



universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

„Zur Entwicklung der formalen Logik – Die Systeme Booles und Freges als Herausragungen ihrer Geschichte“

Verfasserin

Maram Maria Salah

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Philosophie (Mag. phil.)

Wien, im Oktober 2008	
Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 296
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Philosophie
Betreuerin:	MMag. DDr. Esther Ramharter

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit mit dem Titel „Zur Entwicklung der formalen Logik – Die Systeme Booles und Freges als Herausragungen ihrer Geschichte“ selbständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen nicht benützt und die den benützen Quellen wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Maram Maria Salah

Wien, im Oktober 2008

Danksagung

Gedankt sei in erster Linie Fr. MMag. DDr. Esther Ramharter. Für die Überlassung des Themas, sowie geduldige und konstruktive Betreuung, die sich bei der Erstellung und Durchführung der Arbeit von großer Hilfe erwiesen haben.

Auch gilt der Dank meinen Familienmitgliedern und Freunden, insbesondere, meiner Schwester Hanan, für ihre Motivation, großzügige Hilfsbereitschaft und fortwährende Unterstützung.

„Logic is invincible because in order to combat logic it is necessary to use logic“

Pierre Boutroux

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	8
2	Entstehung der formalen Logik – Darstellungen aus der Vorgeschichte ...	10
2.1	Aristoteles, der Gründer	10
2.1.1	Die Aristotelische Syllogistik	11
2.1.2	Besonderheiten und Interpretationen des Systems	16
2.1.2.1	Singuläre Termini.....	16
2.1.2.2	Prädikatenlogische Wiedergabe des Syllogismus	17
2.1.2.3	Andere Überprüfungsmöglichkeit.....	18
2.2	Die Stoische Logik	22
2.2.1	Grundzüge des Systems.....	22
2.2.2	Besonderheiten und Antizipationen	24
2.3	Leibnizens Traum.....	27
2.3.1	Historische Positionierung und Bedeutung	27
2.3.2	Leibnizens Programm	28
2.3.3	Wirkungsgeschichte Leibnizens und Parallele	31
3	Innovationen im 19. Jahrhundert.....	34
3.1	Peano.....	34
3.1.1	Peanos logisch – mathematische Notation	34
3.1.2	Die Axiomatisierung der Arithmetik	36
3.1.3	Bertrand Russells Ansichten	39
3.1.4	Anwendungsbereiche und Einfluss	41
3.2	Booles Algebra der Logik	45
3.2.1	Hintergründe zur Bildung seines Systems	46
3.2.2	Merkmale und Bestandteile seines Kalküls.....	49
3.2.3	Aussagenlogik der Secondary Propositions.....	57
3.2.4	Weitere Beiträge zur Algebra der Logik	63
3.3	Gottlob Freges Neuerung.....	67
3.3.1	Merkmale der Begriffsschrift	67
3.3.2	Die Aufnahme Freges Leistungen.....	72

4	Zwei Modelle, eine Gegenüberstellung	76
4.1	Freges Kritik am Booleschen System	76
4.1.1	Die Mängel Schröders „Gebietekalkül“ nach Frege	90
4.2	Zum Verständnis von Booles Vorhaben.....	95
4.3	Unterschiedliche Voraussetzungen.....	100
4.4	Realisierung des Leibnizschen Traums?	116
4.5	Doch so unterschiedlich?	124
5	Eine andere Entwicklung.....	128
6	Schlusswort.....	132
7	Anhänge.....	134
7.1	Literaturverzeichnis	134
7.2	Abstract.....	141
7.3	Curriculum Vitae.....	143

Verzeichnis verwendeter Abkürzungen

AS	Aristotle's Syllogistic, Łukasiewicz
BW	Briefwechsel, Frege
BS	Begriffsschrift, Frege
CL	The Calculus of Logic, Boole
GLA	Grundlagen der Arithmetik, Frege
GGA	Grundgesetze der Arithmetik, Frege
LT	The Laws of Thought, Boole
LU	Logische Untersuchungen, Frege
MA	Mathematical Analysis of Logic, Boole
NLM	Notation de Logique Mathématique, Peano
NS	Nachgelassene Schriften, Frege
PM	Principia Mathematica, Whitehead & Russell
SL	Stoic Logic, Mates
TL-P	Tractatus Logico – Philosophicus, Wittgenstein

1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit hat es sich zum Ziel gesetzt, anhand von Schwerpunktsetzungen auf Modelle aus der Geschichte der Logik, die unterschiedlichen Entstehungsvoraussetzungen in Betracht zu ziehen, welche zu ihrer Gestaltung beitrugen.

Es ist nicht nur ihre historische Wichtigkeit, sondern auch ihre Relevanz für die formallogische Entwicklung, also, welche es im Auge zu behalten galt.

So stellte sich die Frage, wie aus einem unterschiedlichen Verständnis der Logik als Disziplin überhaupt, und die Anforderungen, welche an einer solchen gestellt wurden, auch zum Entwurf unterschiedlicher Modelle führte.

Vor allem in jenem Abschnitt ihrer Geschichte, als die Erforschung der Grundlagen der Mathematik, mit der Einbeziehung logischer Erkenntnisse, betrieben wurde, so unterschiedliche Systeme hervorbracht wurden.

Hier wurden insbesondere die Logiksysteme Booles und Freges herangezogen. Es galt vor allem die gedanklichen Voraussetzungen zu betrachten, überhaupt ihre Zielsetzungen festzuhalten, welche den jeweiligen Systemen ihre grundlegenden Züge verliehen.

Im Aufzeigen einiger Merkmale, vordergründig aber ihrer Auffassungen bezüglich der Logik und den Grundlagen der Mathematik, soll gezeigt werden inwiefern sie sich unterscheiden und ob, im Hinblick auf die Bedingungen, eine Gegenüberstellung als einen so großen Kontrast zu werten ist.

Unterschiedliche Faktoren, also, galt es zu beachten.

Die theoretischen Überlegungen, welche den Ausgangspunkt zum Entwurf eines logischen Systems bilden, sowie das beabsichtigte Ziel und ein

bestimmtes Verständnis der Logik als sich in der Formgebung, dem Aufbau, sowie den eigentümlichen Zügen äußernd. In der Durchleuchtung dieser, soll auch vorgegangen werden.

Das Bedürfnis, ein Verständnis der Konstruktion eines Logiksystems unter den genannten Voraussetzungen – und nicht zuletzt anhand der herangezogenen Beispiele – zu gewinnen, bildete auch den Ausgangspunkt der folgenden Ausführungen.

2 Entstehung der formalen Logik – Darstellungen aus der Vorgeschichte

2.1 Aristoteles, der Gründer

Er gilt als „Schöpfer der formalen Logik“ (Scholz, S. 28) weil er, in der Syllogistik, als Erster eine systematische Ausarbeitung einer logischen Theorie vornahm und allgemeine Gesetze über die Folgerichtigkeit von Urteilen formulierte. Die präzise Darstellung gelang durch seine Einführung von Symbolen (Buchstaben) anstelle von konkreten Beispielen - ebenfalls eine erstmalige Vorgehensweise.

Aus der Übersetzung des Begriffs ‚Syllogismus‘ geht hervor dass es sich hierbei um ein Zusammenschließen zweier Sätze (oder: Prämissen) handelt wobei sich ein Schlusssatz ergibt. Es ist also im korrekten Übergang, dass sich die Erschließung der Konklusion ergibt.

Der „syllogistische Zwang“ besteht, unabhängig vom Inhalt der Prämissen, in deren Kombination und Form als Variable. (Düring, S. 91) Ihrerseits universell, führt ihre Verknüpfung immer zur Gültigkeit der Schlussfolgerung, sodass es „unmöglich von wahren Prämissen zu einer falschen Konsequenz “ kommen könnte. (Quine, S. 110)

Diese Lehre, in ihrem Zurückgreifen auf ein abgegrenztes Fundament grundlegender und allgemeiner Gesetze für die Vorgänge des Schließens, und in der Anwendung von Zeichen von der Natur der Dinge absieht, hat als formale Logik, ihre Geburtsstunde im „monumentalen Werk“ des Aristoteles. (Bourbaki, S. 12)

In der Formulierung dieses Systems ihrer wesentlichsten Grundzüge, geht sie als selbstständige wissenschaftliche Disziplin hervor. Es soll auch gezeigt werden dass sich die Methoden und axiomatischen Prinzipien dieses scheinbar „*ex nihilo*“ (Mates, S. 267) geschaffenen Werks, im weiteren Verlauf der Logikgeschichte als Anknüpfungspunkte fortgesetzt sehen.

2.1.1 Die Aristotelische Syllogistik

Als Lehre von der Überprüfung der Folgerichtigkeit von Schlussfolgerungen, versteht Aristoteles die Logik immer im Sinne des analytischen Verfahrens.

Sie besteht einerseits in der Auflösung oder Zurückführung eines gegebenen Schlusssatzes auf seine Prämissen. Sie ist aber zugleich Schlussbildung, d. h. auf der Basis welcher Prämissen eine gültige Konklusion gründet und sich somit, als rechtmäßiges Ergebnis des Beweisverfahrens, ein gültiger Schluss errichten lässt.

Sie ist die Lehre vom beweisenden Schluss („beweisende Wissenschaft“) in ihrer Untersuchung der Voraussetzung eines Schlusses und wie aus deren Anwendung die logische Korrektheit notwendig hervorgeht.

Zu Beginn der *Analytica Priora*¹, dem Kernstück seiner logischen Lehre, legt Aristoteles die Komponenten zur Errichtung eines gültigen Syllogismus fest.

Er betont die logische Notwendigkeit mit der ein gestellter Satz („das Gesetzte“) aus den Vordersätzen („Verschiedenes“) folgt. Sie geht aus dem inneren Bau des Syllogismus hervor und ergibt sich aus den zugrunde liegenden Begriffen der Prämissen, denn sie enthalten die ersten und wahren Gründe der Konklusion. Ein solcher Schluss ist „vollkommen“, er bedarf keiner weiteren Bestimmung durch die Hinzunahme von äußeren Begriffen.

¹ Außer anders gekennzeichnet, beziehen sich die folgenden Erläuterungen auf Eugen Rolfes Übersetzung des Organon III – Erste Analytik.

In diesem Sinne definiert er die zwei Termini in die sich ein kategorischer Satz „auflöst“ als Grenzen.

Sie sind Anfang und Ende eines Schlusses: das Subjekt und das Prädikat. Für die Bildung von Prämissen verwendet er nur allgemeine Termini (leere, singuläre und negative Terme schließt er aus).

Nun sind die Sätze der Quantität nach universell oder partikulär und der Qualität nach bejahend oder (das Prädikat) verneinend. Daraus ergeben sich vier verschiedene Satzformen, die von Logikern im Mittelalter mit Vokalen und den dazugehörigen Merkworten (***affirmo*** – ***nego***) klassifiziert wurden:

Universell bejahend (A), partikulär bejahend (I), universell verneinend (E), partikulär verneinend (O). (Kneebone, S. 11)

Aristoteles zeigt wie sich die Termordnung umkehren lässt. Für den Ausdruck dieser Konversionsregeln treten an dieser Stelle erstmals *Variable* auf („der Satz A B“).

Łukasiewicz beschreibt diesen entscheidenden Schritt zur Grundlegung der formalen Logik als unvermittelt. Aristoteles scheint diese Entdeckung für selbstverständlich und nicht erklärungsbedürftig erachtet zu haben. (AS, S. 8)

Er formuliert sie als:

Wenn nun A keinem B zukommt, kann auch B keinem A zukommen.

Wenn aber A jedem B zukommt, kommt auch B irgendeinem A zu.

Wenn A einem (einigen) B zukommt, muss auch B einem A zukommen.

Wenn aber A einem B nicht zukommt, braucht nicht auch B einem A nicht zukommen.

Er erläutert, dass der allgemein verneinende Satz in seinen Begriffen konvertibel ist (E), das ist die einfache Konversion, wo eine Vertauschung der Terme stattfindet (z. B. ‚*Kein X ist Y*‘ wird zu ‚*Kein Y ist X*‘).

Der (allgemein) bejahende Satz (A) wird so konvertiert, dass sich ein partikulärer Satz ergibt (I), in dieser *conversio per accidens* wird das Prädikat partikularisiert und anschließend vertauscht (z. B. „Alle *X* sind *Y*“ wird zu „Manche *Y* sind *X*“).

Von den partikulären Sätzen, lässt sich der bejahende (I) in einen partikulären einfach umwandeln, nicht aber der verneinende (O).

Für die Konstruktion von Schlüssen, wird ferner berücksichtigt, dass sich die kategorischen Sätze in unterschiedlicher Weise zueinander verhalten.

Diese wurden später von Apuleius schematisch im ‚logischen Quadrat‘ wiedergegeben. (Mates, S. 269)

Kontradiktorische Sätze (A-O und E-I) können weder gemeinsam wahr, noch gemeinsam falsch sein; Konträr verhalten sich Sätze (A-E), die zusammen nicht wahr, wohl aber falsch, sein können; Subkonträre Sätze (I-O) können zusammen nicht falsch sein. Sie können aber gemeinsam wahr sein; Subaltern (A-I und E-O) ist die Beziehung, wenn der übergeordnete (universale) Satz, denn ‚schwächeren‘ (partikulären) bedingt. (Urchs, S. 112)

Aristoteles bestimmt drei Termini, die einen Schluss bilden.

Der Oberbegriff (*terminus major*) ist das Prädikat der Konsequenz und bildet (mit dem Mittelbegriff) dementsprechend die obere Prämisse; der Unterbegriff (*terminus minor*) ist das Subjekt der Konsequenz und befindet sich dementsprechend in der unteren Prämisse, wo ebenfalls der Mittelbegriff vorkommt und der Mittelbegriff (*terminus medius*), der in der Konsequenz nicht vorkommt.

Die Aufeinanderfolge der drei Sätze eines Syllogismus (*Modus*) in den vielfachen Anordnungsmöglichkeiten wurde im Mittelalter im Schema eines Buchstabentripels festgelegt (z. B. >EIO<). (Quine, S. 112)

Aristoteles lässt von den *Modi* jene ‚schwache‘ mit subalternen Konklusion aus (ein partikulärer Schluss, der aus allgemeinen Vordersätzen gezogen wurde).

