachrechnet, kosten diverse Produkte noch immer sehr viel, teilweise werden in machen Geschäften sogar nur ein bis zwei Produkte tatsächlich um die Hälfte reduziert. Daher muss man auch hier vorsichtig sein und sein Wissen um Prozente einsetzen.

4.8.1 FAZIT

„Ein vernünftig fundierter Prozentbegriff ist unumgänglich. Fragt man Leute etwa danach, was die Angabe auf dem Verkehrsschild bedeutet, geraten die meisten ins Stammeln. Ein Grund, den Prozentbegriff im Unterricht sehr sorgfältig und an vielen Beispielen zu verankern.“ (VERNAY, 2010, S. 29)

In alltäglichen Situationen, wie zum Beispiel bei einem Einkauf, geht es vor allem darum, Prozentwerte auszurechnen. Es wäre gut, wenn man sich einen „grobe Überblick“ über Prozentanteile verschafft. Denn erst dann kann man nachvollziehen, ob die Angebote tatsächlich günstig sind oder nicht. Diese Aufgaben sind die häufigsten im Alltag.

(Vgl. VERNAY, 2010, S. 29)

Das bedeutet natürlich nicht, dass man von nun an im Unterricht nur mehr solche Themengebiete behandeln sollte. Nein, es geht lediglich darum, auf diese Rechnungen ein besonderes Augenmerk zu legen. Schülerinnen und Schüler sollen erkennen, welche Aufgaben realitätsnah sind. Daher ist es wichtig, sie darauf konkret hinzuweisen.

(Vgl. VERNAY, 2010, S. 29)

„Die Schülerinnen und Schüler sehen in dem Fach Mathematik keinen Lebensbezug, sie sehen nur gekünstelte Aufgaben, die sie zu bearbeiten haben. Schauen wir also genauer hin und suchen möglichst oft nach echten Anwendungen.“

(VERNAY, 2010, S. 29)

4.9 PROZENTE IN DER ZEITUNG:

PROZENTANGABEN AUS TEXTEN UND GRAFIKEN

ENTNEHMEN UND ÜBERPRÜFEN

Denken Sie, dass man in einer Zeitung rasch fündig wird, wenn man nach Prozenten sucht? Die Antwort ist eindeutig, nämlich „Ja“: Es gilt jedoch zu beachten, dass sich nicht alle Zeitungsartikel als Übungsbeispiele für den Mathematikunterricht eignen. Dennoch findet man einige, die man sehr gut einsetzen kann. Somit können Schülerinnen und Schüler erkennen, dass Mathematik sehr oft im alltäglichen Leben vorkommt. Sie lernen, damit richtig umzugehen. (Vgl. VERNAY, 2010, S. 30)

4.9.1 WELCHE ARTIKEL SIND GEEIGNET?

Wichtig wäre es, Beispiele zu wählen, die den Schülerinnen und Schülern verständlich erscheinen. Der Sachverhalt der Aufgabe muss klar ersichtlich sein. Somit kommen einige Artikel aus dem wirtschaftlichen Bereich nicht in Frage, da diese oft zu komplex sind. Fündig wird man meist im Lokalteil von Zeitungen. In diesem Abschnitt entdeckt man manchmal sogar gewisse Fehler im Umgang mit Prozenten. Der Werbeteil kann jedoch auch gut für Arbeitsaufträge verwendet werden. Die meisten Menschen finden beinahe jeden Tag eine Broschüre in ihrer Post, auf der viele Angebote mit Rabatten vermerkt sind, die sehr oft in Prozent angegeben werden. (Vgl. VERNAY, 2010, S. 30)

„Schaut man einige Tage auch mit der ‚Mathebrille‘ in die Zeitung, wird man genug Übungsmaterial entdecken. Ich habe die meisten der vorliegenden Artikel und Grafiken innerhalb von drei Tagen in den beiden Zeitungen gefunden, die ich abonniert habe: man schärft den Blick, auch zukünftig beim Durchblättern auf passende Artikel aufmerksam zu werden.“ (VERNAY, 2010, S. 30)

4.9.2 WIE VERWENDE ICH FUNDSTÜCKE?

Unterscheidungen müssen getroffen werden. Man kann nicht dieselben Zeitungsausschnitte für zwei unterschiedliche Schulstufen verwenden. Für eine Klasse, die das erste Mal Prozente und Bruchzahlen erarbeitet, muss der Sachzusammenhang ersichtlich sein. Teilweise haben Kinder sicherlich schon Erfahrungen mit Prozenten gemacht. Auf diese kann man besonders eingehen. Die Prozentrechnung wird in der siebten Klasse ausführlicher und detaillierter behandeln. Nun können schon etwas anspruchsvollere Beispiele aus Zeitungen gewählt werden. Die Zahlen müssen bei diesen Aufgaben nicht unbedingt exakt sein, denn Schülerinnen und Schüler dürfen den Taschenrechner zu Hilfe nehmen. Auch in der siebten Klasse dienen die Artikel aus der Zeitung dazu, die Schülerinnen und Schüler auf realitätsbezogene Beispiele hinzuweisen. Für Kinder ist es immer wichtig, einen Grund anzugeben, warum man gewisse Aufgaben löst. Ohne dieses Wissen wird die Mathematik oft als „unlogisch“ bzw. „unsinnig“ empfunden. (Vgl. VERNAY, 2010, S. 30)

„Manchmal setze ich einen Zeitungsausschnitt auch ohne Fragen ein und fordere die Schülerinnen und Schüler auf, selber mathemathikhaltige Fragen an den Text oder die Grafik zu stellen. Anschließend können sie diese selber lösen und den Lösungsweg vorstellen oder wir wählen aus den Vorschlägen der Jugendlichen einige aus, die alle bearbeiten.“ (VERNAY, 2010, S. 30)

Natürlich können Schülerinnen und Schüler auch selber interessante Zeitungsausschnitte mitnehmen und sich dazu Fragen überlegen. Es gibt viele geeignete Artikel, die gut im Unterricht eingesetzt werden können. Besonders fündig wird man sicherlich in der Werbung. Jedoch gibt es auch gute Beiträge im Wirtschaftsteil zu finden, wie beispielsweise der Artikel „325 000 Bedürftige im Jahr 2008“ zeigt. (Vgl. VERNAY, 2010, S. 30)

325 000 Bedürftige im Jahr 2008

Zahl der Sozialhilfeempfänger steigt

Wiesbaden (wk). Die Zahl der Sozialhilfeempfänger in Deutschland steigt weiter. Rund 325 000 Menschen erhielten 2008 laufende Hilfe zum Lebensunterhalt. Das waren vier Prozent mehr als im Vorjahr, wie das Statistische Bundesamt gestern in Wiesbaden berichtete. Mehr als sieben von zehn Hilfeempfängern (72 Prozent) lebten Ende des vergangenen Jahres in Einrichtungen wie Wohn- oder Pflegeheimen. Das waren 3,8 Prozent mehr als im Vorjahr – und damit der höchste Stand seit der Hartz-IV-Reform Anfang 2005.

