



universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

**Entwicklung und Durchführung von Unterrichtseinheiten sowie
eine empirische Untersuchung zum Thema
"Wie kann man SchülerInnen der achten Schulstufe mit
räumlichen Vorstellungsproblemen bei Anwendungen des Pythagoräischen
Lehrsatzes in Körpern helfen?"**

angestrebter akademischer Grad

Magister/Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer.nat.)

Verfasserin / Verfasser:	Verena Horak
Matrikel-Nummer:	0607991
Studienrichtung (lt. Studienblatt):	A 190 406 313
Betreuerin / Betreuer:	Doktor Andreas Ulovec

Wien, am

Inhaltsverzeichnis

1. Danksagung.....	5
2. Einleitung	5
3. Räumliches Vorstellungsvermögen.....	8
3.1. Definitionsversuche.....	8
3.1.1. Was ist Anschauung?	8
3.1.2. Was ist Vorstellung?	9
3.1.3. Was ist Wahrnehmung?	16
3.1.4. Vorstellung vs. Wahrnehmung.....	17
3.1.5. Was ist räumliche Anschauung?	19
3.1.6. Was ist räumlich und was ist visuell?	19
3.1.7. Was sind räumliches Vorstellungsvermögen und räumliche Wahrnehmung?..	20
3.1.8. Räumliche Fähigkeiten und deren Anwendung	23
4. Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens	26
4.1. Piaget.....	28
5. Probleme des räumlichen Vorstellungsvermögens	31
5.1. Wie, wo und wann treten Probleme des räumlichen Vorstellungsvermögens auf? .	31
5.2. Gibt es Geschlechtsunterschiede beim räumlichen Vorstellungsvermögen?.....	33
5.3. Erklärungsansätze für die Probleme und Geschlechts-	34
unterschiede beim räumlichen Vorstellungsvermögen	34
5.3.1. Biologische Erklärungsansätze	35
5.3.2. Sozialisatorische Erklärungsansätze	36
5.3.3. Sozio-kulturelle Einflüsse	38
6. Der Satz von Pythagoras und seine Anwendung im Körper.....	40
6.1. In welcher Schulstufe	40

7. Empirischer Teil.....	46
7.1. Meine Forschungsfrage	46
7.2. Vorbereitung der empirischen Untersuchung	47
7.3. Durchführung der empirischen Untersuchung	49
7.4. Auswertung der empirischen Untersuchung	51
7.4.1. Zusammensetzung der Versuchsklassen	51
7.4.2. Beobachtungen während der empirischen Untersuchung	52
7.4.3. Auswertung der Rechenbeispiele	54
7.5. Interpretation der empirischen Untersuchung	91
7.5.1. Allgemeine Interpretation aus den Ergebnissen der empirischen Untersuchung	92
7.5.2. Interpretation mit Rückgriff auf die Theorien aus dem theoretischen Teil der Arbeit.....	95
7.6. Schlussfolgerungen	97
7.7. Beantwortung der Forschungsfrage	100
8. Schlusswort	101
9. Zusammenfassung.....	103
10. Summary	105
Lebenslauf	107
Literaturverzeichnis.....	115
Bildquellen	116

1. Danksagung

Zu aller erst möchte ich mich bei meinem Diplomarbeitsbetreuer, Herrn Doktor Andreas Ulovec, herzlich bedanken. Er ist mir jederzeit mit Rat zur Seite gestanden und hat mich engagiert bei meiner Arbeit begleitet.

Besonderer Dank gilt auch dem Gymnasium Klosterneuburg und Herrn Direktor Dr. Rudolf Koch. Am BG/BRG Klosterneuburg durfte ich die, im Rahmen meiner Diplomarbeit geplante, empirische Untersuchung durchführen.

Als nächstes möchte ich mich bei meinen Eltern bedanken. Sie haben mich während meines gesamten Studiums unterstützt und hatten immer ein offenes Ohr für meine Probleme und Anliegen. Auch während meiner Arbeit an der Diplomarbeit sind sie mir immer helfend zur Seite gestanden, sei es beim Basteln von Modellpyramiden oder beim Korrekturlesen.

Weiters möchte ich mich bei meinen StudienkollegInnen und FreundInnen bedanken. Auch sie waren mir während meiner Studienzeit immer eine Stütze.

2. Einleitung

Entwicklung und Durchführung von Unterrichtseinheiten sowie eine empirische Untersuchung zum Thema "Wie kann man SchülerInnen der achten Schulstufe mit räumlichen Vorstellungsproblemen bei Anwendungen des Pythagoräischen Lehrsatzes in Körpern helfen?"

Die Frage lautet, wie ich zu diesem Thema gekommen bin beziehungsweise genau dieses Themengebiet gewählt habe?

Von Anfang an war für mich klar, dass ich meine Diplomarbeit im Fach Mathematik schreiben möchte. Außerdem wollte ich ein Thema wählen, bei dem mir die Arbeit an meiner Diplomarbeit für mein zukünftiges Berufsleben als Professorin von Nutzen sein sollte.

Räumliches Vorstellungsvermögen spielt im Mathematikunterricht keine unwesentliche Rolle. Daher hängt die Leistung und Leistungsbeurteilung im Mathematikunterricht nicht gerade wenig von den Fähigkeiten der SchülerInnen im räumlichen Vorstellungsvermögen ab. Als zukünftige Professorin bin ich der Meinung, dass es unser Ziel sein sollte einen möglichst guten Notendurchschnitt in Mathematik zu erreichen beziehungsweise den SchülerInnen Spaß und Freude an diesem Fach zu vermitteln. Ist das auch möglich, wenn gewisse SchülerInnen Probleme im räumlichen Vorstellungsvermögen haben?

Ich bin mir sicher ich werde im Berufsleben mit dieser Frage des öfteren konfrontiert sein. Was kann ich tun, wenn ich bei meinen SchülerInnen Probleme des räumlichen Vorstellungsvermögens entdecke?

Diese Frage hat mich auch zum Thema der Diplomarbeit geführt. Seit einigen Jahren gebe ich ziemlich intensiv Nachhilfe in Mathematik.

Eines Tages sitze ich mit einem meiner regelmäßigen Nachhilfeschüler vor einem Beispiel, bei dem es darum ging, sich die Seitenkante einer quadratischen Pyramide mit Hilfe des Satzes von Pythagoras auszurechnen. Gegeben waren bei diesem Beispiel die Höhe der Pyramide und die Länge der Diagonale der Grundfläche. Wie er es gelernt hat, macht der Nachhilfeschüler zuerst einmal eine Skizze einer Pyramide, doch dann sitzt er auch schon ratlos vor dem Beispiel. Ich gebe ihm den Tipp die gegebenen Teile der Pyramide zu markieren, doch auch das bringt ihn nicht weiter. Ich frage mich langsam, wo denn das Problem liegt, da es sich doch offensichtlich um ein rechtwinkeliges Dreieck handelt, gebildet aus der Hälfte der Diagonale, der Höhe und der Seitenkante, bei dem zwei der drei Seiten gegeben sind. Man muss also nur noch den Satz von Pythagoras aufschreiben, die gegebenen Längen einsetzen und sich die Seitenkante ausrechnen. Da der Schüler nicht weiterzukommen scheint, frage ich ihn was er denn für Dreiecke in dieser Pyramide sieht. Auch auf diese Frage reagiert er eher ratlos. Als ich ihn dann frage wo denn rechte Winkel liegen und wieder keine Antwort kommt, weiß ich wo das Problem liegt. Die Skizze der Pyramide ist natürlich verzerrt und würde er die Winkel der Skizze messen, wären da keine Rechten. Das heißt das Problem lag darin, dass er sich nicht vorstellen konnte, wo in Wirklichkeit rechte Winkel waren. Er konnte die Skizze in Gedanken nicht in die Wirklichkeit transformieren und dort mit ihr operieren. Endlich wusste ich was sein Problem war, nur wie sollte ich ihm nun helfen? Mit Händen, Papier, und Stiften versuchte ich auf die Schnelle eine provisorische Pyramide zu bauen. Im Endeffekt haben wir das Problem, wenn auch etwas umständlich, auf diese Art und Weise lösen können.

In dieser Nachhilfestunde war ich das erste Mal mit Problemen des räumlichen Vorstellungsvermögens konfrontiert. Ich gestehe, bis dahin war mir nicht klar, dass man sich so etwas nicht vorstellen kann. Was für mich in diesem Moment offensichtlich war, bereitete dem Nachhilfeschüler die größten Probleme.

Ich bin froh, dass ich diese Erfahrung in einer Nachhilfestunde gemacht habe. Wäre mir das im Unterricht passiert und ein Schüler hätte mir auf die Frage: „Wo sind den in dieser quadratischen Pyramide die rechten Winkel“, keine Antwort geben können, wäre ich vermutlich zum nächsten Schüler weitergegangen und hätte mir gedacht, dass dieser Schüler einfach nicht mitgedacht hat. Ich wäre also wahrscheinlich nicht auf die Idee gekommen, dass er sich die rechten Winkel wirklich nicht vorstellen kann.

Das Thema meiner Diplomarbeit hat sich aus dem Interesse heraus, mehr über diese Herausforderung zu erfahren, entwickelt. Ich möchte als Professorin nicht ratlos vor solchen SchülerInnen stehen, die Probleme des räumlichen Vorstellungsvermögens haben. Ein weiterer Versuch im Rahmen dieser Diplomarbeit wird es sein, mögliche Unterrichtsutensilien für dieses Stoffgebiet zu entwickeln und zu untersuchen, ob sie SchülerInnen mit Problemen bei Lösung von Aufgaben zur Anwendung des Pythagoras im Körper hilfreich sind. Im empirischen Teil meiner Arbeit werde ich also Unterrichtseinheiten entwickeln, durchführen und die Ergebnisse analysieren.

Zu Beginn der Arbeit habe ich mich mit den theoretischen Grundlagen auseinandergesetzt. Dieser dient als fachliche Basis für die empirische Untersuchung.

3. Räumliches Vorstellungsvermögen

3.1. Definitionsversuche

Die zwei wohl wichtigsten Begriffe meiner Arbeit sind „räumlich“ und „Vorstellungsvermögen“. Doch was genau bedeutet „räumlich“ und was „Vorstellungsvermögen“ und was haben sie miteinander zu tun?

Zu Beginn meiner Arbeit will ich also nun den Begriff „räumliches Vorstellungsvermögen“ definieren. Doch schon als ich mit der Literaturrecherche begann, stieß ich auf ein Problem. Anscheinend werden für das Phänomen „räumliches Vorstellungsvermögen“ viele Begriffe synonym verwendet, beziehungsweise gibt es viele ähnliche Beschreibungen, die jedoch nicht immer ganz dasselbe meinen.

Was sind also die Unterschiede zwischen Anschauung, Vorstellung, Wahrnehmung, räumlicher Anschauung, räumlicher Vorstellung und räumlicher Wahrnehmung oder meinen sie doch alle dasselbe?

3.1.1. Was ist Anschauung?

Schlägt man Anschauung in der Brockhaus Enzyklopädie nach, findet man folgende Definition: „Anschauung ist die auf besonderen optischen Sinneswahrnehmungen beruhende unmittelbare Vergegenwärtigung von Gegenständen, sowohl als Wahrnehmungsakt als auch als dessen Ergebnis, im Unterschied zur mittelbaren, verstandesmäßigen Erfassung.“¹

Nach Poincaré, einem französischen Mathematiker, gibt es mehrere Arten von Anschauung. Die Anschauung als Appell an die Sinne und die Einbildungskraft, als Generalisierung durch Induktion, als Verfahren zur Abbildung der Erfahrungswelt und als Anschauung der reinen Zahl. Fasst man eins und zwei zusammen, also den Appell an Sinne und Einbildungskraft und

¹ Brockhaus Enzyklopädie, 2006, 21. Auflage, Band 2, F.A. Brockhaus, Leipzig, Mannheim, S. 107

die Generalisierung durch Induktion, hat man die Komponenten der geometrischen Anschauung.²

Das heißt nach Poincaré ist Anschauung eine Kombination der Aufnahme von Informationen durch die Sinne, Zusatzinformationen durch die Einbildungskraft und einer Verallgemeinerung dieser Eindrücke. Das soll meiner Meinung nach heißen, dass wir dann die Anschauung eines Quaders haben, aber auf Grund der stattgefunden Generalisierung auch einen kleineren oder größeren Quader als solchen erkennen.

Eine Reduktion der Anschauung auf die „Sinne“ und Einbildungskraft ist ein psychologischer Irrtum. Anschauung findet etwas heraus. Beweise für geometrische Überlegungen sind eine Sache der Logik und Analyse.³

Auch hier bedeutet das, wir sehen einen Quader und können ihn auch als solchen identifizieren. Wir analysieren das Objekt und finden Beweise geometrischer Überlegungen mittels Logik. So stellt sich heraus, dass es sich zum Beispiel tatsächlich um einen Quader handelt.

Nach Brunshvieg stehen geometrische Überlegungen immer noch in Verbindung mit anschauungsmäßiger Erfahrung und schon die primitivste Kontaktaufnahme mit der Erfahrung greift ins Denken ein.⁴

Ich würde meinen: Natürlich greifen wir ins Denken ein. Es handelt sich schon um einen Denkprozess, wenn wir die richtigen Erfahrungen „zusammensammeln“, die zu den stattfindenden geometrischen Überlegungen passen.

Für Mathematiker ist Anschauung mehr als ein System von Wahrnehmung und Bildern. Anschauung ist das elementarste Verständnis des Raumes.⁵

3.1.2. Was ist Vorstellung?

Auch das Schlagwort Vorstellung habe ich zu Beginn in der wohl bekanntesten Enzyklopädie nachgeschlagen, dem Brockhaus. Dort ist zu lesen, dass Vorstellung anschaulich, mentale Inhalte, also Erinnerungsbilder früherer Wahrnehmungen sind. Eine Vorstellung zu haben

² Jean Piaget, Bärbel Inhelder, u.a., Die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kinde, 1971, Ernst Klett Verlag, Stuttgart, S. 518

³ Piaget, Entwicklung, S. 519

⁴ Piaget, Entwicklung, S. 520

⁵ Piaget, Entwicklung, S. 520

bedeutet, sich etwas zu versinnbildlichen. Die Vorstellung ist ein Bewusstseinsbild das dem Wahrnehmungsinhalt ähnelt. In der Regel ist die Vorstellung undeutlicher, blasser und weniger detailliert als eine reale Wahrnehmung. Das Auftauchen von Vorstellungsinhalten im Bewusstsein passiert meist nicht isoliert, sondern wird ausgelöst durch Wahrnehmungen und im Zusammenhang mit anderen Bildern. Außerdem wird zwischen Vorstellungen den einzelnen Sinnesgebieten entsprechend und gemischten Vorstellungen unterschieden.⁶ Der vorgestellte Raum beginnt dort, wo Vorstellung zur sensomotorischen Aktivität hinzukommt.⁷

Die Vorstellungsfähigkeit ist das Maß in dem es einer Person gelingt, möglichst wahrnehmungsähnliche Bilder zu generieren.⁸

Finke definiert Vorstellung, auf Englisch mental imagery wie folgt:

„mental imagery is defined as the mental invention or recreation of an experience that in at least some respects resembles the experience of actually perceiving an object or an event, either in conjunction with, or in the absence of, direct sensory stimulation.“⁹

Übersetzt heißt das so viel, dass Vorstellung die geistige Kreation oder Erinnerung eines Erlebnisses ist, das zumindest in einigen Punkten in Verbindung mit einer Erfahrung, mit einem Objekt oder Erlebnis steht, mit oder ohne direkter sensorischer Reize.

Was in dieser Definition Vorstellung auszeichnet, ist die Bedeutung der Abwesenheit entsprechender Sinnesreize. Das heißt die Vorstellung kann auch hervorgerufen werden ohne den entsprechenden sensorischen Reize.

Um wieder auf das Beispiel mit dem Quader zurückzugreifen: Ich kann mir einen Quader auch vorstellen, ohne ihn im selben Moment zu sehen oder zu fühlen, das heißt ihn durch den sensorischen Reiz Sehen oder den Tastsinn wahrzunehmen.

Neisser beschreibt Vorstellung als ein Phänomen, bei dem die visuelle Empfindung nicht mit den Stimuli übereinstimmt. Er schreibt:

„Unabhängig davon, wie lebensnah die inneren Bilder erfahren werden, werden sie „ein Stück weit wie wirkliche Objekte gesehen“, wobei „wenig bis gar nichts in der gleichzeitig oder vor kürzester Zeit sensorisch aufgenommenen Information dies zu rechtfertigen scheint“¹⁰

⁶ Brockhaus Enzyklopädie, 2006, 21. Auflage, Band 29, F.A. Brockhaus, Leipzig, Mannheim, S. 260

⁷ Piaget, Entwicklung, S. 524

⁸ Dagmar Merbaul, Visuelle Vorstellungsfähigkeit und ihre Bedeutung bei der Bearbeitung von Raumvorstellungsaufgaben, 1994, Diplomarbeit, Wien, S. 161

⁹ Merbaul, Vorstellungsfähigkeit, S. 4

¹⁰ Merbaul, Vorstellungsfähigkeit, S. 5

Auch in dieser Formulierung steckt, dass Vorstellung gewisser Bilder unabhängig davon auftreten kann, was wir gerade erleben beziehungsweise machen.

Bei Vorstellungsbildern ist man sich jedoch im Gegensatz zur Halluzinationen, über dessen Unwirklichkeit im Klaren.¹¹

Pawlik spricht von drei gesicherten Faktoren der Raumvorstellung. Faktor eins ist die Veranschaulichung auf Englisch *visualization*. Dieser Faktor kommt dem traditionellen Begriff der räumlichen Vorstellung am ähnlichsten. Bedeutend ist sich Drehungen, Verschiebungen ohne externe anschauliche Hilfe vorstellen zu können. Bei Faktor zwei geht es um die Fähigkeit räumliche Beziehungen, *spatial relations*, zwischen unbewegten Gegenständen erfassen zu können. Die räumliche Einordnung der eigenen Person, auf Englisch *spatial orientation*, wäre Faktor drei.¹²

Auch die drei Analyseebenen des visuellen Vorstellens von Dieter Hänggi helfen dabei, eine „Definition“ von Vorstellung zu finden.

Ebene eins stellt einen erlebnisbezogenen Zugang zum visuellen Vorstellen dar. Dabei wird visuelles Vorstellen als quasi-perzeptuelles Erlebnis verstanden. Die Frage nach der Natur beziehungsweise dem Wesen dieses Erlebnisses steht im Vordergrund. Wie deutlich oder lebhaft Vorstellungen erlebt werden und welche subjektive Eigenschaften die Vorstellungen prägen, stehen auf dieser Ebene im Mittelpunkt.

Die operationale Erfassungsebene ist die Zweite. Gefragt wird hier nach der Funktion des visuellen Vorstellens bezüglich kognitiver Prozesse oder Leistungen. Hier ist von Interesse unter welchen Aufgabenbedingungen Vorstellungen Wirkung auf welche kognitiven Prozesse oder Leistungen zeigen.

Ebene drei behandelt die theoretische Analyse des visuellen Vorstellens. Man ist auf der Suche nach visuellen Repräsentations- und Prozesscharakteristika. Es geht um die Beschreibung subjektiver Vorstellungsmerkmale und die Wirkung visueller Vorstellungen auf kognitive Leistungen.¹³

Im folgenden Abschnitt möchte ich noch einige visuelle Vorstellungstheorien präsentieren. Die Theorien sind alle interessante Ansätze, wie „Vorstellung“ zu verstehen ist.

¹¹ Merbaul, Vorstellungsfähigkeit, S. 5

¹² Merbaul, Vorstellungsfähigkeit, S. 45

¹³ Hg. Meinrad Perrez, Hans-Dieter Schneider, Jean Retschitzki, Dieter Hänggi, Visuelle Vorstellungsfähigkeit, 1989. Universitätsverlag Freiburg Schweiz, Freiburger Beiträge zur Psychologie, Band 5, Freiburg, S. 5

Im Voraus visuelle Vorstellungsfähigkeit zu definieren ist schwierig. Es existieren unterschiedliche Auffassungen darüber, was unter Vorstellung zu verstehen ist. Mit „Vorstellungsfähigkeit“ sind auch nicht immer die gleichen kognitiven Eigenschaften gemeint.¹⁴

Daher existieren diese unterschiedlichen Theorien darüber, was visuelle Vorstellungsfähigkeit ist, beziehungsweise wie sie funktioniert.

Für Jirasko ist „visuelle Vorstellungsfähigkeit“ das Ausmaß, in dem es einer Person gelingt qualitativ gute visuelle Vorstellungen zu generieren, das heißt Inhalte in guter Vorstellungsqualität visuell zu veranschaulichen. Qualitativ gute Vorstellung weist also große Ähnlichkeit mit der Wahrnehmung auf.¹⁵

Laut Kosslyn's visueller Vorstellungstheorie werden analoge Repräsentationen generiert und mit ihnen operiert. Mentale Strukturen dienen dabei der Speicherung und Darstellung von Informationen und mentale Prozesse werden zur Bearbeitung von Strukturen herangezogen. In seiner Theorie nennt Kosslyn visuelle mentale Bilder „surface representations“, die quasi-bildlich in einem analogen räumlichen Medium, dem sogenannten visuellen Puffer auftreten. Vorstellungsbilder der „surface representations“ entstehen aus Aktivierungsregionen im visuellen Puffer, die mit Regionen der Realobjekte korrespondieren.¹⁶

Wenn ich das in eine „Alltagssprache“ übersetzen müsste würde ich sagen, wir können visuelle Bilder kreieren. Diese stimmen bis zu einem gewissen Grad, dem sogenannten visuellen Puffer, mit Realobjekten überein. Sehen wir nun ein Realobjekt, das mit einer „surface representation“ korrespondiert, das heißt gewisse Ähnlichkeiten mit ihr hat, wird das visuelle Bild dieses Objekts aufgerufen.

Weiters meint Kosslyn zum visuellen Vorstellen: „Ausgehend von der Annahme, dass visuelle Vorstellungen Repräsentationen von über die Wahrnehmung aufgenommenen und aus dem Gedächtnis abgerufenen Informationen sind, wird ein kurzfristiger Verarbeitungsraum, in dem die Vorstellung aktualisiert wird, postuliert.“¹⁷

Seiner Annahme nach werden beim visuellen Vorstellen Langzeitgedächtnisinformationen aktiviert und Beziehungen zwischen Gedächtnispräsentationen begrifflich-verbal und visuell elaboriert.

¹⁴ Merbaul, Vorstellungsfähigkeit, S. 33

¹⁵ Merbaul, Vorstellungsfähigkeit, S. 33

¹⁶ Merbaul, Vorstellungsfähigkeit, S. 14

¹⁷ Hänggi, Vorstellungsfähigkeit, S. 35

Abhängig von der jeweiligen Situationsbewertung findet die Konstruktion eines mentalen Modells eines bestimmten Realitätsbereiches statt.

Nach Kosslyn ist visuelle Vorstellung ein konkretisiertes mentales Modell. Es bleiben aber analoge Kombinations- oder Transformationsprozesse zugänglich. Im Rahmen evaluativer und elaborativer Prozesse werden visuelle Vorstellungen ausdifferenziert und modifiziert.

Die aus diesen Annahmen resultierende Modellannahme ist, dass visuelle Vorstellungen als aktualisierte beziehungsweise konkretisierte mentale Modelle in einem kurzfristigen Speicher- und Verarbeitungsmedium bewusster Erfahrungen zugänglich sind.¹⁸

Abgesehen von dieser visuellen Vorstellungstheorie meint Kosslyn, dass Vorstellung nicht mit einem Bild gleichzusetzen ist, da sie nicht alle Eigenschaften eines Bildes enthält. Aber das Bild und die quasi-bildlichen Repräsentationen teilen gemeinsame Charakteristika.¹⁹

Shepard's visuelle Vorstellungstheorie basiert auf einem Isomorphismus innerer Repräsentationen. Er schreibt der visuellen Vorstellung funktionale Bedeutung für die Wahrnehmung zu. Er meint, dass durch mentale Bilder Beziehungen zwischen externen, realen Objekten erhalten werden, wobei die inneren Bilder isomorph zu externen Objekten sind.²⁰

Pavio's visuelle Vorstellungstheorie ist eine Theorie der dualen Kodierung. Zwei alternative Kodierungssysteme, mentale bildhafte Repräsentation und verbale Prozesse, können getrennt und parallel arbeiten.²¹ Die Theorie basiert also auf einer Verknüpfung der Gedächtnisinhalte von zwei Systemen, dem image system, das nonverbale Information verarbeitet, und dem verbal system, das für linguistische Informationen zuständig ist.²²

Aus der Definition von drei Ebenen der Informationsverarbeitung kommt die Annahme zustande, dass kombinierte Darbietung von verbalem und bildhaftem Lernmaterial positive Effekte auf Leistungen hat. Auf Informationsverarbeitungsebene Nummer eins werden Repräsentationen unabhängig vom jeweiligen Stimulus aktiviert. Worte aktivieren verbale Repräsentationen, auch logogen genannt, nonverbale Wahrnehmung aktiviert bildhafte Repräsentationen, auch imagen bezeichnet. Auf Ebene zwei werden verbale und bildhafte

¹⁸ Hänggi, Vorstellungsfähigkeit, S. 35

¹⁹ Hänggi, Vorstellungsfähigkeit, S. 28

²⁰ Merbaul, Vorstellungsfähigkeit, S. 18

²¹ Merbaul, Vorstellungsfähigkeit, S. 20

²² Hg. D.H. Rost, Elmar Souvignier, Förderung räumlicher Fähigkeiten. Trainingsstudie mit lernbeeinträchtigten Schülern, 2000, Waxmann, Münster, S. 30

Repräsentationen des Systems verknüpft. Bildhafte Wahrnehmung wird zum Beispiel mit verbaler Benennung verknüpft. Assoziationen zwischen Imaginen und Logogenen werden auf Ebene drei gebildet. Man kann sich das so vorstellen, dass Begriffe wie Hammer und Zange mit der Kategorie Werkzeug verknüpft werden.²³

Meiner Meinung nach soll das bedeuten, dass Vorstellungen durch Bilder und beziehungsweise oder verbale Beschreibungen hervorgerufen werden können.

Neisser sieht in seiner visuellen Vorstellungstheorie Vorstellung und Wahrnehmung in einer engen Verbindung zueinander.

„Wahrnehmung ist ein zyklischer Prozess, dem eine Antizipationsphase vorangeht. Läuft diese Antizipationsphase von der übrigen Wahrnehmung abgelöst, also alleine ab, so handelt es sich um Vorstellung. Wahrnehmung beinhaltet immer die Aufnahme neuer Information; zur Vorstellung kommt es, wenn dieser Informationszufluss unterbrochen oder verzögert wird. Vorstellungen sind also antizipatorische, von der eigentlichen Wahrnehmung abgetrennte Phasen der Wahrnehmungsaktivität.“²⁴

Pylyshyn vertritt eine propositionale Theorie. Im Zusammenhang mit dieser visuellen Vorstellungstheorie sind Propositionen Aussagen über bestimmte Merkmale von Objekten. Laut Pylyshyn's Theorie liegen gespeicherte Fakten und Informationen in Form von Regeln und Prozeduren vor.²⁵

Überlegt man sich diese Theorie an Hand eines Beispiels, wie dem Würfel, wäre eine der abgespeicherten Regeln, dass alle Seiten gleich lang sind. Sieht man nun ein Objekt mit lauter gleich langen Seiten, wäre der logische Schluss, dass es sich um einen Würfel handelt.

Steiner geht von Prozessmerkmalen des bildhaften Vorstellens aus.

Merkmal eins ist die Unterscheidung zwischen einer räumlich-visuellen Komponente und einer begrifflich-verbalen Komponente, also eine Unterscheidung in „Wo ist das Objekt?“ und „Was stellt das Objekt dar?“. Die visuell-räumliche Komponente bedeutet begrifflich bestimmbare Elemente visuell zu kodieren und unter bestimmten räumlichen Relationen betreffend Position, Orientierung, Ausdehnung, Entfernung und dergleichen zu

²³ Souvignier, Förderung, S. 30

²⁴ Merbaul, Vorstellungsfähigkeit, S. 23

²⁵ Merbaul, Vorstellungsfähigkeit, S. 29

repräsentieren. Die begrifflich-verbale Komponente meint, dass Dinge an sich etwas bedeuten müssen, also einen semantischen Aspekt haben. Die Kodierung dieser Bedeutung kann in einem Wort, also verbal erfolgen. Bei Prozessmerkmal zwei postuliert Steiner eine Interaktion zwischen den einzelnen Komponenten. Er meint, dass einzelne Komponenten nie für sich alleine aktiv sind. Zum Abrufen weiterer Informationen in Form von Subroutinen kommt es bei Merkmal drei.²⁶

Meiner Meinung nach fasst die Ansicht der Vertreter der deutschsprachigen Kinderpsychologie von Vorstellung, die unterschiedlichen Theorien ganz gut zusammen. Vertreter der deutschsprachigen Kinderpsychologie der dreißiger Jahre meinen nämlich, dass Vorstellung ein Resultat von Gedächtnisprozessen ist. Vorstellungen sind nicht gebunden an aktuelle Wahrnehmungen, sondern reproduzierte Gedächtnisspuren eines freien Gedächtnisses. Vorstellungen sind auch nicht notwendigerweise vollständige Abbilder einmal vorhandener Wahrnehmungsinhalte.²⁷

²⁶ Klaus Bischof, Individuelle Unterschiede beim visuellen Vorstellen, 1987, Peter Lang Verlag, Europäische Hochschulschriften, Reihe VI Psychologie, Band 221, Bern, Frankfurt am Main, New York, Paris, S. 16

²⁷ Ruth Schumann-Hengsteler, Die Entwicklung des visuell-räumlichen Gedächtnisses, 1995, Hogrefe, Göttingen, Bern, Toronto, Seattle, S. 7

3.1.3. Was ist Wahrnehmung?

Im Brockhaus findet man unter Wahrnehmung, dass dies ein psychophysischer Prozess ist, in dessen Ablauf die physikalischen und chemischen Reize an den Sinnesorganen zu einer Repräsentation der Umwelt verarbeitet werden. Diese Verarbeitung ermöglicht es dem Organismus, sich in der Umwelt zurechtzufinden.