Zur endgültigen Bestimmung eines Syllogismus wird ferner eine Verteilung auf drei „Figuren“ vorgenommen. Diese ergeben sich aus der möglichen Position des Mittelbegriffs (der jeweils in den Ober- und Unterprämissen, entweder Subjekt oder Prädikat sein kann) denn festgelegt ist nur die Termfolge der Konklusion. Es beruht auf einer Konvention, dass der Obersatz zuerst genannt wird.

Łukasiewicz weist auf die ‚willkürliche‘ Prämissenfolge in Aristoteles Ausführungen, dass aber dennoch problemlos festgestellt werden kann welches nun Ober- und Unterbegriff (bzw. Ober- und Untersatz) ist. Denn in der systematischen Darstellung des Syllogismus, werden für jede Figur in alphabetischer Reihe bestimmte Buchstaben für bestimmte Terme genannt, wobei die jeweilige Kennzeichnung ‚explizit‘ angegeben wird. (AS, S. 33)

Der mittlere Begriff, so Aristoteles, ist jener „der gleichzeitig in einem anderen ist und einen anderen in sich begreift“. Er ist auch seiner Stellung nach der mittlere - die Termini des Schlusses verhalten sich so zueinander, dass der Unterbegriff in dem mittleren „als ganzem“ ist und der mittlere im Oberbegriff „als Ganzem entweder ist oder nicht ist“ (für die Außenbegriffe ergibt sich so notwendig ein vollkommener Syllogismus).

In der ersten „vollkommenen“ (τέλειος) Figur ist der Mittelbegriff in der oberen Prämisse Subjekt und in der unteren, Prädikat. In der Formulierung wird der obere Begriff vorangestellt weil er (logisch) umfassender und allgemeiner ist (aus der Definition des Prädikats „von jedem anderen ausgesagt“). Diese ‚Vertauschung‘ der Prämissen nimmt Aristoteles vor, um den ‚vollendeten‘ oder evidenten Charakter der ersten Figur zu zeigen. (Kneale, S. 73)

Wenn A von jedem B und B von jedem C ausgesagt wird, muss A von jedem C ausgesagt werden. (Schema AAA)

Wenn A von keinem B, aber B von jedem C ausgesagt wird, kann A keinem B zukommen. (Schema EAE)

Sie sind deshalb vollkommen weil sie sich durch das „zu Anfang Angenommene“ erschließen und sie genügen der „einleuchtenden Notwendigkeit“ in der vorausgesetzten Definition des Aristoteles, wo der Außenbegriff nach dessen ganzem Umfang im mittleren entweder ist oder nicht ist.

Die zweite (wo der Mittelbegriff in beiden Prämissen Prädikat ist), wie auch die dritte Figur (wo er in beiden Subjekt, oder „Beziehungspunkt“ ist), sind unvollkommen: Sie werden erst vollendet, durch die Erhärtung aus „anderen Stücken“. Ihre Notwendigkeit geht nicht „ausschließlich aus den ursprünglich gegebenen“ Begriffe hervor.

Die viel diskutierte (und fälschlicherweise auf Galen zurückgeführte) vierte Figur zog Aristoteles in seinem Verfahren nicht mit ein. (AS, S. 38)

Denn in ihr wäre der Mittelbegriff im Obersatz Prädikat, im Untersatz Subjekt. So wäre der Oberbegriff im Obersatz Subjekt. Es geht aber aus der Bestimmung der Termini hervor, dass der größere Umfang der Prädikatform den kleineren Subjektbereich umfasst.

Im Beweis der Gültigkeit der Schlüsse, wie im deduktiven Verfahren zur Herleitung der übrigen Syllogismen aus den anderen Figuren, wird axiomatisch eine Reduktion auf diese ‚evidenten‘ Schemata der ersten Figur durchgeführt. Hinzu kommen die Relationen des logischen Quadrats und die Reduktionsregeln. Diese sind die rein logischen Methoden der direkten und indirekten Umkehrung. Letztere wird auch *reductio ad impossibile* genannt (und wird mit Euklids Beweisverfahren der *reductio ad absurdum* in der Geometrie verglichen). (Kneebone, S. 19)

In späteren Abschnitten wendet Aristoteles aber auch den Beweis durch *ekthesis* an (er besteht in der Einführung eines neuen Terms, wobei ein Unterbegriff des gegebenen Begriffes eingesetzt wird). (AS, S. 60)

Zum Beispiel lässt sich der Syllogismus >AOO-2< auf >AAA-1< folgendermaßen reduzieren:

<i>Alle X sind Y</i>	wird zu	<i>Alle X sind Y</i>
<i>Einige Z sind nicht Y</i>		<i>Alle Z sind Y</i>
<i>Einige Z sind nicht X</i>		<i>Alle Z sind X</i>

Hier wurde durch indirekte Reduktion die ursprüngliche Konklusion negiert (*Alle Z sind X*) und dann mit dem ursprünglichen Obersatz wieder kombiniert.

2.1.2 Besonderheiten und Interpretationen des Systems

2.1.2.1 Singuläre Termini

In den *Kategorien*, wird festgehalten dass die „ersten und allgemeinsten“ Aussagen oder Prädikate gemeint sind „die der Verstand über die Dinge machen kann“. Denn im Denken, drücken die „höchsten“ Begriffe die „umfassendsten Bestimmungen“ der Dinge aus. (Rolfes/ Organon I/II S. 38)

Da die Schlussfolgerung aus der Verbindung der drei Terme hervorgeht, singuläre Termini aber nur als Subjekte auftreten können und somit nicht austauschbar sind, werden sie von Aristoteles ausgeschlossen. (Kneale, S. 67) Er streicht sie also aus seinem System, weil er einen uneingeschränkten Einsatz desselben Terms, als Subjekt wie auch als Prädikat, forderte. In seiner Konzeption des Syllogismus, sollen Terme ‚homogen‘ in ihrer jeweiligen Stellung sein. (AS, S. 7)

Bei Quine heißt es programmatisch „Elimination der singulären Termini“. Diese präsentiert er in Anlehnung an Russells Theorie der Kennzeichnung, und er betont die „Priorität der Prädikate.“ (Quine, S. 279ff)

So kann beispielsweise $\langle \text{Zerberus} \rangle$ in $\langle (\iota x)Fx \rangle$ oder in $\langle (\iota x)(x \text{ ist-Zerberus}) \rangle$ übersetzt werden. Wobei $\langle F \rangle$ für das Grundprädikat steht. Er verwendet die Peanosche Zeichensequenz $\langle (\iota x) \rangle$ (mit dem invertierten Jota) die dem Ausdruck von $\langle \text{das Objekt } x, \text{ so dass} \rangle$ dient.

Hier ist also der singuläre Term nicht mehr als Bezeichnung für das Objekt, sondern als Prädikat das auf dieses Objekt zutrifft, behandelt worden.

Zurück zur logischen Schlussfolgerung aber, so ist zusammenfassend nach Russell festzustellen, dass die Logik nicht nur für „besondere Dinge oder Begriffe“ Behauptungen aufstellen soll, für die sie wahr sind, für andere aber nicht. Dies sei nicht ihre Aufgabe. Und es gehe aus (einem Teil) der Definition der Logik hervor, dass „alle ihre Sätze vollständig allgemein sind“. (Russell, S. 161)

2.1.2.2 Prädikatenlogische Wiedergabe des Syllogismus

In Aristoteles Unterscheidung der vier Satzrelationen A, I, E und O, kann der „Ansatzpunkt für Quantoren“ angesiedelt werden. (Bourbaki, S. 13)

Prädikate können als Sätze, sofern sie mit Variablen besetzt sind, als solange „offen“ gesehen werden, bis sie durch Quantoren „abgeschlossen“ werden² (Quine, S. 179)

Man könnte hier eine Parallele zur grenzenbildenden Funktion der Termini, wie sie Aristoteles sah, ziehen. So besetzen Termvariable die logischen Konstanten *alle*, *manche*, *einige*, *keine* (bzw. als zweistellige Funktoren zu betrachten, jeweils auftretend mit *ist*, *ist nicht*). In der Prädikatenlogik sind ebendiese in Verbindung mit der Negation auf den Existenz- und Allquantor reduzierbar.

² Diese ‚Erfindung‘ geht auf Frege zurück. (Kneale, S. 511)

Quine geht in der „Quantorenschreibweise“ nun die vier kategorischen Formen durch. (Quine, S. 125f)

A: Alle F sind G

$(x)(Fx \supset Gx)$

E: Kein F ist G

$(x)(Fx \supset \neg Gx)$

I: Einige F sind G

$(\exists x)(Fx \cdot Gx)$

O: Einige F sind nicht G

$(\exists x)(Fx \cdot \neg Gx)$

Łukasiewicz macht jedoch den Hinweis dass Quantoren in der syllogistischen Theorie nicht vorgesehen waren, er sieht dennoch eine Verbindung zwischen der ‚logischen Notwendigkeit‘ im syllogistischen Deduktionsverfahren und dem Universalquantor der Prädikatenlogik. (AS, S. 83f)

Da die logische Notwendigkeit mit dem Allquantor equivalent ist, und dieser am Beginn einer wahren Formel weggelassen werden kann, so könne man in der modernen formalen Logik bei Formulierungen universaler Quantifizierung wie ‚für alle A ‘ (wobei A eine Variable ist) auf den Hinweis der notwendig wahren Folgerung ebenfalls verzichten. Aristoteles tat dieses nur um zu unterstreichen, dass die Implikation aufgrund aller Werte (der in ihr vorkommenden Variable), wahr ist. Er fügte dem Schlusssatz (einer Konversionsregel oder eines Syllogismus) das griechische *ἀνάγκη* ‚muss‘ hinzu. (AS, S. 10f)

2.1.2.3 Andere Überprüfungsmöglichkeit

Anstelle der Gültigkeitsüberprüfung von Syllogismen durch das kanonisierte Regelwerk, schlägt Quine die Anwendung der Venn - Diagramme vor. (Quine, S. 115)

Die Mengenbilder von drei sich überschneidenden Kreisen (für die drei Termini des Syllogismus) veranschaulichen den Schlusssatz, indem eine Schattierung

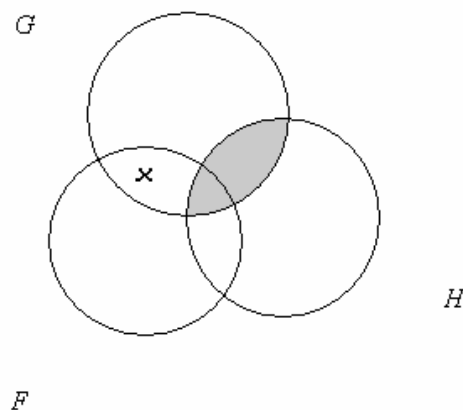
einer Teilfläche und dem Anführen eines Kreuzes zur Angabe der quantitativen Angaben in den Prämissen angezeigt wird.

So lässt sich beispielsweise der Syllogismus $>EIO-1<$ folgendermaßen darstellen. (Quine, S. 109f)

Kein G ist H

Einige F sind G

$\therefore$ Einige F sind nicht H



(Figur aus Quine, S. 110)

Diese Methode stellt eine Weiterentwicklung des vorausgehenden graphischen Verfahrens Eulers³ dar, denn hier werden alle Termini dargestellt und (nach der Schraffur) jede Information über den Sachverhalt eines Satzes angegeben (Kneebone 24)

³ Für die Logik, so Frege, seien diese ein „hinkendes Gleichnis“. So lautet es im Zuge seiner Kritik am Schröderschen „Gebietkalkül“, welcher als „Grundbeziehung die des Teiles zum Ganzen“ nennt. Dieser müsse von der Logik „ganz getrennt werden“ (LU, S. 112)

Sie weist aber auch Grenzen auf. Ihr Nachteil liegt in der erschwerten Anwendung auf Schlüsse mit vier oder mehr Termini. Für Schlüsse mit vier Termini, so Quine, könne, durch sorgfältige Zeichnung, ein Diagramm aus sich überschneidenden Ellipsen gebildet werden.

Weiters schlägt er vor eine Zerlegung des Schlusses in Teile vorzunehmen. Letztere sollten eine möglichst geringe Anzahl an Termini enthalten, dass ein Weiterverfahren ermöglicht wird. (Quine, S.117)

Die Methode Venns erfuhr auch eine Neuerung.

Statt des Kreuzes, führte C. I. Lewis (1918) die Zeichnung eines langen Striches ein. Indem der Strich quer über einer Begrenzungslinie liegt, zeigt er an „daß der eine oder der andere Teil des durch ihn markierten Gebietes nicht leer ist“. Auf diese Weise kann die Nicht–Leere eines zusammengesetzten Gebietes angezeigt werden.

Diese Neuerung sei „nützlich“, um beispielsweise aus den Prämissen

Alle Zeugen, die Aktien der Firma besitzen, sind Angestellte,

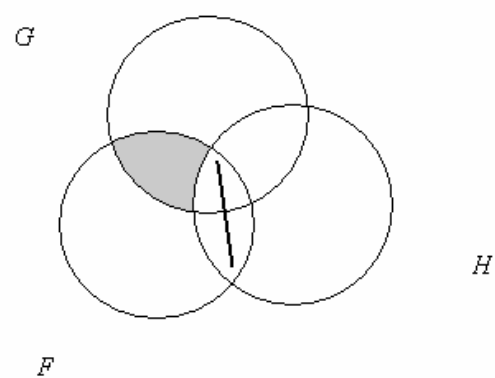
Einige der Zeugen sind Angestellte oder besitzen Aktien der Firma

auf die Konsequenz

Einige der Zeugen sind Angestellte

zu schließen.