Bei den Sozialhilfeempfängern, die nicht in Heimen leben, nahm die Zahl um 4,4 Prozent zu. Diese Menschen waren im Schnitt 40 Jahre alt und damit deutlich jünger als die Sozialhilfebezieher in Heimen mit 54 Jahren. Bundesweit erhielten Ende 2008 vier von 1000 Einwohnern laufende Hilfe zum Lebensunterhalt. Dies war nach Angaben der Behörde der gleiche Wert wie in den beiden Vorjahren. In Berlin lag der Anteil der Hilfeempfänger mit 6,4 je 1000 Einwohner am höchsten, in Baden-Württemberg mit 1,4 je 1000 Einwohner am niedrigsten.

Seit Anfang 2005 erhalten Bedürftige, die grundsätzlich erwerbsfähig sind, und deren Familienangehörige Leistungen nach Hartz IV. Die laufende Hilfe zum Lebensunterhalt wird an Menschen in Heimen gezahlt, die ihren Bedarf nicht mit Renten oder Leistungen der Grundsicherung im Alter und bei Erwerbsminderung decken können. Außerhalb von Einrichtungen bekommen diese Leistung vorübergehend Erwerbsunfähige, länger Erkrankte oder Vorruhestandler mit niedriger Rente.

(VERNAY, 2010, S. 31)

4.9.3 WANN SETZE ICH ARTIKEL EIN?

Ein guter Zeitpunkt wäre ein aktueller Anlass oder wenn ein Lehrer bzw. eine Lehrerin das Gefühl hat, ein bestimmter Zeitungsausschnitt würde gut zu dem behandelten Thema passen. Dann sollte man nicht zögern und ihn als Übungsaufgabe verwenden. (Vgl. VERNAY, 2010, S. 30)

„Wenn ich einen schönen Beitrag finde, setze ich ihn zeitnah ein. Das ist dann oft ein Einsetzen in die Unterrichtsstunde, auch wenn der mathematische Inhalt nichts mit dem derzeitigen Thema zu tun hat. Es ist jedes Mal eben auch eine Möglichkeit, die Problemlösefähigkeit der Schülerinnen und Schüler weiterzuentwickeln.“

(VERNAY, 2010, S. 30)

4.10 EIN STARKES TRIO:

PROZENTE MIT BRÜCHEN UND DEZIMALZAHLEN

VERKNÜPFEN

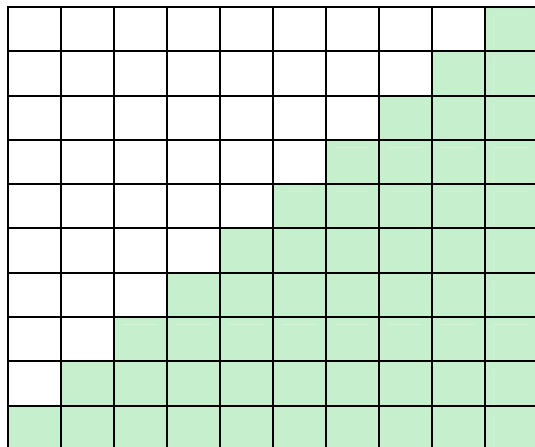
„Ein wesentliches Ziel der Bruchrechnung ist es, Dezimalzahlen und Brüche als gleichwertig zu betrachten. Wenn man diese Gleichwertigkeit unterrichtet, ist es naheliegend, Prozente hinzuzunehmen.“ (JANNACK, KOEPESELL, 2010, S.6)

Meistens fällt den Schülerinnen und Schülern die Verknüpfung zwischen Dezimalzahlen und Prozenten einfacher als die genauen Begrifflichkeiten eines Bruches. Deshalb wäre es wichtig, eine Verbindung erst bei den dezimalen Brüchen herzustellen. Aus diesem Grund setzt sich der Begriff des Bruches aus der Dezimalzahl und dem Prozentteil zusammen. Aufgrund dieser Vorkenntnisse haben dann viele Lernende beim Themengebiet „Brüche im alltäglichen Leben“ nicht mehr allzu große Schwierigkeiten, da sie sich sofort an die Assoziationen zu den Prozenten und Dezimalzahlen zurückerinnern.

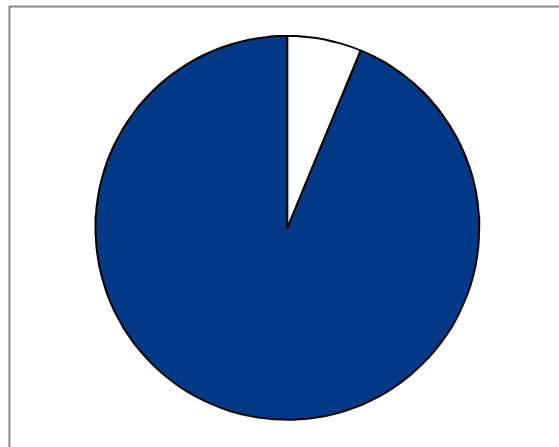
(Vgl. JANNACK, KOEPESELL, 2010, S. 6)

4.10.1 HUNDERTERFELD UND PROZENTSCHIEBE

Hunderterfeld



Prozentscheibe



Besonders das Hunderterfeld bietet eine gute Anschauungsweise für Prozente. Die Schülerinnen und Schüler erhalten im Unterricht ein Arbeitsblatt mit Quadraten, von denen einige bunt sind. Die Aufgabe lautet, dass die Lernenden den Anteil der eingefärbten Fläche sowohl in Prozenten als auch in einem Hundertstelbruch darstellen sollen. Natürlich dürfen die Kinder zuerst schätzen, wenn sie wollen und anschließend ihre Vermutungen überprüfen.