Weiters steht unter Wahrnehmung:

„Aus heutiger Sicht ist Wahrnehmung ein aktiver Konstruktionsprozess, bei dem mithilfe von Gestaltprinzipien und unter Mitwirkung des Gedächtnisses aus zeichenhaften Codes der Sinnesreize eine zweckmäßige Repräsentation der Umwelt und der Rolle des eigenen Körpers darin aufgebaut wird. Die dem Organismus zunächst unbekannte und sich im Laufe seiner Entwicklung auch gelegentlich ändernde Beziehung zwischen den Codes der Sinnesreize und den Gegebenheiten der Umwelt wird im tätigen Umgang mit der Umwelt erfasst

Dabei dient Wahrnehmung zunächst der direkten Handlungssteuerung („Zweck der Repräsentation“), darüber hinaus aber beim mit Bewusstsein begabten Organismus auch der Reflexion.“

Aufgrund der überaus großen Informationsmenge, die nicht vollständig verarbeitet werden kann, wird von der Fülle der verfügbaren Sinnesinformation nur das bewusst wahrgenommen, was in den Fokus der Aufmerksamkeit fällt. Dabei wird die Wahrnehmung insbesondere auf handlungsrelevante Aspekte der Umwelt gelenkt.²⁸

Sehen ist ein System von Relationen, die durch die wahrscheinlichen Bewegungen des Blickes bestimmt sind. Bewegung hat von den Anfängen der Wahrnehmung an eine Bedeutung, die immer größer wird.

Es gibt zwei Arten von Wahrnehmung, die reine und die rezeptive Wahrnehmung. Mit „Wahrnehmungsaktivität“ ist ein Wechsel der Zentrierungen, Vergleichen, Übertragen und ähnliches gemeint.²⁹

Das heißt Wahrnehmung ist die, der Aufnahme von Informationen zugrundeliegende, Aktivität.

²⁸ Brockhaus Enzyklopädie, 21. Auflage, F.A. Brockhaus, Leipzig, Mannheim, 2006, Band 29, S. 260

²⁹ Jean Piaget, Bärbel Inhelder, u.a., Die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kinde, 1971, Ernst Klett Verlag, Stuttgart, S. 37f.

3.1.4. Vorstellung vs. Wahrnehmung

Auch der Begriff Visualisierung hängt eng mit Vorstellung und Wahrnehmung zusammen. Im Englischen bedeutet Visualisierung Veranschaulichung. Wir verwenden Visualisierung als Bezeichnung für die bildliche Aufbereitung, Darstellung und Kommunikation von Information sowie für die visuelle Wahrnehmung und Vorstellung. Visualisierung umfasst alle Arten bildlicher Repräsentation und Sichtbarmachung, zum Teil sogar über den Bereich des Sehens hinaus, wie zum Beispiel bei der Metaphernbildung. Visuelle Darstellungen dienen der Zusatzinformation, der Illustration und drücken ganzheitliche Zusammenhänge mit eigenen Mitteln, wie Symbolen, und Zeichen aus. Das Potenzial von Vorstellung liegt in der kompakten und „dichten“ Informationsfülle, die jedoch ihrer Darstellbarkeit und Kommunikation strukturelle Beschränkungen auferlegt.³⁰

Der englische Begriff „visualization“ ist stärker als die deutsche Entsprechung auf das Formen eines geistigen Bildes von etwas nicht real Vorhandenem, Abstraktem festgelegt. Visualisierung ist in diesem Sinne weder Repräsentation noch –Darstellung, sondern ein visuelles Modell, das nur als Theorie existiert.

Ich möchte nun Vorstellung der Wahrnehmung gegenüberstellen, um Unterschiede und Gemeinsamkeiten noch besser hervorzuheben. Dabei werde ich mich auf unterschiedliche Personen aus der Fachliteratur beziehen. Ich möchte jedoch nicht näher auf diese Wissenschaftler, Psychologen, Mathematiker und so weiter eingehen. Mein Interesse liegt nicht in ihrer Persönlichkeit, sondern in ihren Theorien und Vorstellungen.

Finke sagt über den Zusammenhang von Vorstellung und Wahrnehmung:

„Vorstellungsbilder erwecken deshalb oft den Anschein, Wahrgenommenes haargenau zu spiegeln, weil beide Prozesse gleiche Arten von neuronalen Mechanismen involvieren. Wie ähnlich sich Wahrnehmungs- und Vorstellungsbild phänomenologisch sind, ist dadurch bestimmt, wie viele von diesen Mechanismen die beiden Prozesse gemeinsam haben.“³¹

³⁰ Brockhaus Enzyklopädie, 21. Auflage, F.A. Brockhaus, Leipzig, Mannheim, 2006, Band 29, S. 150

³¹ Merbaul, Vorstellungsfähigkeit, S. 7

Wahrnehmung ist das Erkennen der Gegenstände durch einen direkten Kontakt mit ihnen und Vorstellung ist das „Sehen“, von nicht anwesenden Gegenständen.³²

Das heißt bildliche Vorstellungen treten in Abwesenheit des Gegenstandes auf.

Der wahrgenommene Raum ist ein sehr komplexes Produkt. Er entspringt der Wahrnehmung und sensomotorischen Aktivitäten.

Motorik und Wahrnehmung bilden gemeinsam die Substruktur der Vorstellungskonstruktion.³³

Es gibt drei Ansätze wie weit Vorstellung und Wahrnehmung einander überlappen.

Nach der funktionellen Auffassung dienen innere Bilder dazu, Beziehungen zwischen realen Objekten zu erhalten und diese dadurch erkennbar und vergleichbar zu machen. Das heißt Vorstellung kann die Wahrnehmung unterstützen.

Vorstellungsbildern und Realobjekten werden im strukturellen Ansatz teilweise gleiche Eigenschaften zugeschrieben. Beim interaktiven Ansatz kann die Vorstellung entweder zur Sensibilisierung der Wahrnehmung dienen, oder es kann zur gegenseitigen Beeinflussung und Störung kommen.

Erfahrungen in der Wahrnehmung gehen auf jeden Fall als verstecktes Wissen in die Vorstellung ein.³⁴

Nach Piaget und Inhelder existieren zwei Ebenen bei der Konstruktion der räumlichen Relationen. Zum einen die Wahrnehmungsebenen die sich bereits am Anfang des Lebens entwickelt. Sie stellen die Substruktur für die gesamte Raumkonstruktion durch die Vorstellung dar. Zum anderen die Vorstellungs- oder intellektuelle Ebene, als Voraussetzung für die Vorstellungstätigkeit.³⁵

Also müssen wir nach Piaget und Inhelder zu Beginn unseres Lebens erst einmal unsere Umwelt wahrnehmen und dabei Erfahrungen sammeln. So entsteht das Gerüst aus dem wir Vorstellungen entwickeln können. Neben dem Gerüst brauchen wir auch eine Vorstellungs- oder intellektuelle Ebene, das heißt eine Ebene auf der Vorstellungsbilder überhaupt entstehen können.

³² Piaget, Entwicklung, S. 38

³³ Piaget, Entwicklung, S. 523

³⁴ Merbaul, Vorstellungsfähigkeit, S. 160

³⁵ Sandra Scharf, Räumliche und mathematische-geometrische Fähigkeiten von Kindern: Leistungen, Selbstkonzepte und die Rolle des Spiel- und Freizeitverhaltens aus geschlechtsspezifischer Perspektive, 2004, Diplomarbeit, Wien, S. 21

3.1.5. Was ist räumliche Anschauung?

Der landläufigen Meinung zufolge ist Anschauung Ablesen, und zwar ein Ablesen der äußeren Welt mittels Anschauung und ein Ablesen dessen, was die Wahrnehmung mittels Bildern geliefert hat.

Die räumliche Anschauung greift teilweise auf die Sinne und die Einbildungskraft zurück. Das Bild und sinnlich wahrnehmbare Materie spielen als Symbol des „Bedeutungsträgers“ in geometrischer Anschauung die gleiche Rolle wie in jeglichem Denken.³⁶

Für mich bedeutet dies, dass Anschauung so zu sagen die Analyse der Bilder ist, die wir in der Welt wahrnehmen. Die räumliche Anschauung muss deshalb auf Sinne und Einbildungskraft zurückgreifen, da Bilder bekanntlich nicht mehrdimensional, also räumlich sind. Um der räumlichen Anschauung nun das Bild eines dreidimensionalen Quaders zu liefern, muss die Einbildungskraft das wahrgenommene Bild in ein Dreidimensionales „umwandeln“.

3.1.6. Was ist räumlich und was ist visuell?

Visuell beschreibt nicht alleine die Art der Information, das heißt Oberflächenmerkmale wie Aussehen, Kontur, Farbe et cetera. Je nach Kontext ist die Aufnahmemodalität selbst gemeint, also alles das mit dem Gesichtssinn aufgenommen wird.³⁷

Laut der Brockhausdefinition leitet sich visuell vom spätlateinischen Wort visualis ab, was so viel bedeutet wie „zum Sehen gehörend“. Bildungssprachlich wird visuell für das Sehen, den Gesichtssinn betreffend, verwendet.³⁸

Räumlich ist verbunden mit der Qualität der Reize, nicht der Reizaufnahme. Der Begriff räumlich bezieht sich auf Merkmale der Umwelt, die die Existenz von Dingen im Raum oder

³⁶ Piaget, Entwicklung, S. 518

³⁷ Ruth Schumann-Hengsteler, Die Entwicklung des visuell-räumlichen Gedächtnisses, 1995, Hogrefe, Göttingen, Bern, Toronto, Seattle, S. 25

³⁸ Brockhaus Enzyklopädie, 21. Auflage, F.A. Brockhaus, Leipzig, Mannheim, 2006, Band 29, S. 149

in der Ebene betreffen. Damit ist noch nichts über den Standpunkt des Betrachters gesagt. Der kann sich im Raum oder außerhalb von diesem befinden.³⁹

Die visuellen Komponenten bei der Aufnahme von Informationen sind Farbe und Kontraste. Die räumlichen Subkomponenten bestehen aus Dimension, Länge und Orientierung.⁴⁰

Der Schluss von Untersuchungen über individuelle Differenzen visueller und räumlicher Fähigkeiten besagt, dass visuelles Vorstellen zu räumlichen Testleistungen beitragen kann. Räumliche Aufgaben können jedoch auch mit Hilfe nicht-visueller Strategien bearbeitet werden.⁴¹ Befunde sprechen für die Unabhängigkeit von Komponenten der visuellen Vorstellungsfähigkeit von räumlichen Fähigkeitskomponenten.⁴²

3.1.7. Was sind räumliches Vorstellungsvermögen und räumliche Wahrnehmung?

Es ist schwer eine Definition von räumlichem Vorstellungsvermögen zu geben. Es herrscht keine Einigkeit über eine exakte Definierung dieses Begriffs, weil Raumvorstellungsvermögen kein einheitliches Phänomen ist, sondern ein Konstrukt aus verschiedenen Einzelfertigkeiten.⁴³

Räumliche Wahrnehmung steht in direktem Kontakt mit dem Gegenstand. Als Grundlage für räumliche Vorstellungen dient die Wahrnehmung. Räumliche Vorstellung muss auf eigener Ebene all das rekonstruieren, was diese Wahrnehmung auf dem Gebiet der direkten Kontakte mit dem Gegenstand bereits zuvor „aufgenommen“ hat. Das erklärt, warum Wahrnehmung viel schneller verläuft als Vorstellung.⁴⁴

³⁹ Schuhmann-Hengsteler, Entwicklung, S. 20

⁴⁰ Bischof, Unterschiede, S. 64

⁴¹ Hänggi, Vorstellungsfähigkeit, S. 90

⁴² Hänggi, Vorstellungsfähigkeit, S. 149

⁴³ Claudia Quaiser-Pohl, Die Fähigkeit zur räumlichen Vorstellung. Zur Bedeutung von kognitiven und motivationalen Faktoren für geschlechtsspezifische Unterschiede, 1998, Waxmann Verlag, Münster, S. 11

⁴⁴ Scharf, Fähigkeiten, S. 22

Räumliche Vorstellung ist nicht einfach die bildliche Vorstellung irgendeiner äußeren Tatsache, sondern auch die verinnerlichte Handlung.⁴⁵

Es gibt zwei Arten von Raumvorstellung. Erstens die lediglich anschauliche, eine innere Imitation der zuvor wahrgenommenen Tatsache. Diese wird begünstigt oder gehemmt von aktuell wahrgenommenen Konfigurationen.

Zweitens die Raumvorstellung die sich auf Operationen gründet. Sie befreit sich von jeglicher wahrgenommenen Konfiguration. Es existieren alle Übergangsstufen zwischen diesen beiden Extremen.⁴⁶

McGee unterscheidet zwei voneinander unabhängige Raumvorstellungsfaktoren. Visualization ist die Fähigkeit zu visualisieren, also zum Beispiel herauszufinden, wie ein zusammengefalteter Gegenstand auseinandergefaltet aussehen würde. Mit Orientation bezeichnet McGee die Fähigkeit einer Person, Beziehungen zwischen verschiedenen Stimuli zu entdecken und bestimmte Reizmuster wahrzunehmen.⁴⁷

Außerdem kann nach Linn und Petersen räumliches Vorstellungsvermögen aus vier Perspektiven betrachtet und untersucht werden. Die psychometrische Perspektive legt ihren Schwerpunkt auf die Messung des Raumvorstellungsvermögens mit psychometrischen Tests. Dabei geht es um die Berechnung von Korrelationen zwischen den Ergebnissen von Probanden in unterschiedlichen Raumvorstellungstests. Grundlage sind einzelne Faktoren der Raumvorstellung. Zur kognitiven Perspektive gehören die Prozesse die in einem Individuum bei der Lösung von Raumvorstellungsaufgaben ablaufen. Die strategische Perspektive beschäftigt sich mit der Identifikation qualitativ unterschiedlicher Strategien, die bei Raumvorstellungsaufgaben angewandt werden. Die differentielle Perspektive unterscheidet in der Raumvorstellung zwischen unterschiedlichen Populationen, also zum Beispiel zwischen Männern und Frauen.⁴⁸

Räumliches Vorstellungsvermögen muss ein recht breites Spektrum an verschiedenen Unterfähigkeiten subsumieren. So gibt es auch bei der Analyse von räumlichem Vorstellungsvermögen unterschiedliche Ansätze.

⁴⁵ Piaget, Entwicklung, S. 527

⁴⁶ Die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kinde, Jean Piaget, Bärbel Inhelder, u.a., S. 200

⁴⁷ Quaiser-Pohl, Fähigkeit, S. 12

⁴⁸ Quaiser-Pohl, Fähigkeit, S. 11

Die kognitive Perspektive behandelt auch interne Prozesse und nicht nur beobachtetes Verhalten. Das heißt, es ist nicht nur das Testergebnis Indikator für den Raumvorstellungsprozess, sondern es wird auch auf gleichzeitige mentale Vorgänge aufgrund bestimmter Parameter geschlossen. In der Kognitionspsychologie geht es darum, auch Prozesse aufzudecken, die bei der Verarbeitung von bestimmten Informationen im Gehirn ablaufen.⁴⁹

Bei der strategischen Perspektive geht es um die systematische Analyse der Strategien, die zur Lösung von Raumvorstellungsaufgaben angewandt werden. Zu diesen Strategien gehören mentale Rotation, das geistige Falten von Vorlagen, das Bewegen von Reizvorlagen, Perspektivwechsel und ähnliche.⁵⁰

Abschließend folgen noch ein paar unterschiedliche Definitionen von „räumlichem Vorstellungsvermögen“.

Räumliches Vorstellungsvermögen kann allgemein als die Fähigkeit bezeichnet werden, in der Vorstellung räumlich zu sehen, mit dreidimensionalen Objekten mental zu hantieren und diese Vorgänge auch abzuspeichern und zu erinnern.⁵¹

Rost meint mit Raumvorstellung eine Gruppe von Fähigkeiten, die es ermöglicht sich gedanklich im zweidimensionalen und dreidimensionalen Raum zu orientieren und zu bewegen.⁵²

Gittler definiert Raumvorstellung wie folgt:

„Raumvorstellung ist die Fähigkeit Gegenstände beziehungsweise räumliche Gegebenheiten in unserer Vorstellung statisch und dynamisch abzubilden, das heißt dass wir uns nicht nur ruhende Objekte, sondern auch deren Bewegungen im Raum vorstellen können, ohne diese sprachlich – und sei es nur in Gedanken – ausformulieren zu müssen.“⁵³

Die folgende englische Definition des räumlichen Vorstellungsvermögens stammt von Linn und Petersen:

⁴⁹ Quaiser-Pohl, Fähigkeit, S. 17

⁵⁰ Quaiser-Pohl, Fähigkeit, S. 20

⁵¹ Scharf, Fähigkeiten, S. 3

⁵² Scharf, Fähigkeiten, S. 3

⁵³ Scharf, Fähigkeiten, S. 4

“Spatial ability generally refers to skill in representing, generating, and recalling symbolic, nonlinguistic information.”⁵⁴

Übersetzt heißt sie: ”Räumliches Vorstellungsvermögen bezieht sich generell auf die Fähigkeiten in Repräsentation, Generalisierung und dem Aufrufen beziehungsweise Abrufen von Symbolen und nichtsprachlichen Informationen.“

Diese Definition fasst meiner Meinung nach verschiedene Ansichten, Theorien und Ideen von räumlichem Vorstellungsvermögen ganz gut zusammen.

3.1.8. Räumliche Fähigkeiten und deren Anwendung

Elmar Souvignier, der Autor von „Förderung räumlicher Fähigkeiten. Trainingsstudie mit lernbeeinträchtigten Schülern“, definiert: “Unter dem Begriff der räumlichen Fähigkeiten wird die Fähigkeit verstanden, mentale Repräsentationen figuraler Darstellungen aufzubauen, auf die – mit möglichst hoher Genauigkeit und Schnelligkeit – räumliche Transformationsprozesse wie Rotation und Synthese angewendet werden, wobei Strategien zur Reduzierung der Komplexität der Vorstellungen entwickelt und umgesetzt werden. Räumliche Fähigkeiten umfassen zudem die in Bezug auf räumliche Anforderungen unspezifischen Prozesse der visuellen Wahrnehmung, des Analysierens und des Vergleichens.“⁵⁵

Räumliche Fähigkeiten sind die Voraussetzung für die Verarbeitung von visuell-räumlichen Informationen. Sie sind zum Beispiel von Nutzen bei der Orientierung in einem unbekannten Gebäude, beim Nachbauen eines Papierfliegers nach einer Anleitung oder beim Teilen eines Kuchen in zwölf gleich große Stücke.⁵⁶

Räumliche Fähigkeiten beziehen sich auf die Performanz im Umgang mit räumlichem Material. Im Gegensatz dazu impliziert räumliches Denken eine festgelegte prozesshafte Qualität.⁵⁷

⁵⁴ Scharf, Fähigkeiten, S. 4

⁵⁵ Souvignier, Förderung, S. 27

⁵⁶ Souvignier, Förderung, S. 4

⁵⁷ Souvignier, Förderung, S. 13

Wie kann man räumliche Fähigkeiten kategorisieren? Dazu gibt es unterschiedliche Ansichten. Einige davon sind in Abbildung Nummer eins zusammengefasst.

Carroll	Lohman	Linn&Petersen	McGee
visualization	visualization	visualization	visualization
spatial relations	spatial orientation	mental rotation	orientation
closure speed	speeded rotation	spatial perception	
flexibility of closure	flexibility of closure		
perceptual speed	closure speed		
serial pictorial integration	spatial scanning		
spatial scanning	perceptual speed		
imagery	serial integration		
length estimation	visual memory		
	kinesthetic		

Abbildung 1: Kategorisierung räumlicher Fähigkeiten⁵⁸

Es folgt eine Definition räumlicher Fähigkeiten von Lohmann, mit Bezug auf individuelle Herangehensweise an räumliche Anforderungen.

„Thus, the finding that subjects who do well on complex spatial tasks often change their strategies as items become more difficult may mean that in some sense, spatial ability means having an extensive and differentiated store of procedural knowledge.“⁵⁹

Diejenigen, die gut im Lösen von schwierigen und komplexen räumlichen Aufgaben sind, wechseln oft ihre Strategien, wenn die Anforderungen anspruchsvoller werden. Das bedeutet räumliche Fähigkeiten zu besitzen heißt, ein breites und variationenreiches Wissen an Lösungswegen und Ansätzen zu haben.

Wie steht es nun um die Anwendung räumlicher Fähigkeiten beziehungsweise um deren Förderung?

Allgemein gibt es zwei Vorgehensweisen bei der Beschreibung von Strategien zur Lösung räumlicher Aufgaben. Bei der holistischen Strategie werden visuelle Vorstellungen als Ganzes mental bearbeitet. In mehreren logischen Schritten erfolgen die Lösungen bei der analytischen Strategie.⁶⁰

Für die individuelle Strategiewahl bei der Bearbeitung räumlicher Anforderungen, gibt es interne und externe Bedingungen. Vorwissen, Übung und individuelle Lernpräferenz stellen

⁵⁸ Souvignier, Förderung, S. 17

⁵⁹ Souvignier, Förderung, S. 23

⁶⁰ Souvignier, Förderung, S. 11

interne Voraussetzungen dar. Externe Bedingungen sind zum Beispiel die Aufgabenkomplexität.⁶¹

Nach Just und Carpenter, Kyllonen, Lohmann und Woltz findet eine Zerlegung von Aufgaben in mehreren Phasen statt. In der Such- und Entkodierungsphase wird die Grundfigur analysiert. Mentale Manipulation der Ausgangsreize findet in der Rotations- oder Synthesephase statt. In der Vergleichsphase wird die eigenständig generierte Vorstellung bewertet.⁶²

Somit ist der Schluss von Kyllonen, Lohman und Snow leicht nachzuvollziehen, dass:

„...different kinds of strategy training are needed by subjects with different aptitude profiles to meet different kinds of task difficulty“⁶³

Der Schluss von Kyllonen, Lohman und Snow sollte eigentlich einfach nachzuvollziehen sein: Personen mit unterschiedlichen Begabungsprofilen brauchen unterschiedliche Strategietrainings für verschiedene Aufgaben mit differenzierten Anforderungen.

Ein Folgerung von Elmar Souvignier ist, dass:

„...besonders wirksame kognitive Förderung durch die Kombination aus dem Training einer kognitiven Basisfunktion (induktives Denken; räumliche Fähigkeiten) und einer Förderung prozeduraler Kompetenzen (formale Denkopoperationen, Selbstreflexion) zu erreichen ist. Für die Förderung räumlicher Fähigkeiten bedeutet dies, dass ein übendes Training durch ein Strategietraining ergänzt werden sollte, um räumliche Fähigkeiten über den Charakter einer Lernvoraussetzung hinaus in den Status eines aktiv einsetzbaren „kognitiven Werkzeugs“ zu versetzen.“⁶⁴

Somit scheinen Trainingsprogramme mit drei Ebenen sinnvoll. Fertigkeiten in einem konkreten Anwendungsbereich müssen trainiert werden, zum Beispiel die Rechenfähigkeiten. Weiters muss der kognitionspsychologische Inhaltsbereich gefördert werden, zu dem unter anderem Denkfähigkeiten gehören. Zum Dritten muss man sich der Ebene prozeduraler Fähigkeiten zuwenden, wie den strategischen und metakognitiven Fähigkeiten.⁶⁵

⁶¹ Souvignier, Förderung, S. 13

⁶² Souvignier, Förderung, S. 22

⁶³ Souvignier, Förderung, S. 23

⁶⁴ Souvignier, Förderung, S. 173

⁶⁵ Souvignier, Förderung, S. 95

Auch das CASE-Programm bietet interessante Ansätze, wenn es um die Förderung räumlicher Fähigkeiten geht. Das Programm wurde von Adey und Shayer entwickelt und steht für „Cognitive acceleration through science education“. Dabei finden in einem 14-tägigen Rhythmus „Thinking Science Lessons“ im Rahmen des regulären Unterrichts statt, die die Denk- und Arbeitsweisen im Sinne formaler Operationen nach Piaget fördern sollen.

Das CASE-Programm hat fünf Säulen. Zum Einen geht es um konkrete Verarbeitung, also Erfahrungen mit Arbeitsmaterialien und neuen (Fach-)Begriffen. Im Rahmen des kognitiven Konflikts spielt problemorientierter Unterricht eine Rolle, der die Entwicklung neuer Denkweisen fördern soll. Die Konstruktionszone bildet den Übergang von der Lösung des kognitiven Konflikts zur „Zone der nächsten Entwicklung“. Bei Säule vier, der Metakognition, soll zum Nachdenken über das eigenen Denken und Handeln angeregt werden. Säule fünf, Bridging, stellt den Transfer des erworbenen Wissens auf andere Bereiche und Situationen dar.⁶⁶

Bei problemorientiertem Mathematikunterricht ist es sicher hilfreich, sich an diesem CASE-Programm zu orientieren.

4. Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens

Wie sieht eigentlich das räumliche Vorstellungsvermögen bei Kindern aus? Wie entwickelt es sich und ab welchem Alter kann man bei Kindern beziehungsweise Jugendlichen mit Fähigkeiten im räumlichen Vorstellungsvermögen rechnen?

Das sind meiner Meinung nach interessante Fragen, um nicht mit falschen Erwartungen an die SchülerInnen heranzutreten.

Die Frage ist nun wie das Kind seinen Raumbegriff ausbildet und ob man überhaupt von dem Raumbegriff des Kindes sprechen kann?

Den kindlichen Raumbegriff gibt es nicht. Wir müssen die kindliche Raumvorstellung als das Insgesamt seiner räumlichen Beziehungsvorstellungen verstehen, und diese unterliegen im Verlaufe der Entwicklung einem fundamentalen Wandel.⁶⁷

⁶⁶ Souvignier, Förderung, S. 71

⁶⁷ Souvignier, Förderung, S. 11

Psychologisch vorrangig sind die einfachsten topologischen Relationen wie zum Beispiel „benachbart und getrennt“. „Benachbart“ ist die grundlegende Eigenschaft der Handlungen, aus denen der Raum entsteht. „Getrennt“ ist eine weitere wesentliche und „Reihenfolge“ stellt die dritte grundlegende topologische Eigenschaft dar.⁶⁸

Die Entwicklung der Reihenfolgeentsprechungen verläuft sehr stetig. Sie beginnt mit lediglich wahrgenommenen Ähnlichkeiten und geht bis zur Herstellung einer direkten oder umgekehrten Reihenfolge.⁶⁹

Schwierigkeiten beim Konstruieren von Reihenfolgerelationen können sehr aufschlussreich für zugleich motorische und intellektuelle Schwierigkeiten von ganz allgemeinem Charakter sein.⁷⁰

Verfolgt man die Entwicklung der Perspektiven, so gibt es drei Stadien. In Stadium eins fehlt jegliches Verständnis einer vorgestellten Perspektive. In Stadium zwei haben die Kinder mit einer vollständigen oder teilweise fehlenden Differenzierung der möglichen Blickwinkel auf den Gegenstand zu kämpfen. Der Gegenstand wird nur in sich selbst dargestellt, unabhängig von dem Winkel, unter dem der Betrachter ihn wahrnimmt. Ab Stadium drei, mit einem Alter von ungefähr sieben Jahren, sind die Kinder zu einer deutlichen Differenzierung der Blickwinkel fähig.⁷¹

Die Entdeckung der Perspektive hängt mit einer gleichzeitigen Differenzierung und Koordinierung der Blickwinkel, das heißt einer Art Loslösung vom für sie allein betrachteten Gegenstand, zusammen. Mit Einher geht die Erkenntnis der Beziehung, die den Gegenstand mit dem Blickwinkel der Person verbindet.⁷²

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass das Kind anfänglich unfähig ist, sich die Perspektive vorzustellen, in der es einen bestimmten Gegenstand sieht. Mit der Zeit wird jedoch die Konstruktion der Perspektiven und Projektionen bei der Verlagerung eines einzelnen Gegenstandes möglich. Das Kind erlangt die Fähigkeit Perspektiven ohne Schwierigkeiten nachzubilden.⁷³

Es gibt noch weitere wichtige Fähigkeiten, die das räumliche Vorstellungsvermögen auszeichnen.

⁶⁸ Souvignier, Förderung, S. 110

⁶⁹ Piaget, Entwicklung, S. 114

⁷⁰ Piaget, Entwicklung, S. 129

⁷¹ Piaget, Entwicklung, S. 209

⁷² Piaget, Entwicklung, S. 225

⁷³ Piaget, Entwicklung, S. 285

Laut entwicklungspsychologischen und allgemeinspsychologischen Befunden, wird das Tiefensehen von Entwicklungspsychologen und Medizinern als angeborene Fähigkeit betrachtet. Das Tiefensehen muss aber durch Erfahrungen, wie Eigenbewegung im Raum, gefestigt werden. Die Dauer der dafür kritischen Periode in der Kindheit ist leider unbekannt. Eine weitere Fähigkeit ist die Wahrnehmungskonstanz der Sehdinge. Das bedeutet Personen und Gegenstände als Gestalten erfassen zu können. Am Ende des ersten Lebensjahres erkennt das Kind bekannte Menschen bereits aus beträchtlicher Entfernung, auf Grund der Bekanntheitsqualität von Konturen und dem Transponieren von Größen.