Wobei (im folgenden Diagramm) $>F<$ >Zeugen<, $>G<$ >Aktionäre der Firma< und $>H<$ Angestellte bedeutet. (Quine, S. 117)



(Figur aus Quine, S. 116)

2.2 Die Stoische Logik

Die Feststellung Kants dass sich die Logik seit Aristoteles in ihrer vollendeten Form nicht weiterentwickelt (SL, S. 1) und „an Inhalt nicht viel gewonnen“ habe (Kant, S. 20), beschreibt die prägende Dominanz der aristotelischen Syllogistik in den darauf folgenden Jahrhunderten. So blieben andere Entwürfe unbeachtet und konnten sich nicht durchsetzen bzw. als Ansätze nicht weiterentwickeln.

Tatsächlich, aber, könnte man in der stoischen Logik einen weiteren Höhepunkt der antiken Logik sehen, da sie als Vorläufer der modernen Aussagenlogik gelten. (Boehner, S. xv)

So stellt dieses ‚antike Prototyp‘ der modernen Aussagenlogik (Łukasiewicz, S. 237) als „elementare Logik“, in ihrer Anwendung von Aussagevariablen und den streng synthetischen Aufbau ihrer Schlussregeln, eine Erweiterung der Prädikaten- oder Klassenlogik des Aristoteles dar. (Scholz, S. 31)

2.2.1 Grundzüge des Systems

Das Fundament der stoischen Logik, nämlich, ist die Aussage.

Ihre Verwendung der Ausdrücke ‚das Erste‘, ‚das Zweite‘ usw. als Variablen stand für ganze Aussagesätze. Sie verstanden diese ordinalen Zahlen als Leerstelle, die es mit Aussagen zu ersetzen galt (und nicht mit Termini im aristotelischen Sinne). (Kneale, S. 159)

Sie nahmen einen systematischen Aufbau von einfachen und zusammengesetzten Aussagen vor und erweiterten so die aristotelische (kategorische) Syllogistik durch hypothetische und disjunktive Schlüsse.

In ihrer Untersuchung der Verbindungen von Aussagen, galt ihre Aufmerksamkeit besonders dem Sinn der Verknüpfungen (Junktoren) ‚und‘,

‚oder‘ (sowohl im ein- als auch im ausschließenden Sinne) und ‚wenn...so‘ (Implikation), denen sowohl modale als auch extensionale Interpretationen zugeschrieben wurden.

So schlägt Chrysippos (ca. 280 – 205 v. C.) vor, eine ‚wenn...so‘ -Aussage durch die Verknüpfungen ‚und‘ und ‚nicht‘ zu definieren, also eine (extensionale) Subjunktion als verneinte Konjunktion auszudrücken. Ebenfalls erkannte man die Möglichkeit ‚oder‘ durch ‚wenn...so‘ und ‚nicht‘ definieren zu können (in extensionaler Hinsicht). (Mates, S. 277)

Sie sahen den Schluss als System von Prämissen und einer Konklusion und formulierten diesen als *modus ponens* indem nur Aussagevariable auftreten. Wie am „Theophrastisch – Eudemischen“ aussagenlogischen Beispiel sichtbar wird: (Scholz, S. 34)

Wenn p, dann q

Nun gilt aber p

Folglich gilt auch q

Schlüsse sind dann korrekt, wenn die dazugehörige Implikation wahr ist.

Für ein deduktives System formal korrekter Schlüsse, ordneten sie als Grundlage hierfür fünf Schlusstypen ein. Die obige Auffassung von Korrektheit im aussagenlogischen Sinne wandten sie ebenfalls auf diese Grundtypen an. Diese Syllogismen erachteten sie, axiomatisch, für unbeweisbar und nicht reduzierbar. (Kneale, S. 163)

Diese wurden im folgenden Kalkül der Schlusschemata wiedergegeben, wobei andere Schlüsse sind auf diese Grundtypen reduzierbar sind: (Mates, S. 278)

- | | | | |
|----|--------------------------------|-----|--------------------------------|
| I. | Wenn das Erste, so das Zweite; | II. | Wenn das Erste, so das Zweite; |
| | Das Erste | | Nicht das Zweite |
| | Also das Zweite | | Also nicht das Zweite |
- III. Nicht zugleich das Erste und das Zweite;
Das Erste;
Also nicht das Zweite.

IV. Das Erste oder das Zweite;
Das Erste;
Also nicht das Zweite

V. Das Erste oder das Zweite;
Nicht das Erste;
Also das Zweite

Sie wandten ein Verfahren an, um (tautologische) Folgerungen aus den Prämissen zu ziehen ausgehend vom Prinzip der so genannten ‚dialektischen Regel‘ (EL, S. 279), dass wenn die vorhandenen Prämissen zu einer Konklusion führen, so ist auch die Konklusion effektiv unter den Prämissen zu finden, selbst wenn sie darunter nicht explizit genannt wurde (Kneale, S. 166) Beweise der Reduktion, v.a. aber die Analyse komplexer Schlüsse, bewerkstelligten sie durch die Einführung eines Systems vier rein formaler Schlussregeln (*themata*). Von diesen „Metaregeln“ blieben nur zwei (bzw. drei) in fragmentarischer Fassung erhalten. (SL, S. 4)

Das Wahr- oder Falschsein einer ‚wenn...so‘ -Behauptung definierten sie in der Charakteristik einer Wertetafel (wie sie erst viel später dargestellt werden soll). Im (modernen) Sinne der Wahrheit eines Konditionalsatzes, nämlich, dass er falsch ist wenn er ein wahres Antezedens und eine falsche Konsequenz hat, aber wahr in den übrigen drei Fällen. (SL, S. 6)

Nur Propositionen können aber wahr oder falsch sein, denn sie sind der Sinn eines Aussagesatzes (aus diesem Grund seien sie Gegenstand der Logik). (Mates, S. 276)

2.2.2 Besonderheiten und Antizipationen

Überhaupt nahmen sie eine strenge Unterscheidung zwischen einem Zeichen, seinem Sinn und seiner Bedeutung, was sich in der semantischen Theorie Freges wieder findet und worin Carnap ebenfalls Parallele zu seinem Konzept der intensionalen- extensionalen Differenzierung der Ausdrücke sah. (SL, S. 21)

Und in ihrer Konzentration auf die Verknüpfungen zwischen den Aussagen einer Schlussfolgerung, unterscheidet sich die Aussagenlogik der Stoiker wesentlich von der aristotelischen Begriffs- bzw. Prädikatenlogik, die sich mit den Relationen zwischen generellen Termini befasst.

Łukasiewicz wies, zudem, auf den formalistischen, nicht nur formalen, Charakter der stoischen Logik hin - ihre Wahl einer präzise stilisierten Sprache und die stringente Betonung der exakten Beibehaltung der Begriffsordnung einer Aussage (am Beispiel eines *modus ponens*) und die Gültigkeit von Schlüssen aufgrund der äußeren Form, nicht Bedeutung, der Begriffe im Beweis festzulegen. (AS, S. 16)

Es ist aber vor allem das materiale Konditional, welches als besonderes Merkmal der stoischen Logik in der Logikgeschichte hervortreten wird (oben bereits angedeutet).

Der strikten Bestimmung Philo von Megara (um 300 v. C.) nach, auf welchen sie zurückgeht, sei eine konditionale Aussage korrekt, dann und nur dann, wenn es nicht mit einer Wahrheit beginnt und mit einer Falschheit endet. Also im Sinne einer modernen Wahrheitsfunktion von ‚wenn ... dann‘. Die Wahrheit oder Falschheit einer Aussage wird durch jene ihres Antezedens bzw. Konsequenz bestimmt.

Und aus der obigen Bestimmung Philo nach, gehen aus einem Konditional drei Fälle hervor, worin sie wahr und einen worin sie falsch sein kann.

Und wenn das Mittel einer Wahrheitstabelle nicht eingesetzt wurde, so wird in dieser Definition die Konzeption der modernen wahrheitsfunktionalen Bedingtheit vorweggenommen.

Ihre Bedeutung, tritt nicht zuletzt als Streitpunkt in der Logikgeschichte hervor, in der Gegenüberstellung, nämlich, mit der Implikation. Letztere besagt, dass ein wahres Konditional dann besteht, wenn dessen Konsequenz potentiell enthalten ist (nach Sextus Empiricus. Der Ursprung wird bei den Peripatetikern angesiedelt) (Kneale, S. 129f).

Auch in späteren Zeiten ist sie im Mittelpunkt einer Polemik geblieben. Der Grund für diese, so Quine, ist die unklare Unterscheidung zwischen Implikation und Konditional. (Quine, S. 44)

Beide seien miteinander verwandt, und so liege eine Implikation „dann und nur dann“ vor, wenn das Konditional wahr ist. Das Konditionalzeichen $\supset$, aber, wurde als ‚impliziert‘ gewertet. So wird „verkannt“, dass $\supset$ höchstens mit ‚wenn ...dann‘ angleicht, aber nicht ‚impliziert‘. (Quine, S. 67)

Die Implikation, also, ist die „Allgemeingültigkeit“ des Konditionals. (Quine, S.63)

So wurde das philonische Konditional sowohl von Frege als auch von Peirce (unabhängig von einander) wiedereingeführt.

In der *Principia Mathematica* von Whitehead und Russell wird die Implikation im materialen Sinn definiert (im Unterschied zur ‚formalen‘, welche im weiteren Verlauf aus dieser abgeleitet wird). Und als Schlussregel werden die Ersetzung und die Subjunktion verwendet (das *modus ponens* für das philonische Konditional).

Das Symbol in „ $p \supset q$ “ wird für „ p impliziert q “ angewendet, und kann als „wenn p , so q “ gelesen werden.

Es wird auch darauf hingewiesen, dass eine ‚Verwechslung‘ der Implikation mit der Schlussfolgerung (welche auch hier angewendet wird) oft vorliegt. (PM, S. 15)

So verläuft der Prozess des Schließens, indem eine Proposition „ p “ und eine Proposition „ p impliziert q “ behauptet werden.

Und nur im Glauben, dass die ersten Behauptungen nicht „irrig“ sind und so auch nicht die Endbehauptung, liege das „Zutrauen zum Schluß“.

Und immer wenn in Symbolen

$$„\vdash p“ \text{ und } „\vdash (p \supset q)“$$

auftreten (wobei p und q „speziell bestimmt“ sind), dann wird auch „ $\vdash q$ “ auftreten. (PM, S. 18f).

2.3 Leibnizens Traum

2.3.1 Historische Positionierung und Bedeutung

Obwohl Die Spannweite seines Gedankenreichtums weit über die Grenzen der traditionellen Logik hinaus langte, und Leibniz (1646 – 1716) in mehreren Gebieten Vorarbeit (z.B. Semantik) leistete, so blieben ebenjene unvollständige, von seinen Zeitgenossen wenig beachtete Bemühungen.

Nichtsdestotrotz, wird er als Gründer der symbolischen Logik angesehen da er den Versuch veranstaltete eine systematische Symbolisierung logischer Zusammenhänge vorzunehmen und die Notwendigkeit eines formalisierten Instrumentariums für das Fortschreiten im logischen Schließen erkannte. (Kneebone, S. 53)

Sein Interesse galt einem Symbolismus mit universeller Tragweite und hierfür fand die Logik in seinem Traum der Formalisierung von Sprache und Denken ihre zentrale Position.

Zwar gab es bis zu diesem Zeitpunkt unterschiedliche Versuche einer symbolischen Schreibweise logischer Operationen (z.B. hatte Descartes die algebraische Notation zu ihrer endgültigen Form bereits verholfen) – Leibniz, jedoch, bildete eine Ausnahme in seinem Versuch, die Schlüsse der formalen Logik in eine algebraische Form zu bringen.

Denn die Signifikanz der Analogie zwischen den Regeln der Algebra und denen der formalen Logik zu untersuchen schien, in einer Zeit da die Algebra große Entwicklungen machte, kein Interessensgegenstand zu sein. (Bourbaki, S. 15)

2.3.2 Leibnizens Programm

Ausgehend von seinem Wunsch eine Enzyklopädie aller Wissenschaften zu erstellen, meint Leibniz die nicht weiter zerlegbaren Grundbegriffe aller Wissenschaften erst zur Verfügung stellen zu müssen. Denn sein Ziel war es eine allgemeine Methode, die auf alle (in der Enzyklopädie enthaltenen) Wissenschaften angewandt werden kann, zu finden. Diese nannte er die *Scientia generalis*.

Die letzten, nicht weiter zerlegbaren Begriffe (oder jene, „die durch sich selbst erfasst werden“) stellen das Denkbare überhaupt dar. Leibniz stellt fest dass es außerhalb der Macht des Menschen steht durch die Analyse zu den ursprünglichen Begriffen zu gelangen bzw. die Schwierigkeit solche Begriffe im Fortgang der Wissenschaft weiter zu zerlegen. Daher weist er auf die Möglichkeit hin, eine Analyse der Wahrheiten durchführen zu können, da diese nämlich sehr wohl absolut bewiesen und auf ursprüngliche unzerlegbare Wahrheiten zurückgeführt werden können. (Leibniz, S. XXII)

In diesem Sinne würde, für Leibniz, die Logik der formale Teil der *Scientia generalis* (wenn sie sich als formale Disziplin auf die bereits vorliegenden Begriffe bezieht) bilden, mit dieser aber auch zusammenfallen (wenn es nun ihre Aufgabe ist, die Aufstellung und Analyse der Begriffe vorzunehmen). In jedem Fall teilte er die Logik als formale Disziplin im Sinne eines logischen Kalküls ein.

In seinem Werk „Die Grundlagen des logischen Kalküls“ erörtert Leibniz ebendiese allgemeine Wissenschaft um in den folgenden Kapiteln auf weitere Problembereiche seines Vorhabens einzugehen, nämlich: die allgemeine Charakteristik und der logische Kalkül.