(Vgl. JANNACK, KOEPESELL, 2010, S. 6)

Danach können sie auch in das Heft ihres bzw. seines Sitznachbars eine ähnliche Skizze zeichnen. In einer nächsten Aufgabenstellung müssen die Schülerinnen und Schüler versuchen, einen vom Lehrer bzw. der Lehrerin vorgegebenen Bruch in ihr Hunderterfeld einzuzichnen. Diese Aufgabe kann man auch als Spiel durchführen. Dabei lautet das Ziel des Spieles, so rasch wie möglich den Bruch ins Hunderterfeld zu zeichnen und anschließend aufzustehen. Ein Professor bzw. eine Professorin sieht sich die Lösung des Schülers bzw. der Schülerin an, gibt jedoch noch keinen Kommentar. Erst wenn die meisten Schülerinnen und Schüler den Arbeitsauftrag vollendet haben, wird er verglichen. Anschließend wird die gemeinsame Lösung an der Tafel vorgestellt und mit dem Lehrer bzw. der Lehrerin besprochen. Falls es zu Unklarheiten kommt und sich die Klasse nicht einigen kann, darf man den Lehrenden bzw. die Lehrende um Unterstützung bitten.

(Vgl. JANNACK, KOEPSSELL, 2010, S. 6)

Die Hunderterscheibe wird in derselben Art und Weise wie das Hunderterfeld benutzt. Zusätzlich kann die Scheibe auch als Prozentscheibe verwendet werden. Zum Auflockern des Unterrichts dürfen die Schülerinnen und Schüler ihre Prozentscheibe selber basteln. Sie benötigen dafür lediglich ein farbiges DIN-A5-Papier, einen Zirkel und eine Schere.

(Vgl. JANNACK, KOEPSSELL, 2010, S. 6)

„Die Hunderterscheibe wird ausgeschnitten und an einem Zehnerstrich bis zum Kreismittelpunkt eingeschnitten. Anschließend stellen die Schülerinnen und Schüler eine farbige Kreisscheibe gleicher Größe her, die sie ebenfalls bis zur Mitte einschneiden. Dann schieben sie diese beiden Scheiben an der Schnittlinie ineinander. Durch gegenseitiges Drehen können schnell Prozente dargestellt werden.“

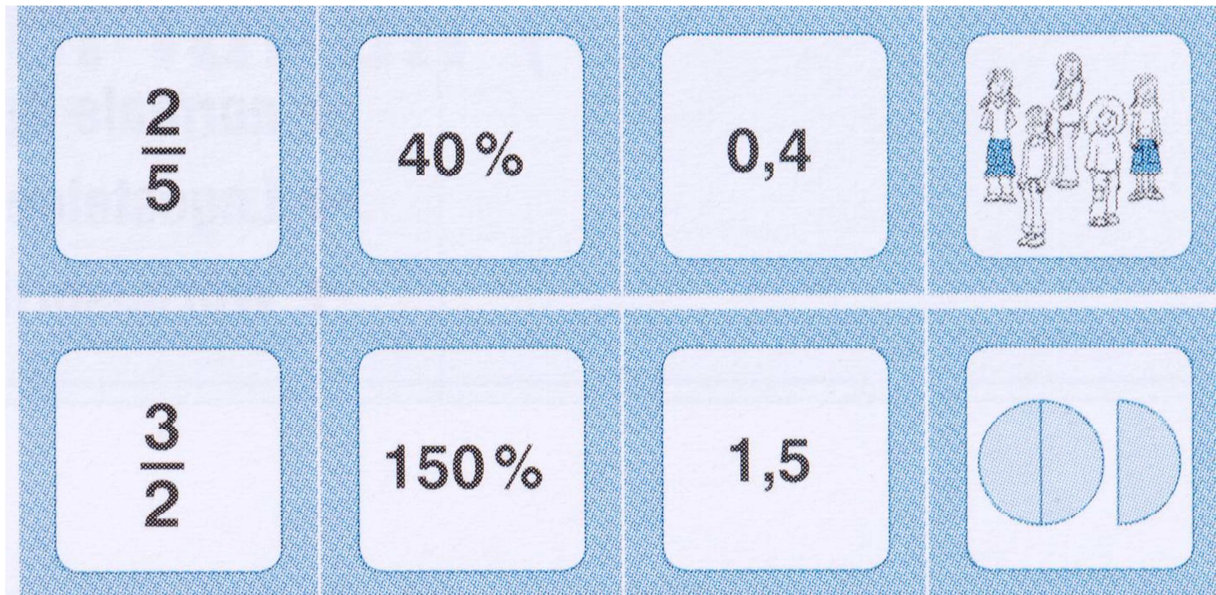
(JANNACK, KOEPSSELL, 2010, S. 6)

Der Vorteil dieser Prozentscheibe ist außerdem, dass man an der Rückseite jeweils die Ergänzung der Vorderseite findet. Das bedeutet, falls man auf der Vorderseite 25% erkennt, dann zeigt die Rückseite die Ergänzung auf 100%, nämlich 75%.

(Vgl. JANNACK, KOEPSSELL, 2010, S. 6)

4.10.2 ZUORDNUNGSKARTEN

Wie bereits festgestellt, sind bildliche Darstellungen im Unterricht sehr wichtig, um das Vorstellungsvermögen der Kinder zu fördern. Besonders bei dem Trio „Bruch-, Dezimal- und Prozentrechnung“ sollten die Schülerinnen und Schüler Assoziationen dazu entwickeln können. (Vgl. JANNACK, KOEPSSELL, 2010, S. 7)



(JANNACK, KOEPSSELL, 2010, S. 7)

Als Gruppenarbeit zu diesen Verknüpfungen kann man das Spiel „Prozentquartett“ durchführen. Dabei gehören immer vier Karten zusammen, die einen sogenannten „Satz“ bilden. Das Spiel basiert darauf, dass die Lernenden unterschiedliche Darstellungsformen kennenlernen und diese später auch anwenden können.