Mit dem Erfassen des Raumes macht das Kind durch Greifen und Tasten erste Erfahrungen mit der Dreidimensionalität der Gegenstände. Kaum hat das Kind laufen gelernt, macht es Bekanntschaft mit Dimensionen, Tiefe, Breite und Höhe. Es hat jedoch noch keine Vorstellung von Raum und von den Beziehungen der drei Dimensionen zueinander.⁷⁴

4.1. Piaget

Jean Piaget war ein Schweizer Psychologe. Er wurde am 9.8.1896 geboren und verstarb am 16.9.1980. In den frühen 1920er Jahren beschäftigte sich Piaget mit den Zusammenhängen zwischen Sprache und Denken des Kindes. 1930 veröffentlichte er Werke über das Weltbild und die Moral des Kindes. Es folgten Werke über die frühkindliche Entwicklung. In ihnen beschreibt und analysiert Piaget die frühe Entwicklung seiner eigenen drei Kinder. Die wichtigsten Monografien zur Entwicklung im Schulalter publiziert er zwischen 1940 und 1955. In diesem Alter überwindet das Kind sein anschauliches, praktisches Denken zugunsten eines konkret-operatorischen und reversiblen und sodann eines formal-systematischen Denkens.

Seine Arbeiten erlangten auch für die Pädagogik große Bedeutung. Vor allem seine Untersuchungen zur kognitiven Entwicklung des Kindes wirkten hier bahnbrechend.⁷⁵

Piagets große Entdeckung ist, dass das Kind im Zuge der Entwicklung der Raumvorstellung eine Reihe von Stufen durchläuft, die durch verschiedene Geometrien gekennzeichnet sind.⁷⁶

⁷⁴ Dinter, Pichler, Zankl, Riedl, Berger, Stigl, Hasenberger, Geschlechtsunterschiede bei der Körper-/Raum-Wahrnehmungs- und-Vorstellungsfähigkeit im Pflichtschulalter, 1989, Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Sport, Wien, S. 15

⁷⁵ Brockhaus Enzyklopädie, 21. Auflage, F.A. Brockhaus, Leipzig, Mannheim, 2006, Band 21, S. 446

Seine Annahme ist, dass Wahrnehmungsrelationen projektiver, also Perspektiven, und metrischer Ordnung, wie das Abschätzen von Größen bei wechselnder Entfernung, später auftreten, als elementar räumliche Relationen.⁷⁷

Auch die Wahrnehmung des Raumes ist nicht von Anfang der geistigen Entwicklung an fertig vorhanden.

Piaget gliedert die Entwicklung des sensomotorischen Raumes in drei Perioden.

Die Dauer der ersten Periode geht von der Geburt des Kindes bis zum vierten Lebensmonat. Periode eins ist das Stadium der reinen Reflexe und des Erwerbs erster Gewohnheiten. Die elementarsten räumlichen Relationen der Wahrnehmung sind Benachbartsein, Trennung, Reihenfolge, Umgebensein und Kontinuität. Es fehlt jedoch die Koordination der sensorischen Räume, die Permanenz von festen Gegenständen und die Größen- und Formkonstanz.

Die zweite Periode reicht vom vierten bis zum zwölften Lebensmonat und ist das Stadium der sekundären zirkulären Reaktionen. Das Kind beginnt Gegenstände aktiv zu ertasten und zeigt die ersten verstandesmäßigen Verhaltensweisen. In dieser Periode sind schon eine Permanenz der Gegenstände und eine perspektivische Konstanz von Form und Größe gegeben.

Tertiäre zirkuläre Reaktionen treten in Periode drei auf. Das Kind beginnt durch Tastversuche zu experimentieren und zeigt die ersten verinnerlichten und raschen Koordinierungen.⁷⁸

Der rein wahrgenommene Raum wird zu einem vorgestellten Raum.⁷⁹

Auch die Entwicklung der räumlichen Operationen findet laut Piaget und Inhelder in drei Räumen statt, die in verschiedene Stufen eingeteilt sind.

Erstens gibt es den topologischen Raum. Die topologische Analyse des Raumes befasst sich nur mit der Figur selbst und deren Eigenschaften und nicht mit Relationen zu anderen Figuren oder dem Gesamtsystem. Die Grundlage der räumlichen Orientierung bilden Nähe, Trennung, Reihenfolge, Umgebensein und Kontinuität.

Verständnis des projektiven Raumes beginnt mit der Schulzeit. Die Koordinierung zwischen unterschiedlichen räumlichen Gegenständen wird vorausgesetzt.

⁷⁶ Piaget, Entwicklung, S.12

⁷⁷ Piaget, Entwicklung, S. 24

⁷⁸ Scharf, Fähigkeiten, S. 21

⁷⁹ Piaget, Entwicklung, S. 25f.

Der euklidische Raum entwickelt sich teilweise parallel zu den projektiven Beziehungen. Er befasst sich mit der Koordinierung zwischen Gegenständen und der durch die charakteristische Form dieser Koordinierung gebildeten Koordinatensysteme.⁸⁰

Auch die Entwicklung des räumlichen Bezugssystems der Horizontalen und der Vertikalen gliedert Piaget in drei Phasen.

In der ersten fehlt nahezu jegliches Verständnis des Koordinatensystems. So lehnen Kinder zum Beispiel Bäume an die Silhouette des Hügels an. Abbildung zwei ist ein Beispiel für eine solche Kinderzeichnung.

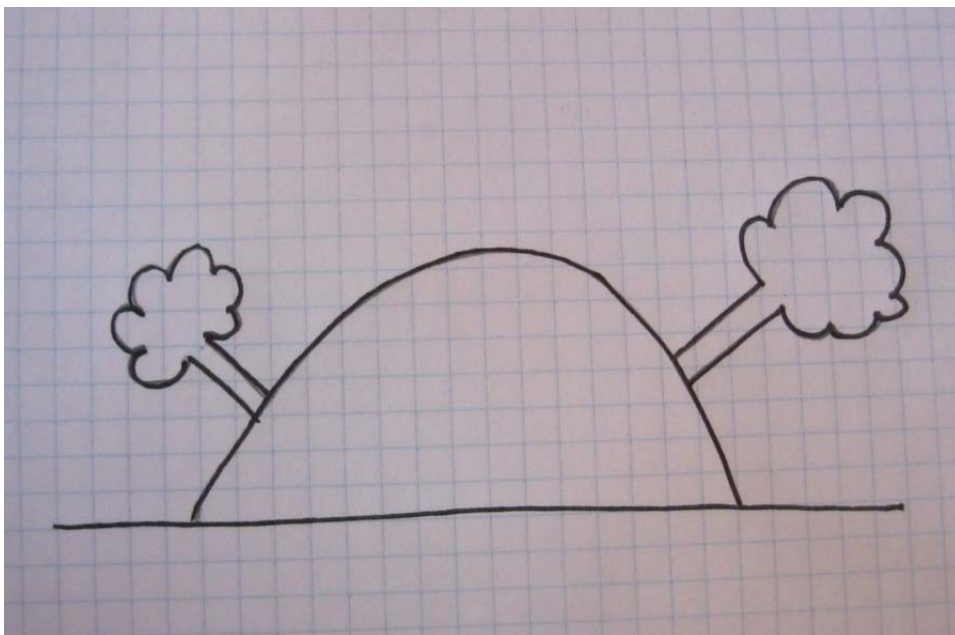


Abbildung 2: Kinderzeichnung

Mit fünf bis sieben Jahren haben Kinder die Fähigkeit Gegenständen spezifische, fixierte Positionen im Raum zuzuweisen. Fortschritte in Stadium zwei sind zu bemerken, wenn die Kinder mit immer größeren Variationen in ihren Leistungen aufzeigen.

Zur Entdeckung der Horizontalen und Vertikalen kommt es mit sieben bis acht Jahren. Ab da können Horizontalen und Vertikalen in ein räumliches Gesamtsystem eingeordnet werden.

Mit elf bis zwölf Jahren haben die Kinder ein vollständiges Verständnis des euklidischen Systems.⁸¹

⁸⁰ Scharf, Fähigkeiten, S 22f.

⁸¹ Lohaus, Denken, S. 99

5. Probleme des räumlichen Vorstellungsvermögens

Probleme des räumlichen Vorstellungsvermögens sind der eigentliche Grund, warum ich genau dieses Thema für meine Arbeit gewählt habe.

Das heißt im folgenden Abschnitt möchte ich zusammenfassen, welche Probleme auftreten können, ob es Geschlechtsunterschiede beim räumlichen Vorstellungsvermögen gibt und wie diese Schwierigkeiten erklärt werden können.

5.1. Wie, wo und wann treten Probleme des räumlichen Vorstellungsvermögens auf?

„Erst wenn man spezifische Defizite in Bezug auf den Lösungsprozess bei schlechten Lösern identifizieren kann, weiß man, was schlechte Raumvorsteller/innen zu schlechten Raumvorsteller/innen macht. Eine solche Erkenntnis gilt wiederum als unabdingbare Voraussetzung dafür, die Bedeutung vermuteter verursachender Bedingungen, wie bestimmter Vorerfahrungen und motivationaler Variablen, zu untersuchen und zu verstehen.“⁸²

Linn und Petersen definieren vier Forschungsperspektiven im Bereich des räumlichen Denkens.

Die differentielle Perspektive ist eine Beschreibung und Erklärung interindividueller Unterschiede zwischen Personen und Personengruppen. Die psychometrische Perspektive beschreibt die Interkorrelation von räumlichen Teilfähigkeiten und die Identifizierung grundlegender Dimensionen räumlicher Fähigkeiten. Die kognitive Perspektive versucht eine Identifikation der Prozesse, die der Lösung räumlicher Aufgabenstellungen zugrunde liegen. Die strategische Perspektive ist eine Analyse qualitativ unterschiedlicher Strategien, die im Rahmen konkreter Aufgabenstellungen zum Einsatz gelangen.⁸³

⁸² Quaiser-Pohl, Fähigkeit, S. 9

⁸³ Lohaus, Denken, S. 11

Diese Gliederung nach Linn und Petersen ist ein eigenschafts- und informationsverarbeitungsorientierter Zugang zur Analyse räumlichen Denkens.

Betrachtet man diese Einteilung nach Linn und Petersen, kann man gut Bereiche des räumlichen Vorstellungsvermögens herausfiltern, bei denen es zu Schwierigkeiten kommen kann. Anders ausgedrückt Probleme können auftreten aufgrund fehlender räumlicher Teilfähigkeiten, falscher Lösungswege, -prozesse und -strategien, aber einfach auch vorzugsweise bei bestimmten Personen und Personengruppen.

Zur Erfassung der Vorstellungsleistung gibt es zwei Möglichkeiten.

Bei subjektiven Tests kommt es zum Einsatz von Introspektion. Dabei trifft der Proband selbst die Beurteilung seiner inneren Bilder.

Bei objektiven Tests ist Introspektion ausgeschlossen. Diese Verfahren haben mehr die Form einer „Überprüfung“.⁸⁴

Abschließend ist zu sagen, dass es schwer ist immer genau zu definieren wo, wie und wann genau die Probleme im räumlichen Vorstellungsvermögen auftreten. Probleme im räumlichen Vorstellungsvermögen sind nicht so einfach auf einen Punkt zu reduzieren wie zum Beispiel „Frauen haben einfach Probleme mit Raumvorstellungsaufgaben“.

Räumliche Fähigkeiten sind ein Forschungsgebiet mit verschiedenen Disziplinen, wie Biologie, Geographie, Psychologie und weiteren. Bisher gibt es noch relativ wenig interdisziplinäre Forschungsarbeit. Natürlich wäre es interessant die Interaktion stärker ins Blickfeld zu rücken um die mehrdimensionale Konzeption räumlicher Fähigkeiten mehr zu berücksichtigen und genauer zu ergründen.⁸⁵

⁸⁴ Merbaul, Vorstellungsfähigkeit, S. 34

⁸⁵ Lohaus, Denken, S. 58

5.2. Gibt es Geschlechtsunterschiede beim räumlichen Vorstellungsvermögen?

Maccoby und Jacklin unterscheiden vier Entwicklungsbereiche, in denen Geschlechtsunterschiede relativ konsistent nachweisbar sind. Die Bereiche sind aggressives Verhalten, verbale Fähigkeiten, mathematisches Denken und räumliche Fähigkeiten.⁸⁶

Linn und Petersen kamen aufgrund diverser Studien zu dem Schluss, dass es innerhalb des Bereichs räumlicher Fähigkeiten die deutlichsten Geschlechtsunterschiede bei Aufgaben zur mentalen Rotation gibt. Dann kommen Schwierigkeiten bei der räumlichen Wahrnehmung und die geringsten Unterschiede existieren bei der räumlichen Visualisierung.⁸⁷

Studien zufolge haben männliche Probanden bessere Fähigkeiten im Bereich der Vorstellung geometrisch-schematischer Inhalte. Dafür können sich Mädchen erinnerbare Inhalte besser vorstellen. Burschen haben eine höhere Einschätzung der eigenen Fähigkeiten und sind allgemein motiviert Raumvorstellungsaufgaben zu bearbeiten. Mädchen lassen sich eher von solchen Aufgaben abschrecken.⁸⁸

Für sie ist es nicht so schlimm, wenn sie Raumvorstellungsaufgaben nicht lösen können. Deshalb geben sie sich weniger Mühe mit solchen Beispielen. Das heißt sie geben zum Beispiel einfach schneller auf, was sich natürlich dann auf die Leistungen negativ auswirkt.⁸⁹

Über das Vorhandensein von Unterschieden in mathematischen Fähigkeiten ist man sich einig, Uneinigkeit herrscht jedoch über den Zeitpunkt des ersten Auftretens einer mathematischen Überlegenheit der Jungen. Dies herauszufinden ist schwer, da es nicht für jede Altersgruppe Tests zur Messung der mathematischen Fähigkeiten gibt, beziehungsweise die Tests für verschiedene Altersstufen nicht wirklich vergleichbar sind.⁹⁰

Maccoby und Jacklin gingen bei ihrer Forschung von zwei Fragen aus:

Welche Belege gibt es, dass männliche Probanden bessere Raumvorsteller sind als weibliche?

Wie groß ist das Ausmaß der beobachteten Geschlechtsunterschiede?

⁸⁶ Lohaus, Denken, S. 23

⁸⁷ Lohaus, Denken, S. 23

⁸⁸ Merbaul, Vorstellungsfähigkeit, S. 153

⁸⁹ Quaiser-Pohl, Fähigkeit, S. 137

⁹⁰ Quaiser-Pohl, Fähigkeit, S. 37

Um für diese Forschungsfragen eventuelle Antworten zu finden, analysierten die zwei 1400 Forschungsarbeiten zu Geschlechtsunterschieden in psychologischen Merkmalen.

Sie kamen zu dem Schluss, dass Jungen im Mittelwert überlegen sind. Der Leistungsvorsprung männlicher Probanden beginnt jedoch erst mit der Adoleszenz.⁹¹

Alyman und Peters behaupten, dass Geschlechtsunterschiede bei räumlichen Fähigkeiten „verschwinden“, wenn alltagsnähere Objekte und Situationen bei der Konstruktion von Tests Verwendung finden.⁹²

Interessant ist auch, dass laut umfangreichen Stichproben über den Zeitraum von 1978 bis 1988, Geschlechtsunterschiede von Jahr zu Jahr abnehmen.⁹³

5.3. Erklärungsansätze für die Probleme und Geschlechtsunterschiede beim räumlichen Vorstellungsvermögen

Geschlechtsspezifische Leistungsunterschiede im räumlichen Vorstellungsvermögen sind seit langem stabiler Befund der psychologischen Geschlechtsunterschiedsforschung. Für das schlechtere Abschneiden weiblicher Probandinnen in Studien werden genetische, hormonelle, biologische Gründe, Umwelteinflüsse und geschlechtsspezifische Sozialisation verantwortlich gemacht.⁹⁴

In der Literatur ist ein breites Spektrum an Erklärungsmodellen zu finden, die versuchen den Unterschied von Knaben und Mädchen bei der Körperwahrnehmungs-, Raumwahrnehmungs- und Vorstellungsfähigkeit darzustellen. Biologische Ansätze suchen Ursachen in genetischen und beziehungsweise oder hormonalen Bedingungen. Sozialisationstheoretische Ansätze legen den Erklärungsschwerpunkt in unterschiedlich soziokulturell bedingte Einflüsse.⁹⁵

⁹¹ Quaiser-Pohl, Fähigkeit, S. 41

⁹² Schuhmann-Hengsteler, Entwicklung, S. 25

⁹³ Schuhmann-Hengsteler, Entwicklung, S. 24

⁹⁴ Quaiser-Pohl, Fähigkeit, S. 9

⁹⁵ Dinter, Geschlechtsunterschiede, S. 97

5.3.1. Biologische Erklärungsansätze

Einer der biologischen Erklärungsansätze ist die Annahme der X-rezessiven Vererbung räumlicher Fähigkeiten. Die Vermutung sieht so aus, dass die Erbanlagen für räumliche Fähigkeiten auf dem X-Chromosom lokalisiert sind und in zwei Allelen vorliegen, die die Ausprägung guter und weniger guter räumlicher Fähigkeiten bedingen. Das Allel mit weniger guten räumlichen Fähigkeiten besitzt die erbliche Dominanz. Mit der Grundannahme, dass beide Allele mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 auftreten, würde das bedeuten, dass die Hälfte der Männer und ein Viertel der Frauen gute räumliche Fähigkeiten besitzen.⁹⁶

Diverse Studien bezweifeln jedoch diese Hypothese der X-rezessiven Vererbung. So wurde zum Beispiel die Theorie der Vererbung laut Studie mit der Vererbung in der Realität verglichen. Dabei gab es zu wenig Übereinstimmung um die Theorie zu belegen.⁹⁷

Andere vermuten einen Zusammenhang zwischen dem Eintritt der Pubertät und auftretenden Geschlechtsunterschieden. Ein späterer Eintritt in die Pubertät bedeutet nach dieser Annahme bessere räumliche Fähigkeiten bei Frauen und Männern.⁹⁸

Zu den biologischen Erklärungsansätzen gehört auch der des Zusammenhangs zwischen der Hirnlateralisation und räumlichem Vorstellungsvermögen.

Im Laufe der Entwicklung spezialisieren sich die Hirnhälften für spezifische Funktionen. Die Rechte ist „verantwortlich“ für visuell-räumliche und ganzheitliche Verarbeitungsfunktionen und die Linke für verbale und analytisch-logische Denkprozesse. Der Erklärungsansatz ist nun, dass der Grad der Funktionsspezialisierung bei Männern größer ist und die Entwicklung der Hirnlateralisation bei Männern länger dauert. Daher haben sie mehr Zeit für eine größere Ausprägung der speziellen Funktionen. Das würde auch bedeuten, dass sie das räumliche Vorstellungsvermögen besser ausbilden können.⁹⁹

Aus evolutionsbiologischer Sicht liegt die Ursache in geschlechtstypischen Funktionsteilungen während der frühen Anthropogenese. Die Aufgabe der Männer war Jagd. Dafür war eine großflächige, räumliche Orientierung nötig. Die Aufgabe der Frauen war

⁹⁶ Schuhmann-Hengsteler, Entwicklung, S. 27

⁹⁷ Schuhmann-Hengsteler, Entwicklung, S. 29

⁹⁸ Schuhmann-Hengsteler, Entwicklung, S. 29

⁹⁹ Schuhmann-Hengsteler, Entwicklung, S. 30

Nahrungssammlung und Nachwuchssorge, also soziale Aufgaben für die räumliches Gedächtnis und sprachliche Kommunikationsfähigkeit nötig waren.¹⁰⁰

5.3.2. Sozialisatorische Erklärungsansätze

Sozialisatorische Erklärungsansätze gehen von einem differentiellen Erziehungsverhalten der Eltern aus.¹⁰¹

Als allgemeine Erkenntnis gilt, dass Mädchen und Jungen in den meisten Gesellschaften unterschiedliche soziale Erfahrungen machen. Diese tragen zur Entwicklung von Interessen und Fähigkeiten bei.

Die Frage ist nur, wie und in welchem Ausmaß die soziale Umwelt Fähigkeiten des räumlichen Vorstellungsvermögens beeinflussen kann? Die Reaktionen des Individuums auf Umweltreize und Reaktionen der sozialen Umwelt auf das Individuum und sein Verhalten stehen in wechselseitiger Abhängigkeit.¹⁰²

Es ist schwierig Umweltreize als Ursache für Raumvorstellungsunterschiede heranzuziehen, doch je nach dem wie diese Wechselbeziehungen aussehen, würde ich sagen, kann es zu positiven und negativen Beeinflussungen des räumlichen Vorstellungsvermögen kommen.

Freuds psychoanalytischer Ansatz geht von einer Übernahme der Geschlechterrollen aus. Hier sieht die männliche Geschlechterrolle bessere mathematische Fähigkeiten vor und die Weibliche bessere sprachliche Fähigkeiten.¹⁰³

Aus lerntheoretischer Sicht entwickeln sich Verhaltensweisen infolge von Verstärkung oder Bestrafung von Seiten der Umwelt. Auch bei geschlechtsspezifischem Rollenverhalten kommt es zur Verstärkung oder Bestrafung für Verhaltensweisen.¹⁰⁴

Das würde bedeuten ein Mädchen wird von den Eltern bestärkt mit Puppen zu spielen. Sich mit Bausteinen zu beschäftigen ist jedoch „untypisch“ für Mädchen und wird daher im

¹⁰⁰ Schuhmann-Hengsteler, Entwicklung, S. 32

¹⁰¹ Schuhmann-Hengsteler, Entwicklung, S. 34

¹⁰² Quaiser-Pohl, Fähigkeit, S. 61

¹⁰³ Quaiser-Pohl, Fähigkeit, S. 63

¹⁰⁴ Quaiser-Pohl, Fähigkeit, S. 64

Allgemeinen von Eltern weniger unterstützt. Burschen werden wiederum motiviert diversen Bautätigkeiten nachzugehen, aber nicht sich mit „Mädchenspielzeug“ auseinanderzusetzen.

Die kognitive Entwicklungstheorie schreibt primäre Bedeutung dem Prozess der Identifikation mit der Geschlechterrolle zu. Dabei kommt es zuerst zu der Erkenntnis, dass man einem bestimmten Geschlecht angehört und dann folgt die Entscheidung geschlechtsspezifisches Verhalten zu zeigen.¹⁰⁵

Als Mädchen oder Bursche entscheidet man sich also mehr oder weniger bewusst, für oder gegen das Hineinschlüpfen in typisches Rollenverhalten. Je nachdem wie „typisch“ diese Entscheidung ausfällt, wird sie von der Umwelt bestärkt oder nicht.

Empirische Befunde zur geschlechtsspezifischen Sozialisation zeigen, dass elterliche Erziehung viel Bedeutung für die Entstehung von Geschlechtsunterschieden im kognitiven Bereich hat. Eltern reagieren auf männliche und weibliche Säuglinge unterschiedlich. Auch die Wahl des Spielzeugs und des Spielverhaltens unterliegen geschlechtsspezifischen Einflüssen. Jungen besitzen meist „aktiv“ charakterisierende Spielzeuge, wie Baukästen, Autos und ähnliche. Mädchen beschäftigen sich eher mit „passiv“ charakterisierenden Geräten, wie Puppen, Puppenzubehör und dergleichen.¹⁰⁶

Es bleibt natürlich dem Selbstkonzept des Kindes beziehungsweise des Jugendlichen überlassen, wie stark geschlechtsbezogene Rollenstereotypen in das eigene Selbstkonzept aufgenommen werden.¹⁰⁷

Eine weitere Beobachtung ist der Zusammenhang zwischen Händigkeit und räumlichen Fähigkeiten. Gewisse Studien zeigen eine Überlegenheit der Rechtshänder.¹⁰⁸

¹⁰⁵ Quaiser-Pohl, Fähigkeit, S. 65

¹⁰⁶ Quaiser-Pohl, Fähigkeit, S. 68

¹⁰⁷ Schuhmann-Hengsteler, Entwicklung, S. 35

¹⁰⁸ Schuhmann-Hengsteler, Entwicklung, S. 38

5.3.3. Sozio-kulturelle Einflüsse

Die Annahme ist, dass zumindest ein Teil der bei räumlichen Fähigkeiten auffindbaren Varianz auf kulturell-sozialisatorische Faktoren beziehungsweise auf eine Interaktion zwischen kulturell-sozialisatorischen und biologischen Faktoren zurückzuführen ist.¹⁰⁹

Es ist zu beachten, dass die Entstehung räumlicher Fähigkeiten ein multifaktoriell bedingtes Entwicklungsgeschehen ist, beeinflusst von genetischen Faktoren, möglicherweise evolutionären Anpassungsleistungen, hormonalen Einflüssen, sozialisatorischen Faktoren von außen durch Verstärkung, Instruktion, Modellwirkung sowie innengesteuerte wie Ideal- und Realselbstkonzepte eigener Fähigkeiten. All diese Faktoren unterliegen während der Entwicklung Wechselwirkungsverhältnissen.¹¹⁰

Abschließend kann man sagen, dass es zum Thema Geschlechtsunterschiede beim räumlichen Vorstellungsvermögen eine schwer überschaubare Menge an Publikationen gibt.

Die Schwierigkeit einer genauen Analyse von Geschlechtsunterschieden liegt in der Vielzahl von unterschiedlichen beeinflussenden Faktoren. Es ist unmöglich alle Einflussgrößen zu erfassen und die Bedeutung für auftretende Unterschiede exakt abzugrenzen. Weiter erschwert wird das ganze dadurch, dass zentrale Begriffe wie Raumvorstellung, Raumwahrnehmung, und weitere nicht einheitlich operationalisiert sind. Das macht die Vergleichbarkeit von Untersuchungen noch schwieriger.¹¹¹

Schon an der Schwierigkeit Definitionen zu geben, sieht man mit welcher komplexer Angelegenheit wir hier konfrontiert sind.

Räumliches Vorstellungsvermögen und die damit verbundenen Begriffe lassen sich nicht auf ein paar wenige Eigenschaften reduzieren.

Das macht natürlich die empirische Untersuchung und die damit verbundene Auswertung der Ergebnisse um einiges schwieriger. Im Rahmen der Interpretation der Ergebnisse der Untersuchung werde ich mich auf Theorien und Vorstellungen aus dem theoretischen Teil beziehen.

¹⁰⁹ Schuhmann-Hengsteler, Entwicklung, S. 40

¹¹⁰ Schuhmann-Hengsteler, Entwicklung, S. 42

¹¹¹ Dinter, Geschlechtsunterschiede, S. 17

Aber bevor ich zum empirischen Teil meiner Arbeit übergehe möchte ich, die für mich bedeutendsten Aussagen aus dem theoretischen Teil, zusammenfassen.

Zum Begriff Vorstellung kann ich mit der Theorie der Vertreter der deutschsprachigen Kinderpsychologie der dreißiger Jahre am meisten anfangen, beziehungsweise bringen sie die unterschiedlichen Theorien am übersichtlichsten auf einen gemeinsamen Punkt. Vorstellungen und aktuelle Wahrnehmungen sind nicht aneinander gebunden. Vorstellungen sind viel mehr reproduzierte Gedächtnisspuren eines freien Gedächtnisses, jedoch nicht notwendigerweise vollständige Abbilder einmal vorhandener Wahrnehmungsinhalte.

Auch den Unterschied von Wahrnehmung und Vorstellung möchte ich noch einmal hervorheben. Wir fassen Wahrnehmung als Erkennen der Gegenstände durch direkten Kontakt mit ihnen und Vorstellung als das „Sehen“ von nicht anwesenden Gegenständen auf.

Auch räumliches Vorstellungsvermögen lässt sich nicht so einfach definieren, beziehungsweise ist man sich über eine einheitliche Definition nicht einig. Mit ein Grund dafür ist sicher, dass sich die Raumvorstellung aus verschiedenen Einzelfertigkeiten zusammensetzt.

Die folgende Begriffsdefinition bringt diese Zusammenhänge am Besten auf den Punkt.

“Spatial ability generally refers to skill in representing, generating, and recalling symbolic, nonlinguistic information.”¹¹² Hier wird die Komplexität räumlichen Vorstellungsvermögens beschrieben.

Ziel war es mit dem gesammelten Wissen, Theorien und Erklärungsansätzen eine geeignete Basis für meine empirische Untersuchung und die folgende Interpretation dieser, zu schaffen. Idee hinter der Gestaltung der empirischen Untersuchung war, Vorstellungsprobleme durch die Wahrnehmung mit Hilfe des Pyramidenmodells zu optimieren.

¹¹² Scharf, Fähigkeiten, S. 4

6. Der Satz von Pythagoras und seine Anwendung im Körper

6.1. In welcher Schulstufe

Die Anwendung des Pythagoras im Körper ist Teil des Mathematikstoffes der achten Schulstufe. „Wo“ findet man dieses Kapitel in Schulbüchern? In den von mir analysierten Lehrbüchern wird der Satz von Pythagoras in der regelmäßigen quadratischen Pyramide, in der regelmäßigen rechteckigen Pyramide und im Oktaeder angewandt. Daher finden sich relevante Beispiele jeweils im Kapitel Körper und dort hauptsächlich bei der regelmäßigen Pyramide.

Daher habe ich beschlossen mich auf die Anwendung des Pythagoras in der regelmäßigen Pyramide zu konzentrieren.

Wie ist dieser Lehrstoff im Lehrplan der Allgemein Höher Bildenden Schule verankert?

Im Kapitel Unterrichtsinhalte stehen unter Geometrie einige relevante Aspekte. Ihnen zufolge sollen SchülerInnen mit grundlegenden geometrischen Objekten und mit Beziehungen zwischen diesen Objekten vertraut gemacht werden. Das Erlernen von zeichnerischen Darstellungen von ebenen und räumlichen Gebilden gehört genauso dazu wie die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens.

Für welche Bildungsbereiche liefert das Thema „Pyramide“ Beiträge?

Ich würde sagen die Pyramide hängt mit Natur, Technik, Kreativität und Gestaltung zusammen.

Unter Punkt 4.3. Arbeiten mit Figuren und Körpern des Lehrplanes steht:

- den Lehrsatz des Pythagoras für Berechnungen in ebenen Figuren und in Körpern nutzen können
- Berechnungsmöglichkeiten mit Variablen darstellen können¹¹³

Beim ersten dieser zwei Punkte kommt genau das vor, worum es in meiner Arbeit geht.

