



universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Nichtstandard-Analysis: hyperreelle Zahlen und Folgen

Verfasserin

Cornelia Schubert

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2011

Matrikelnummer: 0442575

Studienkennzahl lt. Studienblatt: A 190 406 423

Studienrichtung lt. Studienblatt: UF Mathematik, UF Chemie

Betreuer: a.o. Univ.-Prof. Dr. Günther Hörmann

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit unterteilt sich in drei Abschnitte und wurde zu einem großen Teil in Anlehnung an die Darstellungen in [LR] erstellt. Verschiedene Aspekte und Beispiele wurden auch aus [HK], [DL] und [MV] verwendet. Als Referenz für Aussagen aus der klassischen Analysis dienen [OF] und [FW].

Als Grundlage für die Arbeit mit Nichtstandard-Methoden wird im ersten Kapitel der angeordnete Körper der hyperreellen Zahlen konstruiert, mit dem Ziel, einen Körper zu erhalten, der unendlich große und unendlich kleine Elemente enthält. Im Verlauf dieses Kapitels werden zudem zentrale Begriffe der Nichtstandard-Analysis, wie zum Beispiel „fast überall“, „finit“ oder „infinitesimal benachbart“ eingeführt, die als Grundlage für das Rechnen in ${}^*\mathbb{R}$ dienen.

Im zweiten Kapitel werden zwei wichtige Beweisprinzipien der Nichtstandard-Analysis erläutert, auf die wir im darauffolgenden Kapitel zurückgreifen werden. Außerdem werden wichtige Eigenschaften der hyperreellen Zahlen eingeführt bzw. wiederholt.

Die Anwendung der Nichtstandard-Theorie auf Folgen und Reihen bildet den Inhalt des letzten Kapitels. Zum einen geht es um das Konvergenzverhalten von Folgen und Reihen, wobei die Unterschiede zur klassischen Analysis anhand von Beispielen herausgearbeitet werden. Zum anderen finden sich in diesem Kapitel Nichtstandard-Kriterien zum Thema Beschränktheit von Folgen und, ein, im Vergleich zur klassischen Analysis besonders einfacher, Beweis des Satzes von Bolzano-Weierstraß.

Der Anhang über Filter und Ultrafilter enthält wichtige grundlegende Definitionen und Sätze, die für die Arbeit mit den hyperreellen Zahlen vorausgesetzt werden.

Danksagung

Während meines Studiums und besonders bei der Umsetzung meiner Diplomarbeit wurde ich von einigen Personen unterstützt, bei denen ich mich nun ganz herzlich bedanken möchte.

Ein ganz herzliches Dankeschön möchte ich an a.o. Univ.-Prof. Dr. Günther Hörmann für die Betreuung meiner Diplomarbeit richten. Er hat immer Zeit gefunden, meine Fragen geduldig zu beantworten und seine Begeisterung für Mathematik und die vielen Ideen wirkten stets motivierend. Danke für die tatkräftige Unterstützung.

Besonderer Dank gilt auch allen Familienmitgliedern, die mich nicht nur finanziell, sondern auch moralisch unterstützt und mir den Rücken gestärkt haben.

Weiters bedanke ich mich bei all meinen FreundInnen und StudienkollegInnen, insbesondere bei Ruth Silberbauer, dass sie mir die Zeit meines Studiums stets zu versüßen wussten und mich in den Höhen und Tiefen des Studiums begleitet haben.

Inhaltsverzeichnis

0. Einleitung	1
1. Der Erweiterungskörper ${}^*\mathbb{R}$ von $\mathbb{R}$	3
1.1. Die Konstruktion von ${}^*\mathbb{R}$ als Menge und erste Eigenschaften	3
1.2. Operationen auf ${}^*\mathbb{R}$: Addition, Multiplikation und Ordnungsrelation	8
1.3. Körpereigenschaften von ${}^*\mathbb{R}$	15
1.4. Rechnen in ${}^*\mathbb{R}$	20
2. Exkurs: Zwei Beweisprinzipien und Struktur der hyperreellen Zahlen	31
2.1. Transferprinzip	31
2.2. Permanenzprinip	32
2.3. Die hyperreellen Zahlen	33
3. Nichtstandard-Analysis reellwertiger Folgen	35
3.1. Grundlagen	35
3.2. Grenzwerte und Häufungswerte	36
3.3. Beschränktheit und der Satz von Bolzano-Weierstraß	43
A. Filter und Ultrafilter	49
Literaturverzeichnis	52
Lebenslauf	54

0. Einleitung

„ $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots$ in inf., ein Ausdruck, von dem wir weder berechtigt sind zu sagen, daß er positiv, noch daß er negativ, noch daß er Null oder unendlich klein sey“. (Zitat nach [DL], Kapitel 1)

So schreibt B. Bolzano (1781-1848) in seinem Werk „Reine Zahlenlehre“ über einen Größenausdruck, den man heute Mathematikhistorikern zu Folge als $(\sum_{k=1}^n (-k)^{k+1})_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnen könnte.

Schon in der Vergangenheit haben sich viele Mathematiker mit dem Infinitesimalen beschäftigt. Ein paar Beispiele sind Euklid (ca. 360 bis 280 v. Chr.) und später Leibniz (1646-1716), Euler (1707-1783) und Bolzano (1781-1848), welcher 1830 sogar eine Theorie der „unendlichen Größenausdrücke“ entwickelt hat. Den Namen „Nonstandard-Analysis“, welcher von A. Robinson (1918-1974) stammt, gibt es seit 1960. (vgl. [DL], Kapitel 1)

Obwohl sich die klassische Infinitesimalrechnung durchgesetzt hat, motivieren nicht nur die historische Bedeutung, sondern auch die Möglichkeit eines alternativen Zugangs zur Analysis, sich näher mit Nichtstandard-Analysis und deren Methoden auseinanderzusetzen.

In der vorliegenden Arbeit über hyperreelle Zahlen und Folgen definieren wir zunächst die Menge der hyperreellen Zahlen ${}^*\mathbb{R}$ mittels eines festen Ultrafilters und anschließend konstruieren wir einen angeordneten Körper $({}^*\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$, der die reellen Zahlen als echte Teilmenge enthält. Das Rechnen in ${}^*\mathbb{R}$ wird durch die Sprechweise „fast überall“ vereinfacht. ${}^*\mathbb{R}$ enthält neben den reellen Zahlen finite, infinite und infinitesimale Elemente, wobei es zu jedem finiten Element $\bar{\alpha}$ aus ${}^*\mathbb{R}$ genau eine reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ gibt, die infinitesimal benachbart zu $\bar{\alpha}$ ist.

Das Transfer- und das Permanenzprinzip werden kurz eingeführt und im nächsten Kapitel beispielsweise bei der Berechnung von Grenzwerten von Folgen mittels Nichtstandard-Methoden angewendet. Beweise dieser Prinzipien können in [LR] nachgelesen werden.

Im letzten Kapitel der Arbeit geht es um Folgen und Reihen in ${}^*\mathbb{R}$, die über Abbildungen ${}^*\alpha : {}^*\mathbb{N} \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ definiert werden. So können Nichtstandard-Kriterien für das Konvergenzverhalten und die Beschränktheit von Folgen und Reihen gegeben und angewendet werden.

1. Der Erweiterungskörper ${}^*\mathbb{R}$ von $\mathbb{R}$

Im folgenden Abschnitt werden wir den Erweiterungskörper ${}^*\mathbb{R}$ von $\mathbb{R}$ konstruieren. Die Darstellung ist an [LR] angelehnt.

Dazu werden wir eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller reellwertigen Folgen definieren, welche wir mittels eines Ultrafilters über den natürlichen Zahlen einführen können. ${}^*\mathbb{R}$ entsteht dann aus den zugehörigen Äquivalenzklassen.

1.1. Die Konstruktion von ${}^*\mathbb{R}$ als Menge und erste Eigenschaften

Mit $\mathbb{N}$ sei im Folgenden die Menge der natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, \dots\}$ gemeint.

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sei die Menge aller Abbildungen $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, also die Menge der reellwertigen Folgen. Die Elemente von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sollen mit $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ bezeichnet werden.

Ein Element $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist also eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$, wobei wir folgende Notation verwenden: $\alpha = (\alpha(n))_{n \in \mathbb{N}} = (\alpha(1), \alpha(2), \alpha(3), \dots)$ mit $\alpha(n) \in \mathbb{R}$.

Entsprechend den allgemein gehaltenen Aussagen über Filter und Ultrafilter im Anhang, wählen wir für die unendliche Menge I nun die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Dann ist nach Satz und Definition A.0.8 $\mathcal{F}_0 := \{A \subseteq \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus A \text{ endlich}\}$ ein Filter über $\mathbb{N}$, nämlich der Filter der koendlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$.

Nach Satz A.0.14 (Existenz von Ultrafiltern) gibt es zu jedem Filter über I einen, diesen Filter umfassenden Ultrafilter über I . Das heißt es existiert ein Ultrafilter $\mathcal{F}$ über $\mathbb{N}$, der den Filter $\mathcal{F}_0$ umfasst.

So ein Ultrafilter $\mathcal{F}$ sei ab jetzt fest gewählt:

$\mathcal{F}$ sei Ultrafilter über $\mathbb{N}$, mit $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{F}$ für jede endliche Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}$.

Mit Hilfe dieses Ultrafilters $\mathcal{F}$ können wir nun eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller reellwertigen Folgen definieren:

Satz und Definition 1.1.1.

Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ schreibe

$$\alpha \sim \beta, \text{ falls } \{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) = \beta(n)\} \in \mathcal{F} \text{ ist.}$$

Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Das folgende Beispiel soll der Veranschaulichung von Satz und Definition 1.1.1 dienen.

Beispiel 1.1.2.

Sei $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $(\alpha(n))_{n \in \mathbb{N}} = (\frac{1}{n^2})_{n \in \mathbb{N}} = (1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots)$.

Betrachten wir nun eine Folge $\beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ die dieselben Folgenglieder wie α hat, „bis auf endlich viele“ Ausnahmen.

β habe zum Beispiel die Gestalt $\beta = (0, \frac{1}{4}, \frac{1}{9} + 1, \frac{1}{16}, \dots)$. Die Folgen α und β unterscheiden sich an erster und dritter Stelle, das heißt es gilt $\{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) = \beta(n)\} = \mathbb{N} \setminus \{1, 3\}$. $\{1, 3\}$ ist eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}$, daher liegt $\mathbb{N} \setminus \{1, 3\}$ im Filter $\mathcal{F}$ und es gilt nach Satz und Definition 1.1.1: $\alpha \sim \beta$.

Anschließend werden wir beweisen, dass die Relation $\sim$ aus Satz und Definition 1.1.1 eine Äquivalenzrelation ist. Dazu überprüfen wir die Relation $\sim$ auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.

Beweis.

(i) Zuerst wollen wir zeigen, dass die Relation $\sim$ reflexiv ist, das heißt, dass $\alpha \sim \alpha$ gilt. Dies ist laut Definition 1.1.1 genau dann erfüllt, wenn $\{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) = \alpha(n)\} \in \mathcal{F}$ gilt. Da die Menge $\{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) = \alpha(n)\}$ alle natürlichen Zahlen umfasst und wegen $\mathbb{N} \in \mathcal{F}$ folgt, dass $\{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) = \alpha(n)\}$ im Filter liegt. Reflexivität ist also erfüllt.

(ii) Weiters wollen wir die Relation auf Symmetrie prüfen. Die Relation ist symmetrisch, wenn gilt: $\alpha \sim \beta \Rightarrow \beta \sim \alpha$.

Laut Definition 1.1.1 gilt:

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) = \beta(n)\} \in \mathcal{F}.$$

Voraussetzung ist also, dass die Menge $\{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) = \beta(n)\}$ im Filter $\mathcal{F}$ liegt.

Betrachten wir nun die Menge $\{n \in \mathbb{N} : \beta(n) = \alpha(n)\}$ so sehen wir:

$$\{n \in \mathbb{N} : \beta(n) = \alpha(n)\} = \{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) = \beta(n)\}.$$

1.1. Die Konstruktion von ${}^*\mathbb{R}$ als Menge und erste Eigenschaften

Somit folgt $\{n \in \mathbb{N} : \beta(n) = \alpha(n)\} \in \mathcal{F}$ und laut Definition 1.1.1 ist dies äquivalent zu $\beta \sim \alpha$. Damit ist auch die Symmetrie von $\sim$ bewiesen.

(iii) Zuletzt ist die Transitivität von $\sim$ zu zeigen. Die Relation $\sim$ ist transitiv, wenn aus $\alpha \sim \beta$ und $\beta \sim \gamma$ folgt, dass auch $\alpha \sim \gamma$ gilt. Laut Definition 1.1.1 gelten folgende Aussagen: $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) = \beta(n)\} \in \mathcal{F}$ und $\beta \sim \gamma \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : \beta(n) = \gamma(n)\} \in \mathcal{F}$.

Betrachten wir nun den Durchschnitt $\{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) = \beta(n)\} \cap \{n \in \mathbb{N} : \beta(n) = \gamma(n)\}$, so erkennen wir, dass folgende Mengeninklusion erfüllt ist:

$$\{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) = \beta(n)\} \cap \{n \in \mathbb{N} : \beta(n) = \gamma(n)\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) = \gamma(n)\}.$$

Wegen Satz A.0.16(i) folgt nun, dass auch die Menge $\{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) = \gamma(n)\}$ im Filter $\mathcal{F}$ liegt. Daraus folgt $\alpha \sim \gamma$ und somit ist auch Transitivität gezeigt. □

Mittels der folgenden Definition konstruieren wir nun eine Menge ${}^*\mathbb{R}$, die neben Äquivalenzklassen reellwertiger Folgen auch die reellen Zahlen enthält.

Definition 1.1.3 (${}^*\mathbb{R}$).

(i) Für $r \in \mathbb{R}$ sei $r_{\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ die konstante Abbildung $r_{\mathbb{N}}(n) := r$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Für $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ setze

$$\bar{\alpha} := r, \text{ falls } \alpha \sim r_{\mathbb{N}} \text{ für ein } r \in \mathbb{R} \text{ ist,}$$

$$\bar{\alpha} := \{\beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \beta \sim \alpha\} \text{ sonst.}$$

(iii) Es sei ${}^*\mathbb{R} := \{\bar{\alpha} : \alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\}$.

$\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ definiert eine Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow {}^*\mathbb{R}$.

Zur Konstruktion von ${}^*\mathbb{R}$ wird jedem $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ die zugehörige Äquivalenzklasse zugeordnet. Ausgenommen sind die zu einer konstanten Abbildung äquivalenten Elemente aus $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, welchen statt der jeweiligen Äquivalenzklasse die entsprechenden Konstanten aus $\mathbb{R}$ zugeordnet werden. Somit enthält ${}^*\mathbb{R}$ neben Äquivalenzklassen gewisser reeller Folgen auch die reellen Zahlen und wir erhalten $\mathbb{R}$ als Teilmenge von ${}^*\mathbb{R}$. Wir werden die Elemente von ${}^*\mathbb{R}$ etwas salopp und vereinfachend als Äquivalenzklassen bezeichnen.

Bemerkung 1.1.4.

Alternativ kann ${}^*\mathbb{R}$ auch tatsächlich direkt als Menge der Äquivalenzklassen reeller Folgen definiert werden (vgl. [TL], Chapter I). Unsere Variante der Konstruktion hat aber den Vorteil, dass $\mathbb{R}$ direkt als Teilmenge von ${}^*\mathbb{R}$ ersichtlich ist und nicht bloß eingebettet ist.

Beispiel 1.1.5.

$2_{\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist die konstante Folge $2_{\mathbb{N}} = (2, 2, 2, 2, 2, \dots)$, bzw. $2_{\mathbb{N}}(n) = 2, \forall n \in \mathbb{N}$ (vgl. Definition 1.1.3).

Seien weiters α und β zwei Folgen, die sich nur durch endlich viele Folgenglieder von $2_{\mathbb{N}}$ unterscheiden, zum Beispiel $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $\alpha = (-1, 0, 1, 2, 2, 2, 2, \dots)$ und $\beta = (0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, \dots)$.

Dann gilt einerseits $\alpha \sim 2_{\mathbb{N}}$ und andererseits $\alpha \sim \beta$. Somit enthält die Äquivalenzklasse von α sowohl $2_{\mathbb{N}}$ als auch die Folge β . Es gilt $\bar{\alpha} = \bar{\beta} = \overline{2_{\mathbb{N}}} = 2$.

Im folgenden Lemma werden wir noch die Korrektheit von Definition 1.1.3 (ii) nachprüfen.

Lemma 1.1.6. Für $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist $\bar{\alpha}$ eindeutig definiert, falls $\alpha \sim r_{\mathbb{N}}$ für ein $r \in \mathbb{R}$ ist.