(Vgl. JANNACK, KOEPSSELL, 2010, S. 7)

„Während die Hälfte der Sätze nur aus einfachen, echten Brüchen besteht, beinhalten die anderen auch periodische Dezimalzahlen und Prozentangaben über 100%.“
(JANNACK, KOEPSSELL, 2010, S. 7)

Man kann dieses Spiel als Partner- oder als Gruppenarbeit im Unterricht durchführen. Natürlich wäre es sinnvoll, wenn ein Experte bzw. eine Expertin die Lösungen überprüft. Das Kartenspiel ist eine Übung für jeden Einzelnen. Es kann nach einer gemeinsamen Einführung des Themas eingesetzt oder für die sofortige Erarbeitungsphase des neuen Stoffgebietes genutzt werden. (Vgl. JANNACK, KOEPSSELL, 2010, S. 6)

Anwendungsorientierte Aufgaben bzw. Spiele - wie oben beschrieben - stellen eine große Motivation für Schülerinnen und Schüler dar. Es ist wichtig, dass man als Lehrer bzw. Lehrerin nicht immer nur Frontalvorträge einsetzt, sondern auch verschiedene Methoden im Unterricht anwendet. Durch einen abwechslungsreichen Unterricht werden die Lernenden leichter animiert, das Stoffgebiet besser kennenzulernen und es wird verständlicher gemacht. (Vgl. JANNACK, KOEPEL, 2010, S. 6)

4.11 PROZENTE ERWÜRFELN:

WAHRSCHEINLICHKEIT ALS BRUCH, DEZIMALZAHL UND IN PROZENT BESCHREIBEN

Viele Schülerinnen und Schüler verstehen Begriffe wie „...von Hundert“ (REHSE, 2010, S.8) nicht. Sie können die Bedeutung der Grundbegriffe in der Prozentrechnung nicht nachvollziehen. Da bietet das Würfeln eine gute Möglichkeit, Schülerinnen und Schüler langsam an die einzelnen Prozentbegriffe heranzuführen. Zusätzlich werden viele Wörter der Wahrscheinlichkeit behandelt und es wird auf Versuche der Laplace-Wahrscheinlichkeit Bezug genommen. (Vgl. REHSE, 2010, S. 8)

4.11.1 EINE VERSUCHSREIHE DURCHFÜHREN

Eine gute Arbeitsform zu diesem Thema wäre eine Gruppenarbeit. Schülerinnen und Schüler bilden kleinere Gruppen, wobei jeder einige Würfel bekommt. Gut wäre es, wenn größere Teams gebildet werden, denn dadurch können möglichst viele Prozente erwürfelt werden. Schließlich erhält jede Gruppe einen Würfel, ein Arbeitsblatt (welches vom Lehrer bzw. der Lehrerin schon vorbereitet wurde) und einen Legosteine.

Die Legosteine wurden vor dem Unterricht mit den Buchstaben A bis F gekennzeichnet, damit Verwechslungen ausgeschlossen sind. Nachdem das Material vom Lehrenden bzw. der Lehrenden verteilt wurde, dürfen sich die Kleingruppen einen Namen überlegen, weiters wird ein Teamleiter bzw. eine Teamleiterin bestimmt. Es wird somit ein verantwortlicher Schüler bzw. Schülerin gewählt, den oder die der Lehrer bzw. die Lehrerin fragt, ob die Aufgabenstellung verstanden wurde. (Vgl. REHSE, 2010, S. 8)

1. Arbeitsblatt

Name: _____

Datum: _____

Wie die Würfel fallen (1)

Gruppenname: _____

Sprecher der Gruppe: _____

Schritfführer: _____

Aufgaben:

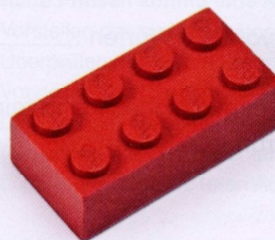
Mit dem Würfel und mit dem Legosteine soll 100-mal gewürfelt werden.

1. Schätzt für den Würfel, wie oft welche Zahl gewürfelt wird. Notiert eure Schätzung.
2. Würfelt jetzt 100-mal mit dem Würfel. Führt dabei eine Strichliste.
3. Vergleicht eure Schätzung mit dem Ergebnis eurer Würfe.
4. Schätzt für den Legosteine, wie oft welcher Buchstabe gewürfelt wird. Notiert eure Schätzung.
5. Würfelt jetzt 100-mal mit dem Legosteine. Führt dabei eine Strichliste.
6. Vergleicht eure Schätzung mit dem Ergebnis eurer Würfe.
7. Füllt die restliche Tabelle aus.
8. Übertragt eure Ergebnisse auf die ausliegenden Folien.

Wenn noch Zeit ist:

Mit dem Legosteine wurde 100-mal gewürfelt. Die Ergebnisse sind in der Tabelle aufgelistet. An welcher Seite waren wohl die Buchstaben platziert? Begründe.

A	B	C	D	E	F
50	0	1	35	10	4



„Bei der Gruppenarbeit beobachtete ich häufiger, dass Schülerinnen und Schüler arbeitsteilig vorgehen und eine Halbgruppe mit dem Würfel, die andere mit dem Legostein arbeitet. Meiner Meinung nach ist dieses Vorgehen vollkommen legitim, um Zeit zu sparen. Möchte man das eine oder das andere vermeiden, müssen vor Beginn der Gruppenarbeit entsprechende Einschränkungen gemacht werden.“

(REHSE, 2010, S. 8)

Insbesondere ist es wichtig, dass die Ergebnisse im Anschluss genau besprochen werden. Der Teamleiter sollte dazu ein kurzes Statement abgeben. Außerdem sollten die einzelnen Gruppenarbeiten untereinander verglichen werden. Es sollten Unterschiede und Gemeinsamkeiten diskutiert und offene Fragen beantwortet werden. Auf diese Weise können gute Zugänge zur Prozentrechnung gelegt werden und das Thema wird verständlicher.

(Vgl. REHSE, 2010, S. 8)

4.11.2 ABSOLUTE UND RELATIVE HÄUFIGKEITEN

Natürlich kann man als Lehrer bzw. Lehrerin unterschiedliche Schwerpunkte setzen. Somit können die Ergebnisse auf verschiedenste Art und Weise präsentiert werden. Ein Beispiel wäre, sich speziell auf die absoluten und relativen Häufigkeiten zu konzentrieren. Diese können von den Lernenden zum Teil ausgerechnet, zum Teil geschätzt werden. Danach wird verglichen, ob Schülerinnen und Schüler mit ihren Schätzungen sehr weit abgewichen sind oder ob sie ein nahes Ergebnis erzielt haben. *(Vgl. REHSE, 2010, S. 8)*

4.11.3 RELATIVE HÄUFIGKEITEN IN PROZENT

Auf dem zweiten Arbeitsblatt werden die relativen Häufigkeiten als Dezimalbruch, Bruch und in Prozent aufgelistet. Was der Begriff „Prozent“ bedeutet, wird vom Lehrer bzw. der Lehrerin vorab erklärt. Die Lösungen werden anschließend im Plenum besprochen. Für diese Phase des Unterrichts sollte mehr Zeit eingeplant werden, denn es ist wichtig, alle unterschiedlichen Lösungswege der Schülerinnen und Schüler zu besprechen. Kinder denken manchmal, dass es für jedes Beispiel lediglich eine Lösung geben würde. Diese Missverständnisse sollten anhand der Arbeitsblätter geklärt werden.