Zunächst, aber, beschreibt er die Logik („die in den Schulen vertreten wird“) als unvollkommen. Diese habe sich weit von der Logik entfernt die „nützlich für die

Leitung des Geistes hinsichtlich der Erforschung der verschiedenen Wahrheiten ist“ und somit ein Hindernis darstellt. (Leibniz, S. 9)

Was Leibniz anstrebte war eine Methode – bestehend aus symbolischen Bezeichnungen - die dem Geist im Denken als Hilfsmittel dienen soll. Dieser Logik, die für die Leitung solcher Untersuchungen geeignet ist, verlieh er die Benennung „Leitfaden des Denkens“. Sie soll eine leichte, sichere Methode sein zur widerspruchsfreien Beilegung von Kontroversen (wie sie in der Arithmetik auftreten können). Er zeigt sich zuversichtlich und verkündet mit Überzeugung diese Methode zustande bringen zu können, die Mittel zu ihrer Durchführung und Gebrauch aufzeigen zu können und die erfolgreiche Anwendung erklären zu können.

Das sichere Voranschreiten des Denkers mithilfe dieser wahren Methode gleicht dem, „der im Labyrinth einen Ariadnefaden zur Verfügung hat“ in der logischen Disziplin. (Leibniz, S. 15)

Das oben genannte Projekt, also, nimmt zunächst die Gestalt einer universellen Sprache an bevor sie in eine universelle Begriffsschrift, mit der Algebra als Modell dienend, Form annimmt.

Seine Auffassung einer formalisierten Sprache im Sinne einer symbolischen Logik (von Leibniz „*calculus ratiocinator*“ genannt) war konzipiert in einer Reihe von Zeichen. Durch die reine Verkettung ließen sich Lehrsätze aufstellen und Widersprüche durch einen Kalkül lösen.

Auf die nähere Bedeutung/Einschränkung von Zeichen geht Leibniz im folgenden Kapitel über

In seinen Überlegungen, geht Leibniz vom ‚Identitätsprinzip‘ aus, welches im weiteren Verlauf der Logikgeschichte mit seinem Namen verbunden wird.

Nach Leibnizens Definition, sind alle Eigenschaften die für ein Ding (A) wahr sind auch für ein zweites (B) wahr sofern sie identisch sind ($A \propto B$). Es gelingt eine Substitution dieser ‚Koinzidierenden‘ wobei die Wahrheit erhalten bleibt („*eadem sunt quorum unum potest substitui alteri salva veritate*“). Diesen Grundsatz verbindet er mit dem umgekehrten Prinzip der Identität des Nicht-

Unterscheidbaren (*principium identitatis indiscernibilium*) wonach zwei Dinge immer auch dann identisch sind, wenn sie dieselben Eigenschaften besitzen

$(A + B \infty L)^4$. Hier nimmt er den Gedanken des Enthaltens hinzu, d.h. A und B existieren im ‚Einen‘ oder ‚Enthaltenden‘ L . (Leibniz, S. 86ff)

Nach Leibniz, wird die Wahrheit (einer Aussage) dann bewiesen wenn das Subjekt das Prädikat in sich enthält (das *in esse* - Prinzip).

In der Zurückführung auf diese zwei Prinzipien, bewerkstelligte er auch seinen Beweis der Axiome.

Es ist unter scholastischem Einfluss, dass Leibniz die oben genannte Subjekt-Prädikat Beziehung auch zwischen den Begriffen eines Lehrsatzes ansiedelt. (Bourbaki, S. 22).

Der Einfluss findet seine Fortsetzung im Verifizierungsverfahren dieser Axiome. Ihre Gültigkeit wird bewiesen, wenn man sie in primitive Begriffe auflöst (diese Idee einer Methode zur mechanischen Kombination einfacher Begriffe zu entwerfen war, wie bereits erwähnt, ein fundamentaler Gedanke bei Leibniz). Hier wird uns seine Auffassung was das Wesen der Axiome überhaupt betrifft deutlich.

Entgegen der klassischen Haltung, schreibt Leibniz - wie auch Frege - den Axiomen keine unangreifbare Stellung zu. Auch sie gilt es zu beweisen. Entgegen der Ansicht Kants, nämlich, wonach sich ein Axiom (vor anderen Sätzen) auszeichnet, indem es Einsicht in die Natur einer Sache gewährt. Es entspricht den einfachsten und fundamentalsten Gebilden (worauf sich die mathematischen Aussagen a priori beziehen).

Da nach Leibniz, selbst Axiome bewiesen werden müssen, so soll dieses in der Zurückführung auf den Satz der Identität geschehen. Und da jeder Beweis eine

⁴ Es wird mit diesem Prinzip, eine Verwandtschaft zu Russells Definition der Identität, gesehen. Denn in der Auffassung, dass es keine zwei ununterscheidbaren realen absoluten ‚Wesen‘ gibt bzw. dass sich zwei Substanzen nicht vollkommen ähnlich sind (oder sich ‚*solo numero*‘ unterscheiden) – so soll Russells Definition, in *The Principles of Mathematics* dargeboten, ähnlich sein, wenn sie besagt, dass a identisch sei mit b , wenn jede Eigenschaft von a auch eine Eigenschaft von b ist. (Kneebone, S. 90)

Anwendung von Letzterem sein sollte, so geht hervor, dass als der absolut erster Grundsatz, jener der Identität sein muss. (NS, S. 222)

Leibnizens Konzeption einer (philosophischen) „*lingua rationalis*“ oder universalen Charakteristik, erscheint als Terminus in unterschiedlichen Schreibungen. „*Lingua characteristica*“ bzw. mit dem Zusatz „*universalis*“ wurden als Ausdrücke gebräuchlich. (LU, S. 10)

Keine der beiden wurde von Leibniz konzipiert. Dieser spricht von einer „*lingua sive Characteristica universalis*“.

Bei Frege heißt es aber „*lingua characterica*“ und er geht in seinen Nachgelassenen Schriften auf die Vorzüge eines solchen „von Leibniz mit grösster Zähigkeit sein Leben lang festgehaltenen“ Gedankens ein. Weiters stellt er Vergleiche an, wobei er auf Parallele mit seiner eigenen Begriffsschrift trifft und im weiteren Verlauf Versäumnisse in Booles Technik feststellt. (NS, S. 9)

2.3.3 Wirkungsgeschichte Leibnizens und Parallele

Was die Gründung der modernen Logik im 19. Jahrhundert betrifft, hielt sich sein Einfluss in Grenzen. Den Protagonisten dieser Phase (wie Frege, Boole, Schröder, Russell und Whitehead) waren Leibniz Werke entweder unbekannt, oder sie kamen mit diesen erst spät in Berührung als ihre eigenen Konzeptionen zur symbolischen Logik bereits vorlagen.

So, beispielsweise, der Fall mit Boole. Sein System hatte sich bereits durchgesetzt als die Bedeutung der Leibnizschen Schriften erkannt wurde.

Ihm wird die Schöpfung der Algebra der Logik im wesentlichen zugeschrieben – denn obwohl Leibniz in seinem Versuch die formallogischen Schlüsse in algebraischer Form zu bringen, Boolesche Ansätze antizipierte, so sollen, nach

Alonzo Church, seine Ausführungen zum Projekt eines logischen Kalküls, ein inadäquates und unvollständiges Instrumentarium bleiben. (Church, S. 155)

In seinem Vorhaben, die Schlüsse der formalen Logik in algebraischer Form zu bringen, ging Leibniz von der Feststellung aus, dass beide die gemeinsame Charakteristik hätten, sich nicht mit festgelegten Objekten, sondern mit Zahlen bzw. Aussagen, zu befassen. Und dass er die Anwendung seines Kalküls, nicht nur auf die Logik der Begriffe, sondern auch jene der Aussagen ausdehnen wollte, wird ihm insofern die Nähe zur booleschen Algebra der Logik zugeschrieben. (Bourbaki, S. 17)

Ähnlich verhält es sich mit Peano. Dieser hatte, unabhängig, sein System zur Axiomatisierung der Arithmetik bereits aufgestellt als er durch seine Forschung nach den Grundlagen der Mathematik auf die –wenn auch fragmentarischen– Resultate seines Vorgängers stieß. Und nicht zuletzt durch Peano wurde die Bedeutung der geleisteten Vorarbeit in Leibniz Veröffentlichungen erkannt, denn diese blieben lange Zeit (vor allem von seinen Zeitgenossen) unbeachtet. (Kneebone, S. 151)

In seiner Konzipierung einer Begriffsschrift, schließt sich Frege dem Leibnizschen Programm der *characteristica universalis* an und stellt dabei, zwischen den Entwürfen, gewisse Ähnlichkeiten fest.

Die logischen Symbole eines solchen Systems sollen, vollkommen frei von sprachlichen Unreinheiten, den logischen Aufbau gedanklicher Konstruktionen Ausdruck verleihen. Die Feststellung, dass sich hierzu die –zwar in gewissem Maße nützliche aber dennoch unscharfe– Umgangssprache als ungeeignet erweist, es aber dennoch eines „Gefäßes“ zum Tragen gedanklicher Unterscheidungen bedarf, ist bei beiden Autoren deckungsgleich. (NS, S.226)

Frege rekurriert auf Leibniz in seiner Betonung dass eine Zeichensprache zur besseren Bezeichnung logischer Inhalte beitragen soll –d. h. nicht bloße Ersetzung formaler Zusammenhänge sein (was er in weiterer Folge an Booles Formelsprache bemängeln wird), sondern immer eine angemessene

Bezeichnungsweise für logische Differenzierungen. Und um ein weiteres Beispiel zu nennen, die Auffassung des Identitätsprinzips stellt ebenfalls eine Parallele dar. (NS, S. 13)

Frege überträgt dieses ‚Leibnizsche Gesetz‘ auf die Identität von „beurteilbaren Inhalten“. Darunter sieht er die Beziehung der Gleichheit im völligen Zusammenfallen bei Gegenständen (nicht bei Begriffen) hergestellt. (NS, S. 40)

Die Verwirklichung des Traums von Leibniz wurde von diesen Protagonisten, also, nicht bewusst realisiert. Jedoch trugen die festgestellten Parallelen zur (späten) Erkenntnis bei, in Leibniz den Vorläufer eines formalisierten, logischen Instrumentariums zu haben.⁵

⁵ Im weiteren Verlauf dieser Arbeit, soll auf Leibnizens Stellung rekuriert werden, vor allem bezüglich der Thematik der ‚Realisierung‘, wird im 4. Hauptteil noch näher eingegangen.

3 Innovationen im 19. Jahrhundert

3.1 Peano

Giuseppe Peano (1858 – 1932) gilt als einer der Schöpfer der axiomatischen Methode. (Boubaki, S.84).

Doch bis zur Konzipierung dieser werden zunächst (im *Formulaire de Mathématique* und dessen Einleitung) Definitionen und Demonstrationen festgelegt, welche als Terminologievorlage des Axiomensystems fungieren und eine Basis für letzteres schaffen.

Diese Begriffe entspringen weitgehend der Theorie der natürlichen Zahlen.

Darunter aber auch zu finden, die Klassen der Zahlen (natürliche, reelle, rationale usw.); Relationen und Operationen der Klassen; arithmetische Anwendungen; Eigenschaften logischer Operationen; Propositionen etc. .

3.1.1 Peanos logisch – mathematische Notation

Er selbst setzt sein Vorhaben dort an wo die Algebra mit der mathematischen Logik mündet. Der Vorteil wird darin gesehen, dass man durch die Kombination von algebraischen und logischen Zeichen Propositionen länger und vollständiger symbolisch ausdrücken kann. Leibniz nennt er als Urheber des Vorhabens eine universelle Schrift kreieren zu wollen.

Allerdings wird das Hauptverdienst zur Perfektionierung eines solchen Projekts später angesetzt, nämlich mit dem Auftreten der ‚neuen und wichtigen‘ Wissenschaft der Mathematischen Logik (*Logique Mathématique*); denn dort werden die formalen Eigentümlichkeiten der Operationen und Relationen der Logik studiert.

Das Resultat zu dem Peano (und seine Mitarbeiter am *Formulaire de Mathématique*) gekommen ist, ist dass ebenjene Relationen allesamt mit wenigen Zeichen - von bestimmter Bedeutung und präzise festgelegten Regeln unterworfen - repräsentiert werden können. Und so könne man folglich Sätze (der Algebra oder Geometrie etwa) vollständig symbolisch darstellen – ermöglicht durch die Einführung von Zeichen zur Angabe der Konzeptionen dieser Disziplinen.

Peano zählt, gemeinsam mit Frege, zu den ersten überhaupt die eine genaue Untersuchung der angewandten logischen Schlussformen innerhalb der Mathematik unternahmen, denn zuvor wurde der Versuch nicht unternommen, die Beweisführung bestimmter mathematischer Sätze detailliert zu zerlegen (obwohl genügend traditionelle Schlussformen in der Mathematik zur Geltung kamen).

Hier erkannte man nun, welche eine wichtige Stellung die Beziehungen im logischen Aufbau der Mathematik einnehmen. Überhaupt, standen bis zu diesem Zeitpunkt keine Mittel zur Verfügung um diese Beziehungen symbolisch darzustellen. Spätestens seit Kants Feststellung stand fest, dass (nur) Subjekts- und Eigenschaftsausdrücke nicht ausreichen um logische Zusammenhänge genügend zu beschreiben. (H.& A., S. 65f)

In Peanos *Formulaire* werden die verschiedensten Mathematik-Teilgebiete im logischen Kalkül dargestellt (und nicht nur die Ergebnisse der mathematischen Logik). So z.B. die elementare Algebra; Arithmetik; Größentheorie (*grandeurs*); Zahlenklassen etc.