Beweis.

Seien $r, s \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \sim r_{\mathbb{N}}$ und $\alpha \sim s_{\mathbb{N}}$, dann folgt aus der Transitivität der Äquivalenzrelation $r_{\mathbb{N}} \sim s_{\mathbb{N}}$. Wegen Definition 1.1.1 gilt

$$r_{\mathbb{N}} \sim s_{\mathbb{N}} \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : r_{\mathbb{N}}(n) = s_{\mathbb{N}}(n)\} \in \mathcal{F}.$$

Daraus folgt insbesondere, dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, mit $r_{\mathbb{N}}(n_0) = s_{\mathbb{N}}(n_0)$ (weil $\emptyset \notin \mathcal{F}$ gilt). Wegen Definition 1.1.3 gilt aber $r_{\mathbb{N}}(n_0) = r$ und $s_{\mathbb{N}}(n_0) = s$. Insgesamt folgt daher, dass $r = s$ gilt. Das heißt jeder reellwertigen Folge, die zu einer konstanten Folge äquivalent ist, wird genau eine reelle Zahl zugeordnet.

□

Nachdem wir nun die Menge ${}^*\mathbb{R}$ definiert haben, können wir uns mit den Eigenschaften dieser neu definierten Menge und deren Elemente beschäftigen.

Satz 1.1.7 (Eigenschaften).

- (i) $\bar{\alpha} = \bar{\beta} \Leftrightarrow \alpha \sim \beta$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- (ii) für jedes $r \in \mathbb{R}$ gilt $\overline{r_{\mathbb{N}}} = r$
- (iii) $\mathbb{R} \subseteq {}^*\mathbb{R}$

Beweis.

(i) Zuerst wollen wir zeigen, dass die zwei Bilder reellwertiger Folgen unter der Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow {}^*\mathbb{R}$, $\gamma \mapsto \bar{\gamma}$ genau dann gleich sind, wenn die entsprechenden reellwertigen Folgen äquivalent sind, das heißt, dass für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ gilt:

$$\bar{\alpha} = \bar{\beta} \Leftrightarrow \alpha \sim \beta.$$

” $\Rightarrow$ ”: Voraussetzung ist, dass $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ gleich sind. Wir unterscheiden nun gemäß Definition 1.1.3 zwei Fälle:

1. Ist $\alpha \sim r_{\mathbb{N}}$ für ein $r \in \mathbb{R}$, so gilt laut Definition $\bar{\alpha} = r$. Aus $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$ folgt $\bar{\beta} = r$, also $\beta \sim r_{\mathbb{N}}$ und auch $r_{\mathbb{N}} \sim \beta$. Somit folgt $\alpha \sim \beta$ aus der Transitivität von $\sim$.
2. Ist $\alpha \sim r_{\mathbb{N}}$ für kein $r \in \mathbb{R}$, so gilt nach Definition $\bar{\alpha} := \{\gamma \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \gamma \sim \alpha\}$. Wegen $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$ folgt nun $\beta \in \bar{\alpha}$ und somit $\alpha \sim \beta$.

” $\Leftarrow$ ”: Nun setzen wir voraus, dass α äquivalent zu β ist. Zur Bildung der Äquivalenzklassen unterscheiden wir wieder die folgenden beiden Fälle:

1. Ist $\alpha \sim r_{\mathbb{N}}$ für ein $r \in \mathbb{R}$, so folgt wegen $\alpha \sim \beta$, dass $\beta \sim r_{\mathbb{N}}$ gilt. Aus $\bar{\alpha} = r$ und $\bar{\beta} = r$ folgt nun $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$.
2. Ist $\alpha \sim r_{\mathbb{N}}$ für kein $r \in \mathbb{R}$, so gilt wegen $\alpha \sim \beta$, dass auch $\beta \sim r_{\mathbb{N}}$ für kein $r \in \mathbb{R}$. Daher folgt aus der Definition 1.1.3, dass $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ Äquivalenzklassen sind und wegen $\alpha \sim \beta$ folgt $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$.

(ii) Nun wollen wir zeigen, dass für ein beliebiges $r \in \mathbb{R}$ das Bild von $r_{\mathbb{N}}$ unter $\Phi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ gleich r ist. Laut Definition 1.1.3 ist aber $\overline{r_{\mathbb{N}}} = r$, weil $r_{\mathbb{N}} \sim r_{\mathbb{N}}$ gilt.

(iii) Letztlich bleibt zu zeigen, dass $\mathbb{R}$ eine Teilmenge von ${}^*\mathbb{R}$ ist. Sei $r \in \mathbb{R}$ beliebig. Wegen (ii) gilt $r = \overline{r_{\mathbb{N}}} \in {}^*\mathbb{R}$. Also gilt $\mathbb{R} \subseteq {}^*\mathbb{R}$.

□

1.2. Operationen auf ${}^*\mathbb{R}$: Addition, Multiplikation und Ordnungsrelation

In diesem Abschnitt werden wir die Operationen der Addition und der Multiplikation auf ${}^*\mathbb{R}$ einführen. Um ${}^*\mathbb{R}$ zu einem angeordneten Körper zu machen, werden wir zusätzlich eine Ordnungsrelation auf ${}^*\mathbb{R}$ definieren.

Vorher wiederholen wir die grundlegenden Definitionen und Begriffe im allgemeinen Rahmen.

Eine Relation R über einer Menge K ist eine **partielle Ordnung**, genau dann wenn für alle x, y und $z \in K$ die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. R ist reflexiv (xRx)
2. R ist transitiv ($xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$)
3. R ist antisymmetrisch ($xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$).

Sei (K, R) eine partiell geordnete Menge. R ist eine **totale Ordnung** genau dann wenn gilt:

$$\forall x, y \in K : xRy \text{ oder } yRx.$$

Es sei K eine Menge, die mindestens 2 Elemente besitzt und es seien $+$ und $\cdot$ Operationen in K , d.h. Abbildungen $K \times K \rightarrow K$.

$(K, +, \cdot)$ ist ein Körper mit Nullelement 0 und Einselement 1, wenn $\forall x, y, z \in K$ die folgenden Eigenschaften (i) bis (ix) erfüllt sind:

- (i) $x + y = y + x$
- (ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$
- (iii) $x + 0 = x$
- (iv) $x + (-x) = 0$ für ein $-x \in K$
- (v) $x \cdot y = y \cdot x$
- (vi) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
- (vii) $x \cdot 1 = x$

1.2. Operationen auf ${}^*\mathbb{R}$: Addition, Multiplikation und Ordnungsrelation

(viii) $x \cdot x^{-1} = 1$ für ein $x^{-1} \in K$, falls $x \neq 0$ ist.

(ix) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

Ist $\leq$ eine totale Ordnung über dem Körper K , so heißt $(K, x, \cdot, \leq)$ ein **angeordneter Körper**, falls zusätzlich die Eigenschaften (x) und (xi) erfüllt sind:

(x) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

(xi) $(x \leq y \text{ und } 0 \leq z) \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$.

Ein angeordneter Körper K heißt **ordnungsvollständig**, falls jede nicht-leere Teilmenge von K , die eine obere Schranke besitzt, eine kleinste obere Schranke besitzt.

In der folgenden Definition werden wir Addition und Multiplikation, sowie eine Ordnungsrelation auf ${}^*\mathbb{R}$ mit den Symbolen $\oplus, \odot$ und $\trianglelefteq$ einführen, welche wir zunächst von den entsprechenden Operationen in $\mathbb{R}$ unterscheiden wollen.

Als Vorbereitung auf die Definition erinnern wir an entsprechende Operationen mit Folgen. Wir betrachten dazu zwei reellwertige Folgen α und β .

Wenn wir nun punktweise die Summe dieser Abbildungen $(\alpha(n) + \beta(n))_{n \in \mathbb{N}}$ bilden, so erkennen wir, dass auch die erhaltene Folge eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$ ist.

Analog können wir die Überlegung für das Produkt $\alpha \cdot \beta$ durchführen. Die Produktfolge, also die Folge $(\alpha(n) \cdot \beta(n))_{n \in \mathbb{N}}$, ist ebenfalls eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$.

Bilden wir die Elemente in ${}^*\mathbb{R}$, die den Folgen $\alpha + \beta$ und $\alpha \cdot \beta \in {}^*\mathbb{R}$ entsprechen, so kommen wir zur Definition der Summe und des Produktes in ${}^*\mathbb{R}$.

Entsprechend dieser Überlegungen geben wir folgende Definitionen:

Definition 1.2.1 ($\oplus, \odot, \trianglelefteq$ in ${}^*\mathbb{R}$).

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Wir definieren:

$$\bar{\alpha} \oplus \bar{\beta} := \overline{\alpha + \beta}$$

$$\bar{\alpha} \odot \bar{\beta} := \overline{\alpha \cdot \beta}$$

und schreiben

$$\bar{\alpha} \trianglelefteq \bar{\beta} \text{ falls } \{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) \leq \beta(n)\} \in \mathcal{F} \text{ ist.}$$

Um mit den Äquivalenzklassen rechnen zu können, verwendet man Repräsentanten. Zur Veranschaulichung geben wir einfache Beispiele:

Beispiel 1.2.2.

1. Sei $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ von der Gestalt

$$\alpha = (\alpha(n))_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right).$$

Es ist $\bar{\alpha} = \{\beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \beta \sim \alpha\}$.

Dann ist auch die Folge $\beta = (1, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots)$ ein Repräsentant von $\bar{\alpha}$, denn es gilt

$$\{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) = \beta(n)\} = \mathbb{N} \setminus \{2, 3\} \in \mathcal{F}.$$

α und β sind also äquivalent.

Sei nun eine weitere Folge γ definiert als:

$$\gamma = (\gamma(n))_{n \in \mathbb{N}} = (n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 2, 3, 4, 5, \dots)$$

Dann gilt $\alpha + \gamma = \left(\frac{1}{n} + n\right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{1} + 1, \frac{1}{2} + 2, \frac{1}{3} + 3, \dots\right)$.

Bilden wir nun die Summe von $\bar{\alpha}$ und $\bar{\gamma}$, so gilt laut Definition $\bar{\alpha} \oplus \bar{\gamma} = \overline{\alpha + \gamma}$.

Somit erkennen wir, dass die Folgen

$$\delta = \beta + \gamma = \left(0, \frac{1}{2} + 2, \frac{1}{3} + 3, 0, \frac{1}{5} + 5, \frac{1}{6} + 6, \dots\right)$$

und

$$\epsilon = \alpha + \gamma = \left(\frac{1}{1} + 1 + 5, \frac{1}{2} + 2, \frac{1}{3} + 3, 0, \frac{1}{5} + 5, \dots\right)$$

zur Äquivalenzklasse von $\alpha + \gamma$ gehören, denn es gilt

$$\{n \in \mathbb{N} : \epsilon(n) = (\alpha + \gamma)(n) = \delta(n)\} = \mathbb{N} \setminus \{1, 4\} \in \mathcal{F}.$$

2. Als weiteres Beispiel betrachten wir nun die Folgen

$$(\alpha(n))_{n \in \mathbb{N}} := \sqrt{n + 1000} - \sqrt{n},$$

$$(\beta(n))_{n \in \mathbb{N}} := \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$$

und

$$(\gamma(n))_{n \in \mathbb{N}} := \sqrt{n + \frac{n}{1000}} - \sqrt{n}.$$

1.2. Operationen auf ${}^*\mathbb{R}$: Addition, Multiplikation und Ordnungsrelation

Es gilt

$$\begin{aligned}\alpha(n) > \beta(n) &\Leftrightarrow \sqrt{n+1000} - \sqrt{n} > \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} \\ &\Leftrightarrow n+1000 > n+\sqrt{n} \\ &\Leftrightarrow n < 10^6.\end{aligned}$$

Analog gilt $\beta(n) > \gamma(n) \Leftrightarrow n < 10^6$, das heißt es gilt $\alpha(n) > \beta(n) > \gamma(n)$ für $n < 10^6$, andernfalls $\alpha(n) \leq \beta(n) \leq \gamma(n)$.

Insgesamt gilt also $\alpha(n) \leq \beta(n) \leq \gamma(n)$ für alle $n \geq 10^6$. Das bedeutet, dass $\bar{\alpha} \trianglelefteq \bar{\beta} \trianglelefteq \bar{\gamma}$ ist, denn die Menge der Indizes, für welche $\alpha(n) < \beta(n) < \gamma(n)$ gilt, ist endlich und liegt somit im Filter.

Übrigens gilt

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(n) = 0$, denn:

$$\sqrt{n+1000} - \sqrt{n} = \frac{n+1000-n}{\sqrt{n+1000} + \sqrt{n}} = \frac{1000}{\sqrt{n}(\sqrt{1+\frac{1000}{n}}+1)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta(n) = \frac{1}{2}$, denn:

$$\begin{aligned}\beta_n &= \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} \Leftrightarrow \sqrt{n+\sqrt{n}} = \sqrt{n} + \beta_n \\ &\Leftrightarrow n+\sqrt{n} = n+2\sqrt{n}\beta_n + \beta_n^2 \text{ für } n > 0 \\ &\Leftrightarrow 1 = 2\beta_n + \frac{\beta_n^2}{\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

Wegen $\beta_n \geq 0$ folgt $\beta_n \leq \frac{1}{2}, \forall n > 0$ und wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_n^2}{\sqrt{n}} = 0$ und somit folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \frac{1}{2}$.

(iii) γ ist bestimmt divergent gegen $+\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+\frac{n}{1000}} - \sqrt{n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(1+\frac{1}{1000})} - \sqrt{n}) = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot \sqrt{\frac{1}{1000}} &= +\infty.\end{aligned}$$

Mit dem folgenden Satz werden wir nun Definition 1.2.1 vervollständigen.

Satz 1.2.3.

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ und die Operationen $\oplus, \odot$ und $\trianglelefteq$ wie in Definition 1.2.1. Dann gelten folgende Aussagen:

1. $\bar{\alpha} \oplus \bar{\beta}, \bar{\alpha} \odot \bar{\beta}$ und die Gültigkeit von $\bar{\alpha} \trianglelefteq \bar{\beta}$ sind unabhängig von den speziellen Darstellungen von $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$.
2. Für reelle Zahlen $r, s \in \mathbb{R}$ gilt:

$$r \oplus s = r + s$$

$$r \odot s = r \cdot s$$

$$r \trianglelefteq s \Leftrightarrow r \leq s$$

Beweis.

Es seien $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}'$ und $\bar{\beta} = \bar{\beta}'$, mit $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Zuerst werden wir den ersten Teil von Satz 1.2.3 zeigen.

1. a) Zu Beginn werden wir zeigen, dass $\bar{\alpha} \oplus \bar{\beta}$ unabhängig von den speziellen Darstellungen von $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ ist.

Wegen Satz 1.1.7 gilt

$$A := \{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) = \alpha'(n)\} \in \mathcal{F}$$

und

$$B := \{n \in \mathbb{N} : \beta(n) = \beta'(n)\} \in \mathcal{F}.$$

Sei nun eine Teilmenge M von $\mathbb{N}$ definiert durch

$$M := \{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) + \beta(n) = \alpha'(n) + \beta'(n)\}.$$

Es folgt, dass $A \cap B \subseteq M$ gilt und, weil A und B Elemente des Filters $\mathcal{F}$ sind, folgt nach Satz A.0.16(i):

$$M = \{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) + \beta(n) = \alpha'(n) + \beta'(n)\} \in \mathcal{F}.$$

Das bedeutet, dass $(\alpha(n) + \beta(n))$ äquivalent zu $(\alpha'(n) + \beta'(n))$ ist und wegen Satz 1.1.7 folgt wiederum $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha' + \beta'}$.

- b) Nun zeigen wir, dass $\bar{\alpha} \odot \bar{\beta}$ unabhängig von den speziellen Darstellungen von $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ ist.

Seien A und B wie in 1. a). Wir definieren eine weitere Menge N als Teilmenge von $\mathbb{N}$:

$$N := \{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) \cdot \beta(n) = \alpha'(n) \cdot \beta'(n)\}.$$

Es gilt $A \cap B \subseteq N$ und analog 1. a) folgt, dass auch die Menge N im Filter $\mathcal{F}$ liegt. Daraus folgt nun, dass $(\alpha(n) \cdot \beta(n)) \sim (\alpha'(n) \cdot \beta'(n))$ gilt und dies ist laut Satz 1.1.7 äquivalent zu $\overline{\alpha \cdot \beta} = \overline{\alpha' \cdot \beta'}$.

- c) Jetzt zeigen wir, dass die Gültigkeit von $\bar{\alpha} \leq \bar{\beta}$ unabhängig von den speziellen Darstellungen von $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ ist.