(Vgl. REHSE, 2010, S. 8/9)

2. Arbeitsblatt

Name: _____

Datum: _____

Wenn die Würfel gefallen sind (1)

Bearbeite diese Aufgaben zuerst allein, tausche dich dann mit deiner Partnerin oder deinem Partner aus. Kontrolliert anschließend eure Lösung mit dem Lösungsblatt.

1. Diese Strichliste wurde beim Würfeln mit einem Legostein erstellt. Fülle die Tabelle aus.

		A	B	C	D	E	F
Strichliste		 				 	
absolute Häufigkeit							
relative Häufigkeit	Bruch						
	Dezimalbruch						
	Prozent						

2. Schreibe zu jedem Ereignis auf:

„A“ wurde von 100 Würfeln _____ -mal gewürfelt, also ist die Wahrscheinlichkeit _____ %.

3. Wurde mit dem gleichen Legostein gewürfelt, mit dem ihr in der letzten Stunde gewürfelt habt? Begründe.

4.11.4 WÜRFELN – WÜRFELN – WÜRFELN

Das Würfeln findet bei fast allen Schülerinnen und Schülern großen Anklang. Es macht ihnen vielfach Spaß, andere Methoden im Unterricht auszuprobieren. Speziell für leistungsschwache Schülerinnen und Schüler sind analoge Aufgaben zum Teil sehr wichtig. Dadurch kann unsicheres Verhalten abgeschwächt werden und das Selbstvertrauen steigen. Durch Spielsituationen im Mathematikunterricht werden auch Emotionen und Verhaltensweisen erkennbar, welche man als Lehrer bzw. Lehrerin zu schätzen wissen sollte. Kinder sollen erleben, dass der oder die Lehrende nicht immer nur Frontalvorträge halten muss, um ihnen ein bestimmtes Thema näher zu bringen. (Vgl. REHSE, 2010, S. 9)

4.12 GUT GESCHÄTZT IST HALB GEWONNEN!

PROZENTE SCHÄTZEN UND BEGRÜNDEN!

Wenn Sie tatsächlich denken, dass nun Schülerinnen und Schüler am Ende des Kapitels der Prozentrechnung alltägliche oder einfache Prozentsätze bzw. Prozentwerte ausrechnen können, liegen Sie falsch. Einige sind oft nicht einmal im Stande, annähernd eine Schätzung abzugeben. Daher ist es wichtig, immer wieder zusammenhängende Aufgaben im Unterricht zu rechnen. Besonders Verknüpfungen zu Brüchen und Dezimalzahlen sind dabei sehr hilfreich. Die Verbindung zwischen einer Bruch- und einer Prozentangabe muss besonders verdeutlicht werden. Speziell diese Deutung stellt eine Grundbasis der Prozentrechnung dar. (Vgl. RÖMER, 2010, S.12)

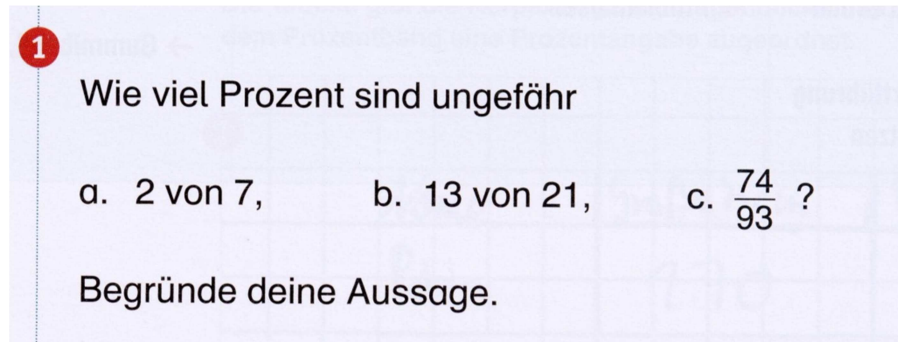
„Die geringe Authentizität von Aufgaben und Problemen leisten nicht immer eine gute Vorbereitung auf das, was im Umfeld der Schülerinnen und Schüler an Prozentrechnung geleistet werden muss. In der Praxis geht es oft darum, Prozente abzuschätzen.“ (RÖMER, 2010, S. 12)

Lernende sollen sich bereits im Voraus darüber Gedanken machen, welches Ergebnis sinnvoll ist und welches nicht. Dann können sie nämlich auch abschätzen, ob der Einsatz des Taschenrechners überhaupt notwendig ist. (Vgl. RÖMER, 2010, S. 12)

Durch gezielte Aufgabenstellungen lernen Schülerinnen und Schüler, richtige Schätzungen vorzunehmen. Es wäre von Vorteil, wenn diese Aufgabenstellungen einen realen Bezug vorweisen. Dadurch werden weitere Zugänge aktiviert und die Motivation steigt. Zusätzlich sollten die Beispiele derart gewählt werden, dass eine Begründung gegeben werden kann. Dadurch kann ein Lehrer bzw. eine Lehrerin besser erkennen, ob die Aufgabenstellung verstanden wurde. Bei den Ergebnissen geht es vorerst nicht darum, den genauen Prozentwert und Prozentsatz zu ermitteln, sondern nur um grobe Schätzungen. Beginnen sollte man mit Beispielen, die in der Nähe der beiden Bruchzahlen $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{4}$ liegen, sodass einfache Abschätzungen ermöglicht werden. (Vgl. RÖMER, 2010, S. 12)

„Die folgenden Aufgabenbeispiele kann man parallel zueinander im Unterricht verwenden. Da die Aufgaben unterschiedliche Aspekte des Themas betreffen und unabhängig voneinander gelöst werden können, lasse ich die Schülerinnen und Schüler selbst entscheiden, mit welchen Aufgaben sie beginnen. Spannend sind insbesondere Aufgaben, die zur Reflexion anregen und auf Schüleräußerungen beruhen.“ (RÖMER, 2010, S. 12)

4.12.1 BRÜCHE UND PROZENTSATZ



1

Wie viel Prozent sind ungefähr

a. 2 von 7, b. 13 von 21, c. $\frac{74}{93}$?

Begründe deine Aussage.