Die darin verwendeten Abkürzungssymbole wurden weitgehend übernommen, beispielsweise das Zeichen $\in$, wenn auch umgekehrt zum heutigen Gebrauch von „ist enthalten in“ oder „impliziert“; so auch $\cap$, $\cup$ und $A-B$ (als Menge der Differenzen $a-b$, wobei $a \in A$ und $b \in B$). (Bourbaki, S. 20)

Diese in Symbolen dargestellten Grundbegriffe, werden durch die fünf Grundsätze bestimmt, aus denen sich „alle Sätze der Arithmetik ergeben.“

Außer den Symbolen, welche er zur Definition geben wird, nennt er auch rein logische Zeichen (welche nach Peano alle Relationen und Operationen der Logik darstellen):

ε , $\subset$, $\supset$ (umgedreht) sowie $-$, $=$, $\cap$, $\cup$, $\vee$, $\wedge$

Die logischen Operationen von Negation, Äquivalenz, Disjunktion, Verum, Falsum, erklärt er im Sinne der zuvor definierten Operationen für Klassen (wobei er die Symbole beibehält). (NLM, S. 4-10)

Die wichtigste Beziehung für Peano ist aber die Zugehörigkeit eines Individuums x zu einer Klasse a , ausgedrückt als „ $x\varepsilon a$ “, wobei der griechische Buchstabe ε auf „est“ hinweist (‚ist ein‘), und später durch Russell in der Form $\in$ gegeben. Er beschreibt auch den Übergang von einem Individuum x zur von ihm als ιx bezeichneten „Einerklasse“ $\{x\}$.⁶

Auch verwendete er Trennungspunkte statt Klammern, was teilweise als Vereinfachung wahrgenommen und akzeptiert worden ist.

So war sein Einfluss auf die Notation der Mengenlehre maßgeblich. Nicht zuletzt durch Russells Adaptation des Peanoschen logischen Symbolinventars ist uns dieses heute noch bekannt und erhalten geblieben.

3.1.2 Die Axiomatisierung der Arithmetik

Peanos Axiomensystem, das zu Beginn angesprochen worden ist, könnte man zu seinen Hauptleistungen zählen und dieses wird auch meistens mit seinem Namen verbunden.

⁶ Durch Peanos Methode, so Bertrand Russell, welche zeigt dass die Individuenzahl nicht endlich ist, folgt dass die reine Mathematik, eine Erweiterung der Logik sei. (Russell, S. 25)

Seinen Arbeiten, gingen Untersuchungen anderer zu den Grundlagen der Mathematik und der Axiomatisierung der Arithmetik voraus.

So hatte bereits Leibniz Untersuchungen zu den Grundlagen der Arithmetik unternommen (aus seiner Überzeugung dass selbst evidente Wahrheiten wie $2 + 2 = 4$ zu beweisen sind, vor allem was die Definition der darin vorkommenden Zahlen betrifft). Auch die Beziehungen der Kommutativität und Distributivität seien nicht als selbstverständlich zu erachten (am Beispiel der Subtraktion, Division und Potenzbildung zu sehen).

Grassmann, seinerseits, hatte bereits rekursive Definitionen der Addition und Multiplikation gegeben und auf dieser Grundlage den Beweis für Rechengesetze geliefert. Hierzu wandte er das Induktionsprinzip (obwohl nicht explizit) sowie die Operation $x \rightarrow x + 1$ an. (Bourkaki, S. 37)

Und Dedekind hatte wenige Jahre zuvor ein Axiomensystem der Arithmetik entworfen, und dessen Axiome wurden von Peano übernommen (allerdings waren die Sätze im Hinblick auf eine mengentheoretische Definition der natürlichen Zahlen dargestellt). (Peano, S. 131)

Die Vervollständigung der Axiomatisierung erfolgte erst durch Peano, solche Grundsätze präzise zu formulieren und einen ausdrücklichen Gebrauch des Induktionsprinzips gemacht zu haben.

In den „Definitionen der Arithmetik“ aus dem *Formulaire de Mathématique*, gibt er eine solche Darlegung der Grundbegriffe, sowie die Grundsätze seines Systems (In den verschiedenen Schriften, finden sich mehrere Formulierungen für diese Axiome).

Letzeren werden die Zuordnungen von (Pp) gegeben, welches eine Abkürzung für „Proposizioni primitive“ ist.

Diese fünf Axiome der natürlichen Zahlen lauten:

(P1) „0 ist eine Zahl“

(P2) „Es sei a eine Zahl; die darauf folgende ist auch eine bestimmte Zahl.“

(P3) „Wenn auf zwei Zahlen a und b dieselbe Zahl folgt, so sind sie gleich.“

(P4) „Die Zahl, welche auf eine beliebige Zahl folgt, ist niemals 0.“

(P5) „ s sei eine Klasse: wir wollen annehmen, 0 gehöre dieser Klasse an, und jedes Mal, wenn ein Individuum x dieser Klasse angehört, gehöre auch das ihm folgende ihr an; alsdann gehören alle Zahlen dieser Klasse an.“

Letzteres Pp ist das Induktionsprinzip, welches man auch lesen kann als „Wenn ein Satz für die Zahl 0 gilt und wenn er, für die Zahl x geltend, auch für die Zahl $(x+)$ seine Gültigkeit behält, so gilt er allgemein“.⁷ (Peano/Asser [Hrsg.], S. 27f)

Als Grundbegriffe nennt er 0 („Null“); N_0 „eine ganze, positive Zahl oder Null“, sowie $+$, welches zunächst den Begriff des „Folgenden“ darstellen soll, und später die Summe, im gewöhnlichen Gebrauch, bezeichnen.

N_0 soll als „Zahl“ gelesen werden, obwohl das Wort „verschiedene Bedeutungen“ hat. Und obwohl das Zeichen zusammengesetzt ist, so stellt es dennoch einen einfachen Begriff dar (mit 1 beginnende Zahlen, werden mit N_1 bezeichnet).

Andere Axiomatisierungsversuche, trugen zur unterschiedlichen Formulierung solcher Grundsätze.

So zogen es Hilbert und Ackermann vor mit der Zahl 1 anzusetzen.⁸ Zudem wird dieses System für unvollständig erklärt da noch rekursive Definitionen für zahlentheoretische Funktionen hinzukommen können. (H & A, S. 118)

Hilbert und Bernays werden in *Grundlagen der Mathematik* ein anderes Axiomensystem vorstellen, dessen Widerspruchsfreiheit als Formalismus zu erweisen galt.

⁷ Auch genannt „Axiom der vollständigen Induktion“ nach Hilbert & Ackermann oder „Prinzip der mathematischen Induktion“ nach Russell).

⁸ In seiner Begründung des Zahlbegriffs, ging Peano in früheren Entwürfen auch von der Zahl 1 aus, und erst später, die Zahl 0 zu den natürlichen Zahlen hinzunimmt. So ließ er die Axiome der Gleichheit nicht mehr unter jene der Arithmetik auf

Ausgehend vom weiteren Ausbau des Formalismus, und damit die „übliche Gestalt“ der Formeln erhalten bleibt, soll hier mit 0 anstelle von 1 begonnen werden. Mit dem Hinweis, dass die Null, nicht mit der Vorstellung eines Nichts verbunden werden soll, es soll nur ein „bestimmtes Ausgangsding“ formal repräsentieren.

Zudem wird bemerkt, dass in Peanos Axiomensystem, der Begriff ‚Zahl‘ mit dem Begriff ‚Ding des Individuenbereichs‘ zusammenfällt, sodass kein „besonderes Grundprädikat“ für ‚Zahl sein‘ eingeführt werden musste. (H & B, S. 218f)

Und überhaupt verleiten verschiedene Meinungen über die Auffassung von ‚0‘, ‚Zahl‘ und ‚Nachfolger‘ (Peanos drei Grundbegriffe der Arithmetik) andere Denker dazu dieses System zu bemängeln.

3.1.3 Bertrand Russells Ansichten

Nach Russell (1872 – 1970), erledigte Peano die ‚Aufgabe‘ die Theorie der natürlichen Zahlen auf Voraussetzungen und Ausdrücke zu fundieren - was die logische Analyse bis dahin zu tun versagte, nachdem sie die gesamte ‚übliche reine Mathematik‘ auf diese Theorie zurückführte, historisch nur durch die Arithmetisierung der Mathematik ermöglicht. Diese Leistung gelang Peano durch seine drei Grundbegriffe und fünf Axiome (unter Inkludierung der Sätze der reinen Logik).

Diese Grundbegriffe und -sätze „wurden so die Garantien der ganzen üblichen reinen Mathematik“ und auch der anderen Wissenschaften die auf der Theorie der natürlichen Zahlen basieren. (Russell, S. 5)

Die ‚Wahrheit‘ des Systems besteht dann, wenn die Gültigkeit der fünf Grundsätze beschlossen ist und keine sonstigen Irrtümer im verwendeten ‚logischen Apparat‘ auftreten.

Man kann eigentlich einen beliebigen elementaren Satz der Arithmetik auf diese Weise verifizieren (weshalb, so Russell, Peano zur Vollendung der ‚Arithmetisierung der Mathematik‘ beitrug. Wo hingegen das Verdienst der ‚Logisierung‘ der Mathematik Frege zugeschrieben wird).

Allerdings lautet Russells Einwand - nachdem er in mehreren Demonstrationen zeigt wie die drei Grundbegriffe Peanos in verschiedenen Interpretationen (in so genannten Progressionen) den fünf Grundsätzen genügen - dass diese Begriffe „0“, „Zahl“ und „Nachfolger“ unabhängig von den Axiomen verstanden werden müssen, d.h. sie werden vorausgesetzt und (wir kennen auch ihre Bedeutung), da sie durch das Axiomensystem nicht definiert werden können.

Er sieht in diesem System nicht die Möglichkeit die oben genannten Bedeutungen von einander zu unterscheiden.

Russell, seinerseits, schlägt vor ebendiese drei nicht als Darstellung von (bestimmten aber undefinierten) „*Begriffen*“, sondern als „irgendwelche *Elemente*“ die die fünf Grundsätze erfüllen, zu sehen. (Russell, S. 9)

Und zwar solche die dann zu ‚veränderlichen‘ Elemente werden, wenn sie in den von uns aufgestellten Hypothesen auftreten - dargestellt in den Axiomen. Ansonsten, aber, sind sie unbestimmt.

‚Veränderliche Elemente‘ können irgendeine Art von Elementen sein (vorausgesetzt, dass es von ihnen unendlich viele gibt), also nicht nur Zahlen. Deren Gültigkeit ist reziprok der Erfüllung der fünf Grundsätze.

Durch die Anwendung dieses Vorschlags könne man die Sätze nicht nur der Reihe der natürlichen Zahlen beweisen, sondern auch für alle anderen die aus Elementen mit ‚gewissen Eigenschaften‘ bestehen.

Somit kann, für bestimmte Zwecke, eine Verallgemeinerung hergestellt und gerechtfertigt werden.

Dennoch räumt Russell zwei Nachteile ein, welche die Realisierung einer adäquaten Grundlage der Arithmetik verhindern.

Nämlich, dass wir nicht überprüfen können ob Elementenreihen existieren die den Axiomen genügen; und dass den Zahlen eine bestimmte Bedeutung zugemessen werden soll, also nicht bloß formale Eigenschaften, denn sie sollen imstande sein gewöhnliche Gegenstände zählen zu können.

3.1.4 Anwendungsbereiche und Einfluss

Dadurch dass Peanos Axiomatisierung der natürlichen Zahlen ein durch die Anwendung der Nachfolgeroperation gebautes System von Entitäten (ausgehend von der 0) generiert, so ermöglicht dieses einen Ausgangspunkt für unterschiedliche Theorien; wie beispielsweise die der Algorithmen, der rekursiven Funktion oder überhaupt das gesamte numerische System der modernen Berechnung (*computational life*).

Durch seine Leistungen hinsichtlich der Axiomatisierung der Arithmetik - und Russells Feststellung dass diese bezüglich jeglicher infiniten Progression kompatibel ist - wird die (potenzielle) Anwendung der Zahlen weiter gefestigt und ermöglicht. Denn nun kann dieses Zahlensystem, das gewisse Strukturen aufweist, exemplarisch appliziert werden überall dort, wo analoge Strukturen sich bemerkbar machen (welche nicht nur für Zahlen, Vermessungen oder bestimmte Quantitäten relevant sind). Da diese Struktur nämlich, als Medium für das Beweisen von Resultaten dient. (Tiles, S. 152)

Die Wichtigkeit Peanos Leistungen findet aber nicht zuletzt in der programmatischen Erklärung der *Principia Mathematica* ihren Ausdruck, wo die Grundlagen der Mathematik durch mathematische Behandlung, den Gegenstand der Arbeit bilde.

Letztere verbinde die ‚Forschungsrichtung‘ der Analysis und der Geometrie (in der Formulierung und Systematisierung der Axiome ihrer „Meister“), sowie andere Bereiche (u. a. in Cantors Werk) wie die Mengentheorie.

Das zweite Gebiet, sei aber die symbolische Logik.

So erlangte diese nach einer „notwendigen Entwicklungsperiode“, erst durch Peano (und den Vertretern seiner Lehre), die „technische Verwendbarkeit“ und „logische Bündigkeit“.

Diese Ergebnisse seien wesentlich für die Entwicklung eines mathematischen Instrumentariums zur Untersuchung der Grundlagen der Mathematik (wie sie zu jenem Zeitpunkt stand). (PM, S. 1)

Ihm seien nicht sosehr besondere logische „Entdeckungen“ zuzuschreiben, auch bildeten nicht die einzelnen Merkmale seiner Schreibweise das Wichtigste seiner Leistungen. Und wo diese dennoch „ausgezeichnet“ waren, so sei sein Verdienst tatsächlich gewesen, als Erster die symbolische Logik von der „ungebührlichen Beeinträchtigung“ der algebraischen Formen befreit zu haben, und ferner zeigte, wie jene Symbole zu einem „brauchbaren“ Hilfsmittel in der Forschung werden kann. (PM, S. 5)

Im Werk *Principia Mathematica*, sei man auch in der Bezeichnungsweise „soweit als möglich Peano gefolgt“, und in manchen Fällen durch andere Symbole ergänzt (solche von Schröder oder Frege).

Die Bildung neuer Zeichen, beschränkte sich auf jene von bisher nicht dargestellten Begriffen. (PM, S. 6)

Peanos Gebrauch von Punkten statt Klammern und viele andere seiner Zeichen, habe man „übernommen“. Überhaupt, die Symbolik des Werks „nach dem Vorbild“ seines *Formulario mathematico* konzipiert. (PM, S. 11)

Durch das Heranziehen von Peanos Methoden „geleitet“, ging es an die Bildung bzw. Erneuerung einer Notation, welche sich für die Behandlung aller Bereiche der Thematik, als passend erweist.