¹¹³ Lehrplan Mathematik AHS, <http://www.bmukk.gv.at/medienpool/789/ahs14.pdf>, 25.11.2010

Im zweiten Punkt kommen nicht speziell Pythagoras, Körper oder Pyramide vor aber er ist entsprechend zu interpretieren. Die Gleichungen von h^2 , ha^2 und s^2 sind Berechnungsmöglichkeiten mit Variablen. Also hat auch dieser Punkt etwas mit meiner Thematik zu tun.

Ich habe in folgenden drei Mathematikbüchern „Pythagoras im Körper“ nachgeschlagen:

Lehrbuch der Mathematik 4 von Reichel, Litschauer, Groß¹¹⁴

Mathematik 4 von Ottenshläger, Ratzinger, Vormayr und Binder¹¹⁵

Mathematik 4 von Ingrid Lewisch¹¹⁶

Wie sieht der Aufbau des Themas „Pyramide“ in diesen drei Lehrbüchern aus?

Nach einem kurzen Einstieg zur Pyramide im Lehrbuch der Mathematik 4 von Reichel, Litschauer, Groß folgen die Gleichungen für s^2 , dem Quadrat der Seitenkante der regelmäßigen quadratischen Pyramide, und für ha^2 , dem Quadrat der Höhe der Seitenfläche. Dann werden die Formeln für die Oberfläche und das Volumen der Pyramide hergeleitet. Es folgen Beispiele zur Berechnung der Oberfläche und des Volumen von unterschiedlichen Pyramiden.

Nach der regelmäßigen quadratischen Pyramide, steht die regelmäßige rechteckige Pyramide am Programm.

Nach dem Herleiten von unterschiedlichen Formeln und dem Darstellen von Gleichungen, werden Beispiele zum Üben angeboten. Dabei sind verschiedene Bestimmungsstücke gegeben und die fehlenden zu berechnen. Hinzu kommen diverse Umkehraufgaben.

Am Ende des Kapitels werden noch die regelmäßige sechsseitige Pyramide und der regelmäßige Oktaeder durchgenommen.

In Mathematik 4 von Ottenshläger, Ratzinger, Vormayr und Binder erstreckt sich das Thema „Pyramide“ genau über zwei Seiten. Nach einem kurzen Einstieg, findet der/die SchülerIn die Formeln für die Berechnung von Oberfläche und Volumen der Pyramide in einem Kästchen. Die Formeln sind also in keiner Weise hergeleitet sondern einfach aufgeschrieben. Das

¹¹⁴ Reichel, Litschauer, Groß, Lehrbuch der Mathematik. Und Aufgabensammlung, 5. Auflage, 1998, öbv&hpt, Wien

¹¹⁵ Ottenshläger, Ratzinger, Vormayr, Binder, Mathematik 4, 1996, 2. Auflage, Veritas, Linz

¹¹⁶ Ingrid Lewisch, Mathematik 4. Verstehen-Übern-Anwenden, 1997, 3. Auflage, R. Oldenbourg Verlag, Wien,

gleiche gilt für die Gleichungen von ha^2 und s^2 . Nach den Gleichungen folgen Übungsbeispiele unterschiedlicher Art.

Natürlich bietet auch Lehrbuch drei, Mathematik 4 von Ingrid Lewisch, einen Einstieg in den neuen Stoff. Dann wird die Formel für das Volumen der Pyramide auf zwei Arten hergeleitet. Zur Volumsberechnung folgen Beispiele und Umkehrbeispiele. Nun wird nach der Oberflächenformel für die Pyramide gesucht. Als Hilfe dient hier die Skizze einer aufgefalteten Pyramide. Danach sind die Gleichungen für ha^2 und h^2 gefragt. Als Hilfe dienen die Skizzen von Pyramiden.

Auch dieses Lehrbuch stellt Übungsbeispiele zur Verfügung. Außerdem gibt es am Ende dieses Kapitels noch eine Seite mit lebenspraktischen Aufgaben, bei denen Berechnungen im Zelt, im Turmdach oder an einem Kettenanhänger durchgeführt werden.

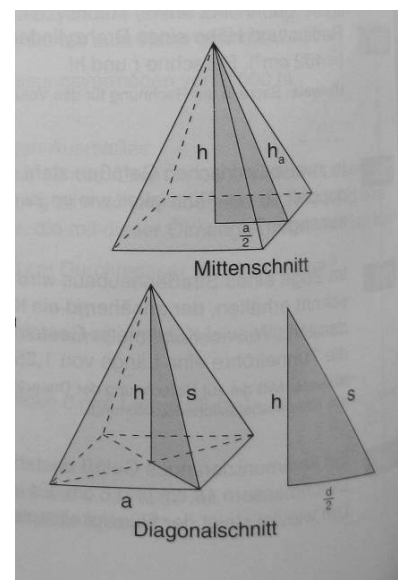
Alle drei Lehrbücher bieten einen unterschiedlichen Einstieg in das Thema „Pyramide“ und in Folge zur Anwendung des Pythagoras in der Pyramide.

Lehrbuch eins startet mit dem Foto eines Turmdaches, das die Form einer regelmäßigen quadratischen Pyramide hat, gefolgt von der Skizze einer Pyramide und den Formeln die den Zusammenhang der Seiten, Seitenkanten und Höhen mittels Pythagoras darstellen.

Einstieg zwei sind Skizzen von Pyramiden, siehe Abbildung 3, mit unterschiedlichen Schnitten, um die jeweiligen Zusammenhänge der entsprechenden Seiten, Höhen und Seitenkanten hervorzuheben.

Abbildung 3: Mittenschnitt und Diagonalschnitt der Pyramide¹¹⁷

Beim dritten Lehrbuch steht zu Beginn des Themas Pyramide eine Wiederholung ihrer Eigenschaften am Programm. Danach folgt das Üben von Schrägrisszeichnungen von Pyramiden bevor die Formeln „hergeleitet“ werden.



¹¹⁷ Ottenschläger, Mathematik, S. 108

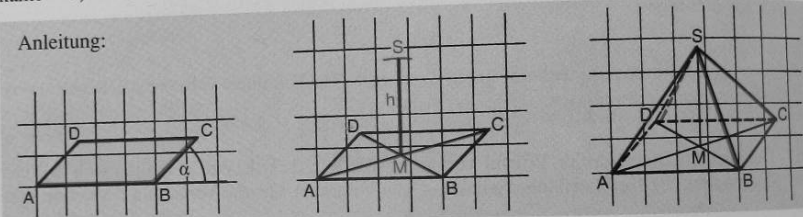
AUFGABEN

Zeichnen von Schrägrissen

Wiederhole das Zeichnen von Schrägrissen von Pyramiden anhand der Anleitungsskizzen ($v = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45^\circ$):

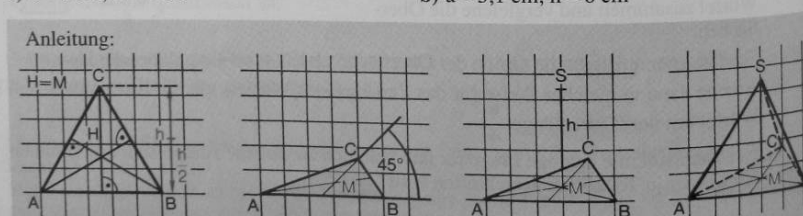
- 1019** Zeichne den Schrägriss einer quadratischen Pyramide mit der Höhe $h = 4$ cm, wenn die Grundkante **a)** $a = 3,5$ cm, **b)** $a = 4,5$ cm, **c)** $a = 2,8$ cm beträgt.

Anleitung:



- **1020** Zeichne den Schrägriss einer vierseitigen Pyramide mit rechteckiger Grundfläche. Errichte die Höhe im Mittelpunkt, also im Diagonalenschnittpunkt des Rechtecks:
a) $a = 3,8$ cm, $b = 3$ cm, $h = 4,2$ cm **b)** $a = 4,2$ cm, $b = 3,9$ cm, $h = 5$ cm
- **1021** Zeichne den Schrägriss einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide mit der Grundkante a und der Höhe h :
a) $a = 6$ cm, $h = 4$ cm **b)** $a = 5,1$ cm, $h = 6$ cm

Anleitung:



Übe das Zeichnen von Schrägrissen nicht nur mit dem Lineal, sondern auch skizzenhaft mit freier Hand so lange, bis du es gut kannst!

Abbildung 4: Übungen zum Schrägriss zeichnen¹¹⁸

Sowohl in Abbildung drei als auch in Abbildung vier, die beide aus Schülerbüchern stammen, ist auffällig, dass in den Skizzen keine rechten Winkel markiert sind. Das macht das Arbeiten mit diesen Skizzen und den dazugehörigen Aufgaben für viele SchülerInnen sicher schwieriger. Bei den Abbildungen handelt es sich jeweils darum, wie das Thema im Unterricht eingeführt wird. Gerade am Beginn eines neuen Kapitels ist es wichtig essentielle Details, wie hier die rechten Winkel, hervorzuheben. Mit Hervorheben meine ich, dass sie zumindest bei den ersten Skizzen markiert werden sollten. Dass sich in der Pyramide rechte Winkel befinden ist Basiswissen für das ganze Kapitel. Ohne dieses Wissen kann der Satz von Pythagoras nicht angewandt werden.

Welche Ähnlichkeiten haben die drei Schulbücher in Bezug auf die Pyramide und den Pythagoras. In allen drei von ihnen sind Skizzen von Pyramiden zu finden, in denen die rechtwinkligen Dreiecke hervorgehoben beziehungsweise sogar herausgezeichnet sind. Die

¹¹⁸ Lewisch, Mathematik, S. 198

Formeln, welche die jeweiligen Zusammenhänge zwischen Seitenkanten, Seiten und Höhen mittels Pythagoras erklären, sind nur sehr spärlich kommentiert einfach danebengeschrieben. In zwei Büchern steht nicht einmal, dass für die Formeln der Satz von Pythagoras angewendet wurde.

Gleich ist auch, dass diverse Übungsbeispiele folgen.

Was hat mir zu diesem Thema an den drei Schulbüchern besonders gefallen? Gut finde ich die Idee mit den SchülerInnen das Zeichnen von Schrägrissen zu üben. Bei meinen NachhilfeschülerInnen fällt mir oft auf, dass sie große Probleme haben, vernünftige und brauchbare Skizzen zu zeichnen, die ihnen dann eventuell beim Lösen des Beispiels auch hilfreich sein können.

Sehr vernünftig ist es sicher auch nochmals die allgemeinen Eigenschaften von Pyramiden zu wiederholen, bevor man neue Formeln herleitet.

Nicht ganz einverstanden bin ich damit, dass der Satz von Pythagoras einfach vorausgesetzt wird. Entweder wird er nicht einmal namentlich erwähnt sondern einfach nur angewandt, oder genannt aber die Formel auch nicht extra wiederholt. Ab einem gewissen Zeitpunkt muss manches voraussetzbar sein. Trotzdem wäre es schülerfreundlicher, wichtige Formeln immer wieder zu wiederholen.

Es wird in keiner Weise auf Probleme des Vorstellungsvermögens eingegangen. Hier wären Anregungen für die LehrerInnen hilfreich. Ich denke hier an Vorschläge, wie sie mit dieser Problematik umgehen könnten.

Abbildung fünf fasst die Stärken und Schwächen der drei analysierten Lehrbücher in einer Tabelle zusammen.

Lehrbuch von	Stärken	Schwächen
Reichel, Litschauer, Gross	.) Herleitungen .) Rechte Winkel in Skizzen markiert	
Ottenschläger, Ratzinger, Vormayr, Binder	.) Skizzen mit Mittel- und Diagonalschnitt	.) Kapitel nur über zwei Seiten .) Keine Herleitungen .) Rechte Winkel in Skizzen nicht markiert
Lewisch	.) Herleitungen .) WH der Pyramideneigenschaften zu Beginn .) Übungen zu Schrägrisszeichnungen .) Lebenspraktische Aufgaben	.) Rechte Winkel zu Beginn des Kapitels in den Skizzen nicht markiert

Abbildung 5: Stärken und Schwächen der Lehrbücher

7. Empirischer Teil

7.1. *Meine Forschungsfrage*

Schon in der Einleitung meiner Arbeit habe ich geschrieben, wie ich auf das Thema gekommen bin. Daraus hat sich auch meine Forschungsfrage entwickelt:

Kann der Erfolg von SchülerInnen, die Probleme des räumlichen Vorstellungsvermögens haben, im Speziellen bei der Anwendung des Pythagoras in der Pyramide, unterstützt werden, indem ihnen beim Lösen der Beispiele das Modell einer Pyramide zur Verfügung gestellt wird?

Das heißt ich möchte im Rahmen meiner empirischen Untersuchung herausfinden, ob meine Idee in der Umsetzung funktioniert. Es wäre mir ein großes Anliegen nicht ratlos vor SchülerInnen zu stehen, die Probleme bei Beispielen mit der Anwendung des Pythagoras in Körpern haben.

An den Ergebnissen zur Brauchbarkeit des Modells kann man sich orientieren, um dessen Anwendbarkeit zu verbessern und weiterentwickeln.

Vielleicht lassen sich auch brauchbare Konsequenzen für den Unterricht und die Durchführung dieses Themas im Schulunterricht schließen.

An dieser Stelle sollte ich auch die Frage beantworten, warum ich Pythagoras und dessen Anwendung im Körper, als Thema meiner empirischen Untersuchung gewählt habe.

Wie schon im theoretischen Teil erklärt, gibt es unterschiedliche Aspekte räumlicher Vorstellungsprobleme. Im Rahmen dieser Arbeit konnte ich nicht alle behandeln, beziehungsweise auf alle eingehen. Ich musste mich also auf einen Punkt beschränken. Da ich am öftesten mit diesem Problem des räumlichen Vorstellungsvermögens, nämlich der Anwendung des Pythagoras in der Pyramide, konfrontiert wurde, fiel mir die Entscheidung nicht schwer mich auf dieses Thema zu konzentrieren. Mit der Wahl des Themas meiner Arbeit, war auch die empirische Untersuchung schnell definiert.

Die empirische Untersuchung wäre zu umfangreich geworden, hätte ich mich nicht auf einen Körper beschränkt. Als exemplarisches Beispiel habe ich die regelmäßige quadratische Pyramide gewählt. Das Problem, mit dem viele SchülerInnen bei der Anwendung des Pythagoras in Körpern konfrontiert sind, ist gleich, egal mit welchem Körper gearbeitet wird. Schwierigkeiten macht die Transformation von der Skizze in die Realität. Wo sind im Körper rechte Winkel, die ich vielleicht auf der Skizze nicht als solche erkenne?

7.2. Vorbereitung der empirischen Untersuchung

In Absprache mit dem Betreuer meiner Diplomarbeit habe ich mich dazu entschlossen, die empirische Untersuchung in zwei Klassen der neunten Schulstufe durchzuführen. So haben sicher alle SchülerInnen, die an der Untersuchung teilnehmen, schon einmal im Unterricht von der Anwendung des Pythagoras im Körper gehört. Wie schon erwähnt ist dieses Kapitel Teil des Lehrstoffs der achten Schulstufe.

Die nächste Frage war natürlich: an welcher Schule kann ich die Durchführung meiner empirische Untersuchung realisieren?

Hier hatte ich gleich beim ersten Anlauf Erfolg. Ich hab mich an den Direktor meiner ehemaligen Schule gewendet, Herrn Direktor Doktor Rudolf Koch vom BG/BRG Klosterneuburg. Er war sehr kooperativ und hat mir gleich angeboten, meine Tests an der Schule durchzuführen.

Im nächsten Schritt habe ich Kontakt mit den ProfessorInnen aufgenommen, in deren Klasse ich meine empirische Untersuchung machen durfte. Ich wollte sie vorab über mein Thema informieren und wie ich mir den Ablauf vorstellte. Ich bat sie, sich im Vorhinein eine Einteilung der Klassen in zwei „gleich starke“ Gruppen zu überlegen mit einer homogenen Aufteilung der Burschen und Mädchen.

Während dieser Kontakt mit der Schule und den ProfessorInnen geschah, war ich zusätzlich mit der Fertigstellung meiner Modellpyramiden beschäftigt. Wie das meistens so ist, funktionierte auch hier nicht gleich alles beim ersten Mal. An dieser Stelle ein Dankeschön an meinen Vater, der mir mit seinen geschickten Handwerkerhänden eine große Hilfe war. Und siehe da, am Ende hatte ich fünfzehn fertige, stabile, brauchbare Modelle.

Abbildung vier und Abbildung fünf sind Fotos von einem dieser Modelle. Abbildung fünf soll zeigen, dass das rechtwinkelige Dreieck aus Seitenkante s , Höhe h und halber Diagonale herausnehmbar ist. Die Modelle haben sich als sehr stabil herausgestellt. Keines ging bei der Durchführung der empirischen Untersuchung kaputt.

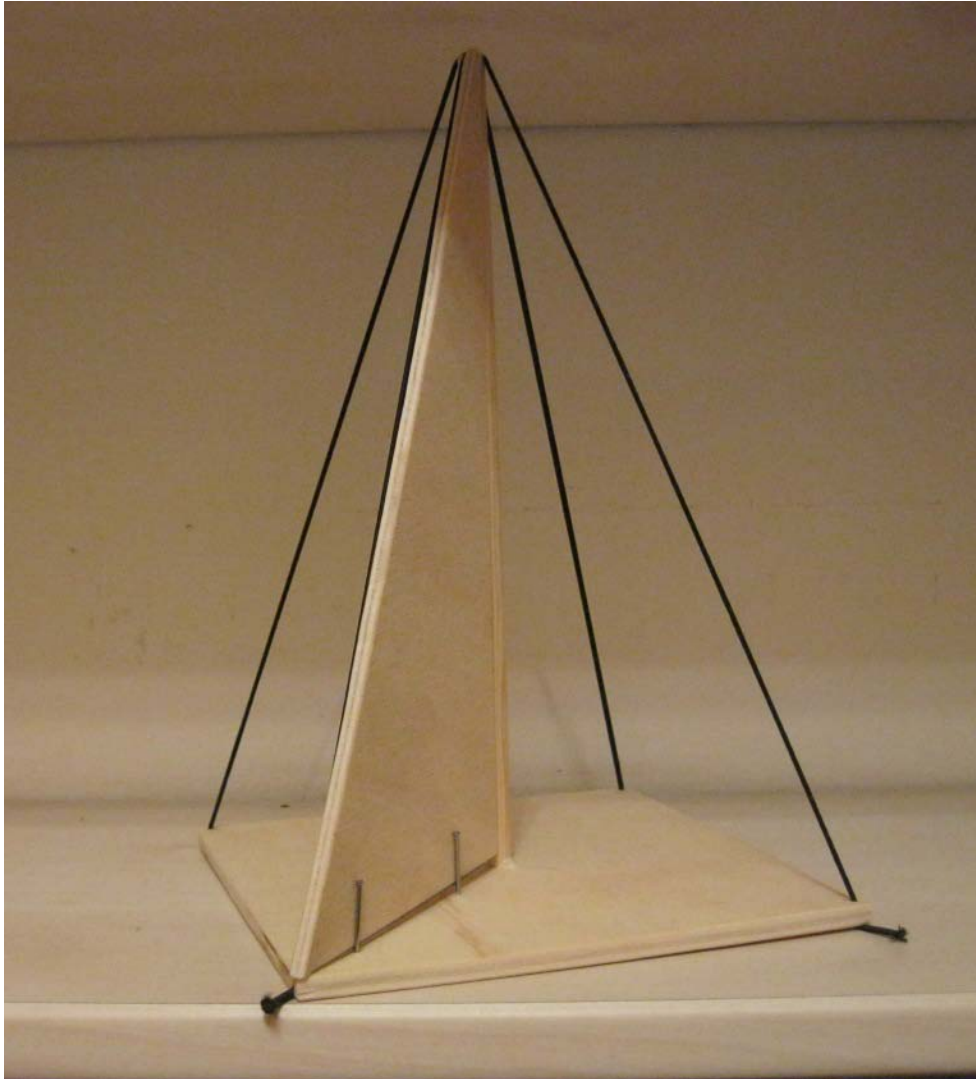


Abbildung 6: Modellpyramide

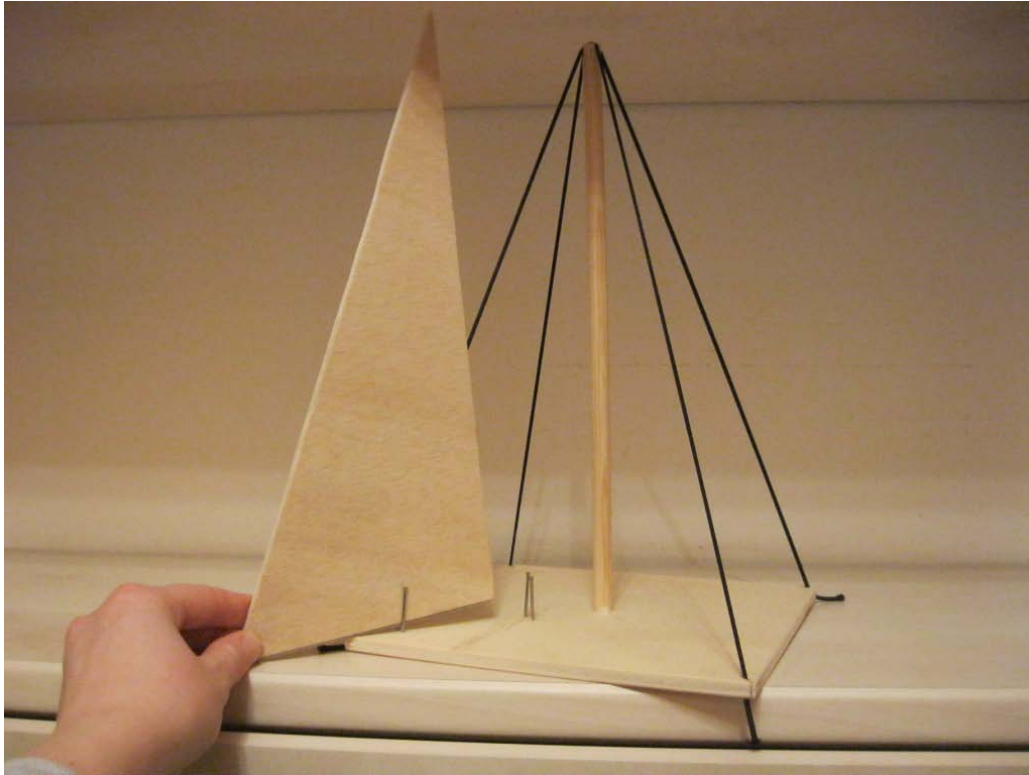


Abbildung 7: Modellpyramide und ihre Funktion

Am 5.2.2011 ging es dann an die endgültige Durchführung der empirischen Untersuchung, in den zwei mir zur Verfügung gestellten Klassen.

7.3. Durchführung der empirischen Untersuchung

Vor der Durchführung der empirischen Untersuchung stellte ich noch einige Überlegungen über den genauen Ablauf an. Und genau so sah dann auch der Ablauf aus.

Ich wollte die empirische Untersuchung in zwei Klassen durchführen, wobei jede Klasse in zwei Vergleichsgruppen aufgeteilt war.

In der einen Gruppe erhielt jede/r SchülerIn das Beispiel ohne Modellpyramide, in der anderen Gruppe erhält jede/r dasselbe Beispiel wie Gruppe eins und eine Modellpyramide als Hilfsmittel.

Das heißt in Absprache mit dem Professor der jeweiligen Klasse teilte ich diese, in jeweils zwei, durch den Professor bestimmte, gleich starke Gruppen auf. Wenn möglich sollten auch

Mädchen und Burschen gleichmäßig aufgeteilt sein. So sollten unerwünschte Einflüsse auf die Auswertung, durch ungleiche Geschlechtsaufteilung, verhindert werden.

Da ich bei den Vorbereitungen meiner empirischen Untersuchung annehmen musste, dass die beiden Klassen vermutlich unterschiedliche ProfessorInnen haben und den Lehrstoff in einer anderen Art und Weise im Unterricht durchgenommen haben würden, wollte ich zwei Vergleichsgruppen pro Klasse. Das sollte die Einflüsse auf die Auswertungen durch die/den ProfessorIn geringer halten.

Während der gesamten Unterrichtsstunde in der ich die empirische Untersuchung durchführte, sollten die SchülerInnen selbstverständlich selbstständig arbeiten. Während der Arbeitszeit gab es auch keine Hilfestellungen durch die/den ProfessorIn oder mich. Fragen mussten zu Beginn der Stunde gestellt werden, wenn ich den Ablauf der Untersuchung erklärte.

Beide Gruppen, das heißt die ohne und die mit Modell, erhielten dieselbe Rechenangabe. Ich habe folgendes Standardbeispiel ausgesucht.

Beispiel:

Von einer regelmäßigen quadratischen Pyramide kennt man
die Längen der Diagonalen d und
der Höhe h .

Fertige eine passende Skizze an und berechne
die Länge der Seitenkante s und
die Höhe h_a einer Seitenfläche!

$d = 60 \text{ mm}$

$h = 80 \text{ mm}$

Das Beispiel ist einfach und klar formuliert, weil der Schwerpunkt der empirischen Untersuchung nicht auf dem Verstehen der Angabe und des Textes liegen sollte, sondern auf der Ausführung des Beispiels und der daraus folgenden Anwendung des Pythagoras im Körper.

Jene Gruppe, welche die Modellpyramide als zusätzliche Unterlage zur Verfügung gestellt bekam, hatte in der Angabe zum Beispiel zusätzlich die Aufforderung, das Modell bei der Lösung des Beispiels zur Hilfe zu nehmen.

Zur Lösung der Rechenaufgabe hatte ich zwanzig Minuten eingeplant.

Weitere zwanzig Minuten rechnete ich für den Fragebogen, den jede/jeder SchülerIn zusätzlich ausfüllen sollte.

Dazu hatte ich Fragen formuliert die mir einen Einblick zu folgende Fragestellungen geben sollten:

- Selbsteinschätzung der mathematischen Fähigkeiten der SchülerInnen
- Selbsteinschätzung der räumlichen Fähigkeiten der SchülerInnen
- Motivation beim Herangehen an Mathematikbeispiele der SchülerInnen
- Fragen zum Testbeispiel
- Für die Modellgruppe Fragen zur Anwendung der Modellpyramide

Die restlichen zehn Minuten der fünfzigminütigen Unterrichtseinheit plante ich ein für eine Begrüßung und Erklärungen am Beginn der Stunde und für das Absammeln der Testunterlagen.

7.4. Auswertung der empirischen Untersuchung

7.4.1. Zusammensetzung der Versuchsklassen

Ich habe meine empirische Untersuchung in zwei Klassen durchgeführt. Klasse eins setzte sich aus vier Burschen und 17 Mädchen zusammen. In Klasse zwei waren zehn Burschen und 12 Mädchen.

Bei Klasse eins befanden sich in Gruppe 1 zwei Burschen und neun Mädchen und in Gruppe 2 zwei Burschen und acht Mädchen.

Klasse zwei war in zwei Gruppen aufgeteilt mit jeweils 5 Burschen und sechs Mädchen.

Somit haben an der empirischen Untersuchung insgesamt 43 SchülerInnen teilgenommen, davon 14 Schüler und 29 Schülerinnen.

7.4.2. Beobachtungen während der empirischen Untersuchung

Es gibt ein paar Punkte, die ich in den zwei Klassen während der Durchführung der empirischen Untersuchung, beobachtet habe. Diese möchte ich hier anmerken, weil sie für die Interpretation und weitere Schlussfolgerungen interessant sind.

Die Durchführung der Untersuchung hat in beiden Klassen sehr gut funktioniert. Es sind keine Probleme oder Schwierigkeiten aufgetreten. Ich bin von den ProfessorInnen sehr freundlich empfangen worden und auch die SchülerInnen sind mir sehr kooperativ entgegen gekommen.

Interessant ist, dass die zweite Versuchsklasse gesamt viel schneller fertig war mit dem Beispiel und dem Fragebogen, als die erste Klasse. Hier hatten alle SchülerInnen fünfzehn Minuten vor Unterrichtsende abgegeben, während in der ersten Versuchsklasse bis zehn Minuten vor Unterrichtsende gearbeitet wurde.

Natürlich war es nicht erlaubt während der Stunde Fragen zu stellen, trotzdem haben es einige SchülerInnen versucht. Die Fragen geben Aufschluss darüber, was bei den SchülerInnen teilweise zu Verwirrungen beziehungsweise Problemen geführt hat.

- (1) Wo ist die Diagonale d in der Pyramide?
- (2) Wo ist die Seitenkante s ?
- (3) Ist die Seitenkante s das da? [und zeigen dabei auf die Seitenlänge der quadratischen Grundfläche, verwechseln also die Länge der quadratischen Grundfläche a mit der Seitenkante s]
- (4) Was ist h_a ?
- (5) Beim Modell befinden sich hier [und zeigt auf die rechten Winkel der Grundfläche] rechte Winkel, die auf der Skizze aber nicht zu finden sind. Wie kann das sein?

Eine Schülerin, die bei Gruppe eins war, also kein Modell hatte, fragte sogar nach einer Modellpyramide, weil sie anscheinend mit ihrem Beispiel nicht weiterkam.

An den Fragen sieht man, dass eine Beschriftung der Pyramide ein Lösen des Beispiels wahrscheinlich noch leichter gemacht hätte. Probleme mit der Lokalisierung von Bestimmungsstücken wären weggefallen.

Leider hat auch die Skizze der Pyramide auf dem Fragebogen bei ein paar wenigen SchülerInnen für Verwirrung gesorgt. Dort sind nämlich die Seitenflächen mit s_1 und s_2 beschriftet.

Gerade was die Zuordnungsprobleme mit den Bestimmungsstücken betrifft, hätte ich nicht mit solchen Problemen gerechnet. Aber das verdeutlicht mir, wie wichtig es ist, diese im Unterricht richtig einzuführen, zu bestimmen und zu benennen. Natürlich haben die SchülerInnen recht. Auch die Seite a der Grundfläche der quadratischen Pyramide, stellt eine Seitenkante dar. Aber es ist nun mal so, dass mit s die Seitenkante von der Spitze der Pyramide zu einem Eck der Grundfläche gemeint ist.