(RÖMER, 2010, S. 13)

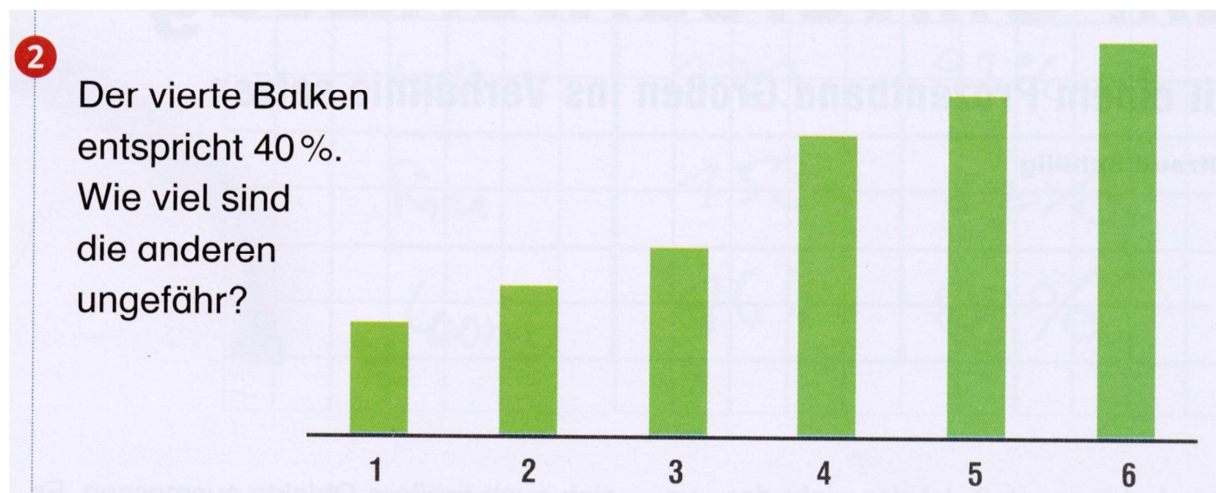
Dieses Beispiel basiert darauf, eine Verbindung zwischen einem Bruchanteil und einem Prozentsatz herzustellen. Schülerinnen und Schüler werden außerdem dazu aufgefordert, eine Begründung zu geben.

Ein Schüler namens Ritvan hat bei der Aufgabe b) folgenden Lösungsvorschlag:

„Ich glaube, es sind 52,5%, weil 10,5 ist die Hälfte von 21 und da kommen noch 2,5 dazu.“ (RÖMER, 2010, S. 12)

Zuerst beginnt er richtig, indem er die Zahl 10,5 als die Hälfte von 21 deutet, daher muss das Ergebnis über 50% liegen. Doch anschließend macht er einen Denkfehler, denn er sieht die 2,5 nicht mehr als relativen, sondern als absoluten Anteil zu der Zahl 21. Hier wäre es wichtig, Ritvan auf den Fehler hinzuweisen. Dann sollte er das Beispiel nochmals überdenken und erklären, wo genau sein Denkfehler lag. Denn erst durch eigene Reflexion kommt es zum Verständnis von Schülerinnen und Schüler. (Vgl. RÖMER, 2010, S. 12)

4.12.2 GRAFISCHE DARSTELLUNGEN



(RÖMER, 2010, S. 13)

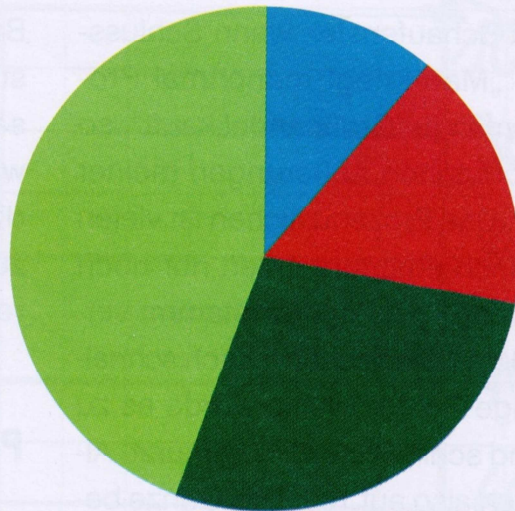
Die Aufgabe intendiert, dass Schülerinnen und Schüler sich mit graphischen Darstellungen auseinandersetzen und diese schätzen lernen. Es handelt sich hier um eine wichtige Kompetenz, nämlich um das rasche Erfassen von Diagrammen.

„Das Balkendiagramm selbst lässt sich schnell und beliebig mit jeder Tabellenkalkulation verändern und somit auch in idealer Weise binnendifferenziert einsetzen.“ (RÖMER, 2010, S. 12)

Außerdem wird bei der Aufgabe auf Prozentsätze über 100% Bezug genommen. Oft haben Schülerinnen und Schüler damit große Schwierigkeiten und so sollte das im Unterricht besonders geübt werden. (Vgl. RÖMER, 2010, S. 12/13)

3

Wie viel Prozent sind das rote Feld ungefähr?
Wie kommst du zu deiner Einschätzung?



(RÖMER, 2010, S. 13)

Auch andere Diagrammtypen, wie beispielsweise das Kreisdiagramm, sollten aber nicht außer Acht gelassen werden. Auch bei diesem Beispiel muss eine Begründung gegeben werden.

(Vgl. RÖMER, 2010, S. 12)

4.12.3 REALISTISCHE SITUATIONEN AUFGREIFEN

4

Gestern waren die Wahlen zum Vertrauenslehrer. Wie jedes Jahr waren alle Schülerinnen und Schüler aufgefordert, die Lehrerin oder den Lehrer zu wählen, der sich um die Schülvvertretung kümmert und an den sich die Schülerinnen und Schüler wenden können, wenn sie Probleme mit anderen Lehrerinnen und Lehrern haben.

Name	Frau Mager	Herr Dabrock	Herr Bollenbach	Frau Oldenburg
Stimmenanzahl	188	367	215	472

1 Beurteile die Aussagen aus der Schülerzeitung und begründe deine Meinung.

- a. Herr Bollenbach bekam $\frac{2}{3}$ der Stimmen von Herrn Dabrock.
- b. Frau Oldenburg erhielt mehr als 35% der Stimmen.
- c. Fast jeder sechste Schüler wählte Frau Mager.
- d. Die beiden Lehrerinnen haben zusammen die absolute Mehrheit der Stimmen.
- e. Herr Dabrock hat 50% mehr Stimmen als Frau Mager.
- f. Die beiden Frauen haben 10% mehr Stimmen geholt als die beiden Männer.