So wurden Symbole nur insofern eingeführt, als dass sich ihre praktische Einsetzbarkeit für die Umsetzung der „unmittelbaren Zwecke“ der Beweisführung, als dienlich erweist.

An dieser Stelle wird die direkte Zweckmäßigkeit der symbolischen Darstellungsweise betont.

Sie habe sich mit „Notwendigkeit aufgedrängt“, denn sie ermögliche erst die Leistung einer Beweisführung. Sie habe nicht nur eine erklärende Funktion, sondern sich als das „Ergebnis wirklicher Praxis“ entwickelt.

So habe man die „allgemeine Methode“, welche die Anwendung der Symbolik leitet, Peano zu „verdanken“. (PM, S. 5)

Es ist auch unter diesem Gesichtspunkt, dass die Realisierung des peanoschen Projekts einer mathematischen ‚Formelsammlung‘ ermöglicht wurde. Wobei in diesem Werk „alle mathematische Disziplinen“ eine Darstellung im Logikkalkül finden sollten. (H & A, S. 2)

Die Verwirklichung dieses „ehrgeizigen“ Vorhabens, rühre von der äußerst vorteilhaften Wahl der Symbole her. Sie geschah in Anlehnung an der üblichen mathematischen Praxis, verwendete Abkürzungszeichen und weise dennoch eine leichte Lesbarkeit auf. Nicht zuletzt wegen des genialen Systems, Trennungspunkte anstelle von Klammern einzusetzen. (Bourbaki, S. 20)

Es sei, aber, darauf hingewiesen, dass Peano (im Gegensatz zu Frege) keine Einbeziehung der verwendeten logischen Schlüsse in seiner systematischen Formalisierungsarbeit vornahm – obwohl er sein Programm als ein logisches ansah, und für dessen Austragung der logische Inhalt mathematischer Sätze, sowie das abhängige Verhalten dieser zueinander, in der Begriffsschrift oder Formelsprache, genauer gezeigt werden sollte (als es in der Umgangssprache der Fall ist).

Denn sein Ziel war spezifisch, eine formalisierte Wiedergabe mathematischer Definitionen und Aussagen, ihre Anordnung in deduktiver Form, und eine gesamte mathematische Theorie auf der Grundlage von wenigen und unabhängigen Axiomen zu bilden. (Peano/Asser [Hrsg.], S. 7)

Überhaupt bestand die Rolle der mathematischen Logik, seiner Auffassung nach, darin, für die Mathematik, eine formalisierte Formelsprache oder „Ideographie“ zu entwickeln. Diese soll mit ihren Zeichen – solche für

mathematische Formeln aber auch logische Verknüpfungen – für die eindeutige Wiedergabe komplizierter Sachverhalte der Mathematik, geeignet sein.

Und so bilden in seinen Werken, nähere logische Fragestellungen nicht den Gegenstand der Untersuchung, sodass in weiterer Folge, die Formelsprache sogar als „mathematische Stenographie“ eingesetzt wird, für die exakte Formulierung von Sätzen und Definitionen. (Peano/ Asser [Hrsg.], S. 128)

Neben seiner Bemühung, eine Axiomatisierung der Arithmetik zu leisten, sieht man also Peanos Vermächtnis in der Notation überliefert (sie trägt auch, neben Russells, seinen Namen). So können selbst die „kompliziertesten“ Theoreme der Mathematik in einer äußerst genauen und häufig sehr „knappen“ Art, durch einzelne Formeln ausgedrückt werden.

Gestattet, so Kurt Gödel, durch den „eleganten und flexiblen Symbolismus“ des Peano. (PM, S. V).

3.2 Booles Algebra der Logik

Mit Boole (1815 – 1864), beginnt „endgültig“ die moderne Entwicklung der Logik. (Mates, S. 293). Denn unter den Voraussetzungen, dass nach Leibnizens Versuchen, eine Stagnation im Hinblick auf eine Formalisierung der Logik herrschte, wird er fallweise als der ‚wahre Schöpfer‘ der modernen symbolischen Logik angesehen. (Bourbaki, S. 18).

So gehen die Meinungen auseinander, bezüglich Booles Beitrags zur Logik. Nach Lewis und Langford, beinhaltet seine logische Methode selbst in ihrer ursprünglichen Form, einen gänzlich durchführbaren Logikkalkül. Sie schreiben seinen Leistungen eine große Bedeutung zu, und ernennen ihn, auf Leibniz folgend, zum zweiten Schöpfer der symbolischen Logik. (Kneebone, S. 53)

Er sei es gewesen, welcher für der von Leibniz gefassten Konzeption einer mathematischen Logik⁹, „erste Ergebnisse“ erzielte, und deren „gesamte spätere Entwicklung“ auf ihn zurückgehe. (Hilbert & Ackermann, S.1).

So war es sein Verdienst, die Logik nach einem algebraischen Symbolismus zu formulieren, womit er die Grundzüge der Algebra der Logik festlegte.

Er sah nämlich eine Ähnlichkeit des Aufbaus zwischen den logischen Beziehungen und den korrespondierenden Formeln der gewöhnlichen Algebra, wobei er keine vollständige Charakterisierung seines logischen Systems durchführte, sondern die Stellen aufzeigen wollte, in denen sich sein Mengenkalkül von der klassischen Algebra unterscheidet. (Mates, S. 294)

Ihm ging es in seiner Arbeit, wie er es im späteren Beitrag *The Calculus of Logic* sagte, um die Anwendung einer neuen und besonderen Form der

⁹ Nach Alonzo Church, ist der Terminus ‚mathematische Logik‘ als eine durch mathematische Methoden ausgearbeitete Logik zu verstehen (v. a. für die ‚formal axiomatischen‘ und ‚logistischen‘ Methoden). Dieser werde aber, gemeinsam mit der Bezeichnung ‚symbolische Logik‘ auch für Logiksysteme angewendet, welche durch eine weniger vollständig formalisierte mathematische Methode behandelt wurde, insbesondere für die Algebra der Logik, die auf Boole und De Morgan zurückgeht und in Schröders *Vorlesungen über die Algebra der Logik* eine umfassendere Ausarbeitung erlebte. (Church, S. 56)

Mathematik für den Ausdruck der mentalen Operationen im schlussfolgernden Denken. Wobei er von den ‚charakteristischen‘ Unterscheidungen seines Kalküls ausging. (CL, S. 1)

Booles „Leitgedanke“ war eine systematische Ausarbeitung der extensionalen Logik, wobei er von Operationen mit Mengen ausging (Vereinigung, Durchschnitt). In ihrer Anwendung, führte er auch Zeichen ein (für ‚Universum‘, Komplement, leere Menge) – und schuf somit eine Klassenalgebra¹⁰, welche unter seinem Namen bekannt ist. (Bourbaki, S. 18).

3.2.1 Hintergründe zur Bildung seines Systems

Aus Booles Beschäftigung mit der Analysis, und deren formalen Verwendung der Symbole, in Absehung von deren jeweiligen bestimmten Bedeutung, ging er daran die logischen Beziehungen einer mathematischen Gestalt anzupassen.

Boole verweist auf eine bestimmte Methode, welche zur gemeinsamen Grundlage sowohl seiner mathematischen, wie auch seiner logischen Arbeit zählte.

In der ‚Theorie‘ der symbolischen Algebra, so Boole, hänge die Gültigkeit der „processes of analysis“ nicht von der Interpretation der verwendeten Symbole, sondern ausschließlich von den Gesetzen ihrer Kombination. Ein jedes System (welcher Interpretation auch immer), welches die Gültigkeit der angenommenen Beziehungen nicht beeinflusse, sei zulässig.

So repräsentiere ein ‚Prozess‘ in einem bestimmten ‚Schema‘ der Interpretation die Lösung einer Frage über die Eigenschaft von Zahlen, in einem anderen aber die eines geometrischen Problems, in einem dritten die Lösung eines physikalischen Problems.

„This principle is indeed of fundamental importance“. (MA, S. 3)

¹⁰ Auch „Klassenkalkül“, und er „geht bereits auf Boole zurück“. (H & A, S. 57)

Im Beitrag „*On a General Method in Analysis*“¹¹, präsentiert er sein Projekt im Voranstellen ebendieses grundlegenden Prinzips einer analytischen Methode (die auch als „calculus of operations“ oder „method of the separation of symbols“ bekannt sei) wobei er die Definition von Gregory zitiert.

So gäbe es in der gewöhnlichen Algebra Theoreme, die scheinbar nur für Symbole welche Zahlen repräsentieren, als wahr bewiesen wurden, tatsächlich aber eine viel weiter verbreitetere Anwendung zuließen. Solche Theoreme hingen nur von den Kombinationsgesetzen denen die Symbole unterliegen, ab, und seien deshalb für alle Symbole wahr, welcher Art auch immer, die den selben Gesetzen der Kombination unterliegen. (Kneebone, S. 51)

Es sei auch die Eigentümlichkeit eines ‚wahren Kalküls‘, eine solche Methode zu sein, welche auf das Einsetzen von Symbolen beruht, deren „laws of combination“ bekannt und allgemein sind, und deren Ergebnisse eine übereinstimmende Interpretation erlauben.

Dass den bestehenden Formen der Analysis eine quantitative Interpretation zukommt, sei lediglich ein Ergebnis der Bedingungen unter welche diese Formen bestimmt wurden, diese sei aber nicht als universale Bedingung der Analysis auszubilden.

Auf das Fundament dieses allgemeinen Prinzips, beabsichtige er „the Calculus of Logic“ aufzubauen. Für diesen räume er einen Platz inmitten der ‚anerkannten Formen‘ der Mathematischen Analysis ein, von der Tatsache abgesehen, dass dieser Kalkül in seinem Gegenstand und seinen ‚Instrumenten‘ für den Moment alleine stehen müsse. (MA, S. 4)

Das Vorhandensein ‚allgemeiner Ideen‘ im menschlichen Denken, mache Logik überhaupt möglich, so Boole.

Es ist die Fähigkeit der Vorstellung einer Menge, und deren einzelnen Bestandteilen einen gemeinsamen Namen zu geben.

¹¹ Auch: „Royal Society paper“, für welche er 1844 von der genannten Gesellschaft eine Auszeichnung erhielt.

Ferner, dass wir aus jeder erdenklichen Klasse von Objekten, durch einen „mental act“, solche, die einer bestimmten Klasse angehören, zu trennen, und sie vom Rest getrennt zu betrachten. Solches Trennen, oder ein ähnliches Verfahren des Wählens, können wir uns als wiederholbar vorstellen. Die Menge der verbleibenden Individuen kann weiters eingeschränkt werden, durch „mentally selecting“ jene unter ihnen, welche einer anderen angenommenen Klasse wie auch der genannten angehören.

Diesen Prozess, gemeinsam mit anderen Merkmalen der Unterscheidung könne man fortsetzen, und somit ein Individuum erreichen, das alle Eigenschaften besitzt die in Betracht gezogen wurden, das gleichzeitig aber Bestandteil jeder gezählten Klasse. (MA, S. 5)

Diese unterschiedlichen mentalen Operationen unterliegen nun in ihrer Durchführung bestimmten Regeln. So können Beziehungen zwischen ihnen genannt werden, ob bezüglich der Wiederholung eines bestimmten Vorgangs oder der Aufeinanderfolge verschiedener (oder eines anderen bestimmten).

So gelte beispielsweise, dass das Resultat von zwei aufeinanderfolgenden „acts“ nicht von der Reihenfolge abhängt in welcher diese durchgeführt wurden (Kommutativität).

Diese Regeln scheinen so offensichtlich zusein, dass sie unbeachtet bleiben, und unter den ‚notwendigen Wahrheiten‘ eingereiht werden. Er behaupte aber, dass wenn sie anders wären als sie es tatsächlich sind, würde sich nicht nur der gesamte „mechanism of reasoning“, sondern sogar die Gesetze und die Einrichtung des menschlichen Denkens überhaupt, wesentlich ändern. Eine Logik könnte zwar bestehen, aber sie wäre nicht mehr „the Logic we possess“. (MA, S. 6)

Auf diese elementaren Gesetze, die eines exakten symbolischen Ausdrucks fähig sind, bilde er die Methode seiner „*Mathematical Analysis of Logic*“.

Es soll dank dieser gelingen, für jede logische Aussage (ob einfach oder zusammengesetzt) einen genauen und gründlichen Ausdruck zu finden; die Auflösung der komplexesten Aussagensysteme gelingen (und nicht nur die

Konversionsregeln und der Syllogismus geschlossen); aber auch das Trennen eines Elements, wobei sein Wert durch den der verbleibenden Elemente gezeigt werden soll (samt der zusätzlichen Relation).

Jeder Prozess soll eine Schlussfolgerung darstellen, und jedes mathematische Ergebnis eine logische Ableitung ausdrücken

Und die Allgemeinheit seiner Methode soll in weiterer Folge, den Ausdruck einer beliebigen Operation des Denkens gestatten und somit, zu allgemeinen Theoremen der Logik führen, welche eine erhebliche Analogie zu den Theoremen der gewöhnlichen Mathematik aufweisen. (Boole, S. 6)

In „*The Mathematical Analysis of Logic*“, präsentiert Boole seinen logischen Kalkül, indem er einen aus der gewöhnlichen Algebra entlehnten Symbolismus anwandte, und den Ausdruck logischer Beziehungen durch Gleichungen vornahm.¹²

3.2.2 Merkmale und Bestandteile seines Kalküls

Er legt zunächst die Bestandteile seiner Notation fest.

So repräsentiere das Symbol 1, welches als jede denkbare Klasse von Objekten umfassend verstanden werden soll.

Wobei ein Individuum in mehr als einer Klasse sein kann (weil es mit anderen Individuen mehr als eine Qualität gemeinsam haben kann).

Zur Darstellung dieser individuellen Elemente von Klassen werden die Buchstaben X, Y, Z verwendet. Wobei ein X auf jedes Element einer Klasse angewendet wird, als Elemente dieser bestimmten Klasse.