Auch Frage 1, nach der Diagonale in der Pyramide, überraschte mich etwas. Eine Raumdiagonale ist in diesem Körper nicht möglich, also wo, außer auf der Grundfläche, soll sich die Diagonale befinden?

Als Frage 5 auftauchte, musste ich innerlich leicht schmunzeln. Diese SchülerIn dürfte offensichtlich Probleme des räumlichen Vorstellungsvermögens haben. Frage 5 ist vergleichbar mit der ausschlaggebenden Situation mit meinem Nachhilfeschüler, wegen dem ich unbedingt zu diesem Thema meine Arbeit schreiben wollte. Der/dem SchülerIn war die Transformation von der Modellpyramide zur Skizze offensichtlich nicht möglich, beziehungsweise unverständlich.

Auch Frage 4 mit „Was ist h_a ?“ ist überraschend. Ich dachte durch logische Überlegungen und Ausschlussprinzip müssten die SchülerInnen auch leicht herausfinden was h_a ist, auch wenn sie es nicht von vornherein wissen.

Manche SchülerInnen haben dann einfach gemeint, h_a muss dasselbe sein wie h . Diese Überlegung ist nicht ausreichend, denn warum sollte in dem Beispiel nach der Länge von h_a gefragt sein, wenn h schon gegeben ist, und diese wie angenommen dieselbe Höhe darstellen? In der Angabe des Beispiels steht nicht nur berechne h_a , sondern es wird nach „der Höhe h_a einer Seitenfläche“ gesucht, was die Lösung eigentlich erleichtern sollte.

Aber an den Fragen sehe ich, als zukünftige Professorin, wieder einmal, dass Dinge die einem selbst völlig klar erscheinen, für SchülerInnen große Probleme oder Herausforderungen darstellen können. Also darf man die Anzahl und Art möglicher Hürden für SchülerInnen nie

unterschätzen. Aber das macht für mich den Beruf sehr interessant. Als Pädagogin muss man jederzeit mit neuen Fragen rechnen und dann möglichst schnell eine Erklärung parat haben.

Hier drängt sich die Frage auf, ob die aufgetretenen „Probleme“ einer zweckmäßigen Durchführung der empirischen Untersuchung entgegenstanden? Die Antwort auf diese Frage lautet, aus meiner Sicht, nein. Prinzipiell kann ich mir nicht vorstellen, dass eine solche Untersuchung reibungslos ablaufen kann. Gerade aus den Schwierigkeiten kann für die Interpretation viel abgelesen und gefolgert werden.

Natürlich meine ich mit Schwierigkeiten oder Problemen nicht organisatorische Fehler, wie zu wenig angefertigte Kopien, die eventuell begangen werden. Ich beziehe mich auf Abläufe, die nicht im unmittelbaren Einflussbereich der durchführenden Person liegen.

7.4.3. Auswertung der Rechenbeispiele

In der Folge werden die Rechenbeispiele und die Fragebögen in drei Kategorien ausgewertet.

- (1) Auswertung nach Lösungskapazität der SchülerInnen ohne beziehungsweise mit Pyramidenmodell
- (2) Auswertung nach Lösungskapazität mit geschlechtlicher Differenzierung der SchülerInnen
- (3) Auswertung der Lösungskapazität unter Nutzung der Fragebögen, zur individuellen Bewertung des Testverlaufs durch die SchülerInnen

Es kommt mir mit diesen Methoden der Auswertung besonders darauf an, nicht nur quantitativ Ergebnisse gegenüberzustellen, sondern qualitativ die Frage der Nutzbarkeit des Modells zur Verbesserung der Vorstellung zu interpretieren.

7.4.3.1. Auswertung nach Lösungskapazität der SchülerInnen ohne beziehungsweise mit Pyramidenmodell

Zuerst einmal habe ich mir die Beispiele allgemein angesehen und nicht zwischen den Gruppen differenziert.

Um die Beispiele auswerten und Vergleiche ziehen zu können, musste ich mir Punkte überlegen, anhand derer dies möglich sein könnte.

So habe ich 13 Merkmale herausgefiltert. Mit Hilfe dieser habe ich zwei Tabellen erstellt.

Bei Tabelle eins ging es mir darum, die Ergebnisse von Gruppe eins und Gruppe zwei übersichtlich darzustellen und eine Gegenüberstellung zu ermöglichen. Die erste Spalte enthält die dreizehn Merkmale die ich herausgefiltert habe. Spalte zwei und Spalte drei enthalten Prozente. Pro Gruppe habe ich keine Unterscheidung zwischen männlich und weiblich und Klasse eins und Klasse zwei vorgenommen. Hier wird ausgedrückt wie viele Versuchspersonen, männlich und weiblich zusammen egal aus welcher Klasse, von der jeweiligen Gruppe zum bestimmten Merkmal „zählen“. Mit dieser Anzahl und der Zahl an SchülerInnen aus Gruppe eins beziehungsweise Gruppe zwei habe ich in jeder Zeile die Prozente ausgerechnet.

Ich bin zu folgender Tabelle gekommen.

Tabelle 1: Auswertung der Rechenbeispiele in Prozent

	Merkmal	Gruppe 1	Gruppe 2
(1)	Komplett richtig gelöst	9,09 %	19,05 %
(2)	Nur Rechenfehler	0 %	14,29 %
(3)	Begriffe vertauscht	31,82 %	38,1 %
(4)	Keine Ahnung	18,18 %	9,52 %
(5)	Denkfehler	18,18 %	9,52 %
(6)	1 Skizze	40,91 %	47,62 %
(7)	Mehr Skizzen	22,73 %	19,05 %
(8)	Pythagoras falsch herum	0 %	9,52 %
(9)	Teilweise gelöst	22,73 %	19,05 %
(10)	$(a/2)^2$, $(d/2)^2$ Klammern vergessen	4,55 %	4,76 %
(11)	Teilskizzen	27,27 %	23,81 %
(12)	Nur s berechnet	31,82 %	19,05 %
(13)	Formel falsch – Ergebnis richtig	4,55 %	4,76 %

Diese Tabelle soll einen eventuellen Unterschied zwischen Gruppe eins und Gruppe zwei, also den Versuchspersonen die kein Modell zur Verfügung hatten und denen die eines hatten, ersichtlich machen.

Einen wirklichen Unterschied ob ein Modell verwendet werden konnte oder nicht, macht es nur bei der Betrachtung bestimmter Merkmale. Zu diesen Merkmalen bei denen eine Unterscheidung Sinn macht zählen Nummer eins, vier, sechs, sieben und elf. In der Tabelle sind sie blau unterlegt. Die anderen können erstmal ausgeklammert werden.

Betrachtet man die Prozentzahlen zu Merkmal eins und zwei scheint es so, als ob die SchülerInnen mit Modell, das Beispiel besser lösen konnten. Von Gruppe zwei, also denen mit Modell, sind auch mehr SchülerInnen mit nur einer Skizze ausgekommen und weniger von ihnen haben Teilskizzen angefertigt.

Diese Prozentzahlen sollten jedoch genauer hinterfragt und in Beziehung zum Fragebogen gestellt werden.

Orientiert man sich nur an den Prozentzahlen, wäre der klare Schluss, dass die SchülerInnen mit Modell, „besser“ waren. Mit „besser“ meine ich, dass mehr von Gruppe zwei die Aufgabe komplett richtig gelöst haben. Außerdem hatten weniger ProbandInnen aus Gruppe zwei keine Ahnung. Ob SchülerInnen, die weniger Skizzen zum Lösen eines Beispiels benötigen besser sind, stelle ich stark in Frage. Primär aus dem Grund, weil wie schon im theoretischen Teil beschrieben, jeder individuelle Lösungswege anwendet. Dazu gehört, dass manche mehr Skizzen benötigen, um zu einer Lösung zu kommen.

Auf den Zusammenhang zwischen der Auswertung der Beispiele und dem Fragebogen gehe ich noch später in dieser Arbeit ein. Aber ich möchte soviel vorweg nehmen: Jene SchülerInnen, welche das Beispiel komplett richtig gelöst haben und ein Modell zur Verfügung hatten, haben dieses als wenig bis kaum brauchbar eingestuft. Das heißt den prozentuellen Unterschied bei Merkmal eins zwischen den Gruppen, würde ich nicht nur auf das Modell zurückführen. Es kann sein, dass die SchülerInnen vom Modell indirekt mehr beeinflusst wurden als sie zugeben.

7.4.3.2. Auswertung nach Lösungskapazität mit geschlechtlicher Differenzierung der SchülerInnen

Bei der zweiten Tabelle habe ich eine Unterscheidung zwischen weiblichen und männlichen Probanden und den Klassen gemacht. Diese zweite Tabelle enthält keine Prozentzahlen, sondern absolute Zahlen.

Die Zahl in der Spalte von weiblich und männlich stellt jeweils die Anzahl der ProbandInnen dar, für die das „Merkmal“ zutrifft. Es kommt natürlich vor, dass die Lösungsvorgänge von SchülerInnen zu mehreren „Merkmalen“ passen, also dass eine Schülerin zum Beispiel nur die Länge der Seitenkante s berechnet hat und einen Rechenfehler gemacht hat. Dann habe ich beim Auswerten einen Strich bei Merkmal zwölf und bei Merkmal zwei gemacht.

Nachdem ich alle Beispiele ausgewertet habe, addierte ich die Striche pro Merkmal, Geschlecht und Klasse und bin zu folgender Tabelle, mit folgenden Ergebnissen gekommen.

Tabelle 2: Auswertung der Rechenbeispiele mit Differenzierung männlich/weiblich und Klasse 1/Klasse 2

	Merkmal		weiblich	männlich
(1)	Komplett richtig gelöst	Klasse 1 Klasse 2 gesamt	2 1 3	2 1 3
(2)	Nur Rechenfehler	Klasse 1 Klasse 2 gesamt	1 1	2 2
(3)	Begriffe vertauscht	Klasse 1 Klasse 2 gesamt	6 4 10	 4 4
(4)	Keine Ahnung	Klasse 1 Klasse 2 gesamt	2 3 5	 1 1
(5)	Denkfehler	Klasse 1 Klasse 2 gesamt	2 3 5	 1 1
(6)	1 Skizze	Klasse 1 Klasse 2 gesamt	10 6 16	2 7 9
(7)	Mehr Skizzen	Klasse 1 Klasse 2 gesamt	5 7 12	3 3 6
(8)	Pythagoras falsch herum	Klasse 1 Klasse 2 gesamt	 2 2	
(9)	Teilweise gelöst	Klasse 1 Klasse 2 gesamt	2 2 4	 6 6
(10)	$(a/2)^2$, $(d/2)^2$ Klammern vergessen	Klasse 1 Klasse 2 gesamt	 2 2	
(11)	Teilskizzen	Klasse 1 Klasse 2 gesamt	1 5 6	1 4 5

(12)	Nur s berechnet	Klasse 1	5	1
		Klasse 2	2	3
		gesamt	7	4
(13)	Formel falsch – Ergebnis richtig	Klasse 1	1	1
		Klasse 2		
		gesamt	1	1

(1) Komplette richtig gelöst

Natürlich interessierte mich, wie viele SchülerInnen das Beispiel komplett richtig lösen konnten.

Drei Schülerinnen und drei Schüler, also insgesamt sechs ProbandInnen, haben das Beispiel vollständig und richtig gelöst. Sie haben passende Skizzen angefertigt und sich die gesuchten Bestimmungsstücke mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnet.

Versucht man dieses Ergebnis in Prozent auszudrücken, erhält man folgende Zahlen, 21,4 % der männlichen Probanden und 10,4 % der weiblichen Probanden haben das Beispiel komplett richtig. Betrachtet man die ganze Versuchsgruppe, so haben 13,95 % der SchülerInnen keinen Fehler gemacht.

(2) Nur Rechenfehler

Hierzu zählen jene SchülerInnen, die Begriffe und Formeln richtig zugeordnet und verwendet haben, aber irgendwo einen Rechenfehler gemacht haben. Das heißt ohne den Rechenfehler wäre das Beispiel komplett richtig gelöst worden.

Wie sagt man so schön: „Rechenfehler können immer passieren“. Sieht man von den kleinen Rechenfehlern ab, dann hätten noch eine Schülerin und zwei Schüler die Rechenaufgabe fehlerfrei gelöst.

(3) Begriffe/Bestimmungsstücke vertauscht

Zu dieser Gruppe zählen SchülerInnen die Begriffe und, beziehungsweise oder, Bestimmungsstücke vertauscht oder falsch zugeordnet haben. Hierzu zählt der Fall, wenn zum Beispiel anstatt der wirklichen Seitenkante s die Seitenlänge a des Quadrats berechnet wurde.

Hier gab es die folgenden vier Fälle:

- I. anstatt s wurde a berechnet
- II. anstatt s wurde h_a berechnet

III. anstatt h_a wurde s berechnet

IV. h_a ist gleich h

So wie man für Sprachen Vokabel und gewisse Grammatikregeln braucht, benötigt man in der Mathematik Formeln und bestimmte Bezeichnungen, oder auch sogenannte Konventionen. Aus diesem Grund haben auch die einzelnen Bestimmungsstücke der Pyramide, und auch der regelmäßigen quadratischen Pyramide, genaue Bezeichnungen.

Diese Tatsache war für SchülerInnen relativ oft Fehlerquelle beim Testbeispiel. Immerhin zehn Schülerinnen und vier Schüler haben ein oder mehrere Teile der Pyramide falsch benannt. In Prozent stellen das 34,5 % der weiblichen und 28,6 % der männlichen Probanden dar.

Das heißt diese Ergebnisse können nicht als komplett richtig gewertet werden, obwohl die SchülerInnen vielleicht gar keine Probleme mit der Anwendung des Pythagoras im Körper hatten, beziehungsweise gehabt hätten.

Interessant ist noch sich anzusehen, welche Bestimmungsstücke falsch benannt wurden. Insgesamt elf SchülerInnen berechneten anstatt der Seitenkante s , die Länge a der Grundfläche des Quadrats. Zwei SchülerInnen vertauschten die Seitenkante s mit h_a , der Höhe der Seitenfläche und weitere fünf SchülerInnen bezeichneten h_a mit s , berechneten also anstatt der Länge der Höhe auf a , die Länge der Seitenkante s . Obwohl die Seitenkante s gefragt war, habe ich das dann nicht als richtig gerechnet. Da ein wesentlicher Fehler begangen wurde, nämlich jener der Kennzeichnung.

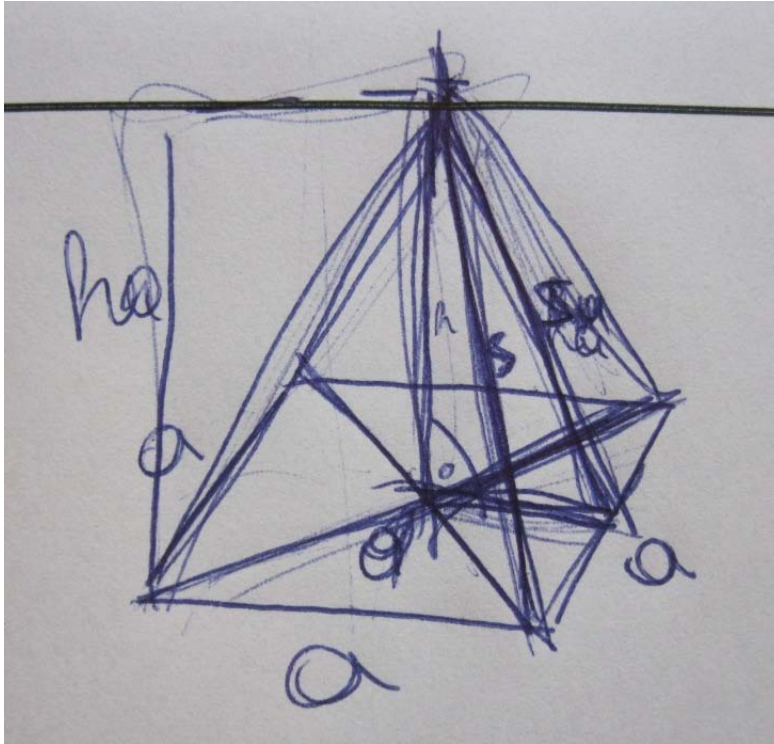


Abbildung 8: $h_a = h$

Abbildung acht stammt von einer der Versuchspersonen. Sie zeigt ganz gut, wie diese Person auf die Idee kam zu behaupten, dass die Höhe h_a dieselbe Länge hat wie die Raumhöhe h . Die/der SchülerIn hat sich richtig erinnert, dass eine Höhe normal auf die Seite steht. In dieser Skizze müsste also die Höhe h_a nur noch so gekippt werden, dass sie in einer der Seitenfläche des Dreiecks liegt und in die Mitte des Dreiecks verschoben werden, denn dann wäre natürlich klar, dass h_a und h unterschiedliche Länge haben. Diese Abbildung verdeutlicht in meinen Augen erneut, welch kreative Denkansätze manche SchülerInnen haben.

(4) Keine Ahnung

Keine Ahnung heißt, dass diese SchülerInnen wirklich nichts passendes auf die Testunterlagen geschrieben haben. Manche haben am Zettel notiert: „keine Ahnung“.

Fünf Schülerinnen und ein Schüler hatten wirklich keine Ahnung, wie sie an das Beispiel herangehen sollten. Natürlich kann man nie wissen, ob sie wirklich nicht wussten, wie sie es lösen sollten, oder ob sie einfach nicht motiviert genug waren. Aber immerhin sind das 13,96 % der gesamten Versuchspersonen.

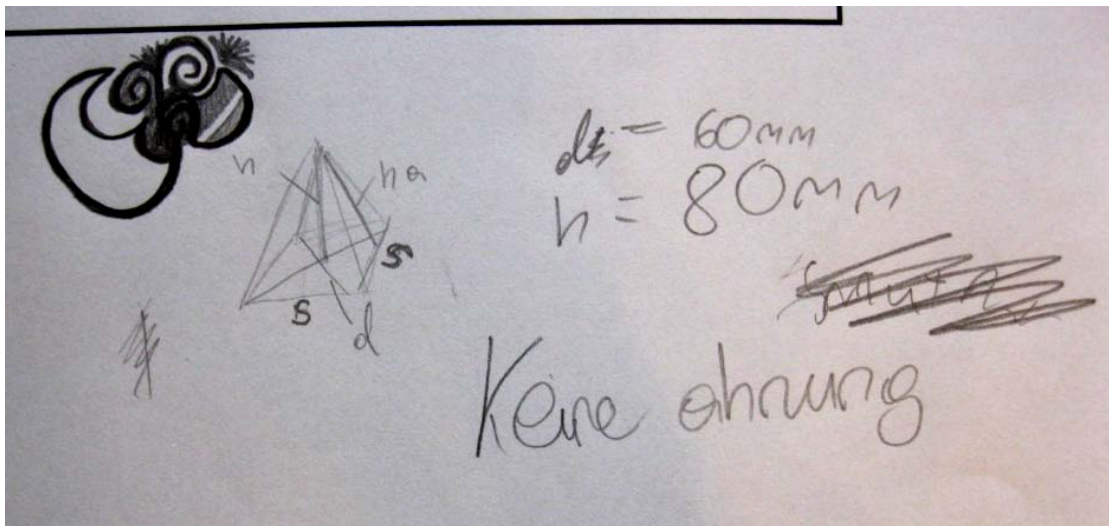


Abbildung 9: "keine Ahnung"

Abbildung neun zeigt die Arbeit einer/eines SchülerIn die/der offensichtlich keine Ahnung hatte, wie sie/er die Aufgabe lösen sollte. Schon bei der Skizze ist ein Fehler, die Länge der Seite des Quadrats ist fälschlicherweise mit s bezeichnet. Obwohl die Skizze sonst passt, schien diese Versuchsperson wirklich keine Lösungsansätze zu haben.

(5) Denkfehler

Denk- und Rechenfehler sind vielleicht in manchen Fällen nicht so leicht auseinanderzuhalten. Aber einige Fehler wurden gemacht, bei denen ich dachte hier könne es sich nur um „Denkfehler“ handeln.

Dazu gehörten:

I. $a^2 = d$ anstatt $2a^2 = d^2$

Wie genau es zu diesem Fehler kommt, ist schwer nachzuvollziehen. Aber ich vermute, dass sich die oder der betreffende SchülerIn die Formel, die den Zusammenhang von Quadratseiten und Diagonale darstellt, einfach falsch gemerkt oder falsch wiedergegeben hat.

II. h_a über Fläche ausgerechnet

Die Idee dieser SchülerInnen fand ich sehr kreativ. Da sie offensichtlich nicht wussten wo sich h_a befindet, dachten sie an eine Berechnung von h_a über die Fläche des Dreiecks. Nur nahmen sie nicht das Dreieck der Seitenfläche, sondern das aus Höhe h , halber Diagonale und h_a . Somit wurde also nicht die Länge der gesuchten Höhe der Seitenfläche berechnet, sondern eine neue Höhe „definiert“.

III. sin/cos verwendet

Ein paar wenige SchülerInnen versuchten Berechnungen über sin und cos anzustellen. Prinzipiell wäre das nicht falsch, da nirgendwo in der Angabe eine alleinige Anwendung des Pythagoras zum Lösen des Beispiels vorgeschrieben wird, aber sie kamen mit den Winkelfunktionen zu keinem richtigen Ergebnis.

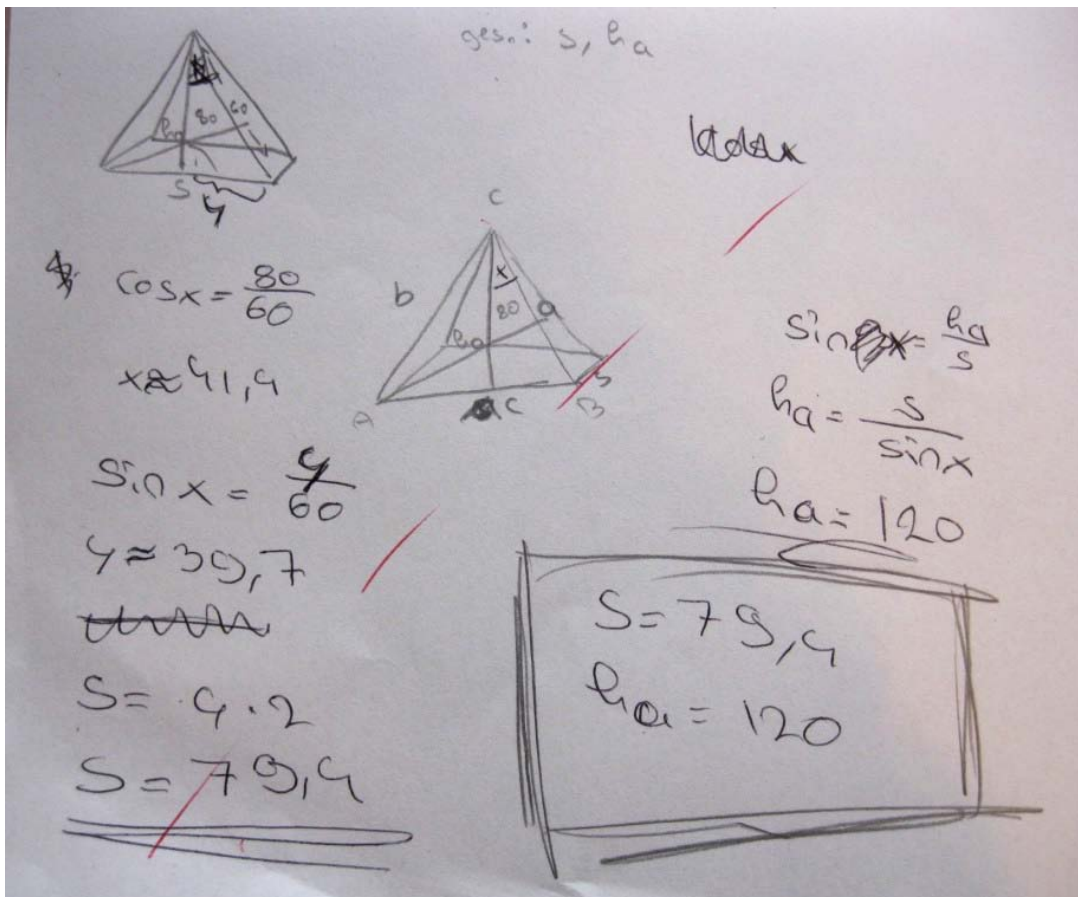


Abbildung 10: Ansatz über Winkelfunktionen

Abbildung zehn zeigt den Ansatz einer Versuchsperson, sich die gesuchten Bestimmungsstücke über die Winkelfunktionen in einem rechtwinkligen Dreieck auszurechnen. Der Rechenweg dieser Versuchsperson ist für mich schwer nachvollziehbar, da bei der Beschriftung der Skizzen nicht genau zu erkennen ist, welche Länge mit welcher Variable bezeichnet wird. Auf jeden Fall berechnet diese/r ProbandIn zuerst Winkelgrößen, um dann die Längen der gesuchten Seiten berechnen zu können. Aber auf Grund des Vertauschens von Bestimmungsstücken und Denkfehlern, kommt diese Versuchsperson nicht zu den richtigen Ergebnissen.

IV. d nicht halbiert

Sowohl für die Berechnung der Seitenkante s , als auch für die der Länge der Quadratseite a , benötigt man die halbe Länge der Diagonale. Gegeben war die ganze Länge der Diagonale. Einige SchülerInnen vergaßen d zu halbieren. Manchmal wurde auch auf die Klammer bei $(d/2)^2$ vergessen, also anstatt $(d/2)^2$ einfach nur $d^2/2$ geschrieben.

All diese Denkfehler entstanden, während sich die SchülerInnen zumindest bemühten, eine richtige Lösung zu finden. Insgesamt waren es sechs SchülerInnen die einen oder mehr dieser Denkfehler machten.

Aber gerade was den Fehler „halbieren der Diagonale“ betrifft, denke ich dass dieser auch im Unterricht oft passiert. Hier ist sicher wichtig zu betonen, dass mit der Diagonale d , wirklich die ganze Diagonale im Quadrat gemeint ist und dass es einen großen Unterschied macht ob man $(d/2)^2$ in Klammer setzt oder nicht.

(6) 1 Skizze

Beim kontrollieren der Beispiele fiel mir auf, dass einige SchülerInnen nicht nur eine Skizze angefertigt hatten, sondern mehrere. Daher entschied ich mich hier zu unterscheiden zwischen einer oder mehreren Skizzen.

(7) Mehr Skizzen

Zu dieser Gruppe gehören jene SchülerInnen, die mehr als eine Skizze machten. Manchmal macht es den Eindruck, als wären sie mit einer Skizze nicht zufrieden gewesen, weil sie einen Entwurf durchgestrichen haben. Andere SchülerInnen haben versucht, die Pyramide aus unterschiedlichen Perspektiven darzustellen.

Ich finde daran erkennt man, wie wichtig es ist auch das Anfertigen von passenden Skizzen im Unterricht zu üben. Für viele SchülerInnen ist dies keine simple Aufgabe. Gerade für das Skizzieren von dreidimensionalen Körpern benötigt man mehrere Fähigkeiten. Ich bin immer wieder überrascht, dass manche meiner NachhilfeschülerInnen schon Probleme mit dem Zeichnen von geraden Linien haben. Was für eine Herausforderung muss es für sie sein, die Skizze einer Pyramide anzufertigen, mit der sie auch noch arbeiten können sollen.

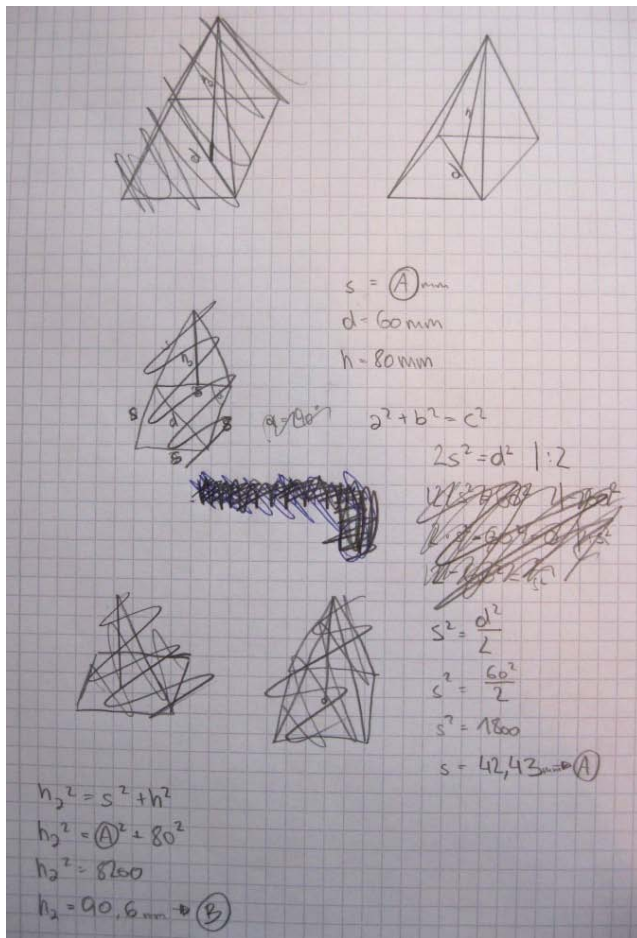


Abbildung 11: Ansatz I mit mehr als einer Skizze

Auch Abbildung elf stammt von einer Versuchsperson meiner empirischen Untersuchung. Diese Abbildung soll zeigen, wie viele Skizzenversuche, beziehungsweise auch Skizzen, manche SchülerInnen angefertigt haben. Bei dieser/diesem SchülerIn hat man das Gefühl, sie/er war einfach mit den ersten Versuchen nicht zufrieden und hat diese auch alle durchgestrichen.