Seien A und B wie in 1. a) und zwei weitere Mengen C und D definiert als

$$C := \{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) \leq \beta(n)\} \in \mathcal{F}$$

1.2. Operationen auf ${}^*\mathbb{R}$: Addition, Multiplikation und Ordnungsrelation

und

$$D := \{n \in \mathbb{N} : \alpha'(n) \leq \beta'(n)\}.$$

Wir wissen also, dass A, B und C im Filter $\mathcal{F}$ liegen und dass die Ungleichung

$$A \cap B \cap C \subseteq D$$

erfüllt ist. Wegen Satz A.0.16(i) können wir nun wiederum schließen, dass auch die Menge D im Filter $\mathcal{F}$ liegt, das heißt es gilt

$$D = \{n \in \mathbb{N} : \alpha'(n) \leq \beta'(n)\} \in \mathcal{F}.$$

Dies ist äquivalent zu $\overline{\alpha'} \sqsubseteq \overline{\beta'}$, wodurch die Behauptung gezeigt ist.

Nun beweisen wir den zweiten Teil von Satz 1.2.3. Es seien r und s reelle Zahlen.

2. a) Zuerst zeigen wir, dass die Gleichung $r + s = r \oplus s$ erfüllt ist.

Zu Beginn verwenden wir Satz 1.1.7, das heißt es gelten folgende Aussagen

$$\overline{r_{\mathbb{N}}} = r, \quad \overline{s_{\mathbb{N}}} = s.$$

Wegen $(r + s) \in \mathbb{R}$ gilt außerdem $\overline{(r + s)_{\mathbb{N}}} = r + s$. Dabei können wir die Summenfolge auch als Summe der einzelnen Folgen schreiben:

$$\overline{(r + s)_{\mathbb{N}}} = \overline{r_{\mathbb{N}} + s_{\mathbb{N}}}$$

Entsprechend Definition 1.2.1 gilt

$$\overline{r_{\mathbb{N}} + s_{\mathbb{N}}} = \overline{r_{\mathbb{N}}} \oplus \overline{s_{\mathbb{N}}}.$$

Das heißt es folgt insgesamt

$$r + s = \overline{(r + s)_{\mathbb{N}}} = \overline{r_{\mathbb{N}} + s_{\mathbb{N}}} = \overline{r_{\mathbb{N}}} \oplus \overline{s_{\mathbb{N}}} = r \oplus s.$$

- b) Jetzt zeigen wir, dass $r \cdot s = r \odot s$ gilt.

Wegen Satz 1.1.7 und $(r \cdot s) \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Gleichungen:

$$\overline{r_{\mathbb{N}}} = r, \quad \overline{s_{\mathbb{N}}} = s, \quad \overline{(r \cdot s)_{\mathbb{N}}} = r \cdot s.$$

Analog zu 2. a) folgt nun entsprechend der Definition 1.2.1, dass

$$r \cdot s = \overline{(r \cdot s)_{\mathbb{N}}} = \overline{r_{\mathbb{N}} \cdot s_{\mathbb{N}}} = \overline{r_{\mathbb{N}}} \odot \overline{s_{\mathbb{N}}} = r \odot s$$

gilt. Somit ist die Aussage gezeigt.

Der Erweiterungskörper ${}^*\mathbb{R}$ von $\mathbb{R}$

- c) Bleibt uns noch die letzte Aussage zu zeigen: $r \leq s \Leftrightarrow r \trianglelefteq s$.
Es gilt

$$r \leq s \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : r_{\mathbb{N}}(n) \leq s_{\mathbb{N}}(n)\} \in \mathcal{F}.$$

Laut Definition 1.2.1 gilt weiters

$$\{n \in \mathbb{N} : r_{\mathbb{N}}(n) \leq s_{\mathbb{N}}(n)\} \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \overline{r_{\mathbb{N}}} \trianglelefteq \overline{s_{\mathbb{N}}}.$$

Nach Definition 1.1.7 gilt außerdem

$$\overline{r_{\mathbb{N}}} \trianglelefteq \overline{s_{\mathbb{N}}} \Leftrightarrow r \trianglelefteq s,$$

wodurch die Aussage gezeigt ist.

□

Als Folge von Definition 1.2.1 und Satz 1.2.3 und weil $\oplus, \odot$ und $\trianglelefteq$ in ${}^*\mathbb{R}$ Fortsetzungen von $+, \cdot$ und $\leq$ in $\mathbb{R}$ sind, verwenden wir ab jetzt wieder die Schreibweise $+, \cdot$ und $\leq$. Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ schreiben wir nun: $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$ und $\overline{\alpha \cdot \beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$.

1.3. Körpereigenschaften von ${}^*\mathbb{R}$

In diesem Abschnitt werden wir uns mit den Körpereigenschaften von ${}^*\mathbb{R}$ beschäftigen.

Satz 1.3.1 (${}^*\mathbb{R}$ ist ein Körper.).

$({}^*\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Körper mit demselben Nullelement wie $\mathbb{R}$ und demselben Einselement wie $\mathbb{R}$. Das Element $\overline{-\alpha}$ ist das inverse Element von $\overline{\alpha}$ bezüglich der Addition und es gilt:

$$\overline{\alpha} - \overline{\beta} = \overline{\alpha - \beta}, \quad \forall \overline{\alpha}, \overline{\beta} \in {}^*\mathbb{R}.$$

Beweis.

(1) Wir zeigen zuerst, dass die Eigenschaften (i) bis (xi) aus der Definition eines Körpers (Abschnitt 1.2) für $K := {}^*\mathbb{R} = \{\overline{\alpha} : \alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\}$ erfüllt sind.

Seien α, β und γ aus $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(i) Erstens ist zu zeigen, dass die Addition in ${}^*\mathbb{R}$ kommutativ ist. Wegen Definition 1.2.1 gilt:

$$\overline{\alpha} + \overline{\beta} = \overline{\alpha + \beta}$$

Aufgrund der Symmetrie folgt

$$\overline{\alpha + \beta} = \overline{\beta + \alpha} \stackrel{[1.2.1]}{=} \overline{\beta} + \overline{\alpha}.$$

(ii) Zweitens zeigen wir die Assoziativität der Addition auf ${}^*\mathbb{R}$. Es gilt wiederum wegen Definition 1.2.1:

$$\overline{\alpha} + (\overline{\beta} + \overline{\gamma}) = \overline{\alpha} + \overline{\beta + \gamma} = \overline{\alpha + \beta + \gamma} = \overline{\alpha + \beta} + \overline{\gamma} = (\overline{\alpha} + \overline{\beta}) + \overline{\gamma}.$$

(iii) Drittens zeigen wir, dass der Körper ${}^*\mathbb{R}$ das Nullelement 0 besitzt. Es gilt:

$$\overline{\alpha} + 0 \stackrel{[1.1.7(ii)]}{=} \overline{\alpha} + \overline{0_{\mathbb{N}}}.$$

Weiters gilt wegen Definition 1.1.3 (i):

$$\overline{\alpha} + \overline{0_{\mathbb{N}}} = \overline{\alpha}.$$

(iv) Nun zeigen wir, dass $\overline{\alpha} + (-\overline{\alpha}) = 0$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist. $-\overline{\alpha}$ ist das inverse Element von $\overline{\alpha}$ bezüglich der Addition. Es gilt wieder wegen Definition 1.2.1:

$$\overline{\alpha} + (-\overline{\alpha}) = \overline{\alpha + (-\alpha)} = \overline{\alpha - \alpha} = \overline{0_{\mathbb{N}}} = 0.$$

(v) und (vi) Die Kommutativität und Assoziativität der Multiplikation kann man mit Hilfe der Definition 1.2.1 wie in Punkt (i) zeigen.

(vii) Weiters zeigen wir, dass ${}^*\mathbb{R}$ das Einselement 1 besitzt. Es gilt:

$$\bar{\alpha} \cdot 1 \stackrel{[1.1.7(ii)]}{=} \bar{\alpha} \cdot \overline{1_{\mathbb{N}}} \stackrel{[1.2.1]}{=} \overline{\alpha \cdot 1_{\mathbb{N}}} = \bar{\alpha}.$$

(viii) Nun zeigen wir, dass $\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta} = 1$ für ein $\bar{\beta} \in {}^*\mathbb{R}$ gilt, falls $\bar{\alpha} \neq 0$ ist. Anders formuliert: Sei $\bar{\alpha} \neq 0$ dann folgt, $\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta} = 1$ für ein $\bar{\beta} \in {}^*\mathbb{R}$.

Voraussetzung ist also, dass $\bar{\alpha}$ nicht 0 ist. Daraus folgt, dass die Menge der Indizes, wo der Repräsentant α die entsprechende Bedingung ($\neq 0$) erfüllt, im Filter enthalten ist. Sei

$$A := \{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) \neq 0\} \in \mathcal{F}.$$

Wir wollen nun ein $\beta = (\beta(n))_{n \in \mathbb{N}}$ finden, sodass $\alpha(n) \cdot \beta(n) = 1$ für „genügend viele n “ gilt, das heißt die Menge

$$\{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) \cdot \beta(n) = 1\}$$

soll ebenfalls im Filter $\mathcal{F}$ liegen. Wir setzen dazu

$$\beta(n) := \frac{1}{\alpha(n)},$$

wann immer dies erlaubt ist. Dazu muss also $\alpha(n) \neq 0$ gelten, was auf der Menge A erfüllt ist, das heißt falls $n \in A$ liegt und wir setzen $\beta(n) := 0$ sonst.

Es folgt letztlich wegen

$$\{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) \cdot \beta(n) = 1\} = \{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) \neq 0\} = A \in \mathcal{F},$$

dass $\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta} = 1$ gilt, für ein $\bar{\beta} \in {}^*\mathbb{R}$.

(ix) Zuletzt bleibt die Distributivität auf ${}^*\mathbb{R}$ zu zeigen. Diese kann wieder mit Hilfe von Definition 1.2.1 gezeigt werden:

$$(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) \cdot \bar{\gamma} = \overline{\alpha + \beta} \cdot \bar{\gamma} = \overline{(\alpha + \beta) \cdot \gamma} = \overline{\alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma} = \overline{\alpha \cdot \gamma} + \overline{\beta \cdot \gamma} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\gamma} + \bar{\beta} \cdot \bar{\gamma}.$$

Insgesamt haben wir nun gezeigt, dass ${}^*\mathbb{R}$ ein Körper ist und dasselbe Nullelement, sowie dasselbe Einselement wie $\mathbb{R}$ besitzt.

(2) Weiters gilt wegen der Existenz des inversen Elements bezüglich der Addition auf ${}^*\mathbb{R}$ und wegen Satz 1.2.3:

$$\bar{\alpha} - \bar{\beta} = \bar{\alpha} + (-\bar{\beta}) = \bar{\alpha} + \overline{-\beta} = \overline{\alpha - \beta}.$$

□

Wir haben nun bewiesen, dass ${}^*\mathbb{R}$ ein Körper ist. Somit können wir nun auch eine Ordnungsrelation einführen und die Ordnungseigenschaften auf ${}^*\mathbb{R}$ überprüfen.

Satz 1.3.2.

$({}^*\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ ist ein angeordneter Körper.

Beweis.

Aus Satz 1.3.1 wissen wir, dass ${}^*\mathbb{R}$ ein Körper ist.

1. Zu Beginn prüfen wir, ob $\leq$ eine totale Ordnung auf ${}^*\mathbb{R}$ ist. Nach der Definition aus Abschnitt 1.2 sind Reflexivität, Transitivität, Antisymmetrie und totale Ordnung zu zeigen.

- a) Reflexivität ist erfüllt, wenn $\bar{\alpha} \leq \bar{\alpha}$, $\forall \bar{\alpha} \in {}^*\mathbb{R}$ gilt. Diese Aussage gilt wegen $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}$.
- b) Nun zeigen wir, dass für alle $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ und $\bar{\gamma} \in {}^*\mathbb{R}$ auch folgende Aussage erfüllt ist: Seien $\bar{\alpha} \leq \bar{\beta}$ und $\bar{\beta} \leq \bar{\gamma}$, dann folgt $\bar{\alpha} \leq \bar{\gamma}$. (Transitivität)

Laut Voraussetzung und Definition 1.2.1 wissen wir, dass gilt:

$$A := \{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) \leq \beta(n)\} \in \mathcal{F}$$

und

$$B := \{n \in \mathbb{N} : \beta(n) \leq \gamma(n)\} \in \mathcal{F}.$$

Sei nun eine weitere Menge C definiert als

$$C := \{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) \leq \gamma(n)\},$$

dann wissen wir wegen $A \cap B \subseteq C$ und Satz A.0.16 (i) im Anhang über Filter und Ultrafilter, dass auch C in $\mathcal{F}$ liegt. Es folgt also $\bar{\alpha} \leq \bar{\gamma}$.

- c) Weiters zeigen wir Antisymmetrie: diese ist genau dann erfüllt, wenn aus $\bar{\alpha} \leq \bar{\beta}$ und $\bar{\beta} \leq \bar{\alpha}$ folgt, dass $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$ gilt, $\forall \bar{\alpha}, \bar{\beta} \in {}^*\mathbb{R}$.

Laut Voraussetzung seien also $\bar{\alpha} \leq \bar{\beta}$ und $\bar{\beta} \leq \bar{\alpha}$. Wir setzen

$$A := \{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) \leq \beta(n)\} \in \mathcal{F}$$

$$B := \{n \in \mathbb{N} : \beta(n) \leq \alpha(n)\} \in \mathcal{F}.$$

Nun definieren wir eine weitere Menge C wie folgt

$$C := \{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) = \beta(n)\}.$$

Wegen $A \cap B \subseteq C$ und aus Satz A.0.16(i) folgt wiederum, dass C im Filter $\mathcal{F}$ liegt und das ist laut Definition 1.1.1 und Satz 1.1.7 äquivalent zu $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$.

- d) Zuletzt zeigen wir, dass für alle $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta} \in {}^*\mathbb{R}$ gilt: $\bar{\alpha} \leq \bar{\beta}$ oder $\bar{\beta} \leq \bar{\alpha}$ (totale Ordnung).

Zum Beweis definieren wir die Mengen A und B folgendermaßen

$$A := \{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) \leq \beta(n)\}$$

$$B := \{n \in \mathbb{N} : \beta(n) \leq \alpha(n)\}.$$

Die Vereinigung von A und B ergibt nun die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Wegen $\mathbb{N} \in \mathcal{F}$ folgt aus Satz A.0.16(ii) $A \in \mathcal{F}$ oder $B \in \mathcal{F}$. Dies ist wiederum äquivalent zu $\bar{\alpha} \leq \bar{\beta}$ oder $\bar{\beta} \leq \bar{\alpha}$.

2. Um zu zeigen, dass ${}^*\mathbb{R}$ ein angeordneter Körper ist, werden wir zusätzlich die folgenden Eigenschaften beweisen:

- a) Sei $\bar{\alpha} \leq \bar{\beta}$, dann folgt $\bar{\alpha} + \bar{\gamma} \leq \bar{\beta} + \bar{\gamma}$, $\forall \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma} \in {}^*\mathbb{R}$.

Voraussetzung ist hier, dass die Menge $A := \{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) \leq \beta(n)\}$ im Filter $\mathcal{F}$ liegt. Betrachten wir die Menge der Indizes, wo die Aussage

$$\{n \in \mathbb{N} : (\alpha + \gamma)(n) \leq (\beta + \gamma)(n)\}$$

erfüllt ist, so erkennen wir, dass es sich hierbei um dieselbe Menge A handelt. Daher liegt auch

$$\{n \in \mathbb{N} : (\alpha + \gamma)(n) \leq (\beta + \gamma)(n)\}$$

im Filter $\mathcal{F}$. Dies ist äquivalent zu $\overline{\alpha + \gamma} \leq \overline{\beta + \gamma}$. Wegen Definition 1.2.1 folgt nun, dass

$$\bar{\alpha} + \bar{\gamma} = \overline{\alpha + \gamma} \leq \overline{\beta + \gamma} = \bar{\beta} + \bar{\gamma}$$

gilt.

- b) Für alle $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma} \in {}^*\mathbb{R}$ mit $\bar{\alpha} \leq \bar{\beta}$ und $0 \leq \bar{\gamma}$, folgt $\bar{\alpha} \cdot \bar{\gamma} \leq \bar{\beta} \cdot \bar{\gamma}$.

Hier können wir voraussetzen, dass gilt

$$A := \{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) \leq \beta(n)\} \in \mathcal{F}$$

$$B := \{n \in \mathbb{N} : 0 \leq \gamma(n)\} \in \mathcal{F}.$$

Sei eine weitere Menge C definiert als:

$$C := \{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) \cdot \gamma(n) \leq \beta(n) \cdot \gamma(n)\}.$$

Wegen $A \cap B \subseteq C$ folgt aus Satz A.0.16(i), dass auch C im Filter $\mathcal{F}$ liegt. Analog zu Punkt (a) folgt nun aus Definition 1.2.1

$$\overline{\alpha} \cdot \overline{\gamma} = \overline{\alpha \cdot \gamma} \leq \overline{\beta \cdot \gamma} = \overline{\beta} \cdot \overline{\gamma}.$$

□

Zusammenfassend haben wir also durch die Einführung der Addition, der Multiplikation und der Ordnungsrelation einen angeordneten Körper ${}^*\mathbb{R}$ konstruiert.