Hinzu kommen die Symbole x, y, z . So bezieht sich das Symbol x auf irgendeinen Individuen oder Klassen enthaltenden Gegenstand und es wird

¹² Außer anders gekennzeichnet, ist die deutsche Übersetzung der Begriffe dem Boole-Beitrag der *Logik-Texte* von Berka & Kreiser entnommen. (S.,25 - 28)

vorausgesetzt, dass es aus diesem Gegenstand alle die X herausgreift, die er enthält.

Er versteht diese „Auswahlsymbole“ als Operatoren, weil sie die „mental operation of selecting“ all jener X die er enthält, darstellen; oder zumindest das Festsetzen auf alle X zum Ausschluss aller nicht- X .

Dieses Universum aller denkbaren Objekte („or unity“), ist für ihn die primäre und zugrundeliegende Konzeption, und so sollen alle untergeordneten Auffassungen von Klassen als von ihr geformt („by limitation“), verstanden werden, was nach dem angeführten ‚bestimmten Schema‘ geschehe. (CL, 1)

Wenn nun kein Gegenstand ausgedrückt wird, so wird angenommen, dass 1 (das Universum) der gemeinte sei. Also

$$x = x$$

dessen beide Termini die Auswahl aller X aus dem Universum, die es enthält bedeuten.

Das Symbol $x1$ (oder kürzer x) bezeichnet also die Anwendung des ‚Operators‘ x auf das Universum, d.h. die Klasse X , deren jedes Element ein X ist.

Es geht hervor, dass das Produkt xy eine Darstellung der sukzessiven Auswahl der Klasse Y , sowie die Auswahl jener Individuen der Klasse X aus der Klasse Y , die in ihm enthalten sind. Es hat die gemeinsame Klasse von X und Y zum Ergebnis, deren Elemente, also, sowohl X wie Y sind. (MA, S. 16)

Die Leitung der Ergebnisse solcher Auswahlakte (welche nicht im abstrakten Sinn verstanden werden sollen) beruht auf Gesetze der Kombination und Sukzession.

So ist das Ergebnis eines Auswahlaktes unabhängig von der Klassifikation des Gegenstandes. Daher ist kein Unterschied wenn aus einer Gruppe von Objekten (als ein Ganzes), die Klasse X auswählen, oder ob wir sie in zwei

teilen und daraus separat alle X herausgreifen, um sie dann in einem Begriff zusammensetzen.

Es ist auch gleichgültig, in welcher Reihenfolge wir zwei sukzessive Auswahlakte durchführen. Das Ergebnis bliebe ebenfalls unverändert.

Und schließlich, nach Boole, bleibt das Ergebnis einer gegebenen Operation, wenn sie zweimal (oder beliebig oft) nacheinander durchgeführt wird, dem Ergebnis desselben Aktes, welcher nur einmal durchgeführt wird, gleich. So ist

$$xx = x$$

oder

$$x^2 = x$$

Wenn wir nun diese Operation n -mal durchführen, so haben wir im mathematischen Ausdruck

$$x^n = x$$

Aus der Betrachtung der Natur der gedanklichen Operationen, werde ersichtlich dass diese Gesetze erfüllt („satisfied“) seien. Und weil sie des mathematischen Ausdrucks fähig sind, werden sie somit „the basis of an interpretable calculus“. (CL, S. 1f)

In symbolischer Form¹³, lauten diese Gesetze

$$x(u + v) = xu + xv \quad (1)$$

$$xy = yx \quad (2)$$

$$x^n = x \quad (3)$$

Und sie reichen für die Grundlegung eines Kalküls aus. Es sind diese, welche er als die fundamentalsten Gesetze („which are never violated“) eingangs betonte. (MA, S. 5)

¹³Das v setzt er als „auxiliary symbol“ zur Partikularisierung ein. Es wird im jeweiligen Satz determiniert (d. h. es bleibt unbestimmt, außer dass es nicht leer sein darf). Denn in allen Fällen, so Boole, deutet ein Unterschied der Form auch einen Unterschied in der Interpretation an bezüglich dieses Hilfssymbols, und jede Form ist einzeln interpretierbar. (MA, S. 23)

Das erste zeigt an, dass die Auswahlssymbole distributiv sind (hier stellen $u + v$ den „ungeteilten Gegenstand“, und u sowie v dessen „Teilkomponenten“, dar). Das zweite, dass sie kommutativ sind. Da sie die Eigenschaften mit den Symbolen der Quantität gemeinsam haben, so können in diesem System alle Verfahren der gewöhnlichen Algebra angewendet werden.

Es ist nur das dritte Gesetz, „index law“ genannt, welches den Auswahlssymbolen eigentümlich ist, und für dieses System von großer Wichtigkeit, weil es eine Zurückführung der Ergebnisse auf Formen, die für eine bestimmte Interpretation geeignet sind, erlaubt. (MA, S. 17)

Wenn beispielsweise die Klasse X als das Universum umfassend angenommen wird, dann resultiert – was auch immer die Klasse Y ist – daraus

$$xy = y$$

Durch diese Anwendung, wird die Relation der Inklusion wie bei Leibniz ausgedrückt. Ähnlich, sieht dieser im multiplikativen Ausdruck das Idempotenzgesetz $AA = A$ gegeben. Und die Aussage „Jedes A ist ein B “, als durch die Identität $A = AB$ ersetzbar. (Bourbaki, S. 17)

Boole führt weiters das Zeichen für das Komplement ein, wobei $1 - x$ die Klasse nicht- X anzeigt, und die Verknüpfung von zwei Symbolen durch $+$, die Vereinigung von zwei Klassen (wobei die Klassen kein gemeinsames Element haben dürfen). Und durch die Multiplikation das Produkt xy , welches die gesamte Klasse bezeichnet, deren Elemente sowohl X als auch Y ist. (MA, S. 20f)

Durch die Operationen der Multiplikation und der Addition, findet aber eine „modification“ der Auffassung einer Klasse statt.

Das menschliche Denken habe aber die Fähigkeit die Beziehung der Gleichheit zwischen Klassen wahrzunehmen, womit er das „general axiom“ annimmt, welches alle drei Gesetzte verbindet.

Wenn also eine solche Gleichheitsbeziehung wahrgenommen wird, bleibt diese Relation „unaffected“ auch wenn beide Gegenstände gleichermaßen ‚modifiziert‘ werden in diesen durchgeführten Operationen. (CL, S. 2)

In all den Verfahren dieses Systems einbegriffen, besagt also dieses „einzige und genügende“ Axiom, dass an „äquivalenten Gegenständen durchgeführte äquivalente Operationen äquivalente Ergebnisse liefern“. (B & K, S. 27)

Es sei “the real foundation of all reasoning”, wobei ‘Form’ und ‘Charakter’ des Vorgangs durch die genannten „laws“ bestimmt werden. (CL, S. 2)

Und obwohl dieses System eine Anwendung auf die Verfahren der üblichen Algebra erlaubt, so weist Boole auf die Tatsache hin, dass sich dadurch die Interpretation einer Auswahlgleichung ändern kann.

So kann zwar der Ausdruck einer Wahrheit, durch eine „legitime Operation“, nicht negiert, wohl aber „eingeschränkt“ werden.

Es impliziere beispielsweise die Gleichung $y = x$, dass die Klassen X und Z , Element für Element äquivalent sind.

Wenn diese aber nun durch den Faktor x multipliziert werden, so würde dann die Auswahlgleichung

$$xy = xz$$

zwar den ‚legitimen‘ Schluss ausdrücken, dass die den Klassen X und Y gemeinsamen Individuen, auch den Klassen X und Z gemeinsam sind und umgekehrt. Diese Tatsache sei aber „weniger allgemein“ als jene in der ursprünglichen Aussage ausgedrückte Behauptung. (MA, S. 18f)

Er setzt nun die Mittel seines Systems ein, um eine Auslegung der Syllogismen durchzuführen und ihre Regeln darzustellen. (MA, S. 42)

Der allgemeine Charakter seines Systems, erlaube die Darstellung eines jeden denkbaren ‚Schemas‘ der Logik, wobei er zunächst eine ‚rein mathematische‘ Klassifikation vornimmt um später auf die entsprechenden logischen Unterscheidungen einzugehen.

So lassen sich die vier kategorischen Sätze durch Gleichungen ausdrücken, in den allgemeinen Formen (MA, S. 43)

$y = vx,$	oder	$y - vx = 0$	A
$y = v(1 - x),$	oder	$y + vx - v = 0$	I
$vy = vx,$	oder	$vy - vx = 0$	E
$vy = v(1 - x),$		$vy + vx - v = 0$	O

Und um die Konklusion zu gewinnen, wird nun eine ‚Elimination‘ (des Mittelbegriffs) durchgeführt.

Beispielsweise, der Syllogismus AE aus der 2. Figur (MA, S. 35)

$$\begin{array}{llll}
 \text{All Xs are Ys,} & x(1 - y) = 0, & \text{oder} & x = xy \\
 \text{No Zs are Xs} & zy = 0 & & \underline{zy = 0} \\
 & & & zx = 0 \\
 & & & \therefore \text{No Zs are Xs}
 \end{array}$$

Während er aber die Schlüsse der syllogistischen Formen (aus der jeweiligen Figur) darstellen wollte, fiel ihm dabei auf, dass in manchen Fällen, keine Schlussfolgerung möglich war. Sodass die letzte Gleichung zwei bestimmte Formen annahm. Wie sich herausstellen sollte, hing das vom Vorhandensein bzw. Abwesenheit des Mittelbegriffs, ab.

In den Syllogismen, wo kein Schluss möglich war, konnte das Resultat der Elimination in manchen Fällen, auf die Gleichung $0 = 0$ reduziert werden.

In anderen Fällen, war aber eine solche Reduktion nicht möglich (auch nicht nach Anwendung der Transformation oder Konversion).

Boole bemerkt, dass der mathematische Umstand der Nicht-Reduzierbarkeit der letzten Gleichung auf die Form $0 = 0$, eine adäquate Darstellung des logischen Umstands von der Abwesenheit eines ‚Vergleichsmediums‘ in den gegebenen Prämissen, sei.

Diese Auffälligkeit (durch die quantitative Behandlung eruiert), sei zuvor nicht erkannt worden (im Nachwort wird er später einräumen, dass aus De Morgans Bezeichnungsweise diese Unterscheidung ebenfalls hervorgehen würde, weshalb er somit den Anspruch einer Entdeckung zurückziehe).

Es ist dank des mathematischen Ausdrucks, dass dieses ermöglicht wurde.

Es werde ebenfalls bewiesen, dass es Kombinationen von Prämissen gibt, worin ein „medium of comparison“ gänzlich fehlt. (MA, S. 41)

Sollte ein Mittelbegriff doch vorhanden sein, so sei die Bedingung dass seine Quantifikation in beiden Prämissen zusammen, seine Quantifikation als ein einzelnes Ganzes übertreffen soll als notwendig für eine gesetzmäßige Schlussfolgerung, durch De Morgans Darstellungen gezeigt.

Dies sei auch das wahre Prinzip des Syllogismus - betrachtet vom Standpunkt der Arithmetik aus. (MA, S. 42)

Was die quantitative Behandlung betrifft, so betont Boole, dass die Interpretation der Symbole seines Kalküls nicht von einer quantitativen Auffassung abhängen, obwohl uns diese zu den quantitativen Bedingungen der Schlussfolgerung führen können (v. a. in der Anwendung auf den Syllogismus). (CL, S. 1)

Kraft des Prinzips, so Boole, dass eine Aussage entweder wahr oder falsch ist, kommen jedem Auswahlsymbol im Ausdruck einer hypothetischen Aussage, ausschließlich die Werte 0 oder 1 (die einzigen quantitativen Formen eines Auswahlsymbols). Es sei nun möglich, von der Theorie der Wahrscheinlichkeiten ausgehend (welche gänzlich quantitativ ist), ein System zu bilden, dessen Methoden und Verfahrensweisen in der Behandlung von hypothetischen Aussagen, jenen ähnlich sind, welche hier angewendet wurden. Die zwei Systeme der Auswahlsymbole und der Quantität schwanken, nämlich, in den ‚Punkten‘ 0 und 1. Er sieht darin angedeutet, dass die bedingungslose Wahrheit (der kategorischen Aussage) und die wahrscheinliche Wahrheit, zusammentreffen und die kontingente Wahrheit (der hypothetischen Aussagen) bilden.

Boole fügt hinzu, dass die ‚allgemeine Doktrin‘ der Auswahlsymbole (das grundlegende Prinzip seiner Methode, wie oben erläutert), von einem quantitativen Ursprung unabhängig sei. (MA, S. 82)

Und wo die Logik mit einer quantitativen Vorstellung behandelt werden kann, so habe sie es dennoch mit einem ‚tieferen‘ System von Relationen zu tun. (MA, S. 1)

Er geht, also, von der Interpretation der kategorischen Aussagen (des Syllogismus) zu den hypothetischen über.

In diesen stehen nicht mehr Objekte und Klassen von Objekten in Betracht, sondern die Wahrheit der elementaren Aussagen, welche in den Termen der hypothetischen Prämissen ‚verkörpert‘ sind.

Die Symbole X , Y , Z stellen Aussagen dar, und das hypothetische Universum, 1 , soll alle denkbaren Fälle umfassen. Das Symbol x (verbunden mit einem Element, das solche Fälle ausdrückt), wählt nun jene Fälle, wo die Aussage X wahr ist.

In der Betrachtung einer Aussage, seien nur zwei Fälle denkbar. Nämlich, dass sie entweder wahr (als $x1$ oder x dargestellt) oder falsch ist ($1 - x$).

Diese zwei Fälle bilden gemeinsam das ‚Universum der Aussage‘.

Der Umfang dieses ‚hypothetischen‘ Universums, hängt nicht von der Zahl der der Fälle die in Betracht gezogen werden, ab. Denn die Summe der Auswahlsymbole (zum Ausdruck aller denkbaren Fälle) wird immer „unity“ sein. (MA, S. 49)

Beispielsweise soll ausgedrückt werden, dass entweder die Aussage X wahr ist, oder die Aussage Y wahr ist. Diese Behauptung, so Boole, würde gleichzeitig bedeuten, dass es nicht wahr ist, dass beide falsch sind.