(RÖMER, 2010, S. 13)

Die Aufgabe Nummer 4 könnte man mit einer realen Situation vergleichen. Es handelt sich hierbei um eine Abschätzung von Prozentsätzen. Verschiedene Darstellungsweisen werden in einem schwierigen Kontext völlig neu dargeboten. Das Ziel dieser Aufgabe umfasst eine Erweiterung des Prozentbegriffes anhand von einfachen Prozentsätzen. Der Text wird ganz bewusst deswegen nicht in der deutschen Standardsprache formuliert, damit man auf die Umweltfaktoren besser einzugehen lernt. Kritisches Hinterfragen der Klasse wäre bei dieser Aufgabenstellung wünschenswert. Nach Lösung der Aufgabe kann man die Schülerinnen und Schüler weitere Aufgaben erfinden lassen, wobei zuerst der Prozentwert und Grundwert festgestellt werden. (Vgl. RÖMER, 2010, S. 13)

Anschließend könnte man folgende Fragen stellen:

„Wie viel Prozent der Kinder in unserer Klasse tragen eine Brille? Wie viel Prozent der Schülerinnen und Schüler unserer Schule gehen in die siebte Klassenstufe? Jeder wievielte in unserer Klasse wohnt nicht im Schulort?“ (RÖMER, 2010, S. 13)

4.12.4 FAZIT

„Die beschriebenen Aufgaben und Vorschläge leisten einen guten Beitrag dazu, das Wesen der Prozentrechnung aus einer anderen Perspektive zu betrachten. Sie sollten daher immer wieder auch nach Abschluss des eigentlichen Themas im Unterricht aufgegriffen werden.“ (Vgl. RÖMER, 2010, S. 13)

5.FAZIT: ZIELE UND WÜNSCHE

Es ist wichtig, die Vorstellungsebene der Schülerinnen und Schüler zu erweitern. Erst dadurch kann Mathematik richtig verstanden und angewendet werden. Grundvorstellungen sind einzelne Aspekte der Anschauungen zu einer mathematischen Begrifflichkeit. Diese werden systematisch auseinander gelegt und benannt, dies unterstützt den Aufbau des Unterrichts. In meiner Diplomarbeit habe ich Grundvorstellungen zur Prozentrechnung ausgearbeitet, ähnlich den Grundvorstellungen zur Bruchrechnung von Günther Malle.

Für viele Schülerinnen und Schüler ist der Realitätsbezug bei Mathematikbeispielen wichtig, weil Beispiele dadurch erst nachvollziehbar werden.

Mein Wunsch ist es, dass Bemühungen zu Grundvorstellungen auf andere mathematische Teilgebiete ausgeweitet werden, um eine Begeisterung seitens der Schülerinnen und Schüler zu bewirken. Durch Lob der Lehrperson wird das Selbstvertrauen jener Schülerinnen und Schüler steigen, die bisher noch etwas zurückhaltender und ängstlicher agiert haben. Auf diese Art und Weise könnten wir den bisher eher negativen PISA-Ergebnissen entgegenwirken und sie verbessern.

Mein Ziel ist es, die Angst vor dem Mathematikunterricht zu nehmen. Als Lehrer bzw. Lehrerin sollte man immer danach trachten, den Schülerinnen und Schülern etwas Sinnvolles und Erstrebenswertes auf den Lebensweg mitzugeben. Sie sollten am Unterricht Freude entwickeln und positive Erlebnisse haben.

In diesem Sinne möchte ich mit einem Spruch abschließen, der aus einem abgewandelten Zitat von Lucius Annaeus Seneca (Briefe an Lucilius 106, 12) hervorgegangen ist:

“Non scholae, sed vitae discimus”

“Nicht für die Schule, sondern für das Leben lernen wir.”

6. LITERATUR

5.1 VERWENDETE BÜCHER

- **BORROMEO FERRI, R.:** Mathematische Denkstile – visuell, analytisch, konzeptuell und ihre Präferenzen bei Jugendlichen am Ende der Sekundarstufe. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim und Berlin, Verlag Franzbecker, 2003
- **HEYMANN, H. W.:** Allgemeinbildung und Mathematik. Weinheim, Beltz, 1996
- **KOTH, M.:** Angewandte Mathematik, Unveröffentlichtes Manuskript der Universität Wien, 2009
- **NEUREITER, H.C. u.a.:** Standards, Praxishandbuch für „Mathematik“, 8. Schulstufe, Bildungsstandards – für höchste Qualität an Österreichs Schulen; Information für Lehrerinnen und Lehrer. Graz, Leykam, 2010
- **PADBERG, F.:** Didaktik der Bruchrechnung. Heidelberg, Spektrum Akademischer Verlag, 1995
- **REICHEL, H., HUMENBERGER H.:** Das ist Mathematik. 1. Auflage. Wien, ÖBV, 2009
- **TRIMMEL, M.:** Allgemeine Psychologie 2: Informationsverarbeitung – Kognitive Psychologie und Human Factors. Wien, Fakultas, 2009
- **VOM HOFE, R.:** Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Heidelberg/Berlin/Oxford, Spektrum Akademischer Verlag, 1995

5.2 VERWENDETE ZEITSCHRIFTEN

- **JANNACK, W., KOEPEL, A.:** Ein starkes Trio. Prozente mit Brüchen und Dezimalzahlen verknüpfen. In: Mathematik 5-10, Heft 10, Seelze, Friedrich Verlag, 2010
- **MALLE, G.:** Grundvorstellungen im Mathematikunterricht. Innovations in mathematics, science and technology teaching. In: Newsletter Ausgabe 8, 2003/04, S.7
(<http://imst.uni-klu.ac.at/materialien/2004/newsletter8.pdf>, 01.09.2011)
- **MALLE, G.:** Grundvorstellungen zu Bruchzahlen (Basisartikel). In: Mathematik lehren, Heft 123, 2004, S. 4 - 8