Um dies zu erreichen haben wir zu Beginn des Kapitels den Filter der koendlichen Teilmengen $\mathcal{F}_0$ definiert als $\mathcal{F}_0 := \{A \subseteq \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus A \text{ endlich}\}$. Da es zu jedem Filter über $\mathbb{N}$ einen, diesen Filter umfassenden Ultrafilter über $\mathbb{N}$ gibt, haben wir einen solchen fest gewählt und zwar folgendermaßen: $\mathcal{F}$ sei Ultrafilter über $\mathbb{N}$ so, dass $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{F}$ für jede endliche Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}$.

Da es unendlich viele Ultrafilter gibt, die den Filter der koendlichen Mengen umfassen, hängt unsere Konstruktion von ${}^*\mathbb{R}$ von der Wahl dieses Ultrafilters ab. Allerdings können wir keinen solchen Ultrafilter explizit angeben, was für die Vorstellung von ${}^*\mathbb{R}$ einige Eingewöhnung verlangt, aber beim konkreten Rechnen keinen Unterschied macht.

Trotzdem können wir in ${}^*\mathbb{R}$ formal rechnen wie in $\mathbb{R}$, außerdem haben wir in ${}^*\mathbb{R}$ noch weitere Elemente zur Verfügung, die in $\mathbb{R}$ nicht enthalten sind.

Jetzt ist es uns möglich, in unserem angeordneten Körper eine weitere wichtige Definition, nämlich den Betrag auf ${}^*\mathbb{R}$ anzugeben.

Satz und Definition 1.3.3.

Sei $\overline{\alpha} \in {}^*\mathbb{R}$. Wir definieren:

$$|\overline{\alpha}| := \overline{\alpha} \text{ für } \overline{\alpha} \geq 0 \text{ und}$$

$$|\overline{\alpha}| := -\overline{\alpha} \text{ für } \overline{\alpha} < 0.$$

Laut Definition gilt dann $\forall \epsilon \in \mathbb{R} \text{ mit } \epsilon \geq 0$:

$$|\overline{\alpha}| \leq \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon \leq \overline{\alpha} \leq \epsilon.$$

Für den Betrag in ${}^*\mathbb{R}$ schreiben wir $|\cdot|$, wie wir es vom Rechnen mit reellen Zahlen gewöhnt sind. Betrachten wir eine konstante Folge $r_{\mathbb{N}}$, so sehen wir, dass wir wegen $\overline{r_{\mathbb{N}}} = r$ als Wert für $|\overline{r_{\mathbb{N}}}|$, den üblichen Betrag der reellen Zahl r erhalten.

1.4. Rechnen in ${}^*\mathbb{R}$

Um das Rechnen in ${}^*\mathbb{R}$ einfacher zu gestalten, führen wir zunächst die Sprechweise „fast überall“ ein.

Definition 1.4.1.

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Wir schreiben

$\alpha(n) = \beta(n)$ fast überall (f.ü.), falls $\{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) = \beta(n)\} \in \mathcal{F}$ ist,

$\alpha(n) \leq \beta(n)$ f.ü., falls $\{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) \leq \beta(n)\} \in \mathcal{F}$ ist,

und analog $\alpha(n) \geq \beta(n)$ f.ü., falls $\{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) \geq \beta(n)\} \in \mathcal{F}$ ist.

Bemerkung 1.4.2.

Aus dieser Definition ergibt sich auch die entsprechende Sprechweise für konstante Folgen $r_{\mathbb{N}} = r$. Um dies zu sehen können wir zum Beispiel $\beta(n) = r$ setzen.

Es gilt dann

$\alpha(n) = r$ f.ü., falls $\{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) = r\} \in \mathcal{F}$ ist,

$\alpha(n) \leq r$ f.ü., falls $\{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) \leq r\} \in \mathcal{F}$ ist,

und analog $\alpha(n) \geq r$ f.ü., falls $\{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) \geq r\} \in \mathcal{F}$ ist.

Die Sprechweise können wir zum Beispiel für zwei Folgen α, β aus $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ und ϵ aus $\mathbb{R}$ auch auf $|\alpha(n) - \beta(n)| \leq \epsilon$ anwenden. Dies ist leicht ersichtlich, wenn wir die Folge

$$|\alpha(n) - \beta(n)| := \gamma(n)$$

setzen und eine weitere durch $\delta(n) = \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definieren.

Es gilt laut Definition 1.4.1, dass $\gamma(n) \leq \delta(n)$ fast überall gilt, falls die Menge der Indizes $\{n \in \mathbb{N} : \gamma(n) \leq \delta(n)\}$ im Filter $\mathcal{F}$ liegt. Ersetzen wir γ und δ so, wie wir es definiert haben, so erhalten wir:

$|\alpha(n) - \beta(n)| \leq \epsilon$ f.ü., falls $\{n \in \mathbb{N} : |\alpha(n) - \beta(n)| \leq \epsilon\} \in \mathcal{F}$.

Mit dieser neuen Sprechweise in ${}^*\mathbb{R}$ kann man nun das Rechnen in ${}^*\mathbb{R}$ auf das Rechnen in $\mathbb{R}$ zurückführen. Dies sehen wir im folgenden Satz.

Satz 1.4.3.

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ und $r, \epsilon \in \mathbb{R}$ mit $\epsilon > 0$. Dann gilt:

1. $\bar{\alpha} = \bar{\beta} \Leftrightarrow \alpha(n) = \beta(n)$ f.ü.,
2. $\bar{\alpha} \leq \bar{\beta} \Leftrightarrow \alpha(n) \leq \beta(n)$ f.ü.,
3. $|\bar{\alpha} - \bar{\beta}| \leq \epsilon \Leftrightarrow |\alpha(n) - \beta(n)| \leq \epsilon$ f.ü. und
4. $|\bar{\alpha} - r| \leq \epsilon \Leftrightarrow |\alpha(n) - r| \leq \epsilon$ f.ü..

Es gelten (2) bis (4) entsprechend mit $\geq$.

Beweis.

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ und $r, \epsilon \in \mathbb{R}$ mit $\epsilon > 0$.

1. Wegen Definition 1.1.1 und Satz 1.1.7(i) gilt: $\alpha \sim \beta$ falls $\{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) = \beta(n)\} \in \mathcal{F}$ und $\bar{\alpha} = \bar{\beta} \Leftrightarrow \alpha \sim \beta$, das heißt insgesamt gilt $\bar{\alpha} = \bar{\beta} \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) = \beta(n)\} \in \mathcal{F}$. Nach Definition 1.4.1 schreiben wir $\alpha(n) = \beta(n)$ f.ü., falls $\{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) = \beta(n)\} \in \mathcal{F}$ ist. Somit ist die erste Aussage gezeigt.
2. Nach Definition 1.2.1 schreiben wir $\bar{\alpha} \leq \bar{\beta}$ falls $\{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) \leq \beta(n)\} \in \mathcal{F}$ ist. Analog zu Definition 1.4.1 können wir $\{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) \leq \beta(n)\} \in \mathcal{F}$ nun als $\alpha(n) \leq \beta(n)$ f.ü. schreiben, wodurch auch die zweite Aussage gezeigt ist.
3. Zum Beweis der dritten Aussage definieren wir die Folge $\gamma := \alpha - \beta$. Wegen Satz 1.3.1 gilt für alle $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ und $\bar{\gamma} \in {}^*\mathbb{R}$: $\bar{\gamma} = \bar{\alpha} - \bar{\beta} = \overline{\alpha - \beta}$. Betrachten wir nun den Betrag von $\bar{\gamma}$ so erhalten wir aus Satz und Definition 1.3.3:

$$|\bar{\gamma}| \leq \epsilon \Leftrightarrow -\bar{\epsilon}_{\mathbb{N}} \leq \bar{\gamma} \text{ und } \bar{\gamma} \leq \bar{\epsilon}_{\mathbb{N}}.$$

Laut Definition 1.2.1 gilt:

$$-\bar{\epsilon}_{\mathbb{N}} \leq \bar{\gamma}, \text{ falls } \{n \in \mathbb{N} : -\epsilon_{\mathbb{N}}(n) \leq \gamma(n)\} \in \mathcal{F} \text{ und}$$

$$\bar{\gamma} \leq \bar{\epsilon}_{\mathbb{N}}, \text{ falls } \{n \in \mathbb{N} : \gamma(n) \leq \epsilon_{\mathbb{N}}(n)\} \in \mathcal{F}.$$

Nach Satz 1.1.7(ii) gilt weiters: $\bar{\epsilon}_{\mathbb{N}} = \epsilon$ und daraus folgt nun:

$$|\bar{\gamma}| \leq \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon \leq \gamma(n) \text{ f.ü. und } \gamma(n) \leq \epsilon \text{ f.ü..}$$

Dies ist nach Satz und Definition 1.3.3 äquivalent zu

$$|\gamma(n)| \leq \epsilon \text{ f.ü.}$$

und somit ist auch Aussage 3 gezeigt.

4. Aussage 4 folgt direkt aus Aussage 3, weil laut Satz 1.1.7 $\overline{r_{\mathbb{N}}} = r$, für alle $r \in \mathbb{R}$ gilt. □

Bevor wir uns nun wesentlichen Begriffen der Nichtstandard-Analysis widmen, betrachten wir im folgenden Lemma die Grenzwerte verschiedener reellwertiger Folgen.

Lemma 1.4.4.

Sei $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Dann gilt:

(i)

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha(i) = r \in \mathbb{R} \Rightarrow |\bar{\alpha} - r| \leq \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

(ii)

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha(i) = +\infty \Rightarrow \bar{\alpha} \geq n, \forall n \in \mathbb{N}$$

(iii)

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha(i) = -\infty \Rightarrow \bar{\alpha} \leq -n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Beweis.

(i) Entsprechend der klassischen Analysis wissen wir, dass die Konvergenz der reellwertigen Folge $\alpha(i)$, $i \in \mathbb{N}$ gegen $r \in \mathbb{R}$ impliziert, dass gilt:

Zu $\epsilon = \frac{1}{2n} > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|\alpha(i) - r| < \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n}$ für alle $i \geq N$. (vgl. [OF], §4)

In anderen Worten: Sei $n \in \mathbb{N}$ fest, so gilt $|\alpha(i) - r| \leq \frac{1}{n}$ bis auf endlich viele $i \in \mathbb{N}$. Daher ist $\mathbb{N} \setminus \{i \in \mathbb{N} : |\alpha(i) - r| \leq \frac{1}{n}\}$ endlich. Da unser zu Beginn fest gewählter Ultrafilter $\mathcal{F}$ alle koendlichen Mengen von $\mathbb{N}$ enthält gilt $\{i \in \mathbb{N} : |\alpha(i) - r| \leq \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}$ und wegen Bemerkung 1.4.2 folgt $|\alpha(i) - r| \leq \frac{1}{n}$ f.ü.. Somit ist $|\bar{\alpha} - r| \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nach Satz 1.4.3 erfüllt.

(ii) Die reellwertige Folge $\alpha(i)$ ist bestimmt divergent gegen $+\infty$. Entsprechend der klassischen Analysis bedeutet das in unserem Fall, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $\alpha(i) > n$, $\forall i \geq N$ (vgl. [OF], §4).

Sei also $n \in \mathbb{N}$ fest, dann gilt $\alpha(i) \geq n$ bis auf endlich viele $i \in \mathbb{N}$. Nun verwenden wir wieder die Eigenschaft unseres Ultrafilters, der alle koendlichen Mengen von $\mathbb{N}$

enthält und wissen somit, dass $\{i \in \mathbb{N} : \alpha(i) \geq n\} \in \mathcal{F}$. Dies ist nach Bemerkung 1.4.2 äquivalent zu $\alpha(i) \geq n$ f.ü. und wegen Satz 1.4.3 (2.) ist dies äquivalent zu $\bar{\alpha} \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(iii) In Punkt (iii) des Lemmas betrachten wir eine reelle Folge, die bestimmt divergent gegen $-\infty$ ist. Wir können hier analog wie in Punkt (ii) beweisen, dass $\bar{\alpha} \leq -n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

□

Bemerkung 1.4.5.

Die Umkehrung der Aussagen in Lemma 1.4.4 ist im Allgemeinen nicht gültig.

Um dies zu zeigen, betrachten wir eine unendliche Menge $A \subseteq \mathbb{N}$, deren Komplement $\mathbb{N} \setminus A$ ebenfalls unendlich ist. Da $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter über $\mathbb{N}$ ist und $A \subseteq \mathbb{N}$, gilt: $A \in \mathcal{F}$ oder $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{F}$. Sei o.B.d.A. $A \in \mathcal{F}$.

(i) Um zu beweisen, dass die Umkehrung von Aussage (i) nicht gilt, definieren wir die Folge $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

$$\alpha(i) := \begin{cases} 1, & \text{falls } i \in A \\ 0, & \text{falls } i \notin A \end{cases}$$

Wegen Satz und Definition 1.1.1, Definition 1.1.3 (ii) und $A \in \mathcal{F}$ gilt $\{i \in \mathbb{N} : \alpha(i) = 1\} \in \mathcal{F}$, das heißt $\alpha(i) = 1$ f.ü.. Es gilt $|\alpha(i) - 1| \leq \epsilon$ f.ü. und dies ist äquivalent zu $|\bar{\alpha} - 1| \leq \epsilon$ für alle $\epsilon > 0$ aus $\mathbb{R}$.

Allerdings ist unsere gewählte Folge α nicht konvergent und somit haben wir ein Gegenbeispiel für die Umkehrung von Aussage (i) in Lemma 1.4.4 gefunden.

(ii) Nun zeigen wir, dass die Umkehrung von (ii) im Allgemeinen nicht gilt. Dazu betrachten wir diese Folge:

$$\alpha(i) := \begin{cases} i, & \text{falls } i \in A \\ 0, & \text{falls } i \notin A \end{cases}$$

Es gilt $\bar{\alpha} \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ genau dann, wenn $\{i \in \mathbb{N} : \alpha(i) \geq n\} \in \mathcal{F}$, das heißt wenn $\alpha(i) \geq n$ f.ü., für alle $n \in \mathbb{N}$.

Angewendet auf unsere gewählte Folge, können wir die Menge $\{i \in \mathbb{N} : \alpha(i) \geq n\}$ auch folgendermaßen schreiben:

$$\{i \in \mathbb{N} : \alpha(i) \geq n\} = A \setminus \{1, \dots, n-1\} = A \cap (\mathbb{N} \setminus \{1, \dots, n-1\}).$$

Laut Voraussetzung ist $A \in \mathcal{F}$. Außerdem ist mit $\{1, \dots, n-1\} \subseteq \mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \setminus \{1, \dots, n-1\}$ endlich, auch $\mathbb{N} \setminus \{1, \dots, n-1\} \in \mathcal{F}$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt wegen Satz A.0.16 (i) $\{i \in \mathbb{N} : \alpha(i) \geq n\} \in \mathcal{F}$, das heißt für unsere gewählte Folge

ist die geforderte Eigenschaft $\bar{\alpha} \geq n$, für alle $n \in \mathbb{N}$ nun gezeigt.

$\alpha(i)$ ist allerdings nicht bestimmt divergent gegen $+\infty$ und somit haben wir gezeigt, dass diese Umkehrung nicht gilt.

(iii) Dass die Umkehrung der dritten Aussage aus Lemma 1.4.4 nicht erfüllt ist, kann man analog zu Aussage zwei zeigen, indem man α wie folgt definiert:

$$\alpha(i) := \begin{cases} -i, & \text{falls } i \in A \\ 0, & \text{falls } i \notin A. \end{cases}$$

Nachdem wir im obigen Lemma einige Eigenschaften für eigentlich und uneigentlich konvergente Folgen bewiesen haben, führen wir nun Begriffe ein, die in der Nichtstandard-Analysis ganz wesentlich sind. (vgl. [DL], [LR] und [TL])

Definition 1.4.6 (finit, infinit, unendlich, infinitesimal und infinitesimal benachbart).