Andere SchülerInnen haben mehrere Skizzen angefertigt, diese aber nicht durchgestrichen. Bei diesen hat man den Eindruck, sie haben diese Skizzen alle

benötigt um eine Lösung zu finden.

(8) Pythagoras falsch herum

Hierzu zählen jene Lösungsansätze, bei denen die SchülerInnen falsch in die Formel von Pythagoras eingesetzt haben oder Umformungsfehler gemacht haben. Bei einigen wenigen SchülerInnen kam es vor, dass sie Hypothenusen und Katheten verwechselten.

Hier stellt sich mir natürlich die Frage, ob jene SchülerInnen einfach Probleme mit der räumlichen Vorstellung hatten, und Hypothenuse und Katheten nicht identifizieren konnten, oder ob sie einfach Denkfehler beim Einsetzen begingen.

Sie müssen aber zumindest rechtwinklige Dreiecke erkannt haben, weil sie sonst kaum auf die Idee gekommen wären, den Satz von Pythagoras zu verwenden. Es besteht natürlich auch die Möglichkeit, dass sie sich einfach daran erinnern haben, dass bei Beispielen zur quadratischen Pyramide, zur Lösung der Satz von Pythagoras verwendet wird.

(9) Teilweise gelöst

Manche SchülerInnen haben das Beispiel nur teilweise gelöst. Sie haben entweder nur einen Teil der gesuchten Bestimmungsstücke berechnet, oder Formeln unvollständig hingeschrieben und nicht weiterverwendet und dergleichen.

Zu dieser Kategorie gehören vier Schüler und sechs Schülerinnen, was 23,3 % der gesamten Versuchspersonen ausmacht.

Wussten die SchülerInnen nicht weiter, oder hatten sie einfach keine Lust weiterzudenken? Diese Frage stellt sich mir an dieser Stelle erneut.

Bei manchen hatte ich beim korrigieren der Beispiele das Gefühl, dass sie anstanden, weil Teile von Formeln für weitere Berechnungen sehr wohl am Papier standen. Bei anderen SchülerInnen war das wiederum nicht der Fall.

Natürlich ist auch die Möglichkeit nicht außer Acht zu lassen, dass auf die Berechnung des zweiten gesuchten Bestimmungsstückes einfach vergessen wurde.

(10) Bei $(a/2)^2$, $(d/2)^2$ Klammern vergessen

Vergisst man bei $s^2 = (d/2)^2 + h^2$ die Klammern beim Halbieren der Diagonale, stimmt natürlich das Ergebnis nicht. Das gleiche gilt für $s^2 = (a/2)^2 + h_a^2$.

Die Aufgabe von zwei SchülerInnen enthält diesen Fehler. Aber genauere Erläuterungen dazu habe ich bereits im Rahmen der Denkfehler gegeben.

(11) Teilskizzen

Mit Teilskizze meine ich, dass SchülerInnen teilweise rechtwinkelige Dreiecke aus der Pyramide herausgezeichnet haben. Die Lösung des Beispiels, beziehungsweise die Berechnungen im gewählten rechtwinkligen Dreieck, sind so natürlich einfacher, weil der rechte Winkel und somit Hypothenuse und Katheten besser erkennbar sind. Natürlich ist auch für das Skizzieren der Teildreiecke räumliches Vorstellungsvermögen nötig. Denn schon bevor ich das rechtwinkelige Dreieck herauszeichne, muss ich wissen, ob überhaupt und wenn wo sich ein rechter Winkel befindet.

Immerhin sechs Schülerinnen und fünf Schüler haben sich mit solchen Teilskizzen geholfen.

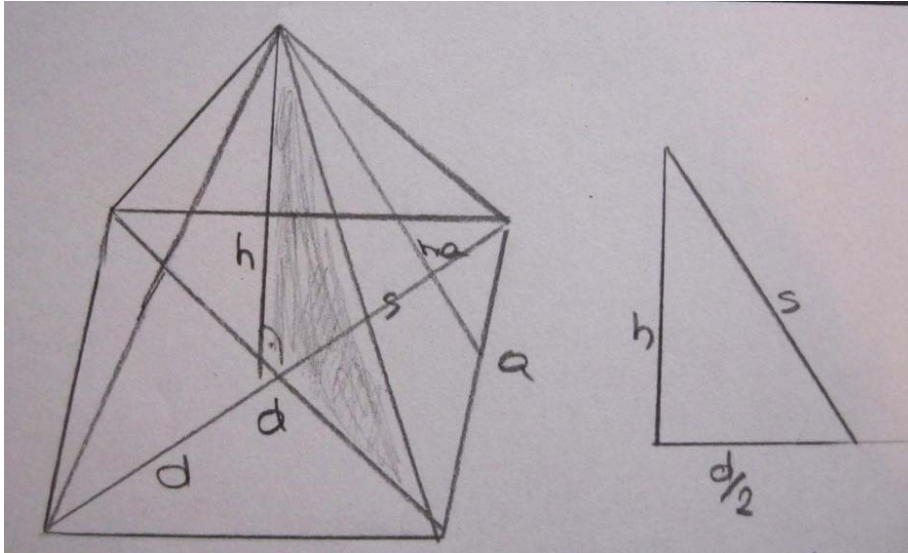


Abbildung 12: Teilskizzen I

Abbildung zwölf zeigt eine, meiner Meinung nach, vorbildliche Skizze samt Teilskizze. Das in der Pyramide grau schattierte rechtwinklige Dreieck, aus der Höhe h , der halben Diagonale und der Seitenkante s , ist als Teilskizze herausgezeichnet. Auch die Teilskizze ist richtig beschriftet und hat an der richtigen Ecke, den rechten Winkel. Diese Versuchsperson dürfte also kein Problem mit dem räumlichen Vorstellungsvermögen haben, oder zumindest nicht damit, die rechtwinkligen Dreiecke in der Skizze der Pyramide zu erkennen.

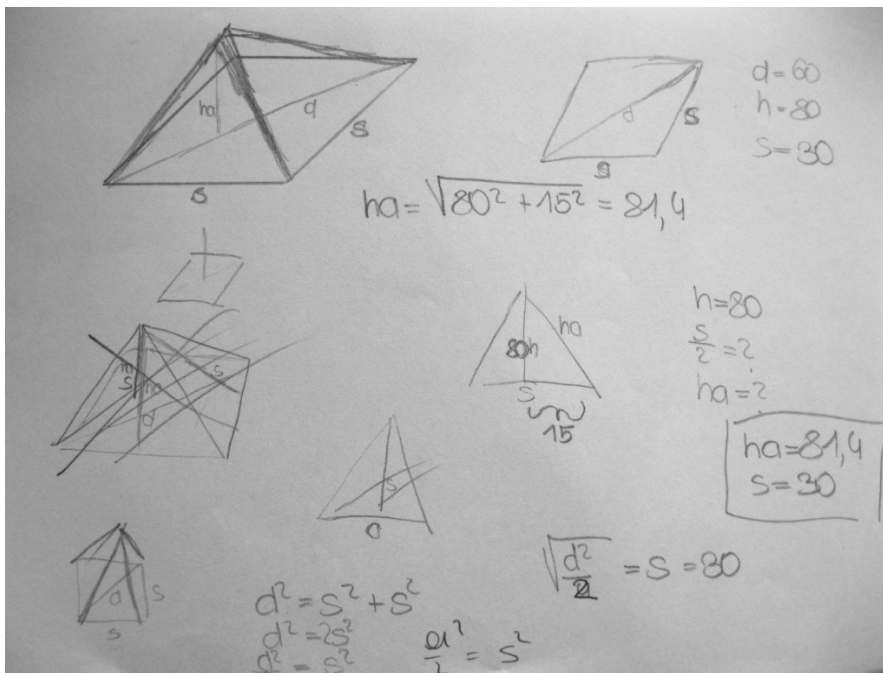


Abbildung 13: Teilskizzen II

Abbildung dreizehn zeigt die Arbeit einer weiteren Versuchsperson. Erstens hat diese einige Skizzen gemacht, bis sie anscheinend mit einer „zufrieden“ war. Abgesehen von den Beschriftungsfehlern und den Rechenfehlern, hat auch diese/r SchülerIn versucht, sich mit Teilskizzen zu helfen. Wenn SchülerInnen diese Transformation von der räumlichen Skizze in eine Teilskizze schaffen, ist der Lösungsweg über den Satz von Pythagoras am besten nachzuvollziehen.

(12) Nur s berechnet

Viele SchülerInnen haben nur die Länge der Seitenkante s berechnet. Entweder wussten sie dann nicht mehr weiter, oder waren nicht motiviert genug noch „weiterzudenken“.

Zu dieser Kategorie der ProbandInnen, die nur die Länge der Seitenkante s berechnet haben, zählen sieben Schülerinnen und vier Schüler. Das sind 25,6 %, also ein Viertel, aller SchülerInnen.

(13) Formel falsch – Ergebnis richtig

Es ist nie ganz zu verhindern, dass SchülerInnen bei Tests, auch Unbenoteten wie diesem, schummeln. Sehr zu „verdächtigen“ sind jene SchülerInnen bei denen die Formel falsch ist, aber dann plötzlich das richtige Ergebnis steht.

Das war Gott sei Dank nur, beziehungsweise leider, bei einer Schülerin und einem Schüler der Fall. Es ist natürlich nicht auszuschließen, dass noch weitere SchülerInnen abgeschrieben haben. Aber wenn dem so wäre, haben sie es zumindest so gemacht, dass ich beim Korrigieren nichts bemerkt habe.

7.4.3.3. Auswertung der Lösungskapazität unter Nutzung der Fragebögen, zur individuellen Bewertung des Testverlaufs durch die SchülerInnen

Warum heißt dieses Kapitel Auswertung der Fragebögen? Es haben natürlich alle SchülerInnen denselben Fragebogen erhalten. Nur Gruppe 2, die zusätzlich die Modellpyramiden erhielt, hatte noch vier zusätzliche Fragen betreffend der Anwendbarkeit des Modells.

Einige wenige SchülerInnen haben den Fragebogen nicht vollständig ausgefüllt. Dies ist erwähnenswert, damit es bei den Zahlen in den Tabellen nicht zu Verwirrungen kommt.

Zuerst einmal habe ich zwei Tabellen erstellt. Eine Tabelle für die erste Versuchsklasse aus der ersichtlich werden soll, wie viele männliche und weibliche Probanden aus Gruppe eins und zwei jeweils welche Antwort angekreuzt haben. Eine äquivalente Tabelle habe ich auch für Gruppe zwei erstellt.

Um das Lesen der folgenden Tabellen zu erleichtern, hier noch eine Legende.

Abkürzung	Bedeutung
1m	Männlicher Schüler aus Gruppe 1
1w	Weibliche Schülerin aus Gruppe 1
2m	Männlicher Schüler aus Gruppe 2
2w	Weibliche Schülerin aus Gruppe 2

Klasse 1

Frage	Gruppe					
1	1 m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w		1 3 3 1 6	1 4 1 3 2 7	1 1 1 1 2	1 1 2
2	1 m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w	1 2 1 1 3	1 2 3	5 2 2 5	1 4 1 4	1 1 2
3	1 m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w		1 3 3 1 6	2 2	3 2 5	1 1 2 3 3 4
4	1 m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w	1 1 2	1 5 3 1 8	1 3 2 1 3 4	 2 2	 1 1
5	1 m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w	1 1 1 1	1 7 2 4 3 11	1 3 4	 1 1	
6	1 m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w	1 1 1 1	2 6 1 3 3 9	2 4 6	 1 1	
7	1 m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w	1 3 1 2 2 5	1 3 1 3 2 6	3 2 5		1 1
8	1 m 1w 2m 2w Gesamt m	 1		4 2	1 4 2 4 3	1 1 1 1

	Gesamt w	1		6	8	2
9	1 m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w		1 1	3 3	2 3 2 3	2 1
10	1 m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w	1 1	 3	2 3 1 1	5 1 1	 2
11	1 m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w	1 1	2 	3 2	3 2 4	1 1 1
12	1 m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w		1 1 1	3 3	2 1	1 3 2 3
13	1 m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w	1 4 1 3	1 1 3	2	1 2 3	
14	1 m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w	2 1	1 2 1 1	1 1 3	1 3 3	1
15	1 m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w	2 1	1 1 1	1 2 3	1 3 3	2
16	1 m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w	1	2 2	3 5	1 3 1	1 2
17	1 m			1		1

	1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w	2 2	4	 2 1 2	4 1 3 1 7	1 1 1 2 2
18	1 m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w	 2 2	3 1 4	1 3 1 1 4	 2 3 5	1 1 2 1 3 2
19	1 m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w	2 8 2 8 4 16	 1 1	 	 	
20	1 m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w	 1 1	2 1 3	 	1 5 6	2 6 2 1 4 7
21	1m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w	 	 1 3 1 3	 2 2	 1 1	 1 2 1 2
22	1m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w	 	 1 3 1 3	 	 1 1	 1 3 1 3
23	1m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w	 	2 1 2 1	 3 3	 	 3 3
24	1m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w	 	 	 1 1	 1 3 1 3	 1 3 1 3

Klasse 2

Frage	Gruppe					
1	1 m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w	1 1 	2 2 2 2 4	1 3 4 1 7	1 2 3 4 2	1 1
2	1 m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w	1 1 	1 2 1 1 2 3	1 4 4 5 5 9	 2 2	
3	1 m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w	2 2 1 4 1	 2 3 3 2	 1 1 5 1 6	1 4 1 1 2 5	1 1
4	1 m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w	 2 1 2 1	3 4 1 3 4 7	 1 2 1 2	2 1 1 2	1 1
5	1 m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w	2 2 4 	1 5 3 4 4 9	3 2 5		
6	1 m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w	1 1 2 1 3 2	1 3 3 4 4 7	1 3 1 1 4	1 1	
7	1 m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w	2 5 3 4 5 9	 2 1 1 1 3	1 1 1 1 2 2		
8	1 m 1w 2m 2w Gesamt m		1 1 1	 1 1 1 1	 3 1 3 1	2 3 3 2 5

	Gesamt w		1	2	6	5
9	1 m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w			1 2 2 1 4	2 4 1 4 3 8	2 4 4 2
10	1 m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w	2 1 2 1	1 1 2	2 1 1 1 3	1 4 2 1 3 5	1 1
11	1 m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w		1 2 1 1	1 2 4	2 2 1 1	3 1
12	1 m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w		1 1	3 2 1 3 4 5	3 1 3 1 6	3 2 2 3
13	1 m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w	1 2 1 2 2	3 1 1 1 4	1 2 3 2 4	1 2 1 2 2 4	
14	1 m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w	1 1	1 1 2	1 3 2 2 3 5	2 1 3 3 5 4	2 2
15	1 m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w	2 2	1 1	2 1 1 2 3 3	1 3 3 4 4 7	1 1 1 1
16	1 m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w	 1 1 1 1	1 1 2 1 3 2	 2 1 1 2	1 1 1 4 2 5	1 4 1 4
17	1 m	1	1		1	

	1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w	2 1 2	1 1 2 1	3 1 2 1 5	1 4 2 4	2 2 2 2
18	1 m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w	1 3 1 3	 2 2 4	 1 1	 2 3 3 3 5	2 1 1 3 1
19	1 m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w	3 8 4 6 7 14				
20	1 m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w	 1 2 2 1	 1 1 1 1	 1 1	 3 3	3 5 1 3 4 8
21	1 m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w	 1 1	 1 3 1 3		 2 2 2 2	 1 1
22	1 m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w			 1 1	 3 2 3 2	 1 3 1 3
23	1 m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w	 1 2 1 2	 1 3 1 3	 2 1 2 1		
24	1 m 1w 2m 2w Gesamt m Gesamt w	 1 1		 1 1	 1 1	 4 3 4 3

Im nächsten Schritt habe ich die Ergebnisse und Zahlen aus beiden Versuchsklassen zusammengefasst. Um das Lesen der Arbeit zu erleichtern, habe ich diese neuen Zahlen in den Fragebogen eingefügt. Das soll ersichtlich machen, wie viele ProbandInnen, welche Frage angekreuzt haben.

Der Fragebogen ist in vier, für Gruppe zwei in fünf, Abschnitte gegliedert, die unterschiedliche Themen behandeln. Ich werde jeden Abschnitt extra im Zusammenhang mit den Zahlen betrachten und interpretieren.

Zuerst einmal mache ich keine Unterscheidung zwischen weiblichen und männlichen Probanden. Wie ich schon bei der Einleitung zu meiner empirischen Untersuchung geschrieben habe, interessiere ich mich eigentlich primär dafür, ob sich die SchülerInnen mit dem Modell beim Lösen der Aufgabe leichter taten.

Abschnitt 1: Selbsteinschätzung der mathematischen Fähigkeiten

(1) Ich bin gut in Mathematik.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu
1	13	17	9	3

(2) Ich habe keine Probleme beim Lösen von Mathematikbeispielen im Schulunterricht.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu
5	8	21	7	2

(3) Ich verstehe alles im Mathematikunterricht.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu
5	12	9	12	8

Drei Fragen des Fragebogens betrafen die persönliche Selbsteinschätzung der mathematischen Fähigkeiten.

Ich glaube die persönliche Selbsteinschätzung hängt bis zu einem gewissen Grad mit der Leidenschaft für ein Unterrichtsfach zusammen. Je mehr ich ein Fach mag, desto mehr werde ich bemüht sein alles zu verstehen. Je mehr ich glaube zu verstehen, desto positiver ist meine Selbsteinschätzung. Natürlich beeinflussen auch sehr viele andere Faktoren die Tatsache, wie sehr ich ein Fach mag, nur das ist nicht Bestandteil dieser Arbeit.

Es ist für mich eine positive Beobachtung zu sehen, dass sich immerhin auf die ersten zwei Fragen, mehr SchülerInnen zum oberen Bereich oder Mittelbereich zugehörig fühlen als zum Unteren. Das heißt der Großteil hat den Eindruck ganz gut zu sein in Mathematik und nur wenige Probleme beim Lösen von Mathematikbeispielen im Unterricht zu haben.

Gerade wenn es um das Verständnis im Mathematikunterricht geht, haben drei SchülerInnen mehr eine der zwei unteren Antworten angekreuzt. Also verstehen die Hälfte der SchülerInnen minus drei, nach Selbsteinschätzung, alles im Mathematikunterricht.

Aus Erfahrung als Nachhilfelehrerin kann ich sagen, dass sich leider viele SchülerInnen darauf verlassen, dass ihnen in der Nachhilfestunde alles noch mal erklärt wird. Für viele ist es daher nicht weiter schlimm, wenn sie im Unterricht nicht mitkommen beziehungsweise ist dann sicher auch der Ansporn zu versuchen alles schon im Unterricht zu verstehen, geringer. Leider, oder zur Freude der Nachhilfelehrer, nehmen sehr viele SchülerInnen Nachhilfe in Mathematik, was ich nicht auf die Unfähigkeit der ProfessorInnen zurückführen würde, sondern auf die Faulheit der SchülerInnen oder der Sicherheit in der sie sich wiegen.

Abschnitt 2: Selbsteinschätzung der räumlichen Fähigkeiten

(4) Ich kann Textbeispiele gut mit Hilfe von Zeichnungen veranschaulichen.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu
4	20	10	5	2

(5) Ich kann Skizzen gut lesen.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu
6	27	9	1	

(6) Ich kann Skizzen von unterschiedlichen Körpern zeichnen. (z.B. Pyramide)

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu
7	23	11	2	

(7) Skizzen helfen mir beim Lösen von Mathematikbeispielen.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu
21	12	9		

(8) Ich kann mit Skizzen von Körpern nicht umgehen.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu
1	2	9	18	13

(9) Ich weiß nie, wo sich welches Bestimmungsstück des Körpers auf der Skizze befindet.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu
	2	11	21	9

(10) Ich kann Skizzen von Körpern in meiner Vorstellung nicht so drehen und umformen, wie ich es für die jeweiligen Aufgaben brauche.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu
5	5	11	15	3

Sehr überrascht bin ich von den Antworten, was die Selbsteinschätzung der räumlichen Fähigkeiten betrifft.

Maximal fünf SchülerInnen haben eine der Fragen negativ beantwortet. Mit negativ meine ich, dass sie ihre Fähigkeiten die Frage betreffend im untersten Bereich ansiedeln.

Interessant ist auch zu sehen, dass 48,9 % der SchülerInnen angeben, dass ihnen Skizzen beim Lösen von Mathematikbeispielen helfen. Das heißt diese SchülerInnen können offensichtlich mit Skizzen arbeiten. Mit Skizzen umgehen zu können, setzt einen gewissen Grad an räumlichem Vorstellungsvermögen voraus. Denn nur mit Hilfe des räumlichen Vorstellungsvermögens kann ich die passenden Skizzen auswählen und diese wenn nötig drehen und formieren so wie für das jeweilige Beispiel benötigt.

Die „größten“ Probleme haben die ProbandInnen laut Selbsteinschätzung beim Drehen und Umformen von Skizzen in ihrer Vorstellung. Aber diese Schwierigkeit betrifft knapp weniger als die Hälfte der SchülerInnen. Man könnte es natürlich auch anders formulieren und sagen, dieses Problem betrifft fast die Hälfte der SchülerInnen.

Trotzdem habe ich den Eindruck, dass die positiven Erfahrungen mit Skizzen, ihrer Anwendung und Brauchbarkeit überwiegen. Aber es ist sicher wichtig sich als ProfessorIn bewusst zu sein, dass auch alle Fertigkeiten, welche Skizzen betreffen, gelernt und geübt werden müssen. Das fängt beim Zeichnen von Skizzen an und hört beim Wählen von passenden Skizzen, dem Beschriften, Drehen und ähnlichen Aktionen auf.

Das sieht man auch gut an den Lösungswegen der SchülerInnen zu dem Rechenbeispiel. Viele haben mehr als eine Skizze gemacht, bis sie mit ihrem Entwurf zufrieden gewesen zu sein scheinen. Das nimmt natürlich im Unterricht, bei Hausaufgaben oder Schularbeiten wichtige Zeit in Anspruch, wenn die/der SchülerIn nicht schnell genug eine brauchbare Skizze anfertigen kann.

Ohne Skizze sind jedoch solche Beispiele, wie das der empirischen Untersuchung, nur schwer zu lösen. Das heißt je größer die Schwierigkeiten der SchülerInnen sind eine Skizze anzufertigen, desto größer sind auch jene Schwierigkeiten eine richtige Lösung zu finden.

Abschnitt 3: Motivation beim Herangehen an Mathematikbeispiele

(11) Ich mag Mathematik.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu
2	7	12	15	7

(12) Ich stelle mich gerne mathematischen Herausforderungen.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu
	4	15	10	14

(13) Wenn möglich vermeide ich es mit Mathematik konfrontiert zu werden.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu
13	10	8	12	

(14) Es ist mir, wenn die Aufgabe nicht benotet wird, egal ob ich ein Mathematikbeispiel lösen kann.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu
4	7	13	16	

(15) Alles im Mathematikunterricht, was nicht zur Mathematiknote zählt, interessiert mich nicht.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu
5	4	12	18	4

Im Rahmen meiner empirischen Untersuchung habe ich mich natürlich auch für die Motivation der SchülerInnen beim Herangehen an Mathematikbeispiele interessiert. Daraus

lassen sich eventuell auch Rückschlüsse darauf ziehen, wie engagiert die SchülerInnen an meine empirische Untersuchung herangegangen sind.

Von den Ergebnissen der ersten zwei Teile des Fragebogens war ich positiv überrascht. Bei diesem Teil, „Motivation beim Herangehen an Mathematikbeispiele“, haben sich leider meine Erwartungen erfüllt.

Die Allgemeinheit, und damit beschränke ich mich gar nicht nur auf SchülerInnen, hat leider eine gewisse Grundabneigung gegenüber Mathematik. Immer wieder gibt es Diskussionen darüber, wie man die „Attraktivität“ von Mathematik steigern könnte.

Aussagen wie „Mathematik verstehe ich einfach nicht“ oder „Niemand in meiner Familie kann Mathematik“ sind akzeptiert. Anstatt zu kontern mit „Hast du schon einmal probiert Mathematik zu verstehen“ oder dergleichen, wird Gleichgültigkeit gegenüber Mathematik von der Gesellschaft akzeptiert. Das ist zum Beispiel bei Sprachen anders.

Auf jeden Fall habe ich keine allzu große „Zuneigung“ zu Mathematik erwartet. Das hat sich leider auch bewahrheitet. Alle Fragen wurden vom Großteil der ProbandInnen negativ beantwortet. Mit negativ meine ich in diesem Fall, dass ihre Motivation beim Herangehen an Mathematikbeispiele deutlich im unteren Bereich liegt, also sehr gering ist.

Gerundet sind durchschnittlich 20,9 % der SchülerInnen „AusreißerInnen“. Diese sogenannten „AusreißerInnen“ dürften eine nicht ganz so negative Einstellung gegenüber der Mathematik haben. Das heißt sie sind nicht ganz abgeneigt, sich mathematischen Herausforderungen zu stellen, mit Mathematik konfrontiert zu werden und ihr Interesse für Mathematik zuzugeben. Bei manchen meiner NachhilfeschülerInnen habe ich das Gefühl, dass sie der Mathematik eigentlich nicht so abgeneigt sind, dies aber einfach nicht zugeben wollen. Das hängt sicher mit der Einstellung, vom Großteil der Gesellschaft, gegenüber der Mathematik zusammen. Gerade für SchülerInnen ist es wichtig, nicht „aus der Reihe zu tanzen“, also die Erwartungen der Umwelt zu erfüllen.

Abschnitt 4: Zum Testbeispiel

(16) Ich habe mir einfach getan beim Lösen des Testbeispiels.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu
3	9	11	12	8

(17) Ich hatte keine Ahnung wie ich das Testbeispiel lösen sollte.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu
5	3	9	14	8

(18) Ich wusste nicht welche Formeln ich für das Testbeispiel brauche.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu
6	8	6	13	9

(19) Ich kenne den Satz von Pythagoras.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu
31	1			

(20) Ich konnte keine Skizze von einer Pyramide machen.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu
4	5	1	9	23

Sechs SchülerInnen haben das Testbeispiel komplett richtig gelöst. Das passt auch ziemlich mit den Antworten zu Frage 16 zusammen. Da geben drei SchülerInnen an, sich beim Lösen des Testbeispiels sehr leicht getan zu haben, und für neun SchülerInnen war es ziemlich leicht.

Auch das Ergebnis zu Frage 17 passt gut mit den Auswertungen der Testbeispiele zusammen. Bei den Testbeispielen haben sechs SchülerInnen keine Ahnung gehabt, wie sie an das Beispiel herangehen sollten, beziehungsweise hatte ich diesen Eindruck beim Kontrollieren. Beim Fragebogen geben fünf SchülerInnen an, dass es sehr zutreffend ist, dass sie keine Ahnung hatten wie das Testbeispiel zu lösen sei. Acht SchülerInnen verneinten die Frage, ob sie keine Ahnung für einen Lösungsweg zu dem Beispiel gehabt haben. Auch diese Zahl passt gut zum Auswertungsergebnis der Beispiele.

Neben denen die das Beispiel komplett richtig gelöst haben, also offensichtlich Lösungsansätze im Kopf hatten, gibt es noch einige SchülerInnen, die zumindest Rechenwege zu allen gesuchten Bestimmungsstücken hatten, sich aber irgendwo verrechnet haben oder Denkfehler eingebaut haben.

Interessant sind auch die Antworten auf Frage 18 „Ich wusste nicht welche Formeln ich für das Testbeispiel brauche.“ Sechs SchülerInnen haben hier „trifft sehr zu“ angekreuzt.

Entweder verbanden diese SchülerInnen die Aufgabenstellung nicht mit der Anwendung des Satzes von Pythagoras oder sie wussten den Satz von Pythagoras nicht. Ich vermute nur, diese SchülerInnen haben vorwiegend „trifft zu“ angekreuzt. Beim Korrigieren habe ich gesehen, dass alle SchülerInnen welche nicht zu der Gruppe gehören, die wirklich keine Ahnung hatten, entweder Ansätze des Satzes von Pythagoras hingeschrieben haben oder Lösungsansätze mit anderen Formeln. Das heißt diese SchülerInnen hatten zumindest mehr oder weniger Ahnung welche Formeln zu verwenden sind. Ich vermute, dass SchülerInnen zu einem Großteil glauben, dass es nur einen richtigen Lösungsweg gibt. Fällt ihnen nicht sofort eine bekannte bereits angewendete Lösung ein, lassen sie meist das Beispiel beiseite. Selbstständiges Arbeiten und Probieren in der Mathematik ist für viele SchülerInnen ein Fremdwort. Ich bin überzeugt, dass eine Schulung in diesen Fertigkeiten wichtig wäre, damit SchülerInnen mehr Selbstbewusstsein für die Anwendung von Mathematik erlangen. Das trifft vielleicht auf mein Beispiel weniger zu, als auf andere.

Dem Ergebnis von Frage 19 zufolge, müssten alle Versuchspersonen den Satz von Pythagoras kennen. Daraus schließe ich, dass die SchülerInnen die Frage 18 mit „sehr zutreffend“ beantwortet haben, also nicht wussten welche Formeln sie für das Beispiel verwenden sollten, den Satz von Pythagoras zwar kennen, ihn aber nicht mit dieser Aufgabenstellung in Verbindung brachten. Ein möglicher Grund wäre, dass diesen SchülerInnen in der Skizze der Pyramide keine rechtwinkligen Dreiecke aufgefallen sind, weil ihnen das dafür nötige räumliche Vorstellungsvermögen fehlt.

Frage 20 zufolge haben sich zehn SchülerInnen schwer getan, eine Pyramide zu skizzieren. Das sind 23,3 % der Versuchspersonen. Beim Korrigieren der Beispiele ist mir auch aufgefallen, dass einige SchülerInnen nach mehreren Versuchen eine Skizze anzufertigen aufgegeben haben, beziehungsweise nur Skizzen anfertigen konnten, die wenig brauchbar sind. Das passt aber gut zu dem was ich schon erwähnt habe. Auch das Anfertigen von Skizzen ist eine Fertigkeit, welche im Mathematikunterricht geübt werden muss, und nicht nur das Anfertigen sondern auch das Lesen von und arbeiten mit Skizzen.