- **MALLE, G.:** Variablen beim Prozentrechnen. In: Mathematikunterricht 2011, S. 34-37
- **MALLAUN, J.:** Fachdidaktik Zentrum Mathematik. In: MINI-Fonds für Unterrichts- und Schulentwicklung. S2 „Grundbildung und Standards“. Feldkirch, Pädagogische Akademie, 2006
- **PADBERG, F:** Die Einführung der Dezimalbrüche – ein Selbstläufer? (Basisartikel). In: Mathematik lehren, Heft 123, 2004, S. 18-22
- **PREDIGER, S.:** Brüche bei den Brüchen – aufgreifen oder umschiffen? In: Mathematik lehren, Heft 123, 2004, S. 10-13
(<http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~prediger/veroeff/04-ml-brueche-langfassung.pdf>; 08.10.2011)
- **REHSE, M.:** Prozente erwürfeln. Wahrscheinlichkeit als Bruch, Dezimalzahl und in Prozent beschreiben. In: Mathematik 5-10, Heft 10, Seelze, Friedrich Verlag, 2010
- **RÖMER, M.:** Gut geschätzt ist halb gewonnen! Prozente schätzen und begründen. In: Mathematik 5-10, Heft 10, Seelze, Friedrich Verlag, 2010
- **ROTH, J.:** Eine geometrische Lernumgebung. Entwicklung von Verständnisgrundlagen für Bruchzahlen und das Rechnen mit Brüchen. In: Fritz-Stratmann, Annemarie; Schmidt, Siegbert (Hrsg.): Fordernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I –Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden. Weinheim, Beltz, 2009
(http://mathematikunterricht.files.wordpress.com/2011/04/roth_bruchrechnung_exi.pdf, 08.10.2011)
- **SCHILLING, W.:** Prozente begreifen. In: Mathematik 5-10, Heft 10, Seelze, Friedrich Verlag, 2010
- **VERNAY, R.:** Ein Einkaufsbummel. Realistische Aufgaben zur Prozentrechnung. In: Mathematik 5-10, Heft 10, Seelze, Friedrich Verlag, 2010
- **WITTMANN, G.:** Grundvorstellungen zu Bruchzahlen – auch für leistungsschwache Schüler? Eine mehrperspektivistische Interviewstudie zu Lösungsprozessen, Emotionen und Beliefs in der Hauptschule. In: Mathematica didactica, Heft 29/2, 2006
(http://mathdid.ph-gmuend.de/documents/md_2006/md_2006_2_Wittmann_Grundvorstellungen.pdf, 20.10.2011)

5.3. VERWENDETE INTERNETSEITEN

- Homepage des Bundesministeriums für Unterricht, Kunst und Kultur:
<http://www.bmukk.gv.at/medienpool/789/ahs14.pdf>, 02.11.2011
- BIFI (Bundesinstitut: Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens):
<https://www.bifie.at>, 16.12.2011
- Grafik der Süßigkeit bei Zielpunkt:
http://www.zielpunkt.at/flugblatt/flugblatt_60.pdf, 01.12.2011
- Grafik des Sparbuchangebots bei der Bawag P.S.K.:
http://www.bawagpsk.com/linkableblob/BAWAG/12566/data/Entgelte_und_Konditionen_Sparen-data.pdf, 01.12.2011
- Grafik des Angebots vom Tommy-Hilfiger-Online Shop:
<http://www.sparbote.de/3423/tommy-hilfiger-sale-50-auf-alle-artikel/>, 01.12.2011
- Grafik zum Verkehrszeichen Gefälle bzw. Steigung:
<http://www.wien.gv.at/verkehr/verkehrszeichen/gefahr.html>, 01.12.2011
- **HAFNER, T.:** Proportionalität und Prozentrechnung – längsschnittliche Entwicklung elementarer Modellierungskompetenzen. Bielefeld, 2009
(http://www.mathematik.tu-dortmund.de/ieem/cms/media/BzMU/BzMU2009/Beitraege/HAFNER_Thomas_2009_Modellierungskompetenzen.pdf, 12.12.2011)
- **SCHNEIDER, E., PESCHEK, W.:** PISA Mathematik: Die österreichischen Ergebnisse aus fachdidaktischer Sicht, 2006
http://www.uni-klu.ac.at/idm/downloads/PISA_Mathematik_-_Die_oesterreichischen_Ergebnisse_aus_einer_fachdidaktischen_Sicht_%28Schneider_und_Peschek%29.pdf, 02.11.2011
- **VOSS, D., ZWEILING, B.:** Lernsituation: „Prozente überall“. Mathematik in den 7. Klassen der Haupt-und Realschule, 2008:
http://www.sinus-hamburg.de/index.php?option=com_docman&task=cat_view&gid=231&Itemid=5, Prozentrechnung 1 Übersicht, 06.02.2012

6. LEBENSLAUF

PERSÖNLICHE DATEN:

Name:	Sabrina Vincenz
Geburtsdatum:	05. September 1988
Geburtsort:	Mistelbach
Familienstand:	ledig
Eltern:	Christa Vincenz, Gemeindebedienstete Franz Vincenz, Techniker
Geschwister:	Stefan Vincenz, Student
Adresse:	Kühltal 5 2120 Obersdorf
Staatsangehörigkeit:	Österreich
Telefonnummer:	0660/7602803
E-Mail:	a0704963@unet.univie.ac.at

SCHULBILDUNG:

1995 – 1999	Volksschule Wolkersdorf
1999 – 2007	Bundesgymnasium Wolkersdorf , Spezialisierung auf Wirtschaftswissenschaften und Fremdsprachen
Juni 2007	Absolvierung der Reifeprüfung

STUDIUM:

2007 – 2012	Fakultät für Mathematik und Universität Wien für das Lehramt Mathematik, Psychologie und Philosophie
-------------	---

SONSTIGES:

Juni 2008	Ausbildung zur Sportjugendleiterin
Dezember 2008	Ausbildung zur Begleitlehrerin für Snowboarder im Rahmen einer Wintersportwoche
September 2009	Ausbildung zur Tennistrainerin

7. ABSTRACT

In meiner Diplomarbeit geht es um Grundvorstellungen zu Prozent- und Bruchrechnung. Doch wozu werden diese überhaupt benötigt? Bereits im Mathematikunterricht der Unterstufe werden Grundvorstellungen oft zu wenig behandelt, dies betrifft insbesondere den Bereich der Prozent- und Bruchrechnung. Viele Schülerinnen und Schüler entwickeln keine Vorstellungsebene zu Brüchen und Prozentsen, wenn zu rasch zur formalen Ebene übergegangen wird. Die negativen Folgen können gravierend sein.

Grundvorstellungen dienen als Basis, um mathematische Begrifflichkeiten verstehen zu können. Das Vorhandensein von Grundvorstellungen ist die notwendige Voraussetzung für die Kompetenz, formale Rechenverfahren erfolgreich in unterschiedlichen Problemsituationen anwenden zu können.

In meiner Arbeit werden Vorschläge für kompetenzorientierten Unterricht erarbeitet. Durch systematische Auseinanderlegung und Benennung einzelner Grundvorstellungen wird eine Hilfestellung für die Unterrichtsplanung gegeben und das Verständnis der Lernenden ausgeweitet. Ziel ist es, Defizite der Schülerinnen und Schüler auszugleichen und ihnen die Angst vor dem Mathematikunterricht zu nehmen.