- (i) Ein Element $\bar{\alpha} \in {}^*\mathbb{R}$ heißt **finit** oder **endlich**, falls $|\bar{\alpha}| \leq n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ist;
- (ii) ein Element $\bar{\beta} \in {}^*\mathbb{R}$, das nicht finit ist, heißt **infinit**. In anderen Worten: $\bar{\beta}$ ist **infinit** oder **unendlich groß**, falls $|\bar{\beta}| \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist;
- (iii) ein Element $\bar{\gamma} \in {}^*\mathbb{R}$ heißt **infinitesimal** oder **unendlich klein**, falls $|\bar{\gamma}| \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist;
- (iv) seien $\bar{\delta}, \bar{\epsilon} \in {}^*\mathbb{R}$. Es heißt $\bar{\delta}$ **unendlich nahe bei** $\bar{\epsilon}$ oder $\bar{\delta}$ **infinitesimal benachbart zu** $\bar{\epsilon}$, in Zeichen $\bar{\delta} \approx \bar{\epsilon}$, falls $\bar{\delta} - \bar{\epsilon}$ infinitesimal ist.

Bemerkung 1.4.7.

- (i) Betrachten wir den Kehrwert einer infiniten Zahl $\bar{\beta} \in {}^*\mathbb{R}$, $\bar{\beta} \neq 0$, so erhalten wir mit $\frac{1}{\bar{\beta}}$ eine infinitesimale Zahl, die nicht 0 ist.
Genauso liefert uns der Kehrwert einer infinitesimalen Zahl $\bar{\gamma} \in {}^*\mathbb{R}$, $\bar{\gamma} \neq 0$ eine infinite Zahl aus ${}^*\mathbb{R}$.
- (ii) In anderen Worten besagt Definition 1.4.6 (ii) und (iii), dass der Betrag eines unendlich großen Elements aus ${}^*\mathbb{R}$ größer ist, als jede reelle Zahl und dass der Betrag eines unendlich kleinen Elements aus ${}^*\mathbb{R}$ kleiner ist, als jede positive reelle Zahl.
- (iii) Man kann sagen, dass $\bar{\alpha}$ laut Definition 1.4.6 (iv) genau dann infinitesimal ist, wenn $\bar{\alpha} \approx 0$ gilt. Nach Definition 1.4.6 (iii) und (iv) gilt:

$$\bar{\alpha} \approx \bar{\beta} \Leftrightarrow |\bar{\alpha} - \bar{\beta}| \leq \frac{1}{n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da es in $\mathbb{R}$ nur eine einzige infinitesimale Zahl gibt, nämlich 0, folgt daraus, dass zwei infinitesimal benachbarte Zahlen aus $\mathbb{R}$ gleich sind.

Um uns diese neuen Begriffe etwas vertrauter zu machen, werden wir nun einige Beispiele für infinite und infinitesimale Elemente in ${}^*\mathbb{R}$ anführen.

Beispiel 1.4.8.

- (i) Ein Beispiel für ein infinites Element in ${}^*\mathbb{R}$ bildet die Äquivalenzklasse der Folge

$$\alpha = (i)_{i \in \mathbb{N}}.$$

Anhand dieser Folge können wir eine wichtige Eigenschaft von ${}^*\mathbb{R}$ beweisen:

Die Folge α ist bestimmt divergent gegen $+\infty$ und daher gilt nach dem Lemma 1.4.4 (ii), dass $\bar{\alpha} \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Somit ist $\bar{\alpha} \geq 0$ und es folgt $\bar{\alpha} = |\bar{\alpha}| \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Das heißt, dass $\bar{\alpha}$ unendlich groß (infinat) ist.

Nach dem Archimedischen Axiom gilt, dass es zu je zwei reellen Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$ eine natürliche Zahl n gibt, sodass $nx > y$ gilt (vgl. [OF], §3). Wegen der Existenz von infiniten Elementen in ${}^*\mathbb{R}$ ist das Archimedische Axiom auf ${}^*\mathbb{R}$ nicht erfüllt.

- (ii) Eine weitere Folge, deren Äquivalenzklasse ein infinites Element in ${}^*\mathbb{R}$ bildet, ist

$$\beta = (-i^2)_{i \in \mathbb{N}}.$$

- (iii) 0 ist ein infinitesimales Element in ${}^*\mathbb{R}$. Wie bereits in Bemerkung 1.4.7 erwähnt, ist 0 die einzige infinitesimale reelle Zahl.

- (iv) Die Äquivalenzklasse der Folge

$$\gamma = \left(\frac{1}{i}\right)_{i \in \mathbb{N}}$$

bildet ebenfalls ein infinitesimales Element in ${}^*\mathbb{R}$, denn wegen Lemma 1.4.4 gilt:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma(i) = 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow |\bar{\gamma} - 0| \leq \frac{1}{n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \text{ gilt } |\bar{\gamma}| \leq \frac{1}{n} \text{ f.ü..}$$

$\bar{\gamma}$ ist aber nicht 0. Um dies zu sehen, betrachten wir $\bar{\gamma} = \{\beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \beta \sim \gamma\}$. Eine Folge β , die zu γ äquivalent ist, hat dieselben Folgenglieder wie γ , bis auf Ausnahmen in einer Menge des Filters $\mathcal{F}$.

Die Nullfolge besteht aus lauter Nullen, sie ist also nicht äquivalent zu γ und daher gilt $\bar{\gamma} \neq 0$ (vgl. [DL], I.).

Insgesamt bedeutet dies, dass unser $\bar{\gamma}$ infinitesimal, aber nicht 0 ist und somit haben wir gezeigt, dass ${}^*\mathbb{R}$ von 0 verschiedene infinitesimale Elemente enthält.

- (v) Ein weiteres Beispiel für eine Folge, deren Äquivalenzklasse ein infinitesimales Element in ${}^*\mathbb{R}$ bildet, ist

$$\delta = \left(\frac{1}{\sqrt{i}}\right)_{i \in \mathbb{N}}.$$

Bei den Folgen γ und δ aus Beispiel (iv) und (v) ist zu beachten, dass $\gamma(i) \neq \delta(i)$ gilt. Es konvergieren zwar beide Folgen gegen 0, allerdings mit unterschiedlicher Geschwindigkeit. Deshalb stellen sie auch unterschiedliche Infinitesimale dar.

Im folgenden Satz halten wir die Existenz von infiniten und infinitesimalen Elementen in ${}^*\mathbb{R}$ noch einmal fest, welche wir im vorangegangenen Beispiel bereits bewiesen haben. Zudem werden wir zeigen, dass ${}^*\mathbb{R}$ nicht ordnungsvollständig ist.

Satz 1.4.9.

- (i) ${}^*\mathbb{R}$ enthält von 0 verschiedene infinitesimale Elemente, und somit ist $\mathbb{R} \subsetneq {}^*\mathbb{R}$.
- (ii) ${}^*\mathbb{R}$ enthält infinite Elemente, das heißt ${}^*\mathbb{R}$ ist nicht archimedisch.
- (iii) ${}^*\mathbb{R}$ ist nicht ordnungsvollständig.

Beweis.

- (i) Diese Aussage folgt aus Beispiel 1.4.8 (iv).

- (ii) folgt aus Beispiel 1.4.8 (i).

- (iii) Zuletzt werden wir zeigen, dass ${}^*\mathbb{R}$ nicht ordnungsvollständig ist.

Wir betrachten dazu die Menge der Natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und das unendliche Element $\bar{\gamma} \in {}^*\mathbb{R}$ aus Beispiel 1.4.8 (i), $\gamma(i) = (i)_{i \in \mathbb{N}}$. Da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n \leq \bar{\gamma}$, ist $\bar{\gamma}$ eine obere Schranke von $\mathbb{N}$. Wir werden nun zeigen, dass $\mathbb{N}$ keine kleinste obere Schranke besitzt.

Ist $n \in \mathbb{N}$, dann folgt $n + 1 \in \mathbb{N}$. Sie nun $\bar{\gamma}$ eine beliebige obere Schranke von $\mathbb{N}$, so können wir auch $n + 1 \leq \bar{\gamma}$ schreiben. Nach Umformen erhalten wir daraus $n \leq \bar{\gamma} - 1$ und sehen, dass auch $\bar{\gamma} - 1$ eine obere Schranke von $\mathbb{N}$ ist. Es gibt also zu jeder oberen Schranke von $\mathbb{N}$ eine kleinere obere Schranke. Daher ist ${}^*\mathbb{R}$ nicht ordnungsvollständig.

□

Ein weiterer sehr wichtiger Begriff der Nichtstandard-Analyse, der bereits definiert wurde, ist „infinitesimal benachbart“. Infinitesimal benachbarte Elemente weisen interessante Eigenschaften auf, die wir im folgenden Satz näher betrachten werden.

Satz 1.4.10 (Eigenschaften von $\approx$).

Es ist $\approx$ eine Äquivalenzrelation über ${}^*\mathbb{R}$ und es gilt:

- (i) $\bar{\alpha} \approx \bar{\beta} \Leftrightarrow |\alpha(i) - \beta(i)| \leq \frac{1}{n}$ f.ü. für jedes $n \in \mathbb{N}$;
- (ii) $\bar{\alpha} \approx \bar{\beta} \Rightarrow -\bar{\alpha} \approx -\bar{\beta}$;
- (iii) $\bar{\alpha}_1 \approx \bar{\beta}_1, \bar{\alpha}_2 \approx \bar{\beta}_2 \Rightarrow \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 \approx \bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2$;
- (iv) $(\bar{\alpha}_1 \approx \bar{\beta}_1, \bar{\alpha}_2 \approx \bar{\beta}_2 \text{ und } \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2 \text{ endlich}) \Rightarrow \bar{\alpha}_1 \cdot \bar{\alpha}_2 \approx \bar{\beta}_1 \cdot \bar{\beta}_2$.

Beweis.

- (i) $\bar{\alpha} \approx \bar{\beta}$ gilt laut Definition 1.4.6 (iv) genau dann, wenn $|\bar{\alpha} - \bar{\beta}| \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies ist nach Satz 1.4.3 (iii) äquivalent zu $|\alpha(i) - \beta(i)| \leq \frac{1}{n}$ f.ü., für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist der erste Punkt bereits gezeigt.

Weiters zeigen wir mittels Punkt (i), dass $\approx$ eine Äquivalenzrelation über ${}^*\mathbb{R}$ ist.

- Die Relation $\approx$ ist reflexiv, denn es gilt $\bar{\alpha} \approx \bar{\alpha} \Leftrightarrow |\alpha(i) - \alpha(i)| = 0 \leq \frac{1}{n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.
- Wegen $|\alpha(i) - \beta(i)| = |\beta(i) - \alpha(i)|$ ist auch Symmetrie erfüllt.
- Bleibt uns noch Transitivität zu überprüfen. Wir setzen folgende Eigenschaften voraus:

$$\bar{\alpha} \approx \bar{\beta}, \text{ das heißt } \forall n \in \mathbb{N} \text{ gilt: } |\alpha(i) - \beta(i)| \leq \frac{1}{2n} \text{ f.ü.}$$

und

$$\bar{\beta} \approx \bar{\gamma}, \text{ das heißt } \forall n \in \mathbb{N} \text{ gilt: } |\beta(i) - \gamma(i)| \leq \frac{1}{2n} \text{ f.ü..}$$

Dann folgt

$$|\alpha(i) - \gamma(i)| \leq |\alpha(i) - \beta(i)| + |\beta(i) - \gamma(i)| \leq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} \text{ f.ü..}$$

Somit gilt $\bar{\alpha} \approx \bar{\gamma}$ und Transitivität ist gezeigt.

- (ii) Als nächstes beweisen wir Punkt (ii). Es gilt $\bar{\alpha} \approx \bar{\beta} \Leftrightarrow |\bar{\alpha} - \bar{\beta}| \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nach Definition 1.4.6 (iv).

Betrachten wir nun $-\bar{\alpha} \approx -\bar{\beta} \Leftrightarrow |-\bar{\alpha} - (-\bar{\beta})| = |-\bar{\alpha} + \bar{\beta}| \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so sehen wir, dass wegen $|\bar{\alpha} - \bar{\beta}| = |-\bar{\alpha} + \bar{\beta}|$ auch Aussage (ii) erfüllt ist.

- (iii) In (iii) setzen wir die folgenden Eigenschaften voraus:

$$\bar{\alpha}_1 \approx \bar{\beta}_1, \text{ das heißt } \forall n \in \mathbb{N} : |\alpha_1 - \beta_1| \leq \frac{1}{2n} \text{ f.ü.}$$

und

$$\overline{\alpha_2} \approx \overline{\beta_2}, \text{ das heißt } \forall n \in \mathbb{N} : |\alpha_2 - \beta_2| \leq \frac{1}{2n} \text{ f..}$$

Wegen $|\overline{\alpha_1} + \overline{\alpha_2} - \overline{\beta_1} - \overline{\beta_2}| \leq |\overline{\alpha_1} - \overline{\beta_1}| + |\overline{\alpha_2} - \overline{\beta_2}| \leq \frac{1}{n}$, für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt $\overline{\alpha_1} + \overline{\alpha_2} \approx \overline{\beta_1} + \overline{\beta_2}$ und somit ist Aussage (iii) gezeigt.

(iv) Zum Schluss beweisen wir nun Punkt (iv).

Voraussetzungen für die Gültigkeit der zu beweisenden Aussage sind $\overline{\alpha_1} \approx \overline{\beta_1}$, $\overline{\alpha_2} \approx \overline{\beta_2}$ und $\overline{\alpha_1}$, $\overline{\alpha_2}$ sind endlich.

Laut Annahme gelten die folgenden Aussagen:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{\alpha_1} \approx \overline{\beta_1}, \text{ das heißt } \forall m \in \mathbb{N} : |\alpha_1 - \beta_1| \leq \frac{1}{m} \text{ f..} \\ \text{und} \\ \overline{\alpha_2} \approx \overline{\beta_2}, \text{ das heißt } \forall m \in \mathbb{N} : |\alpha_2 - \beta_2| \leq \frac{1}{m} \text{ f..} \end{array} \right\} \star$$

Wir wollen zeigen, dass $\overline{\alpha_1} \cdot \overline{\alpha_2} \approx \overline{\beta_1} \cdot \overline{\beta_2}$ gilt.

Nach Definition 1.2.1 gilt

$$\overline{\alpha_1} \cdot \overline{\alpha_2} \approx \overline{\beta_1} \cdot \overline{\beta_2} \Leftrightarrow \overline{\alpha_1 \cdot \alpha_2} \approx \overline{\beta_1 \cdot \beta_2}$$

Dies ist laut Definition 1.4.6 (iii) und (iv) genau dann der Fall, wenn folgende Aussage a) erfüllt ist:

$$\text{a) } |\alpha_1(i)\alpha_2(i) - \beta_1(i)\beta_2(i)| \leq \frac{1}{n} \text{ f.. für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

Wir behaupten, dass aus der Endlichkeit von $\overline{\alpha_1}$ und $\overline{\alpha_2}$ folgt $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, sodass:

$$\text{b) } |\alpha_2(i)| \leq n_0 \text{ f.Å.; } |\beta_1(i)| \leq n_0 \text{ f...}$$

$\overline{\alpha_1}$ ist endlich, das heißt es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|\alpha_1(i)| \leq n_0$ f.. gilt. Wegen $\overline{\alpha_1} \approx \overline{\beta_1} \Leftrightarrow |\alpha_1(i) - \beta_1(i)| \leq \frac{1}{n}$ f.., für alle $n \in \mathbb{N}$, muss auch $|\beta_1(i)| \leq n_0$ f.. gelten und daher ist auch $\overline{\beta_1}$ endlich.

$\overline{\alpha_2}$ ist laut Voraussetzung ebenfalls endlich, daher gilt des weiteren $|\alpha_2(i)| \leq n_0$ f.. und somit ist Aussage b) gezeigt.

Weiters gilt gemäß $\star \forall n \in \mathbb{N}$:

$$\text{c) } |\alpha_v(i) - \beta_v(i)| \leq \frac{1}{2nn_0} \text{ f.. für } v = 1, 2. \text{ (Setze } m := 2nn_0 \text{ in } \star).$$

Wir können schreiben

$$|\alpha_1(i)\alpha_2(i) - \beta_1(i)\beta_2(i)| = |[\alpha_1(i) - \beta_1(i)] \cdot \alpha_2(i) + [\alpha_2(i) - \beta_2(i)] \cdot \beta_1(i)|.$$

Wegen der Dreiecksungleichung gilt daher

$$|\alpha_1(i)\alpha_2(i) - \beta_1(i)\beta_2(i)| \leq |\alpha_1(i) - \beta_1(i)| \cdot |\alpha_2(i)| + |\alpha_2(i) - \beta_2(i)| \cdot |\beta_1(i)|$$

und aufgrund von b) und c) folgt nun $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|\alpha_1(i)\alpha_2(i) - \beta_1(i)\beta_2(i)| \leq \frac{1}{2nn_0} \cdot n_0 + \frac{1}{2nn_0} \cdot n_0 = \frac{1}{n} \text{ f.ü..}$$

Somit ist Aussage a) gezeigt.