Das Testbeispiel, das ich für meine Untersuchung gewählt habe, ist ein sehr Einfaches. Alle SchülerInnen müssen im Unterricht schon ähnliche Aufgaben gerechnet haben und eigentlich Beispiele, wie das von mir Gewählte, lösen können. Aber am Ergebnis des Fragebogens sieht man, dass die Praxis etwas anders aussieht.

Abschnitt 5: Zum Modell

(21) Das Modell der Pyramide war sehr hilfreich für das Lösen des Testbeispiels.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu
1	8	2	5	4

(22) Ohne das Modell hätte ich das Beispiel nicht lösen können.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu
	4	1	6	8

(23) Das Modell war zwar nett, aber ich konnte das Beispiel ohne ihn lösen.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu
3	7	6		3

(24) Das Modell hatte nichts mit dem Beispiel zu tun.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu
1		2	5	11

Die Antworten auf die vier Fragen dieses Abschnitts sind natürlich für mich und meine Arbeit besonders interessant und relevant.

Ich habe großes Interesse herauszufinden, ob es hilfreich ist beziehungsweise Sinn macht, im Mathematikunterricht Modelle zu verwenden. Ziel wäre es, besonders SchülerInnen mit Problemen im räumlichen Vorstellungsvermögen, das Lösen von Beispielen, wo diese Fertigkeit gefragt ist, zu erleichtern.

Frage 21 ist zu entnehmen dass immerhin für neun SchülerInnen „sehr zutrifft“ oder „zutrifft“, dass das Modell hilfreich war. Natürlich benötigen SchülerInnen, die keine Probleme mit dem räumlichen Vorstellungsvermögen haben, so ein Modell nicht. Aber eine Möglichkeit wäre es SchülerInnen im Unterricht frei entscheiden zu lassen, ob sie ein Modell zur Hilfe nehmen wollen.

Immerhin für vier SchülerInnen ist es zutreffend, dass sie das Beispiel ohne Modell nicht hätten lösen können.

An Frage 24 und den Antworten sieht man auch, dass sich die Versuchspersonen ziemlich einig sind, dass das Modell mit dem Beispiel in Zusammenhang stand.

Bei der Interpretation meiner empirischen Untersuchung möchte ich dann auch noch die Lösungswege zu den Beispielen mit den Antworten auf den Fragebogen vergleichen. Dort möchte ich mir zum Beispiel ansehen, wie weit ein/e SchülerIn beim Lösen des Beispiels gekommen ist, die/der ohne das Modell nicht hätte arbeiten können.

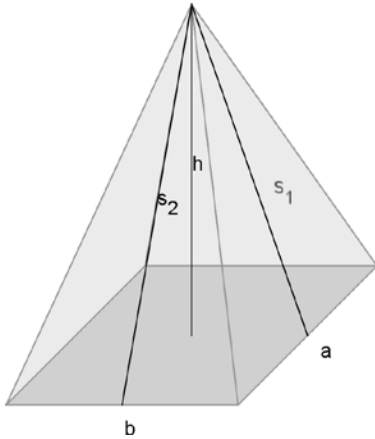
An dieser Stelle möchte ich noch die Tabelle einfügen aus der abzulesen ist, wie viele männliche und wie viele weibliche Probanden jeweils welche Antwort angekreuzt haben.

	Geschlecht	1	2	3	4	5
1	m w	1 1	3 10	3 14	5 4	3
2	m w	2 3	2 6	7 14	1 6	2
3	m w	4 1	4 8	1 8	2 10	3 5
4	m w	2 3	5 15	4 6	1 4	2
5	m w	5 1	7 20	9	1	
6	m w	4 3	7 16	1 10	2	
7	m w	7 14	3 9	2 7		
8	m w	1	1 1	1 8	4 14	6 7
9	m w		2	1 10	7 14	4 5
10	m w	2 3	5	4 7	4 11	1 2
11	m w	1 1	2 5	2 10	5 10	2 5
12	m w		3 1	4 11	1 9	5 9
13	m w	4 9	2 8	2 6	3 9	
14	m w	4	2 5	4 9	6 10	3
15	m w	5	1 3	5 7	5 13	1 3
16	m w	2 1	5 4	1 10	3 9	1 7
17	m w	1 4	2 1	2 7	3 11	4 4
18	m w	1 5	8	1 5	3 10	6 3
19	m	11				

	w	20	1			
20	m	2	1			8
	w	2	4	1	9	15
21	m	1	2		2	1
	w		6	2	3	3
22	m		1		3	2
	w		3	1	3	6
23	m	1	3	2		
	w	2	4	4		3
24	m			2	4	6
	w	1			1	5

Der Fragebogen enthielt noch eine weitere Frage beziehungsweise Aufgabe. Nämlich folgende:

Markiere jede Ecke in dieser Pyramide, an der sich ein rechter Winkel(90°) befindet!



Anfangs stellte ich mir die Frage, wie ich die Ergebnisse zu dieser Aufgabe auswerten sollte. Zuerst sah ich mir einmal alle Fragebögen an. Da kam mir dann eine Idee, wie sich die Ergebnisse halbwegs darstellen lassen könnten, nämlich wieder in Form einer Tabelle.

Mir fiel auf, dass alle SchülerInnen gewisse Winkel markierten. So erstellte ich wieder eine Tabelle aus der ersichtlich werden soll, wie viele SchülerInnen welche rechten Winkel markiert haben.

Die SchülerInnen haben natürlich unterschiedlich viele rechte Winkel markiert, manche mehr und manche weniger.

(1) Anzahl der markierten rechten Winkel auf der Grundfläche

Anzahl der markierten rechten Winkel auf Grundfläche	gesamt	♀	♂
1	1	1	
2			
3			
4	25	17	8

Aus der Angabe des Beispiels ist zu entnehmen, dass es sich um eine regelmäßige quadratische Pyramide handelt. Regelmäßig quadratisch heißt, dass die Grundfläche ein Quadrat ist und sich die Raumhöhe genau in der Mitte der Grundfläche befindet, also beim Schnittpunkt der Diagonalen.

Was mit „Anzahl der markierten rechten Winkel auf Grundfläche“ gemeint ist, soll Abbildung 10 zeigen. Die roten Sterne sind die Markierungen an den rechten Winkeln. Auf dieser Abbildung sind alle Vier eingezeichnet.

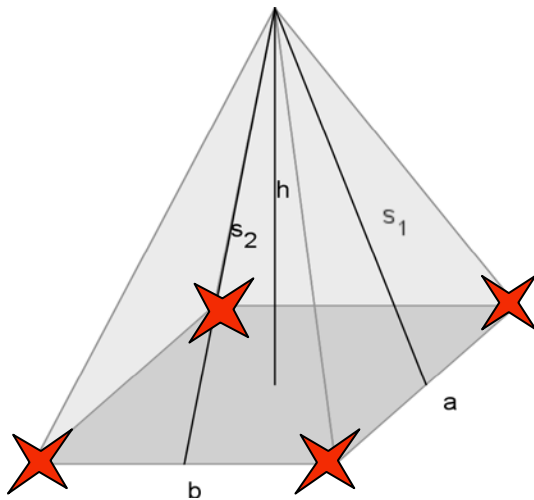


Abbildung 14: Anzahl der markierten rechten Winkel auf Grundfläche

Eigentlich sollten alle SchülerInnen wissen, dass die Grundfläche ein Quadrat ist, und in Folge auch alle vier rechten Winkel der Grundfläche markieren können. Geschafft haben das 25 SchülerInnen, das sind 58,1 % der gesamten Versuchspersonen. Ich finde das sind nicht unbedingt viele, da man für diese vier rechten Winkel noch nicht einmal räumliches Vorstellungsvermögen braucht, sondern einfach nur etwas mitdenken muss.

(2) Anzahl der markierten rechten Winkel von h_a auf a

Anzahl der markierten rechten Winkel von h_a auf a	gesamt	♀	♂
1			
2	12	12	
3	9	1	8
4	1		1

Welche Winkel ich mit „Anzahl der markierten rechten Winkel von h_a auf a “ meine, soll Abbildung 11 darstellen. Wenn Versuchspersonen bei einer Höhe h_a den rechten Winkel auf a nach links und nach rechts markiert haben, so wie in Abbildung 13, habe ich das nur als einen markierten rechten Winkel gewertet.

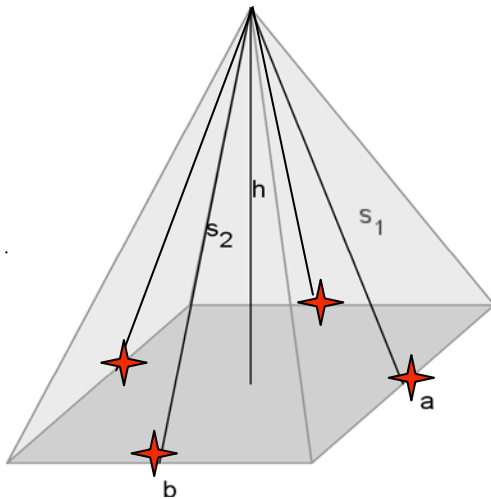


Abbildung 15: Anzahl der markierten rechten Winkel von h_a auf a

Um diese rechten Winkel einzeichnen zu können, ist schon mehr Überlegungsarbeit gefragt. Natürlich sollten auch hier die SchülerInnen wieder wissen, dass eine Höhe eigentlich immer normal, auf die Seite steht. Auf jeder der vier Seitenflächen befindet sich eine Höhe h_a .

SchülerInnen die diese Überlegung nicht gemacht haben, mussten ihr räumliches Vorstellungsvermögen anwenden um zu überlegen, ob sich bei den Höhen h_a rechte Winkel befinden.

Warum die meisten SchülerInnen, nämlich 12 oder auch 27,9 % nur zwei rechte Winkel zwischen h_a und a markiert haben, liegt eventuell daran, dass nur zwei Höhen auf der Skizze eingezeichnet waren. Bei Abbildung 11 habe ich die anderen zwei Höhen noch hinzugefügt, so wie es auch manche SchülerInnen gemacht haben. Vielleicht dachten manche SchülerInnen dass das Einzeichnen zusätzlicher Linien, wie etwa weiterer Höhen, nicht erwünscht ist, und sie rechte Winkel nur an schon „gegebenen“ Stellen markieren sollten.

Immerhin ein Schüler hat es geschafft alle vier dieser rechten Winkel zu markieren.

(3) Anzahl der markierten rechten Winkel von h auf die Grundfläche

Anzahl der markierten rechten Winkel von h auf Grundfläche	gesamt	♀	♂
4	2	1	1
2	10	8	2
1	20	14	6

Die Raumhöhe h schließt unendlich viele rechte Winkel mit der Grundfläche ein. Aber zu dieser Erkenntnis ist kein/e SchülerIn gekommen. 32 SchülerInnen haben einen oder mehrere

rechte Winkel an dieser Stelle eingezeichnet. Das sind 74,4 % der Versuchspersonen. Dieses Ergebnis finde ich positiv.

Auch hier gilt wieder, eigentlich sollte jede/r SchülerIn wissen, dass sich an dieser Stelle rechte Winkel befinden, da eine Höhe immer normal auf die Seite oder Fläche steht. Aber ich weiß leider nicht ob die SchülerInnen mit dieser Überlegung an die Aufgabe herangegangen sind, oder ihr räumliches Vorstellungsvermögen eingesetzt haben.

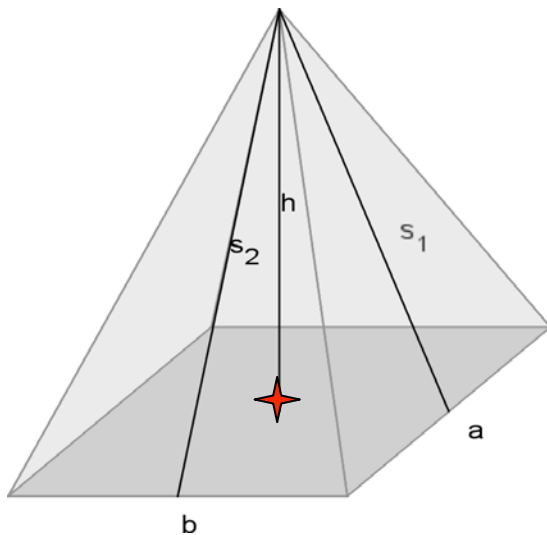


Abbildung 16: Anzahl der markierten rechten Winkel von h auf Grundfläche

Nach der Interpretation der Tabelle habe ich noch vier Arbeiten von SchülerInnen zu dieser Aufgabe eingefügt. Diese Abbildungen sollen die unterschiedlichen Herangehensweisen der Versuchspersonen an das Beispiel zeigen.

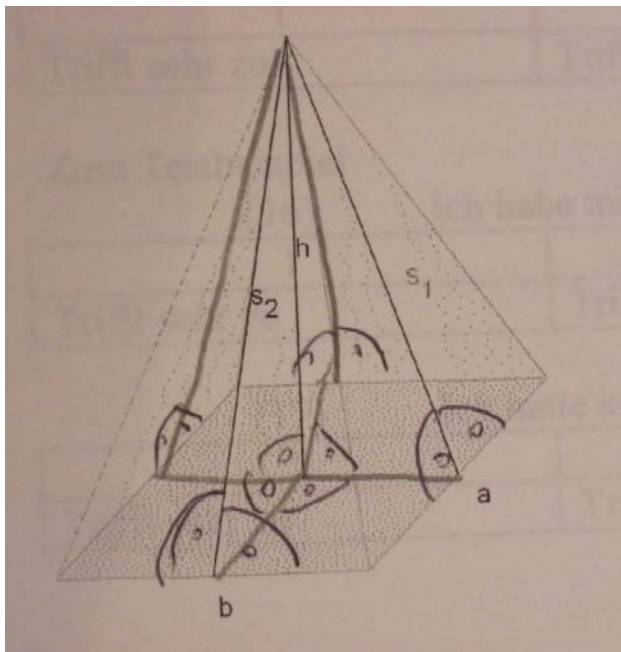


Abbildung 17: Einzeichnen der rechten Winkel I

Abbildung 17 zeigt die Arbeit einer Versuchsperson, die jeweils beide rechten Winkel der Höhe h_a auf eine Seite der quadratischen Grundfläche eingezeichnet hat. Dann ist die Grundfläche noch in vier kleinere, gleich große Quadrate geteilt, deren rechte Winkel in der Mitte der Grundfläche eingezeichnet wurden. Warum die anderen drei rechten Winkel, die jedes kleine Quadrat auch noch besitzt nicht markiert sind, weiß ich nicht, beziehungsweise kann ich nicht nachvollziehen.

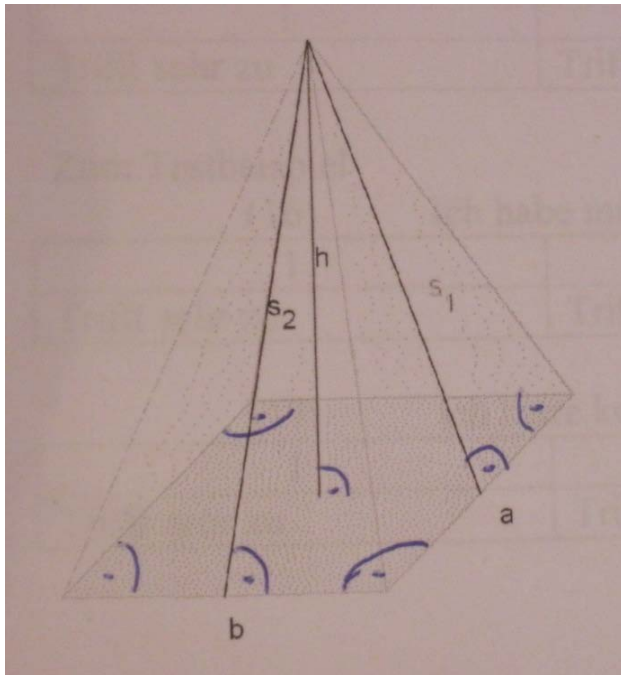


Abbildung 18: Einzeichnen der rechten Winkel II

Die zu Abbildung 18 gehörende Versuchsperson hat vergleichsweise viele rechte Winkel markiert, nämlich an drei unterschiedlichen Lagen. Erstens sind die rechten Winkel der quadratischen Grundfläche eingezeichnet, zweitens die der Raumhöhe h auf die Grundfläche und drittens die der Höhe h_a auf die Seite des Quadrats, an zwei von vier Stellen.

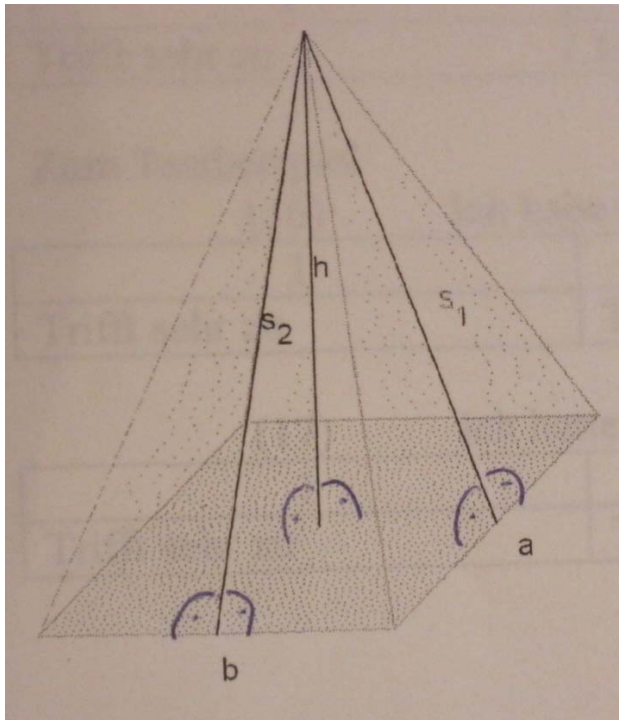


Abbildung 19: Einzeichnen der rechten Winkel III

Diese Versuchsperson, deren Arbeit man in Abbildung 19 sieht, hat zum Beispiel nur an zwei unterschiedlichen Stellen rechte Winkel eingezeichnet. Interessant finde ich auch, dass die SchülerInnen teilweise, so wie hier auch, den rechten Winkel den die Höhe h_a mit der Seite a bildet, nach links und nach rechts markiert haben. Mich würde interessieren was diese Versuchspersonen damit verdeutlichen wollen.

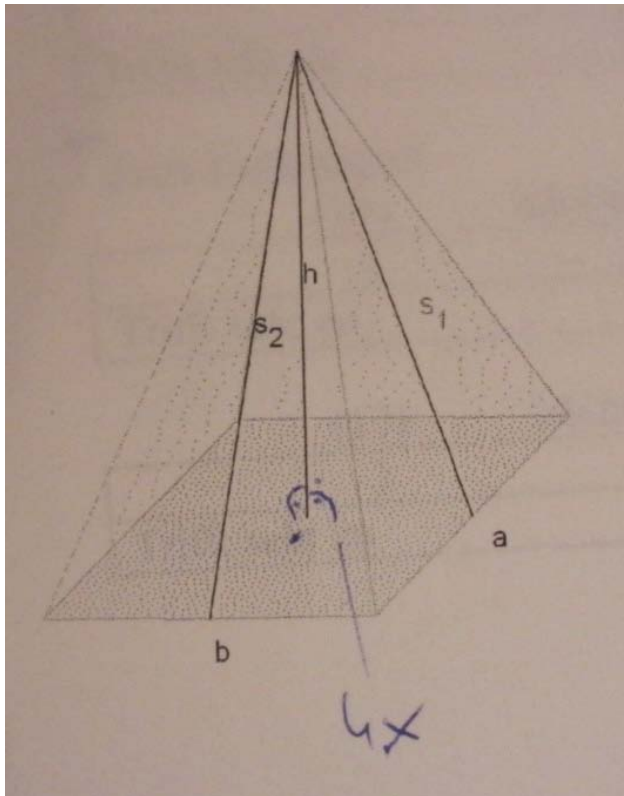


Abbildung 20: Einzeichnen der rechten Winkel IV

Abbildung 20 sticht aus den anderen Lösungen hervor. Hier sind zwei rechte Winkel der Höhe h auf den Mittelpunkt der quadratischen Grundfläche eingezeichnet. Die Verbindung zu den eingezeichneten rechten Winkeln und „4x“ soll wahrscheinlich heißen, dass dieser rechte Winkel vier Mal zu finden ist. Ich frage mich nur entlang welcher Achsen sich diese Versuchsperson die nicht eingezeichneten, nur durch die Zahl angemerkten, restlichen Winkel vorstellt.

7.5. Interpretation der empirischen Untersuchung

Ausgangssituation für die empirische Untersuchung war meine Forschungsfrage:

Kann SchülerInnen, die Probleme des räumlichen Vorstellungsvermögens haben, im speziellen bei der Anwendung des Pythagoras in der Pyramide, geholfen werden indem ihnen beim Lösen der Beispiele das Modell einer Pyramide zur Verfügung gestellt wird?

In diesem Kapitel versuche ich mittels Interpretation der empirischen Untersuchung und Rückgriffen auf die Theorien aus dem ersten Teil meiner Arbeit, eine Antwort auf diese Frage zu formulieren. Daraus ergibt sich die Aufteilung der Interpretation in zwei Teile.

7.5.1. Allgemeine Interpretation aus den Ergebnissen der empirischen Untersuchung

Im Rahmen der Interpretation der empirischen Untersuchung geht es mir darum, die Lösungswege der Beispiele im Zusammenhang und Vergleich mit den Antworten der Fragebögen zu analysieren.

Dabei habe ich mir zuerst die Ergebnisse von Gruppe eins angesehen, also all jenen Versuchspersonen, die kein Modell zur Verfügung hatten.

Alle Aussagen und Interpretationen welche ich treffe, beziehen sich auf meine empirische Untersuchung. Ich wage es nicht allgemeine Interpretationen aufzustellen, wenn ich dies dennoch tue sind es nur Vermutungen.

Bei dieser Analyse von Beispiel und Fragebogen stechen natürlich immer zuerst jene SchülerInnen hervor, die entweder alles richtig gelöst haben, oder keine Ahnung hatten, also jene die nicht im Mittelfeld liegen.

Jene drei SchülerInnen aus Gruppe eins die das Beispiel ohne Fehler gerechnet haben, schätzen ihre mathematischen Fähigkeiten nicht als außergewöhnlich ein. Sie würden sich selbst als „gut“ einstufen.

Bei der Selbsteinschätzung der räumlichen Fähigkeiten haben sich bei Gruppe eins alle SchülerInnen im Mittelbereich eingeordnet. Keiner bewertet sich selbst mit sehr gut, oder als sehr schlecht.

Auffallend ist, dass eine Schülerin mit komplett richtiger Lösung ihre Motivation für Mathematik ganz niedrig ansetzt. Bei den anderen zwei SchüleInnen, die keine Fehler gemacht haben, ist die Motivation im oberen Bereich.

Also steht die Leistungsfähigkeit in einem Fach nicht in direktem Verhältnis zur Leidenschaft für den Unterrichtsgegenstand.

Ähnlich ist es bei den SchülerInnen, die keine Idee für einen Lösungsweg zu diesem Beispiel hatten. Deren Motivation für Mathematik ist zwar nicht außergewöhnlich hoch, aber keinesfalls gleich Null.

Unabhängig davon, wie richtig die SchülerInnen das Beispiel gelöst haben, haben die meisten angegeben, dass Skizzen sehr hilfreich sind für das Lösen von Beispielen. Die Fragen zur Selbsteinschätzung der räumlichen Fähigkeiten beziehen sich auf die Arbeit und den Umgang mit Skizzen. Aber auch das Anfertigen von Skizzen, deren Drehung und ähnliche Operationen, erfordern räumliches Vorstellungsvermögen. Also habe ich bei diesen Fragen gewisse Fähigkeiten des räumlichen Vorstellungsvermögens erfragt.

Versuchspersonen, die beim Lösungsweg nur Rechen- und Denkfehler gemacht haben, schätzen ihre mathematischen Fähigkeiten großteils trotzdem gut ein. Das zeigt ein gewisses Selbstbewusstsein und Selbstvertrauen. Diese Eigenschaften sind meiner Meinung nach sehr wichtig. Selbstbewusstsein lässt SchülerInnen Rechenwege ausprobieren und testen, an die sich andere vielleicht gar nicht heranwagen, wegen mangelndem Selbstvertrauen und Selbstbewusstsein. Warum sollten sich diese SchülerInnen, die nur Rechen- und Denkfehler gemacht haben, auch schlecht einschätzen. Die meisten von ihnen werden überzeugt gewesen sein, dass ihre Lösung die Richtige ist.

Bei Gruppe zwei bin ich genauso vorgegangen wie bei Gruppe eins. Ich habe wieder die Rechenwege mit den Ergebnissen der Fragebögen verglichen.

In dieser Gruppe hatte jede Versuchsperson eine Modellpyramide zur Verfügung. Trotzdem waren die Ergebnisse des Testbeispiels, im Vergleich zu Gruppe eins, nicht besser. Daraus darf man natürlich nicht sofort schließen, dass Modelle sinnlos sind.

Obwohl diese SchülerInnen das Modell zur Verfügung hatten, gab es zwei SchülerInnen, die keine Ahnung von einer Lösung oder einem Lösungsweg hatten.

Auch bei den Rechenwegen wurden genauso wie bei Gruppe eins Rechen- und Denkfehler gemacht.

Erwähnenswert ist meiner Meinung nach, dass eine SchülerIn Katheten und Hypothenuse vertauscht hat, obwohl sie das Modell bei der Hand hatte. Sie hat die Formel von Pythagoras gewusst, aber die Längen falsch eingesetzt.

Ein Schüler, der das Beispiel komplett richtig gelöst hat, merkt am Ende des Fragebogens extra an, dass er das Modell überhaupt nicht gebraucht hat und die Skizze für ihn viel mehr gebracht hat beziehungsweise besser einsetzbar war.

Eine überwiegende Zahl der SchülerInnen sagt zwar, dass das Modell „nett“ war, es aber für das Beispiel nicht benötigt wurde. Dafür gibt es unterschiedliche Erklärungsmöglichkeiten.

Auch der Umgang mit solchen Modellen muss gelernt und geübt werden. Wenn SchülerInnen noch nie damit gearbeitet haben, finden sie eventuell beim ersten Mal keine Verwendung dafür.

Ich habe die Signifikanz der zahlenmäßigen Unterschiede zwischen Gruppe eins und Gruppe zwei, die aus den Tabellen ersichtlich sind, in Frage gestellt. Durch die Analyse der Fragebögen relativieren sich diese Prozentabweichungen. Ich konnte daher die Verwertbarkeit des Modells zu einer deutlichen Optimierung des Unterrichtes noch nicht erkennen.

Mit welchen Versuchsmethoden würde ich die Testreihe also wiederholen um die Treffsicherheit zu optimieren. Das größte Optimierungspotential liegt sicher in der Modellpyramide. Bei einer Wiederholung dieser empirischen Untersuchung würde ich die Modelle zusätzlich beschriften. Außerdem könnte eine „Bedienungsanleitung“ beigelegt werden. Ich stelle mir vor, dass diese „Bedienungsanleitung“ Anregungen enthält wie das Modell zu verwenden ist. Eine Frage könnte lauten: „Nimm das Dreieck, das aus halber Diagonale, Seitenkante und Raumhöhe gebildet wird, aus dem Modell heraus und analysiere dessen Eigenschaften. Welche Zusammenhänge der Seiten fallen dir auf?“

Mit Fragen könnte man versuchen den SchülerInnen eine Richtung des Lösungsweges zu zeigen. Mit Hilfe der Fragen sollen die einzelnen Rechenschritte hergeleitet werden.

7.5.2. Interpretation mit Rückgriff auf die Theorien aus dem theoretischen Teil der Arbeit

Es folgt die Interpretation der empirischen Untersuchung, bei der ich auf Theorien aus dem theoretischen Teil der Arbeit zurückgreife. Die Theorien werden hier nicht noch einmal erklärt, sondern mit der Untersuchung in Zusammenhang gebracht.

Bei der Beschreibung von Strategien zur Lösung räumlicher Aufgaben gibt es zwei Vorgehensweisen. Bei der holistischen Strategie werden die visuellen Vorstellungen als Ganzes bearbeitet, während bei der analytischen Strategie die Lösung in mehreren logischen Schritten passiert.

Ich habe den Eindruck, dass manche SchülerInnen holistische und manche analytische Strategien angewandt haben. Ohne Zweifel haben mehr SchülerInnen die analytische Strategie gewählt. Logische Schritte zu dem Testbeispiel sind das Anfertigen einer Skizze, das Herauszeichnen einer Teilskizze, das Zuordnen von Bestimmungsstücken, das Erkennen von Zusammenhängen der Seiten und weitere, also ein Zerlegen der Aufgabe in aufeinanderfolgende Abschnitte. Die SchülerInnen, die mit einer holistischen Strategie an das Beispiel herangegangen sind, haben vermutlich versucht direkt aus der Skizze eine Lösung „ablesen“ zu können. Ich kann mir gut vorstellen, dass zu dieser Gruppe jene Versuchspersonen gehören, die das Testbeispiel nicht lösen konnten.

Bedingungen für die individuelle Strategiewahl sind interne und externe. Vorwissen und Übung gehören zu internen Bedingungen während zu externen zum Beispiel die Aufgabenkomplexität zählt. Wie stark die SchülerInnen individuell beeinflusst wurden, lässt sich schwer herausfinden. Vorwissen und Übung zur Anwendung des Pythagoras in der Pyramide sollte jede der Versuchspersonen gehabt haben. Je präsenter das Vorwissen jedoch ist, umso einfacher ist eventuell manchen SchülerInnen die Lösung gefallen. SchülerInnen, die mittels Winkelfunktionen zu einem Ergebnis kommen wollten, konnten sich wahrscheinlich nicht mehr so gut an die üblichen Lösungsmethoden erinnern, wie jene, die sofort an die Anwendung des Lehrsatzes von Pythagoras dachten. Ihr Vorwissen war also

geringer. Diese Überlegungen, die ich hier anstelle, gehören nach Linn & Petersen zur kognitiven Perspektive. Die angesprochenen Lösungsprozesse laufen alle im Individuum ab. Im Rahmen der strategischen Perspektive lassen sich qualitativ unterschiedliche Strategien identifizieren. Es hat sich herausgestellt, dass die Anwendung von Winkelfunktionen zu keinen richtigen Ergebnissen geführt hat, also qualitativ zumindest im Rahmen dieser Untersuchung nicht gleichzusetzen ist mit dem Lehrsatz des Pythagoras.

Im Rahmen der Arbeit habe ich schon immer wieder Ideen einfließen lassen, wie gewisse Probleme des räumlichen Vorstellungsvermögens minimiert werden könnten.

An dieser Stelle möchte ich mich noch einmal auf den theoretischen Teil beziehen, um Ansätze für die Entwicklung von Unterrichtsreihen zu geben.

Diese Unterrichtsreihen betreffen die Anwendung des Pythagoras im Körper, speziell in der regelmäßigen quadratischen Pyramide. Thema meiner Arbeit ist nicht, wie man dieses Kapitel im Unterricht aufbereiten soll, sondern mehr was man bei der Aufbereitung beachten könnte, damit Probleme des räumlichen Vorstellungsvermögen bei der Anwendung des Pythagoras im Körper eventuell verhindert werden können.

Der Ansatz von Kyllonen, Lohman und Snow erscheint mir sehr interessant. Sie sind der Ansicht, dass Personen mit unterschiedlichen Begabungsproblemen, unterschiedliche Strategietrainings benötigen. Das ist mir auch bei der Durchführung meiner empirischen Untersuchung aufgefallen. Manchen SchülerInnen hat das Modell geholfen, sie konnten damit umgehen und etwas damit anfangen. Andere jedoch arbeiteten viel lieber mit Skizzen und fanden das Modell überflüssig. Das heißt optimal ist es, die SchülerInnen mit unterschiedlichen Hilfsmitteln vertraut zu machen, ihnen aber die Wahl zu lassen, welches sie anwenden wollen.

Elmar Souvignier vertritt ein Trainingsprogramm, aufgegliedert in drei Ebenen. Erstens müssen Fertigkeiten im konkreten Anwendungsbereich geübt werden. Damit verbinde ich das Üben von unterschiedlichen Beispielen. Zweitens soll der kognitionspsychologische Inhaltsbereich gefördert werden. Für mich bedeutet das, dass Lösungsprozesse die im Individuum ablaufen, aufgedeckt, analysiert und korrigiert oder verbessert werden. Die dritte Ebene des Trainingsprogramms ist die der prozeduralen Fähigkeiten. Was ist also der Prozess beim Lösen eines betreffenden Beispiels und in welche Schritte kann dieser gegliedert

werden. Vielen SchülerInnen hilft das, wenn sie die einzelnen Lösungsschritte wissen und in welcher Reihenfolge sie diese ausführen müssen.

An dieser Stelle möchte ich auch wiederholt auf das, im theoretischen Teil schon ausführlich beschriebene, CASE-Programm hinweisen. Auch dieses Programm gliedert sich in einzelne Abschnitte. Im Unterschied zu den anderen Lehransätzen legt CASE auch einen Schwerpunkt auf die Entwicklung neuer, eigener Denkweisen. SchülerInnen werden gezielt mit mathematischen Problemen konfrontiert, um den Umgang mit solchen Anforderungen zu lernen und die Scheu vor „unlösbaren“ Aufgaben zu verlieren. Dieser Ansatz scheint mir sehr interessant. Ich habe schon angesprochen, dass ich manchmal den Eindruck habe, dass SchülerInnen eine große Scheu davor haben, eigene Lösungswege auszuprobieren, wenn ihnen nicht gleich der einfällt, der im Unterricht immer angewendet wird.

7.6. Schlussfolgerungen

Führt man eine empirische Untersuchung durch, muss man immer mit allen möglichen Erkenntnissen und Ergebnissen rechnen. Es ist nicht möglich, gewisse Voraussagen zu machen. Man kann Vermutungen anstellen, was eventuell das Ergebnis der Untersuchung sein kann, aber Vermutungen bleiben Vermutungen.

Im Rahmen meiner empirischen Untersuchung habe ich das Interesse verfolgt, herauszufinden wie hilfreich Modelle für SchülerInnen sind, die Probleme mit dem räumlichen Vorstellungsvermögen haben, beziehungsweise ob sie auch für jene hilfreich sind, die keine Probleme des räumlichen Vorstellungsvermögens haben.

Hintergrund für dieses Interesse waren die Schwierigkeiten mit denen ich beim Nachhilfeunterricht konfrontiert wurde. Wie kann man SchülerInnen, denen das räumliche Vorstellungsvermögen fehlt, Dinge erklären, bei denen dieses dringend benötigt wird?

Mein Ansatz war, hier eventuell Modelle zum Einsatz kommen zu lassen.

Wie sich beim Auswerten der empirischen Untersuchung herausgestellt hat, konnten diese Versuchspersonen das Modell nicht wirklich anwenden. Dafür kann es unterschiedliche Gründe geben.

Eine mögliche Erklärung ist, dass die Versuchspersonen meiner empirischen Untersuchung keine Probleme des räumlichen Vorstellungsvermögens hatten. Dieser Erklärungsansatz passt allerdings mit den tatsächlichen Ergebnissen der Testbeispiele nicht zusammen. Denn viele SchülerInnen hatten Schwierigkeiten den richtigen Lösungsweg zu finden.

Es kann auch sein, dass die SchülerInnen nicht mit dem Gebrauch von Modellen zum Lösen von mathematischen Aufgaben vertraut sind. Das würde erklären, warum viele SchülerInnen laut Fragebogen keine Verwendung für das Modell hatten.

Es ist angemessen sich hier folgende Frage zu stellen: Ist die Vorstellung der SchülerInnen von Pyramiden eher von Skizzen als von Modellen geprägt?

Möglicherweise haben die SchülerInnen deshalb geglaubt, dass sie das Modell nicht brauchen, obwohl sie Probleme mit dem Beispiel hatten.

Wie die Vorstellung der SchülerInnen geprägt ist, hängt sicher mit den Unterrichtsmaterialien ab, die im Unterricht zur Anwendung kommen. Wenn also Probleme des räumlichen Vorstellungsvermögens minimiert werden sollen, und dazu der Einsatz von Modellen gewählt wird, müssen diese mehr in den Unterricht eingebaut werden um in den Vorstellungen der SchülerInnen vorzukommen.

Interessant ist zu sehen, was die eigentlichen Schwierigkeiten der SchülerInnen mit der Aufgabe waren.

Erstens gab es große Verwirrungen bei der Beschriftung der Skizzen und dem richtigen Zuordnen der Bestimmungsstücke einer Pyramide. Daraus entstanden viele Fehler. Ordnet eine/r SchülerIn die Begriffe s für die Seitenkante, ha für die Höhe der Seitenfläche und h für die Raumhöhe nicht den richtigen Längen zu, entstehen Fehler.

Offensichtlich taten sich auch einige SchülerInnen schwer, passende Skizzen anzufertigen. Das erkenne ich daran, dass teilweise mehr als nur eine Skizze gemacht und verschiedene Entwürfe durchgestrichen wurden. Daraus lässt sich schließen, dass diese SchülerInnen entweder Probleme des räumlichen Vorstellungsvermögens haben, oder sie „künstlerisch“ nicht talentiert genug sind.

Ein weiteres Hindernis für einige SchülerInnen waren die eigenen Rechenfertigkeiten. Kleine Rechenfehler waren am Weg zum richtigen Ergebnis große Hindernisse. Natürlich passieren Rechenfehler sicher leichter, wenn man mit dem Thema zu dem das Beispiel gehört gerade nicht so vertraut ist. Da liegt die größere Aufmerksamkeit beim Finden eines möglichen

Lösungsweges. Trotzdem handelt es sich hier meist um fatale Rechenfehler. Vergessene Klammern und nicht richtig quadrierte Brüche, ändern das Endergebnis stark ab.

Nach dem Korrigieren der Beispiele habe ich mir die Frage gestellt, wie man das Ergebnis der empirischen Untersuchung verbessern hätte können. Diese Frage ist für mich deshalb so interessant, weil sie den Mathematikunterricht betrifft. Dort kann ich eventuelle Verbesserungsideen umsetzen.

Eine Beschriftung der Modellpyramiden hätte sicher viele Schwierigkeiten minimiert. Natürlich hätte man den SchülerInnen auch eine beschriftete Skizze zur Verfügung stellen können. Aber ich möchte wissen, was mit SchülerInnen mehr geübt werden muss.

Dazu haben sich meiner Meinung nach zwei Punkte herauskristallisiert.

Zum Einen ist es wichtig der richtigen Kennzeichnung von Pyramiden, aber auch anderen Körpern, die angemessene Bedeutung zukommen zu lassen. Einerseits wird im Unterricht immer wieder betont, dass SchülerInnen ihre Skizzen beschriften können wie sie wollen, also ihre eigenen Variablen wählen dürfen. Das erschwert ihnen allerdings den Umgang mit Beispielen, wo diese vorgegeben sind. Hier ist eine richtige Betonung wichtig, was und wie beliebig beschriftet werden darf. Die Variablen können selbst gewählt werden, die verschiedenen Längen haben allerdings vorgegebene Namen.

Zum Anderen habe ich gesehen, wie sehr die einfach erscheinende Aufgabe eine Skizze anzufertigen zur Herausforderung für die SchülerInnen werden kann. Ich bin überzeugt davon, dass sich diese Fertigkeit durch Übung verbessern lässt. Als ProfessorIn muss man sich dieser Notwendigkeit allerdings bewusst sein.

Wider Erwarten haben anscheinend die wenigsten SchülerInnen, bei diesem Beispiel, Probleme des räumlichen Vorstellungsvermögens gehabt. Der Großteil von ihnen hat gewusst, dass sie/er den Satz von Pythagoras anwenden muss. Das heißt diese Versuchspersonen haben erkannt, wo sich rechte Winkel befinden. Das ist ohne räumliches Vorstellungsvermögen kaum möglich.

Ich habe mir bis zum Ende offengehalten, ob ich im Rahmen der Auswertung meiner empirischen Untersuchung auch auf geschlechtsspezifische Unterschiede eingehen möchte. Ich bin nun zu dem Entschluss gekommen, das nicht zu machen. Mir sind weder beim Korrigieren und Vergleichen des Testbeispiels, noch beim Auswerten der Fragebögen,

besondere Unterschiede zwischen Schülerinnen und Schülern aufgefallen. Möglich ist, dass ich um hier Auffälligkeiten zu finden, eine größere Versuchsgruppe bräuchte. Allerdings steht, wie mehrmals betont, eine andere Forschungsfrage im Vordergrund dieser empirischen Untersuchung.

7.7. Beantwortung der Forschungsfrage

„Kann der Erfolg von SchülerInnen, die Probleme des räumlichen Vorstellungsvermögens haben, im Speziellen bei der Anwendung des Pythagoras in der Pyramide, unterstützt werden, indem ihnen beim Lösen der Beispiele das Modell einer Pyramide zur Verfügung gestellt wird?“

Aus der zusammengefassten Interpretation der Untersuchungsergebnisse, ergeben sich folgende Antworten auf die Forschungsfrage.

SchülerInnen können beim Lösen von Beispielen zur Anwendung des Pythagoras im Körper mit Modellpyramiden unterstützt werden.

Der Erfolg bei der Anwendung von Modellen ist durch die Qualität der Modelle zu verbessern.

Methoden zur Verbesserung der Vorstellung erfordern Einführung und Praxis um den gewünschten Effekt zu erzielen.

Weiterführende Forschungsfragen und Ansätze empirischer Untersuchungen lassen sich anstellen, weil die Methode offensichtlich noch angepasst, geändert und somit verbessert werden kann.

Im Anschluss an diese Arbeit könnte noch weitergeforscht werden.

Ansätze für weiterführende empirische Untersuchungen habe ich schon gegeben. Hier waren die Ideen die Modelle zu beschriften und „Bedienungsanleitungen“ und Skizzen zur Verfügung zu stellen.

Aus meiner Arbeit sind weitere Forschungsfragen entstanden die Grundlage einer weiteren Diplomarbeit sein könnten beziehungsweise an denen weitergeforscht werden könnte.

Wie hängt die Fähigkeit Skizzen zu erstellen, mit dem räumlichen Vorstellungsvermögen zusammen?

Beeinflusst ein Modell die Fähigkeit Skizzen zu erstellen?

Welche Skizzen unterstützen SchülerInnen mit Problemen des räumlichen Vorstellungsvermögens am besten beim Lösen von Beispielen zur Anwendung des Pythagoras in der Pyramide?

Haben SchülerInnen bei der Anwendung des Pythagoras in anderen Körpern, dieselben Probleme wie bei dessen Anwendung in der Pyramide?

8. Schlusswort

Natürlich ist das Schreiben dieser Diplomarbeit viel Arbeit gewesen. Das steht außer Frage. Trotzdem hat es mir Spaß gemacht und für mich selbst viel gebracht.

Abgesehen vom Wissen über räumliches Vorstellungsvermögen, das ich durch das Lesen diverser Bücher erarbeitet habe, kann mir keiner die Erfahrungen nehmen, die ich im Rahmen dieser Arbeit gemacht habe. Ich freue mich schon darauf die Erkenntnisse aus dieser Diplomarbeit im Unterricht nutzen zu können.

Mit dieser Arbeit bin ich mir über einiges, was das Unterrichten betrifft, klar geworden.

An erster Stelle steht das Sehen und Erkennen von Problemen. Als entscheidende Aufgabe von PädagogInnen verstehe ich, Hindernisse welche den reibungslosen Ablauf des Unterrichts behindern, zu analysieren und zu beseitigen.

Dazu gehört auch, Lehrbücher zu reflektieren. Methoden und Aufbereitungen von Themen aus Lehrbüchern müssen nicht immer die Besten sein. Die eigene Kreativität ist also immer gefragt. ProfessorInnen sind gefordert, eigenen Ideen zur Unterrichtsplanung zu entwickeln, zu testen und zu hinterfragen. Nur so kann eine Optimierung des Unterrichts stattfinden. Mit Optimierung des Unterrichts meine ich hier, auf Probleme der SchülerInnen eingehen zu können und Lösungsprozesse zu finden.

Je nach Brauchbarkeit sollten die Methoden weiterentwickelt werden und immer wieder einem Anpassungs-, Verbesserungs- und Veränderungsprozess unterworfen werden.

Ich habe erkannt wie wichtig es ist, als Professorin keine Angst vor neuen Methoden beziehungsweise einer Weiterentwicklung zu haben.

Ziel sollte es sein den Unterricht gemeinsam so gut wie möglich zu gestalten und auf die SchülerInnen bestmöglich einzugehen.

9. Zusammenfassung

Grund für die Wahl dieses Themas für meine Diplomarbeit war meine Überraschung über die, mir davor unbekannten, möglichen Probleme des räumlichen Vorstellungsvermögens. Ziel war es meine Erfahrungen und Erkenntnisse durch die Konfrontation mit Schwierigkeiten zu dieser Thematik bei SchülerInnen an zukünftige ProfessorInnen und andere weiterzugeben. Erstens soll dies den „Überraschungsmoment“ den ich hatte verhindern. Zweitens möchte ich zugleich Lösungsansätze überlegen und testen, wie man SchülerInnen mit Problemen des räumlichen Vorstellungsvermögens, beim Lösen von Beispielen zur Anwendung des Pythagoräischen Lehrsatzes in Körpern, helfen könnte.

Im ersten Teil meiner Arbeit, dem theoretischen Teil, habe ich Grundlageninformation gesammelt. Mir war es wichtig Definitionen der Begriffe, die ich im Laufe der Arbeit verwenden würde, einzuführen. Auch die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens wollte ich nicht außer Acht lassen, da es von großer Bedeutung ist zu wissen, in welchem Entwicklungsstadium sich die SchülerInnen, mit denen gearbeitet wird, befinden. Im letzten Abschnitt des theoretischen Teils habe ich mich den Problemen des räumlichen Vorstellungsvermögens gewidmet. Es ist der Versuch einen Überblick über den Diskurs zu Problemen des räumlichen Vorstellungsvermögens und deren Ursachen zu geben.

Der empirische Teil meiner Arbeit enthält meine experimentelle Untersuchung mit allen Vorbereitungsmaterialien, Schlussfolgerungen und Interpretationen. Das Thema für die empirische Untersuchung war schnell gefunden. Genau bei einem Beispiel zur Anwendung des Pythagoräischen Lehrsatzes in der Pyramide, mit einem meiner Nachhilfeschüler, wurde ich erstmals mit Problemen des räumlichen Vorstellungsvermögens konfrontiert. Das Vorbereiten und Durchführen der empirischen Untersuchung hatte einen großen Erfahrungswert für mich.

Vor der Durchführung der empirischen Untersuchung in zwei fünften Klassen einer AHS, fertigte ich ausreichend Modellpyramiden an. Jede Klasse wurde ich zwei gleich große Gruppen geteilt. Die SchülerInnen der einen Gruppe hatten jeder eine Modellpyramide zur Verfügung, die anderen keine Hilfsmittel. Zu lösen hatten alle dasselbe Beispiel, zur Anwendung des Pythagoras im Körper. Neben dem Beispiel teilte ich zusätzlich Fragebögen aus um zu erfragen wie die Selbsteinschätzung der mathematischen und räumlichen Fähigkeiten, die Motivation beim Herangehen an Mathematikbeispiele ist und wie leicht ihnen das Lösen des Testbeispiels fiel.

Ich konzentrierte mich beim Auswerten der Testunterlagen auf die Analyse der Einsetzbarkeit von Modellen. Eine Unterscheidung zwischen weiblichen und männlichen ProbandInnen nahm ich nicht vor, da dies nicht Bestandteil meiner Arbeit war.

Im Rahmen meiner empirischen Untersuchung konnte ich mit den Modellpyramiden nicht den gewünschten Erfolg erzielen. Aber ich habe diverse Erklärungsansätze und Verbesserungsmöglichkeiten dafür gefunden.

Erstens muss die Verwendung von Modellen, beim Lösen von Mathematikbeispielen, im Unterricht geübt werden. Zweitens würde eine Beschriftung der Modelle den Einsatz dieser erleichtern.

Von großem Wert sind für mich, und hoffentlich auch für andere, die Erkenntnisse aus dieser Untersuchung. Fazit ist, dass unterschiedliche Wege, SchülerInnen mit Problemen des räumlichen Vorstellungsvermögens zu helfen, existieren. Jede/r SchülerIn benötigt andere Ansätze wie ihr/ihm geholfen werden kann. Meine Idee, den SchülerInnen mit einem Modell zu helfen, war sicherlich nicht ohne Erfolg. Allerdings muss das Modell und dessen Anwendung noch deutlich optimiert werden.

Meine Schlussfolgerung lautet, dass es unsere Aufgabe, also die von ProfessorInnen, ist, sich neue Wege zu überlegen wie SchülerInnen mit Problemen des räumlichen Vorstellungsvermögens geholfen werden kann. Diese Ansätze sollten getestet, immer weiterentwickelt und optimiert werden.

10. Summary

The reason, why I decided to write about problems with spatial abilities, was my experience with my private students.

During my private lessons I was confronted with the problem, that one of my students couldn't solve an exercise where he needed spatial abilities, for the first time. So it became my target to develop a method to support students who have difficulties with spatial abilities. I dedicated my work to this idea.

In the first part of my work I tried to define and find definitions for specific terms that I would use. There exist different theories about how visualization and perception are working. The idea I liked most is that visualization and perception are independent from each other. Visualization is reproducing what you have seen and perception is what you are actually seeing. During perception you have contact with the objects. Visualization is "seeing" something that isn't present at the same moment.

There is no single definition for spatial ability. The reason is that spatial ability is the combination of different skills. The following definition explains this combination.

"Spatial ability generally refers to skill in representing, generating, and recalling symbolic, non-linguistic information."

I was also interested in scientific information about the development of spatial abilities. It is important to know the stadium of development in which your students are, during your work with them. Between eleven or twelve years pupils develop an understanding of the Euclidean system. In the study basic scientific knowledge concerning the discussion about difficulties with spatial abilities is displayed. There exist different explanations why some pupils have those problems and why some not. In literature everybody shares the view that male and female students don't have the same spatial abilities. Female students have more problems concerning these abilities, while the reason is still unveiled.

The second part of my work is about my empirical study.

I tested my idea to help pupils with spatial ability problems by using a model.

The research question of my study is:

“Can the success of students with problems of spatial abilities, using the theorem of Pythagoras, be improved, by offering them the model of a pyramid.”

The empirical study was conducted in two classes of the ninth grade. Each class was divided in two groups with the same number of female and male students. One group of each class had to solve the questions using a pyramid model. All students had to solve the same exercise. 43 students took part at my empirical study. In addition to the exercise the participants have been asked to fill out a questionnaire. I wanted to know how they like mathematics, if they can follow their mathematic lessons, if they had problems with the exercise and if they have difficulties with spatial abilities.

The analysis of the empirical study shows the positive effect of the model, but to perform as a mean to help students they have to be improved. Using new methods to support spatial ability needs proper introduction to fully support perception and the process of learning.

There exist different ways how to help students, but more important is to always find the right way to support each of them in the best way.

This knowledge is extremely important for teachers. Teachers have to develop new teaching methods, test them and improve them to offer the best lessons to all students.

Lebenslauf

Verena Horak

Geboren am: 2.10.1987

Geburtsort: Wien

Staatsbürgerschaft: Österreich

Wohnhaft in: Kritzendorf, Niederösterreich

Familienstand: ledig

Eltern:

Roman Horak, Berufsoffizier

Erika Horak, Hausfrau

Geschwister:

Krista Horak, Studentin

Ausbildung

WS 2006 -

Lehramtsstudium in Mathematik und Geschichte, Universität Wien

09/1998 – 06/2006 Neusprachliches Gymnasium, 3400 Klosterneuburg

09/1994 – 06/1998 Öffentliche Volksschule, 3420 Kritzendorf

Ich habe alle Schulstufen, sowohl in der Volksschule als auch im Gymnasium, mit ausgezeichnetem Erfolg absolviert.

Gruppe1

Alter:

Klasse:

Geschlecht:

Beispiel:

Von einer regelmäßigen quadratischen Pyramide kennt man
die Länge der Diagonalen d und
der Höhe h .

Fertige eine passende Skizze an und berechne
die Länge der Seitenkante s und
die Höhe h_a einer Seitenfläche!

$d = 60 \text{ mm}$

$h = 80 \text{ mm}$

Gruppe2

Alter:

Klasse:

Geschlecht:

Beispiel:

Von einer regelmäßigen quadratischen Pyramide kennt man
die Länge der Diagonalen d und
der Höhe h .

Fertige eine passende Skizze an und berechne
die Länge der Seitenkante s und
die Höhe h_a einer Seitenfläche!

Nimm zur Lösung des Beispiels das Modell der Pyramide zur Hand!

$d = 60 \text{ mm}$

$h = 80 \text{ mm}$

Fragebogen

Klasse

Geschlecht

Alter

(25) Ich bin gut in Mathematik.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu

(26) Ich habe keine Probleme beim Lösen von Mathematikbeispielen im Schulunterricht.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu

(27) Ich verstehe alles im Mathematikunterricht.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu

(28) Ich kann Textbeispiele gut mit Hilfe von Zeichnungen veranschaulichen.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu

(29) Ich kann Skizzen gut lesen.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu

(30) Ich kann Skizzen von unterschiedlichen Körpern zeichnen. (z.B. Pyramide)

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu

(31) Skizzen helfen mir beim Lösen von Mathematikbeispielen.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu

(32) Ich kann mit Skizzen von Körpern nicht umgehen.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt

		zu		nicht zu
--	--	----	--	----------

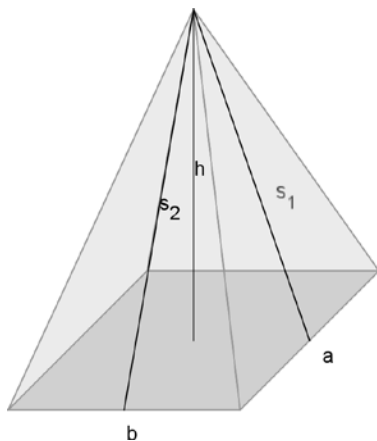
(33) Ich weiß nie, wo sich welches Bestimmungsstück des Körpers auf der Skizze befindet.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu

(34) Ich kann Skizzen von Körpern in meiner Vorstellung nicht so drehen und umformen, 'wie ich es für die jeweiligen Aufgaben brauche.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu

Markiere jede Ecke in dieser Pyramide, an der sich ein rechter Winkel(90°) befindet!



(35) Ich mag Mathematik.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu

(36) Ich stelle mich gerne mathematischen Herausforderungen.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu

(37) Wenn möglich vermeide ich es mit Mathematik konfrontiert zu werden.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu

(38) Es ist mir, wenn die Aufgabe nicht benotet wird, egal ob ich ein Mathematikbeispiel lösen kann.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt

		zu		nicht zu
--	--	----	--	----------

- (39) Alles im Mathematikunterricht, was nicht zur Mathematiknote zählt, interessiert mich nicht.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu

Zum Testbeispiel

- (40) Ich habe mir einfach getan beim Lösen des Testbeispiels.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu

- (41) Ich hatte keine Ahnung wie ich das Testbeispiel lösen sollte.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu

- (42) Ich wusste nicht welche Formeln ich für das Testbeispiel brauche.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu

- (43) Ich kenne den Satz von Pythagoras.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu

- (44) Ich konnte keine Skizze von einer Pyramide machen.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu

- (45) Das Modell der Pyramide war sehr hilfreich für das Lösen des Testbeispiels.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu

- (46) Ohne das Modell hätte ich das Beispiel nicht lösen können.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu

- (47) Das Modell war zwar nett, aber ich konnte das Beispiel ohne ihn lösen.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu

		zu		nicht zu
--	--	----	--	----------

(48) Das Modell hatte nichts mit dem Beispiel zu tun.

1	2	3	4	5
Trifft sehr zu	Trifft zu	Trifft manchmal zu	Trifft weniger zu	Trifft überhaupt nicht zu

Literaturverzeichnis

Klaus Bischof, Individuelle Unterschiede beim visuellen Vorstellen, 1987, Peter Lang Verlag, Europäische Hochschulschriften, Reihe VI Psychologie, Band 221, Bern, Frankfurt am Main, New York, Paris

Dinter, Pichler, Zankl, Riedl, Berger, Stigl, Hasenberger, Geschlechtsunterschiede bei der Körper-/Raum-Wahrnehmungs- und-Vorstellungsfähigkeit im Pflichtschulalter, 1989, Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Sport, Wien

Ingrid Lewisch, Mathematik 4. Verstehen-Übern-Anwenden, 1997, 3. Auflage, R. Oldenbourg Verlag, Wien,

Arnold Lohaus, Ruth Schumann-Hengsteler, Thomas Kessler, Räumliches Denken im Kindesalter, 1999, Hogrefe Verlag für Psychologie, Göttingen, Bern, Toronto, Seattle

Dagmar Merbaul, Visuelle Vorstellungsfähigkeit und ihre Bedeutung bei der Bearbeitung von Raumvorstellungsaufgaben, 1994, Diplomarbeit, Wien

Ottenschläger, Ratzinger, Vormayr, Binder, Mathematik 4, 1996, 2. Auflage, Veritas, Linz

Hg. Meinrad Perrez, Hans-Dieter Schneider, Jean Retschitzki, Dieter Hänggi, Visuelle Vorstellungsfähigkeit, 1989. Universitätsverlag Freiburg Schweiz, Freiburger Beiträge zur Psychologie, Band 5, Freiburg

Jean Piaget, Bärbel Inhelder, u.a., Die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kinde, 1971, Ernst Klett Verlag, Stuttgart

Reichel, Litschauer, Groß, Lehrbuch der Mathematik. Und Aufgabensammlung, 5. Auflage, 1998, öbv&hpt, Wien

Dagmar Reichert, Räumliches Denken, 1996, Vdf Hochschulverlag, Züricher Hochschulforum Band 25, Zürich

Hg. D.H. Rost, Elmar Souvignier, Förderung räumlicher Fähigkeiten. Trainingsstudie mit lernbeeinträchtigten Schülern, 2000, Waxmann, Münster

Sandra Scharf, Räumliche und mathematische-geometrische Fähigkeiten von Kindern: Leistungen, Selbstkonzepte und die Rolle des Spiel- und Freizeitverhaltens aus geschlechtsspezifischer Perspektive, 2004, Diplomarbeit, Wien

Ruth Schumann-Hengsteler, Die Entwicklung des visuell-räumlichen Gedächtnisses, 1995, Hogrefe, Göttingen, Bern, Toronto, Seattle

Claudia Quaiser-Pohl, Die Fähigkeit zur räumlichen Vorstellung. Zur Bedeutung von kognitiven und motivationalen Faktoren für geschlechtsspezifische Unterschiede, 1998, Waxmann Verlag, Münster

Gerald Wittmann, Schülerkonzepte zur Analytischen Geometrie. Mathematikhistorische, epistemologische und empirische Untersuchungen, 2003, Texte zur mathematischen Forschung und Lehre 22, Verlag Franzbecker, Berlin

Lehrplan Mathematik AHS, <http://www.bmukk.gv.at/medienpool/789/ahs14.pdf>, 25.11.2010

[kk.gv.at/medienpool/789/ahs14.pdf](http://www.bmukk.gv.at/medienpool/789/ahs14.pdf), 25.11.2010

Bildquellen

Alle Fotos ohne Fußnote, sind Aufnahmen von mir, Verena Horak.