□

Finite Elemente aus ${}^*\mathbb{R}$ weisen zusätzlich die Eigenschaft auf, dass sie infinitesimal benachbart zu einer reellen Zahl liegen. Dies halten wir im folgenden Satz fest.

Satz 1.4.11.

Zu jedem finiten $\bar{\alpha} \in {}^\mathbb{R}$ existiert genau ein $r \in \mathbb{R}$, welches unendlich nahe bei $\bar{\alpha}$ liegt.*

Beweis.

$\bar{\alpha}$ ist genau dann endlich, wenn ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|\bar{\alpha}| \leq n_0$ existiert. Wir setzen nun

$$A := \{s \in \mathbb{R} : s \leq \bar{\alpha}\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Wegen $-n_0 \leq \bar{\alpha} \leq n_0$ gilt $-n_0 \in A$ und $s \leq n_0$, $\forall s \in A$. Daher ist A eine nichtleere und in $\mathbb{R}$ nach oben beschränkte Menge. Außerdem wissen wir, dass $\mathbb{R}$ ordnungsvollständig ist, das heißt es existiert eine kleinste obere Schranke $r \in \mathbb{R}$ von $A \subseteq \mathbb{R}$.

Wir zeigen zunächst

$$r - \frac{1}{n} \leq \bar{\alpha} \leq r + \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sei also $n \in \mathbb{N}$. r ist obere Schranke von A , daher liegt $r + \frac{1}{n}$ nicht mehr in A und es gilt $\bar{\alpha} \leq r + \frac{1}{n}$. Es ist $r - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke, daher gibt es ein $s \in A$, für das $s \geq r - \frac{1}{n}$ nicht gilt. Es folgt also $r - \frac{1}{n} \leq s \leq \bar{\alpha}$. Insgesamt ist obige Ungleichung somit gezeigt und nach Umformung sehen wir wegen $-\frac{1}{n} \leq \bar{\alpha} - r \leq \frac{1}{n}$, für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $\bar{\alpha}$ unendlich nahe bei r liegt.

Um die Eindeutigkeit von r zu zeigen, wählen wir $t \in \mathbb{R}$ mit $\bar{\alpha} \approx t$. Da $\approx$ eine

Der Erweiterungskörper ${}^*\mathbb{R}$ von $\mathbb{R}$

Äquivalenzrelation ist und wegen $\bar{\alpha} \approx r$, folgt nun $t \approx r$. Da t und r aber aus $\mathbb{R}$ sind, gilt $t = r$ und somit ist die Eindeutigkeit von r gezeigt. □

Beispiel 1.4.12.

Die Äquivalenzklasse der Folge $(\alpha(i))_{i \in \mathbb{N}} = (52 + a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, wobei $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, stellt ein Beispiel für ein finites Element in ${}^*\mathbb{R}$ dar, denn es gilt $|\alpha(i)| \leq 53$ fast überall. Daher gibt es nach obigem Satz genau ein $r \in \mathbb{R}$, den Standard-Teil von $(\alpha(i))_{i \in \mathbb{N}}$, welcher unendlich nahe bei $(\alpha(i))_{i \in \mathbb{N}}$ liegt. In diesem Fall ist $r = 52$, denn wegen $(\alpha(i))_{i \in \mathbb{N}} - 52 = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ gilt $|\alpha(i) - 52| \leq \frac{1}{n}$ fast überall, für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zusammenfassung der wichtigsten Eigenschaften von ${}^*\mathbb{R}$

$({}^*\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ ist ein angeordneter Körper mit $\mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{R}$. Es sind $+, \cdot, \leq$ in ${}^*\mathbb{R}$ Fortsetzungen der entsprechenden Operationen bzw. Relation auf $\mathbb{R}$.

${}^*\mathbb{R}$ enthält unendliche Elemente und von Null verschiedene infinitesimale Elemente. Endliche Elemente von ${}^*\mathbb{R}$ sind infinitesimal benachbart zu einer eindeutigen reellen Zahl.

2. Exkurs: Zwei Beweisprinzipien und Struktur der hyperreellen Zahlen

2.1. Transferprinzip

Mithilfe des Transferprinzips soll uns ermöglicht werden, gültige Sätze aus der klassischen Analysis in gültige Sätze der Nichtstandard-Analysis zu transferieren. Wenn diese Forderung gilt, so ist das Transferprinzip erfüllt, welches eines der wichtigsten Prinzipien der Nichtstandard-Theorie darstellt.

Im ersten Kapitel haben wir bereits eine Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ konstruiert und gezeigt, dass sich spezielle Operationen in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ wie zum Beispiel $+$, $\cdot$, $\leq$, $\dots$, auch auf ${}^*\mathbb{R}$ fortsetzen lassen.

Es lässt sich aber auch eine allgemeine Nichtstandard-Theorie formulieren, in der jedem Objekt einer Standard-Welt, ein Objekt der Nichtstandard-Welt zugeordnet wird. So kann die Nichtstandard-Theorie für alle Bereiche der Mathematik zugänglich gemacht werden. (vgl. [LR], §7)

Nachdem wir im ersten Kapitel unsere Beweise über Indexmengen und Filter geführt haben, werden wir uns im folgenden Kapitel auf ein eingeschränktes Transferprinzip beziehen, um die Beweise einfacher gestalten zu können. (vgl. [LR], Kapitel §2, und [SR], Kapitel 5)

Eingeschränktes Transferprinzip

Sei φ eine Aussage, in der reelle Zahlen, die Menge $\mathbb{R}$, die Funktionen $f_1, \dots, f_m$, die Operationen $+$, $-$, $\cdot$, $\leq$, $|\cdot|$, sowie die Junktoren $=$, $\in$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ und die Quantoren $\forall x$, $\exists x$ vorkommen, wobei x eine Variable ist.

Es gilt: Die Aussage φ ist genau dann gültig, wenn die Aussage ${}^*\varphi$ gültig ist.

${}^*\varphi$ entsteht dabei aus φ , indem $f_1, \dots, f_m$ durch ${}^*f_1, \dots, {}^*f_m$ und $\mathbb{R}$ durch ${}^*\mathbb{R}$ ersetzt werden.

2.2. Permanenzprinzip

Neben dem Transferprinzip werden wir im nächsten Kapitel auch das Permanenzprinzip anwenden. Für Beweise werden wir uns wieder auf [LR] und für einfache Formulierungen auf Kapitel 5 in [SR] beziehen. Zunächst wiederholen wir wichtige Begriffe.

Interne und externe Mengen

Es sei ${}^*\mathbb{R}$ der Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$. Die Menge $B \subseteq {}^*\mathbb{R}$ heißt intern, falls es eine Folge von Teilmengen $A_n \subseteq \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $B = \{\bar{\alpha} \in {}^*\mathbb{R} : \{\alpha(n) \in A_n\} \in \mathcal{F}\}$ gilt.

Teilmengen von ${}^*\mathbb{R}$, die nicht intern sind, werden extern genannt.

Die Nichtstandard-Variante einer Teilmenge A von $\mathbb{R}$ ist definiert als

$${}^*A := \{\bar{\alpha} \in {}^*\mathbb{R} : \{\alpha(n) \in A\} \in \mathcal{F}\}.$$

Permanenzprinzip für interne Formeln

Sei $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ die Menge der positiven reellen Zahlen, ${}^*\varphi$ eine Aussage, die wie im Transferprinzip aus einer entsprechenden Aussage φ entsteht. Es gilt:

- (i) Gilt ${}^*\varphi(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gibt es ein $h \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, sodass ${}^*\varphi(n)$ für alle $n \in {}^*\mathbb{N}$ mit $n \leq h$ gilt. (Overflow)
- (ii) Gilt ${}^*\varphi(h)$ für alle $h \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, sodass ${}^*\varphi(n)$ für alle $n \in {}^*\mathbb{N}$ mit $n \geq m$ gilt. (Underflow)
- (iii) Gilt ${}^*\varphi(\epsilon)$ für alle $\epsilon \approx 0$, dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}_+$, sodass ${}^*\varphi(b)$ für alle $b \in {}^*\mathbb{R}$ mit $|b| \leq c$ gilt.

Spezieller formuliert: Sei $A \subseteq {}^*\mathbb{R}$ eine interne Menge, so gilt:

- (i) nach dem Overflow-Prinzip: Wenn A beliebig große endliche Elemente enthält, dann enthält A unendliche Elemente.
- (ii) nach dem Underflow-Prinzip: Wenn A beliebig kleine positive unendliche Elemente enthält, dann enthält A endliche Elemente.

2.3. Die hyperreellen Zahlen

Zum Abschluss dieses Kapitels führen wir zwei neue Bezeichnungen und ein paar interessante Eigenschaften von finiten Elementen an.

Definition 2.3.1 ($\text{fin}({}^*\mathbb{R})$).

Seien $x, y \in {}^*\mathbb{R}$. Mit $\text{fin}({}^*\mathbb{R})$ bezeichnen wir die Menge der finiten Elemente von ${}^*\mathbb{R}$:

$$\text{fin}({}^*\mathbb{R}) := \{x \in {}^*\mathbb{R} : x \text{ ist finit}\}.$$

Bemerkung 2.3.2.

Gleich im Anschluss wollen wir einige Eigenschaften von $\text{fin}({}^*\mathbb{R})$ anführen. Seien dazu $x, y \in {}^*\mathbb{R}$, dann gilt:

- $x, y \text{ finit} \Rightarrow x \pm y, x \cdot y \text{ finit}$;
- $x \text{ finit und } x \approx y \Rightarrow y \text{ finit}$;
- $x \text{ nicht infinitesimal} \Rightarrow \frac{1}{x} \text{ finit}$.

Der Beweis der obigen Aussagen ist nun mittels Transferprinzip sehr kurz durchführbar.

Definition 2.3.3 (Monaden).

Für $r \in \mathbb{R}$ setze $m(r) := \{y \in {}^*\mathbb{R} : y \approx r\}$; es heißt $m(r)$ die **Monade** des Punktes r .

In anderen Worten: Die Monade von r enthält alle Punkte von ${}^*\mathbb{R}$, für die gilt, dass sie infinitesimal benachbart zu r sind.

Mit Hilfe der Monaden ist es nun einfacher, sich die hyperreellen Zahlen auch bildlich vorzustellen.

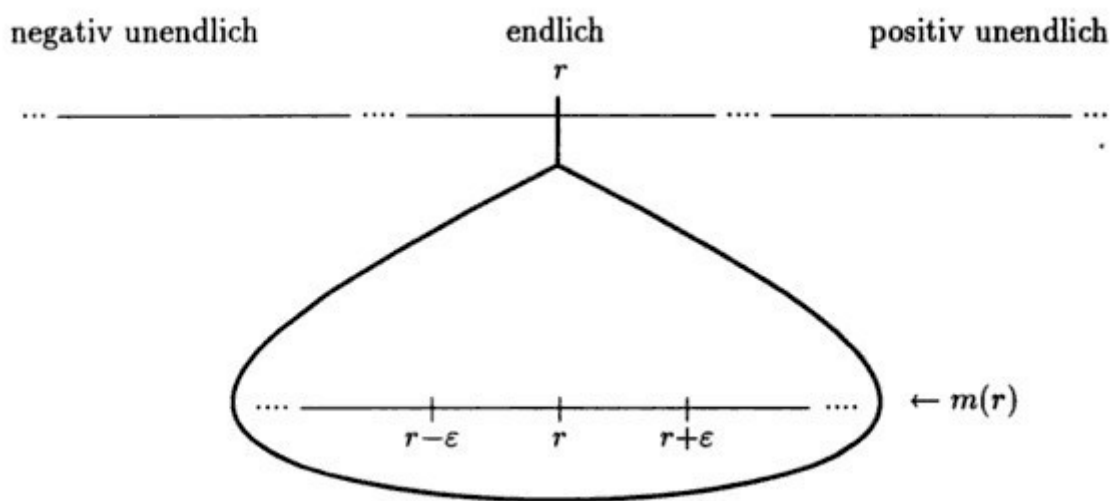
Zu jeder reellen Zahl r gehört deren Monade $m(r)$, die alle unendlich benachbarten Elemente von r enthält. Jede Monade enthält unendlich viele Elemente, wobei außerdem für zwei reelle Zahlen r_1 und r_2 mit $r_1 < r_2$ gilt, dass auch $m(r_1) < m(r_2)$ ist.

Alle infinitesimalen Elemente von ${}^*\mathbb{R}$ liegen in der Monade von 0.

${}^*\mathbb{R}$ enthält zusätzlich noch infinite, also unendlich große Elemente. Hier können, je nachdem ob der Wert des jeweiligen Elements > 0 oder < 0 ist, positiv unendliche und negativ unendliche Elemente unterschieden werden.

In Anlehnung an die Darstellung von $\mathbb{R}$ als Zahlenstrahl, können auch die Elemente von ${}^*\mathbb{R}$ graphisch dargestellt werden.

Abbildung 1: Geometrische Darstellung von ${}^*\mathbb{R}$. (vgl. [LR], §3)



3. Nichtstandard-Analysis reellwertiger Folgen

In diesem Kapitel werden wir uns mit Eigenschaften von Folgen beschäftigen, die wir bereits aus der klassischen Analysis kennen. Wir werden untersuchen, ob diese Eigenschaften auch in ${}^*\mathbb{R}$ erfüllt sind, bzw. wo die Unterschiede zur klassischen Analysis liegen. Wir beziehen uns dabei auf [LR], [OF], [TL] und [RB].

3.1. Grundlagen

Im Gegensatz zu Kapitel 1, wo wir mit Folgen als Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$ gearbeitet haben, definieren wir in diesem Abschnitt Abbildungen ${}^*\alpha$ von ${}^*\mathbb{N}$ nach ${}^*\mathbb{R}$ folgendermaßen:

Definition 3.1.1.

Sei $h \in {}^*\mathbb{N}$ und $\beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $h = \overline{\beta}$. Wir setzen ${}^*\alpha(h) := \overline{\gamma}$, wobei $\gamma \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ wie folgt definiert ist: mit $B := \{n \in \mathbb{N} : \beta(n) \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{F}$ ist

$$\gamma(n) := \begin{cases} \alpha(\beta(n)), & n \in B \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}.$$

Bemerkung 3.1.2.

Statt ${}^*\alpha(n)$ schreiben wir für $n \in {}^*\mathbb{N}$ auch $({}^*a_n)$. Die hyperreelle Folge $({}^*a_n)_{n \in {}^*\mathbb{N}}$ ist nach dem Transferprinzip formal so aufgebaut wie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Satz 3.1.3.

Es gilt ${}^*\alpha(m) = \alpha(m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

Beweis.

Für $m \in \mathbb{N}$ ist $m = \overline{m_{\mathbb{N}}}$ und in obiger Konstruktion gilt $B = \{n \in \mathbb{N} : m_{\mathbb{N}}(n) \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$, weil $m_{\mathbb{N}}(n) = m$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Daher gilt nun $\gamma(n) = \alpha(m_{\mathbb{N}}(n)) = \alpha(m)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, das heißt ${}^*\alpha(m) = \overline{\alpha \circ m_{\mathbb{N}}} = \alpha(m)$. □

3.2. Grenzwerte und Häufungswerte

Nachdem wir nun wichtige Begriffe der Nichtstandard-Analysis eingeführt und besondere Eigenschaften bewiesen haben, werden wir uns mit den Unterschieden zwischen der Standard-Analysis und der Nichtstandard-Analysis auseinandersetzen. Im ersten Satz werden wir Nichtstandard-Kriterien für Grenzwerte und Häufungswerte von reellwertigen Folgen einführen und überprüfen.

Satz 3.2.1.

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, eine Folge reeller Zahlen und $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- (i) a ist Grenzwert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow {}^*a_h \approx a$ für alle $h \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$,
- (ii) a ist Häufungswert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow {}^*a_h \approx a$ für ein $h \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

Bemerkung 3.2.2.

Anders formuliert ist a genau dann Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, falls *a_n für alle unendlich großen n unendlich nahe bei a liegt.

Im Gegensatz zur Definition des Grenzwertes in der klassischen Analysis ist diese Beschreibung viel anschaulicher. Zur Wiederholung und zum direkten Vergleich führen wir an dieser Stelle die Definition des Grenzwertes in der klassischen Analysis an:

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen den Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq N$.

Ebenso ist die Beschreibung des Häufungswertes von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in der Nichtstandard-Analysis viel anschaulicher, als in der klassischen Analysis, wo der Häufungswert folgendermaßen definiert ist:

a ist Häufungswert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt, die gegen a konvergiert.

Alternativ zu dieser Definition gilt, dass a genau dann Häufungswert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist,

wenn es zu jeder ϵ -Umgebung von a unendlich viele Indizes $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $a_n \in U_\epsilon(a)$. Mit anderen Worten:

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+, \forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq m \text{ sodass gilt: } |a_n - a| \leq \epsilon.$$

Nun kommen wir zum Beweis von Satz 3.2.1.

Beweis.

(i) $\Rightarrow$: Zuerst werden wir in Punkt (i) die Implikationsrichtung von links nach rechts beweisen.

Voraussetzung ist, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reellwertige Folge ist, die gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, das heißt es gilt für ein beliebiges $\epsilon \in \mathbb{R}_+ : \exists N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |a_n - a| \leq \epsilon.$$

Nach Anwendung des Transferprinzips erhalten wir:

$$\forall n \in {}^*\mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |{}^*a_n - a| \leq \epsilon.$$

Es sei nun $h \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Dann gilt $h \geq n \forall n \in \mathbb{N}$ und daher $|{}^*a_h - a| \leq \epsilon$. Da $\epsilon > 0$ beliebig war heißt das, dass *a_h infinitesimal benachbart zu a ist.

$\Leftarrow$: Nun beweisen wir in Punkt (i) die Implikationsrichtung von rechts nach links. Sei wieder $\epsilon \in \mathbb{R}_+$. Es gilt die Aussage

$${}^*\varphi(n) \equiv |{}^*a_n - a| \leq \epsilon$$

für jedes $n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, weil dann ${}^*a_n \approx a$ laut Voraussetzung. Wendet man nun das Permanenzprinzip an, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass ${}^*\varphi(n)$ für alle $n \in {}^*\mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt. Wegen $({}^*a_n) = (a_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|a_n - a| \leq \epsilon$, wenn $n \geq n_0$ ist. Das bedeutet nach der klassischen Analysis, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a konvergiert.

(ii) $\Rightarrow$: Als nächstes beweisen wir in Aussage (ii) die Implikationsrichtung von links nach rechts.

Da a Häufungswert von (a_n) , $n \in \mathbb{N}$ ist, gilt:

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+, \forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq m \text{ sodass gilt: } |a_n - a| \leq \epsilon.$$

Nach Anwendung des Transferprinzips erhalten wir daraus die Aussage ${}^*\varphi$:

$$\forall \epsilon \in {}^*\mathbb{R}_+, \forall m \in {}^*\mathbb{N}, \exists n \in {}^*\mathbb{N}, n \geq m \text{ sodass gilt: } |{}^*a_n - a| \leq \epsilon.$$

Wir wählen nun $\epsilon \in {}^*\mathbb{R}_+$ infinitesimal und $m \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Wegen der Gültigkeit von ${}^*\varphi$ gibt es ein $h \in {}^*\mathbb{N}$ mit $h \geq m$ und $|{}^*a_h - a| \leq \epsilon$. Somit ist $h \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ und wegen $\epsilon \in {}^*\mathbb{R}_+$ infinitesimal, gilt weiters ${}^*a_h \approx a$.

$\Leftarrow$: Letztlich bleibt uns noch die Rückrichtung von (ii) zu zeigen.

Es sei ${}^*a_h \approx a$ für ein $h \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Weiters seien $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ und $m \in \mathbb{N}$, dann ist $h \geq m$ und es gilt somit

$$\exists n \in {}^*\mathbb{N}, n \geq m \text{ sodass } |{}^*a_n - a| \leq \epsilon,$$

weil wir zum Beispiel $n = h$ setzen können. Wenden wir das Transferprinzip an, so erhalten wir:

$$\exists n \in \mathbb{N}, n \geq m \text{ sodass } |a_n - a| \leq \epsilon.$$

Insgesamt gilt, dass es zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ und $m \in \mathbb{N}$ ein $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$ gibt, mit $|a_n - a| \leq \epsilon$, also ist a Häufungswert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

□

Beispiel 3.2.3.

(i) Die Folge $\frac{1}{n}$ konvergiert gegen 0, weil $\frac{1}{h} \approx 0$ gilt, für alle $h \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

(ii) Betrachten wir nun die Folge $(\frac{2n-1}{4-n})_{n \in \mathbb{N}}$. Ist diese Folge beschränkt und bzw. oder konvergent? Für $h \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{2h-1}{4-h} = \frac{\frac{2h}{h} - \frac{1}{h}}{\frac{4}{h} - \frac{h}{h}} = \frac{2 - \frac{1}{h}}{\frac{4}{h} - 1} \approx -2.$$

Wir sehen somit, dass die Folge gegen -2 konvergiert und daher beschränkt ist. (vgl. [HK])

(iii) Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} := ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Da jedes $n \in \mathbb{N}$ entweder gerade oder ungerade ist, können wir die Grenzwerte der Teilfolgen mit geraden bzw. ungeraden Indizes bestimmen und erhalten dabei: $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = 1$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = -1$. Das heißt, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Häufungswerte -1 und 1 hat.

Nun wollen wir aber die Häufungswerte mittels *a_h , $h \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ berechnen. Es stellt sich die Frage, ob auch jedes Element aus ${}^*\mathbb{N}$ entweder gerade oder ungerade ist (und auch nicht beides).

Um dies zu überprüfen, wenden wir auf die folgende Aussage das Transferprinzip an:

$$\forall n \in \mathbb{N} : ((\exists x \in \mathbb{N} : n = 2x) \Leftrightarrow \neg(\exists x \in \mathbb{N} : n = 2x - 1)).$$

Wir erhalten:

$$\forall n \in {}^*\mathbb{N} : ((\exists x \in {}^*\mathbb{N} : n = 2x) \Leftrightarrow \neg(\exists x \in {}^*\mathbb{N} : n = 2x - 1)).$$

Für $h \in {}^*\mathbb{N}$ gibt es ein $\beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $h = \bar{\beta}$. Es gilt, dass entweder die Menge $B = \{n \in \mathbb{N} : \beta(n) \text{ gerade}\}$ oder deren Komplement im Filter $\mathcal{F}$ liegt.

Ersteres ist genau dann der Fall, wenn gilt $\beta(n) = 2 \cdot \delta(n)$ f.ü., mit $\delta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Der zweite Fall ist äquivalent zu $\beta(n) = 2 \cdot \delta(n) - 1$ f.ü. mit $\delta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Daraus folgt also, dass jedes Element aus ${}^*\mathbb{N}$ entweder gerade oder ungerade ist (und auch nicht beides).

Sei $h \in {}^*\mathbb{N}$ und $\beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $h = \bar{\beta}$, $B := \{n \in \mathbb{N} : \beta(n) \text{ gerade}\}$. Wir unterscheiden die beiden Fälle:

$$\text{1. Fall: } h \text{ gerade} \Rightarrow B \in \mathcal{F} \Rightarrow {}^*a_h = \bar{\gamma} \text{ mit } \gamma(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \in B \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\text{2. Fall: } h \text{ ungerade} \Rightarrow \mathbb{N} \setminus B \in \mathcal{F} \Rightarrow {}^*a_h = \bar{\gamma} \text{ mit } \gamma(n) = \begin{cases} -1, & \text{falls } n \in \mathbb{N} \setminus B \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt daher:

- (i) ${}^*a_h = 1$ für alle $h \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, h gerade;
- (ii) ${}^*a_h = -1$ für alle $h \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, h ungerade.

Somit hat (a_n) die Häufungswerte $+1$ und -1 . (vgl. [MV]), §5 und §7)

Nun werden wir zeigen, wie die üblichen Rechenregeln für konvergente Folgen in ${}^*\mathbb{R}$ bewiesen werden können.

Satz 3.2.4.

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, zwei Folgen reeller Zahlen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- (i) $(a_n \pm b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$;
- (ii) $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$;
- (iii) Falls $b \neq 0$, konvergiert $(\frac{a_n}{b_n})_{n \in \mathbb{N}}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Beweis.

Laut Voraussetzung ist a Grenzwert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und b Grenzwert von $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Wegen Satz 3.2.1 (i) gilt ${}^*a_h \approx a$, ${}^*b_h \approx b$ für alle $h \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ und wegen $|{}^*a_h - a| \leq \epsilon$ und $|{}^*b_h - b| \leq \epsilon$ für beliebiges $\epsilon > 0$ sind *a_h und *b_h finit. Daher folgt ${}^*a_h \pm {}^*b_h \approx a \pm b$ und ${}^*a_h \cdot {}^*b_h \approx a \cdot b$ für alle $h \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Diese Eigenschaft von $\approx$ wurde bereits in Abschnitt 2.3 erwähnt. Falls $b \neq 0$, gilt außerdem $\frac{{}^*a_h}{{}^*b_h} = \frac{a}{b}$.

Sei nun allgemein $\diamond \in \{+, \cdot, -, :\}$ und $a \diamond b$ bezeichne die Folge, die wir nach Durchführung einer der genannten Operationen erhalten. Nach dem Transferprinzip gilt dann

$${}^*(a \diamond b)(n) = {}^*a_n \diamond {}^*b_n \text{ für } n \in {}^*\mathbb{N} \text{ und } \diamond \in \{+, \cdot, -, :\}.$$

Insbesondere gilt also für alle $h \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$:

$${}^*(a \diamond b)(h) \approx a \diamond b.$$

Wenden wir nun Satz 3.2.1 (i) an, so sind die Aussagen (i), (ii) und (iii) gezeigt. $\square$

Da Folgen auch einen uneigentlichen Grenzwert haben können und wir auf ${}^*\mathbb{R}$ auch mit infiniten und infinitesimalen Elementen rechnen können, sind die Nichtstandard-Kriterien für bestimmte Divergenz von Folgen besonders interessant.

Satz 3.2.5.

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, eine Folge reeller Zahlen. Dann gilt:

- (i) $+\infty$ ist uneigentlicher Grenzwert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow$
 a_h ist positiv unendlich für alle $h \in {}^\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$;
- (ii) $-\infty$ ist uneigentlicher Grenzwert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow$
 a_h ist negativ unendlich für alle $h \in {}^\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$;
- (iii) $+\infty$ ist Häufungswert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow$
 a_h ist positiv unendlich für ein $h \in {}^\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$;
- (iv) $-\infty$ ist Häufungswert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow$
 a_h ist negativ unendlich für ein $h \in {}^\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

Beweis.

- (i) " $\Rightarrow$ ": Sei $r \in \mathbb{R}$. Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist uneigentlich konvergent bzw. bestimmt divergent gegen $+\infty$, daher gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow a_n \geq r.$$

Nach Anwendung des Transferprinzips erhalten wir die Aussage

$$\forall n \in {}^*\mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow {}^*a_n \geq r.$$

Daraus folgt, dass für alle $h \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ die Zahl *a_h positiv unendlich ist, da $r \in \mathbb{R}$ beliebig war.

” $\Leftarrow$ ”: Nun zeigen wir die Rückrichtung von Punkt (i). Sei wieder $r \in \mathbb{R}$. Wir setzen voraus, dass $({}^*a_n)$ für alle $n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ positiv unendlich ist. Daher gilt die Aussage:

$${}^*\varphi(n) \equiv {}^*a_n \geq r$$

für jedes $n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Laut Permanenzprinzip gibt es nun ein $m \in \mathbb{N}$, sodass ${}^*a_n \geq r$, für jedes $n \in {}^*\mathbb{N}$ mit $n \geq m$ gilt. Wenden wir auf diese Aussage das Transferprinzip an, so erhalten wir $a_n \geq r$, für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$. Somit ist gezeigt, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist.

(ii) Der Beweis von Aussage (ii) lässt sich auf Fall (i) zurückführen, weil $-a_h \rightarrow +\infty$ gilt, für $h \rightarrow \infty$.

(iii) ” $\Rightarrow$ ”: Wir setzen voraus, dass $+\infty$ Häufungswert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist, das heißt es gilt die folgende Aussage:

$$\forall r \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq m : a_n \geq r.$$

Nach Anwendung des Transferprinzips erhalten wir:

$$\forall r \in {}^*\mathbb{R}, \forall m \in {}^*\mathbb{N}, \exists n \in {}^*\mathbb{N}, n \geq m : {}^*a_n \geq r.$$

Wir wählen nun ein positiv unendliches $r \in {}^*\mathbb{R}$ und $m \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Nach der obigen Aussage existiert also ein $h \in {}^*\mathbb{N}$, mit $h \geq m$ und ${}^*a_h \geq r$. Daraus folgt, dass *a_h positiv unendlich ist. Wegen $h \geq m$ und $m \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ ist außerdem $h \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ und somit ist gezeigt, dass die Implikation in (iii) von links nach rechts erfüllt ist.

” $\Leftarrow$ ”: Beim Beweis der Rückrichtung setzen wir voraus, dass *a_h positiv unendlich ist, für ein $h \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

Es seien nun $r \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt wegen $h \geq m$ sicherlich

$$\exists n \in {}^*\mathbb{N}, n \geq m : {}^*a_n \geq r.$$

Nach Anwendung des Transferprinzips erhalten wir:

$$\exists n \in \mathbb{N}, n \geq m : a_n \geq r.$$

Da $r \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{N}$ beliebig waren, ist $+\infty$ ein Häufungswert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(iv) Fall (iv) kann mittels Betrachtung von $(-a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf Fall (iii) zurückgeführt werden.

□

Ebenso interessant ist das folgende Nichtstandard-Kriterium für eigentliche und uneigentliche Häufungswerte von Folgen.

Korollar 3.2.6.

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Dann ist

$$\{st({}^*a_h) : h \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}\}$$

die Menge aller eigentlichen und uneigentlichen Häufungswerte der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dabei wird $st(x) := +\infty$ bzw. $-\infty$ gesetzt, falls x positiv unendlich bzw. negativ unendlich ist.

Beweis.

Wir müssen also die folgende Äquivalenz zeigen:

$$a \text{ ist Häufungswert von } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow st({}^*a_h) = a \text{ für ein } h \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}.$$

Falls $a \in \mathbb{R}$ ist, so folgt obige Aussage aus dem Satz 3.2.1 (ii). Wenn $a = +\infty$ oder $-\infty$ ist, so ist die Aussage wegen Satz 3.2.5 (iii) und (iv) erfüllt.

□

3.3. Beschränktheit und der Satz von Bolzano-Weierstraß

Nachdem wir uns nun mit Grenzwerten und Häufungswerten von Folgen auseinandergesetzt haben, werden wir in diesem Abschnitt zuerst Beschränktheit von Folgen in der Nichtstandard-Analysis erklären und im Anschluss daran den Satz von Bolzano-Weierstraß, sowie auch Cauchy-Folgen unter der Nichtstandard-Perspektive betrachten.

Satz 3.3.1.

*Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, reeller Zahlen ist genau dann beschränkt, wenn *a_h für alle $h \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ finit ist.*

Beweis.

- (i) Wir setzen voraus, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist, das heißt es existiert ein $c \in \mathbb{R}$, sodass gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq c.$$

Nach Anwendung des Transferprinzips erhalten wir

$$\forall n \in {}^*\mathbb{N} : |{}^*a_n| \leq c,$$

das heißt laut Definition, dass $({}^*a_n)$ für alle $n \in {}^*\mathbb{N}$ finit ist. Insbesondere ist daher *a_h finit, für alle $h \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

- (ii) Setzen wir nun umgekehrt voraus, dass *a_h für alle $h \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ finit ist, das heißt

$${}^*\varphi(k) \equiv \forall n \in {}^*\mathbb{N} : |{}^*a_n| \leq k$$

gilt für alle $k \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

Nach dem Permanenzprinzip gibt es daher ein $m \in \mathbb{N}$, sodass ${}^*\varphi(k)$ für alle $k \in {}^*\mathbb{N}$ mit $k \geq m$ gilt. Die Aussage

$$\forall k \in {}^*\mathbb{N}, k \geq m : \forall n \in {}^*\mathbb{N} : |{}^*a_n| \leq k$$

ist also erfüllt. Wenden wir das Transferprinzip an, so erhalten wir:

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq m : \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq k,$$

daher gilt [setze $k = m$]: $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq m$.

□

Beispiel 3.3.2.

Betrachten wir die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\frac{(n+1)^2}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ (vgl. [HK]). Ist diese Folge beschränkt? Für $h \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ ist

$${}^*a_h = \frac{(h+1)^2}{h} = \frac{h^2 + 2h + 1}{h} = h + 2 + \frac{1}{h}.$$

*a_h besteht also aus einem infiniten und einem finiten Teil. Daher ist $(\frac{(n+1)^2}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ nach Satz 3.3.1 nicht beschränkt.

Da es außerdem kein $a \in \mathbb{R}$ mit ${}^*a_h \approx a$ für ein $h \in {}^*\mathbb{N}$ gibt, hat die Folge auch keinen Häufungswert in $\mathbb{R}$.

Mithilfe des Satzes 3.3.1 können wir nun auch einen besonders einfachen Beweis des Satzes von Bolzano-Weierstraß geben.

Satz 3.3.3 (Satz von Bolzano-Weierstraß).

Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt einen Häufungswert.

Beweis.

Wir setzen voraus, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist. Dann gilt nach Satz 3.3.1, dass *a_h für alle $h \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ finit ist. Daher existiert ein $a \in \mathbb{R}$ mit ${}^*a_h \approx st({}^*a_h) =: a$. Wegen Satz 3.2.1 (ii) ist a daher Häufungswert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. □

Zuletzt werden wir den Unterschied zwischen der Definition von Cauchy-Folgen in der klassischen Analysis und in der Nichtstandard-Analysis näher betrachten und um diesen besser zu erkennen, werden wir zunächst die klassische Definition wiederholen. (vgl. [OF], §5):

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt Cauchy-Folge, wenn gilt:

Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a_m| < \epsilon \text{ für alle } n, m \geq N.$$

In der Nichtstandard-Analysis spricht man von einer Cauchy-Folge, wenn unendlich große Folgenglieder unendlich nahe beieinander liegen. Formal lauten die Kriterien für Cauchy-Konvergenz in der Nichtstandard-Analysis wie folgt:

Satz 3.3.4.

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, eine Folge reeller Zahlen. Dann gilt:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist eine Cauchy-Folge} \Leftrightarrow {}^*a_h \approx {}^*a_k \text{ für alle } h, k \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}.$$

Beweis.

" $\Rightarrow$:" Sei $\epsilon \in \mathbb{R}_+$. Wir setzen voraus, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Nach der klassischen Definition existiert dann ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass gilt:

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| \leq \epsilon.$$

Nach Anwendung des Transferprinzips erhalten wir

$$\forall m, n \in {}^*\mathbb{N}, m, n \geq n_0 \Rightarrow |{}^*a_n - {}^*a_m| \leq \epsilon.$$

Nach dem Permanenzprinzip gilt daher $|{}^*a_h - {}^*a_k| \leq \epsilon$ für alle $h, k \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ und für alle $\epsilon \in \mathbb{R}_+$. Somit ist ${}^*a_h \approx {}^*a_k$ gezeigt.

" $\Leftarrow$:" Jetzt gehen wir von der Gültigkeit ${}^*a_h \approx {}^*a_k$ für alle $h, k \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ aus. Sei wieder $\epsilon \in \mathbb{R}_+$, dann gilt $|{}^*a_h - {}^*a_k| \leq \epsilon$ für alle $h, k \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

Für alle $k \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ ist dann auch die folgende Aussage erfüllt:

$${}^*\varphi(k) \equiv \forall m, n \in {}^*\mathbb{N}, m, n \geq k \Rightarrow |{}^*a_n - {}^*a_m| \leq \epsilon.$$

Nach dem Permanenzprinzip gibt es daher ein $h \in \mathbb{N}$, sodass ${}^*\varphi(h)$ für alle $m, n \in {}^*\mathbb{N}$ mit $m, n \geq h$ gilt. In anderen Worten:

$$\exists h \in \mathbb{N} : \forall m, n \in {}^*\mathbb{N}, m, n \geq h \Rightarrow |{}^*a_n - {}^*a_m| \leq \epsilon.$$

Nach Anwendung des Transferprinzips erhalten wir:

$$\exists h \in \mathbb{N} : \forall m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq h \Rightarrow |a_n - a_m| \leq \epsilon.$$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist also eine Cauchy-Folge. □

Korollar 3.3.5.

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, eine Folge reeller Zahlen. Dann gilt:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist eine Cauchy-Folge} \Leftrightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist konvergent.}$$

Beweis.

" $\Rightarrow$:" Sei $\epsilon \in \mathbb{R}_+$. Wir setzen voraus, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, das heißt es existiert ein $N_\epsilon \in \mathbb{N}$, so dass gilt:

$$\forall k, l \in \mathbb{N}, k, l \geq N_\epsilon \Rightarrow |a_k - a_l| < \epsilon.$$

Insbesondere gibt es für $\epsilon = 1 > 0$ ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass gilt

$$|a_k - a_l| < 1 \quad \forall k, l \geq N_1.$$

Sei nun $l = N_1$, dann gilt $|a_k - a_{N_1}| < 1$ für alle $k \geq N_1$ und daraus folgt

$$|a_k| \leq |a_{N_1}| + |a_k - a_{N_1}| < |a_{N_1}| + 1, \quad \forall k \geq N_1.$$

Wir bezeichnen nun mit M das Maximum der endlich vielen Elemente

$|a_1|, \dots, |a_{N_1}|, |a_{N_1}| + 1$. Dann folgt insgesamt $|a_k| \leq M, \forall k \in \mathbb{N}$, das heißt die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt.

Sei $k \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, dann gilt nach Satz 3.3.1, dass *a_k finit ist. Somit gibt es ein $a := st({}^*a_k) \in \mathbb{R}$ mit ${}^*a_k \approx a$ und wegen (i) gilt weiters ${}^*a_h \approx {}^*a_k \approx a$ für alle $h \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Nach Satz 3.2.1 folgt letztlich, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a konvergiert.

" $\Leftarrow$:" Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist laut Voraussetzung konvergent. Wir bezeichnen mit a den Grenzwert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Nach Satz 3.2.1 gilt dann für alle $h \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ ${}^*a_h \approx a$. Daraus folgt ${}^*a_h \approx {}^*a_k$ für alle $h, k \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ und dies ist laut (i) äquivalent zur Eigenschaft, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

□

Zum Schluss wollen wir uns mit Nichtstandard-Kriterien für das Konvergenzverhalten von Reihen auseinandersetzen.

Sei wieder $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $s_n := \sum_{i=1}^n a_i$ die Partialsumme für $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Partialsummen heißt unendliche Reihe und wird mit $\sum_{n=1}^\infty a_n$ bezeichnet.

Weiters gilt, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann konvergiert bzw. gegen a konvergiert, wenn $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert bzw. gegen a konvergiert. (vgl. [OF], §4)

Seien $({}^*s_n)_{n \in {}^*\mathbb{N}}$ und $({}^*a_n)_{n \in {}^*\mathbb{N}}$ wie in Definition 3.1.1. Wir setzen $\sum_{i=1}^n {}^*a_i := {}^*s_n$ für $n \in {}^*\mathbb{N}$.

Satz 3.3.6.

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert gegen $a \Leftrightarrow \sum_{i=1}^h {}^*a_i \approx a$ für alle $h \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$;
- (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^h {}^*a_i \approx \sum_{i=1}^k {}^*a_i$ für alle $h, k \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

Beweis.

- (i) Es gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann gegen a , wenn $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a konvergiert. Dies ist laut Satz 3.2.1 äquivalent zu ${}^*s_h \approx a, \forall h \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Daher gilt $\sum_{i=1}^h {}^*a_i = {}^*s_h \approx a$ für alle $h \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ und Aussage (i) ist damit gezeigt.
- (ii) Die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist genau dann konvergent, wenn $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent ist und nach Korollar 3.3.5 ist $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ daher eine Cauchy-Folge. Wegen ${}^*s_n = \sum_{i=1}^n {}^*a_i$ und Satz 3.3.4 gilt daher $\sum_{i=1}^h {}^*a_i \approx \sum_{i=1}^k {}^*a_i, \forall h, k \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

□

A. Filter und Ultrafilter

Der folgende Abschnitt ist an [LR] angelehnt und wurde gemeinsam mit Ruth Silberbauer (vgl. [SR]) verfasst. Er beinhaltet grundlegende Definitionen und Sätze der Nichtstandard-Analysis, die für diese Arbeit von Bedeutung sind.

Definition A.0.7 (Filter).

Es sei I eine fest vorgegebene nicht-leere Menge. Die Potenzmenge von I , das heißt die Menge aller Teilmengen von I , ist definiert als $\mathcal{P}(I) := \{A : A \subseteq I\}$.

*Ein System $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$ heißt **Filter** über I , falls gilt:*

- (i) $\mathcal{F} \neq \emptyset$ und $\emptyset \notin \mathcal{F}$*
- (ii) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$*
- (iii) $A \in \mathcal{F}, A \subseteq B \subseteq I \Rightarrow B \in \mathcal{F}$*

Satz und Definition A.0.8 (Der Filter der koendlichen Mengen).

Sei I eine unendliche Menge. Dann ist

$$\mathcal{F} := \{A \subseteq I : I \setminus A \text{ endlich}\}$$

ein Filter über I .

*$\mathcal{F}$ heißt der **Filter der koendlichen Teilmengen** von I .*

Definition A.0.9 (Ultrafilter).

*Ein Filter $\mathcal{F}$, zu dem es keinen echten Oberfilter gibt, heißt **Ultrafilter**. In anderen Worten:*

$$\text{Seien } \mathcal{F} \text{ und } \mathcal{G} \text{ Filter, mit } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{G}.$$

Satz A.0.10 (Ultrafilter).

Sei $i_0 \in I$ fest und $\mathcal{F} := \{A \subseteq I : i_0 \in A\}$. Dann ist $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter.

A. Filter und Ultrafilter

Beweis von Satz A.0.8 und A.0.9.

Zuerst zeigen wir den Satz A.0.8, indem wir die Filtereigenschaften prüfen.

(i) $\mathcal{F}$ ist nicht die leere Menge, weil sie jedenfalls I enthält. Die leere Menge ist nicht Element von $\mathcal{F}$, weil jede Teilmenge $A \in \mathcal{F}$ zumindest i_0 enthält.

(ii) ist schnell zu sehen: Seien $A, B \in \mathcal{F}$. Da i_0 sowohl in A als auch in B liegt, ist auch der Durchschnitt $A \cap B$ in $\mathcal{F}$.

Auch Forderung (iii) ist erfüllt, da für $A \subseteq B \subseteq I$ mit $A \in \mathcal{F}$ gilt: $i_0 \in A$ folgt $i_0 \in B$. Somit ist auch die dritte Filtereigenschaft gezeigt und der erste Satz bewiesen.

Nun beweisen wir Satz A.0.9.

Wir zeigen, dass $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, das heißt für die Filter $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ folgt $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.

Sei nun indirekt $\mathcal{F}$ kein Ultrafilter. Für einen Filter $\mathcal{G}$ mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ und $\mathcal{G} \neq \mathcal{F}$ folgt, dass es ein A gibt, das in $\mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$ liegt. Da nun $A \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$ liegt, folgt $A \notin \mathcal{F}$, daher ist $i_0 \notin A$. Das heißt, es ist $A \cap \{i_0\} = \emptyset$.

Wegen $A \in \mathcal{G}$, $\{i_0\} \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ und da $\mathcal{G}$ ein Filter ist, folgt $A \cap \{i_0\} \in \mathcal{G}$. Weil $A \cap \{i_0\} = \emptyset$ folgt $\emptyset \in \mathcal{G}$, was ein Widerspruch zur Filtereigenschaft von $\mathcal{G}$ ist.

□

Definition A.0.11 (partiell geordnete Menge, total geordnete Menge, partielle bzw. totale Ordnung über X).

(1) Eine **partiell geordnete Menge** ist ein Paar $\langle X, \leq \rangle$, wobei X eine nicht-leere Menge und $\leq$ eine Relation über X ist, die für $x, y, z \in X$ die folgenden drei Eigenschaften besitzt:

- (a) Reflexivität: $x \leq x$
- (b) Antisymmetrie: $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$
- (c) Transitivität: $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$.

(2) K heißt **total geordnet**, falls $\forall x, y \in K$ gilt:

$$x \leq y \vee y \leq x.$$

(3) Ist $\langle X, \leq \rangle$ eine partiell bzw. total geordnete Menge, so heißt $\leq$ eine **partielle** bzw. **totale Ordnung** über X .

Definition A.0.12 (obere Schranke, maximales Element).

(1) $y \in X$ heißt **obere Schranke** von K , falls gilt:

$$x \leq y, \forall x \in K.$$

(2) $m \in X$ heißt ein **maximales Element**, falls $\forall x \in X$ gilt:

$$m \leq x \Rightarrow m = x.$$

Um die Existenz von Ultrafiltern begründen zu können, wird das Zornsche Lemma benötigt:

Satz A.0.13 (Zornsches Lemma).

Sei $\langle X, \leq \rangle$ eine partiell geordnete Menge, so dass jede nicht-leere total geordnete Menge $K \subseteq X$ eine obere Schranke hat. Dann besitzt X ein maximales Element.

Satz A.0.14 (Existenz von Ultrafiltern).

Zu jedem Filter über I existiert ein, diesen Filter umfassender Ultrafilter über I .

Satz A.0.15 (Charakterisierung von Ultrafiltern).

Sei $\mathcal{F}$ ein Filter über I . Dann sind die beiden Aussagen äquivalent:

(i) $\mathcal{F}$ ist ein Ultrafilter.

(ii) Für alle $A \subseteq I$ ist $A \in \mathcal{F}$ oder $I \setminus A \in \mathcal{F}$.

Satz A.0.16 (Eigenschaften von Filtern und Ultrafiltern).

(i) Sei $\mathcal{F}$ ein Filter über I . Dann gilt für $A \subseteq I$:

$$A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F} \text{ und } A_1 \cap \dots \cap A_n \subseteq A \Rightarrow A \in \mathcal{F}.$$

(ii) Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter über I . Dann gilt für $A_1, \dots, A_n \subseteq I$:

$$A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow A_k \in \mathcal{F} \text{ für ein } k \in \{1, \dots, n\}.$$

Beweis von Satz A.0.16.

(i): Da $\mathcal{F}$ ein Filter mit $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ ist, folgt $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{F}$ laut Definition eines Filters. Ebenso folgt aus der Definition Filter wegen

$$A_1 \cap \dots \cap A_n \subseteq A, \text{ dass auch } A \in \mathcal{F} \text{ ist.}$$

(ii): Indirekt angenommen $A_k \notin \mathcal{F}$ für $k = 1, \dots, n$. Da $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist und $A_k \notin \mathcal{F}$, folgt $I \setminus A_k \in \mathcal{F}$ für $k=1, \dots, n$ (nach Satz 1.9).

Nun verwenden wir die Filtereigenschaft von $\mathcal{F}$ und erhalten

$$I \setminus \bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcap_{k=1}^n (I \setminus A_k) \in \mathcal{F}. \text{ Da laut Voraussetzung } \bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{F} \text{ ist, folgt } \emptyset = \bigcup_{k=1}^n A_k \cap (I \setminus \bigcup_{k=1}^n A_k) \in \mathcal{F}. \text{ Das ist ein Widerspruch zu } \emptyset \notin \mathcal{F}.$$

□

Literaturverzeichnis

- [OF] Forster, O. (8. Aufl. 2006) *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*. vieweg. Wiesbaden.
- [FW] Forster, O. und Wessoly, R. (3. Aufl. 2006) *Übungsbuch zur Analysis 1*. Vieweg. Wiesbaden.
- [RB] Goldblatt, R. (1998). *Lectures on the Hyperreals. An Introduction to Nonstandard Analysis*. Springer-Verlag. New York.
- [HK] Henle, J. und Kleinberg, E. (1979) *Infinitesimal Calculus*. The Massachusetts Institute of Technology. Cambridge.
- [LR] Landers, D. & Rogge, L. (1994) *Nichtstandard Analysis*. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg.
- [DL] Laugwitz, D. (1978). *Infinitesimalkalkül*. Bibliographisches Institut AG. Zürich.
- [TL] Lindstrøm, T. (1988) *An Invitation to Nonstandard Analysis*. In: Nonstandard Analysis and its Applications, edited by Cutland, N. (1988). Cambridge University. Cambridge.
- [JR] Resag, J. (2008) Die Grenzen der Berechenbarkeit. Unvollständigkeit und Zufall in der Mathematik. Zugriff am 14. Juni 2011 unter <http://www.joergresag.privat.t-online.de/mybk3htm/chap45.htm>
- [SR] Silberbauer, R. (2011) Diplomarbeit. *Nichtstandard-Analysis reellwertiger Funktionen*. Fakultät für Mathematik, Universität Wien.
- [MV] Väth, M. (2007). *Nonstandard Analysis*. Birkhäuser Verlag. Basel.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name: Cornelia Schubert
Geburtsdatum: 21. Mai 1986
Geburtsort: Horn
Staatsbürgerschaft: Österreich

Ausbildung

1992-1996 Volksschule Zellerndorf

1996-2004 Bundesrealgymnasium Hollabrunn
Abschluss: Matura

2004-2005 Technische Universität Wien
Lehramt Unterrichtsfach Mathematik, Unterrichtsfach Chemie

2005-2011 Universität Wien
Lehramt Unterrichtsfach Mathematik, Unterrichtsfach Chemie

Sonstige Tätigkeiten

2007-2009 Labortätigkeit bei Vitalogic Dr. Spona Vertriebsges.m.b.H

2011 Tutorium am Institut für Organische Chemie, Universität Wien