Der Auswahl Ausdruck für beide (dass sie falsch sind) ist $(1 - x)(1 - y)$, und die benötigte Gleichung,

$$(1 - x)(1 - y) = 0$$

oder

$$x + y - xy = 1$$

Boole sieht hier die disjunktive Aussage im ausschließenden Sinn. (MA, S. 51)

Diese Auffassung Booles wurde zum Gegenstand einer Diskussion. Nicht überall stimmte man mit der Auffassungsweise der disjunkten Vereinigung (ob von Klassen oder Aussagen) überein.¹⁴

So vertrat W. S. Jevons (welcher ebenfalls an der Ausarbeitung der Algebra der Logik beitrug), in der Frage, ob die Alternative einer disjunktiven Aussage ‚koexistieren‘ können oder nicht, die Meinung, dass dieses möglich sei. (Jevons, S.197).

Und nach Frege, habe Boole mit der Hinzufügung dieser Bedingung zur „Leibnizschen Bedeutung“ des $A + B$, tatsächlich einen „Rückschritt“ gegen diesen gemacht. Und andere, darunter Jevons und Schröder seinen ihm „hierin mit Recht nicht gefolgt“. (NS, S. 11)

3.2.3 Aussagenlogik der Secondary Propositions

Ein vollständiger Aussagenkalkül wurde in der booleschen Algebra der Logik nicht konzipiert, so Church, jedoch sei ein vorläufiger Entwurf in seiner Lehre von den „Secondary Propositions“, beinhaltet. (Church, S. 156)

Diese *secondary propositions* betreffen nun Aussagen, welche wahr oder falsch sind, sie sind bzw. auf diese bezogen. (Ausführungen aus *The Laws of Thought*, S. 159ff)

Und wo *primary propositions*, Relationen von „things“ ausdrücken,

¹⁴ Er erachtete die einschließende Disjunktion aber für darstellbar in seiner Methode Boole, beispielsweise in seinen Ausführungen über die *Secondary Propositions*. (s. Darstellung auf S. 61)

so sei es ebenfalls möglich Aussagen selbst zum Gegenstand der Betrachtung zu machen und unserem Urteil bezüglich dieser, Ausdruck zu verleihen.

Ein jeder solcher Ausdruck bilde, so Boole, eine *secondary proposition*. Diese Aussage sei entweder wahr oder falsch. Und jede dieser Behauptungen sei eine *secondary proposition*.

Sie beinhalten ebenfalls alle Urteile welche wir zum Ausdruck einer Relation bzw. Bedingung zwischen Aussagen anwenden.

Dazu gehören konditionale und die ‚meisten‘ disjunktiven Aussagen; wobei diese verknüpften Aussagen wiederum zusammengesetzt sein können. (LT, S. 160)

Eine solche Verbindung zwischen Aussagen sei nicht willkürlich und bedeutungslos, sondern „definite“, und sie beziehe sich immer auf die Wahrheit bzw. Falschheit der jeweiligen Aussage. (LT 161)

Die gedanklichen Operationen, welche den formalen Gesetzen unterliegen, haben in beiden Fällen den ‚identischen‘ Ausdruck. So auch identisch, die mathematischen Verfahren, die auf jene Gesetze gründen.

Weshalb die Methoden des ersten Falls in den neuen Anwendungen des zweiten, erhalten bleiben.

Und obwohl diese Gesetze und Verfahren der Methode unverändert bleiben, so sei zu beachten, dass die Regel der Interpretation, den neuen Bedingungen anzupassen ist.

Denn die Klasse von Dingen soll nun durch Aussagen ersetzt werden, und anstelle der Relationen zwischen Klassen und Individuen, kommen jetzt die Verbindungen von Aussagen oder ‚Fällen‘ („events“) in Betracht.

Und obwohl sich die beiden Systeme bezüglich der Tragweite und der Interpretation unterscheiden, so bestätigt Boole wiederholt die „harmonious analogy“, welche er zwischen den beiden Theorien hergestellt sieht. (LT, S. 162)

Anders als im früheren Aussagenkalkül, wo er jeder Aussage die Menge der Fälle zuordnet in denen sie wahr ist - führt er an dieser Stelle, für die

Untersuchung der Verbindung zwischen den *secondary propositions*, die Konzeption der Zeitmomente („idea of time“) ein.

So macht Boole die Beobachtung, dass es sich bei den *primary propositions* um „substantive“ Relationen, und bei den *secondary* um eine der „coexistent“ Wahrheit oder Falschheit, handelt.

In der Aussage „If the proposition X ist true, the proposition Y ist true“, sei die zweifellose Bedeutung sichtbar, dass die Zeit in welcher die Aussage X wahr ist, die Zeit sei in welcher die Aussage Y wahr ist.

Und obwohl es sich hier auch um eine Relation der „coexistence“ handelt welche die Bedeutung der Aussage ‚erschöpfen‘ mag oder auch nicht, so sei sie dennoch eine Relation welche mit der (Tat der) Behauptung („statement“) der Aussage einhergeht („really involved“). Ferner, dass sie all den Zwecken der logischen Schlussfolgerung genügt. (LT, S. 163)

Diese Auffassung der Zeitkomponente sei auch von der gewöhnlichen Sprache gebilligt. So gäbe es Aussagen, welche eine Wahrheit ausdrücken, die von einem bestimmten Abschnitt oder Umständen unabhängig ist (wie die Sätze der Geometrie), und andere, welche kontingente Relationen ausdrücken.

Beide Sprachformen ‚manifestieren‘ eine gemeinsame Abhängigkeit von dieser Idee der Zeit, in dem einen Fall, als auf einer endlichen Dauer beschränkt, im anderen als sich in die Ewigkeit erstreckend.

In diesem System bezeichnen nun die Buchstaben X, Y, Z die „elementary propositions“ über welcher eine Behauptung bezüglich ihrer Wahrheit oder Falschheit gemacht werden soll, bzw. einen Ausdruck über die Beziehungen in welcher sie stehen (in der Form einer *secondary proposition*).

Weiters die Buchstaben x, y, z., welche hier ebenfalls als gedankliche Operationen zu verstehen sind.

So soll x die Darstellung der gedanklichen Tätigkeit sein, durch welche die Betrachtung auf jenen Abschnitt („portion“) der Zeit gelenkt wird, wo die

Aussage X wahr ist, und dieses bedeutet in ihrer Behauptung, dass x die Zeit anzeigt in welcher die Aussage X wahr ist.

In der Anwendung der Verknüpfungszeichen, bezeichnet $x + y$ die Summe („aggregate“) jener Zeitmomente in welcher die aussagen X bzw. Y wahr sind (wobei diese Zeitabschnitte von einander vollkommen getrennt sind).

Ähnlich soll $x - y$ den übrig gebliebenen Rest der Zeit anzeigen, wenn wir vom Zeitabschnitt wo X wahr ist, jenen (bereits vorausgesetzt) inkludierten Zeitabschnitt wo Y wahr ist, wegnehmen.

Es soll weiters in $x = y$, die Zeit in welcher die Aussage X wahr ist als identisch mit jener wo Y wahr ist, verstanden werden.

Es soll x (usw.) das „representative symbol“ der Aussage X (usw.) genannt werden. (LT, S.165)

In diesem System, repräsentiert das Zeichen 0 „nothing“, jedoch bezüglich des Zeitelements. Und 1, sei das Universum bzw. die Gesamtheit der Zeit in welcher die Rede („discourse“) stattfindet oder zu dieser in irgendeiner Beziehung steht. Wie in den *primary propositions*, ist dieses Universum auf einen kleinen Teil des eigentlichen Universums der Dinge begrenzt (und teilt manchmal auch dessen Extension). So kann die Beschränkung aus einem Tag oder dem vergehenden Moment bestehen, aber auch die gesamte Zeitdauer beinhalten. Im wörtlichen Sinne, so Boole, kann es ‚unendlich‘ sein. Und außer es wird eine Einschränkung – ob ausdrücklich oder implizit – ausgesprochen, so habe man das Symbol 1 der *secondary propositions* als die Ewigkeit („eternity“) zu verstehen (selbst in ihrer Interpretation des primären Systems als das tatsächlich existierende Universum). (LT, S.166f)

Die Aussage „The Proposition X ist true“ wird durch

$$x = 1$$

ausgedrückt.

Und für „The Proposition X is false“,

$$x = 0$$

So zu verstehen, dass innerhalb der (zeitlichen) Grenzen wo unser Ausspruch stattfindet, es keinen Zeitabschnitt gibt wo X wahr ist. (LT, S.169)

Hier wird $1 - x$ den Zeitabschnitt bezeichnen, wo die Aussage X falsch ist.

Und xy jenen, wo beide Aussagen X und Y wahr sind.

Auch wenn ein neues Symbol wie z hinzugefügt werden soll, dann sind alle Prinzipien, auch in diesem Fall, anwendbar.

So bezeichnet xyz die Zeit, in welcher die Aussagen X, Y und Z gleichzeitig wahr sind; die Ausdrücke $(1 - x) (1 - y) (1 - z)$, die Zeit, wo alle gleichzeitig falsch sind. Ihre Summe würde die Zeit bezeichnen, wo alle entweder zusammen wahr oder zusammen falsch sind. (LT, S. 168)

So besagt beispielsweise die disjunktive Aussage „Either Proposition X is true or the proposition Y ist true“, dass nur eines von beiden wahr ist (Es sei auch darin überhaupt implizit gesagt, dass sich beide Aussagen gegenseitig ausschließen). Näher, die Zeit wo entweder die Aussage X wahr ist oder Y wahr ist, aber nicht beide.

Dieses wird durch $x (1 - y) + y (1 - x)$ ausgedrückt. So ergibt das die Gleichung

$$x (1 - y) + y (1 - x) = 1$$

bzw. $x (1 - y) + y (1 - x) = 0$

Die Disjunktion kann im einschließenden Sinne (oder wenn sie keine „absolutely disjunctive power“ hat) auch ausgedrückt werden, sodass die Möglichkeit einer gleichzeitigen Wahrheit der Aussagen X und Y nicht ausgeschlossen werden kann.

In diesem Fall, müsse man dem ersten Glied der Gleichung den Term xy hinzufügen. Sodass

$$xy + x(1 - y) + (1 - x)y = 1,$$

oder $x + (1 - x)y = 1$

als die gewünschte Gleichung hervorgehen wird. (LT, S. 170)

Zu den Überlegungen in diesem Teil seiner Arbeit, fügt Boole bezüglich der allgemeinen Analogie zwischen den *primary* und *secondary propositions*, eine Unterscheidung hinzu.

So gründe die erste Theorie auf die einfache Idee des Raums nicht in gleicher Weise, wie die zweite auf die Zeit.

Dieses würde ansonsten mit der Auffassung übereinstimmen, wonach Ausdehnung und Zeit als bloße Formen des menschlichen Verstandes gesehen werden, oder als Bedingungen des Wissens, welche die Beschaffenheit des Denkens allem auferlegt, was ein Gegenstand ihres Verstandes bildet. Diese Ansicht sei nicht zu veranschaulichen, und sie setzt voraus dass der ‚Ort‘, eine essentielle Kategorie der Existenz sei.

In seiner Auffassung der *primary propositions*, hingegen, habe er dem formalen Verfahren des schlussfolgernden Denkens, nicht als grundlegende Bedingung abverlangt, eine räumliche Manifestation der Dinge über welche gedacht wird, zu sein. Diese würden auch anwendbar bleiben, mit einer unveränderten Genauigkeit der Darstellung, selbst für Dinge außerhalb der Grenzen der wahrnehmbaren Extension.

Die Auffassung von Raum sei also nicht wesentlich für die Entwicklung der Theorie der *primary propositions*.

Anders bei den *secondary propositions*, wo er die Konzeption der Zeit für wesentlich hält. So bestehe keine Begründung, weshalb sich die Zeit wie sie sich dem menschlichen Denken offenbart, jemals geändert haben soll (was bezüglich des Raums vielleicht nicht immer der Fall sei).

In diesem Sinne bezeichnet also das Symbol 1 der *primary propositions*, das Universum der Dinge und nicht den Raum welchen sie einnehmen. Und = der Gleichungen, die Identität der Dinge, welche beide Bestandteile repräsentieren. Er wolle ebenfalls festhalten, dass in den *secondary propositions* 1 nicht für das Universum der Ereignisse, sondern die Ewigkeit in deren Folge von Momenten Erstere stattfinden.

Und das gleiche Zeichen der Identität, welches die logischen Bestandteile der entsprechenden Gleichungen verbindet – nicht, dass die Ereignisse welche diese Bestandteile repräsentieren, identisch, sondern dass die Zeiten ihres Vorfalls gleich sind. (LT, S. 175f)

3.2.4 Weitere Beiträge zur Algebra der Logik

Nach Peirce, hätte Booles logische Algebra eine solch „singular beauty“, sodass die Frage entstehe, ob sie nicht auf den gesamten Bereich der formalen Logik auszudehnen sei. Denn sie habe sich auf den einfachsten und unwesentlichsten Teil des Gegenstands beschränkt, welcher sich mit den absoluten Termen befasse (zu jener Zeit, allerdings, die einzig bekannte formale Logik). Er sei zuversichtlich, dass ein Kalkül mithilfe einer neuen Notation möglich sei, aber auch nützlich in schwierigeren Bereichen, v. a. in der ‚Untersuchung‘ der Logik. Hierzu soll auf die gewöhnlichen Symbole und Operationen der Algebra zurückgegriffen werden, wobei auch neue hinzukommen. Es sei, nichtsdestotrotz, eine Analogie zu beachten, welche in der Formulierung eine neue und erweiterte Definition der Zeichen mit sich bringe. (Peirce 1967, 3.45]).

Peirce ging weiter als Schröder im Hinblick auf eine Vereinfachung der Algebra der Logik, und zeigte wie alle Auswahlfunktionen von Boole durch den Gebrauch eines einzigen ‚primitiven‘ Zeichens ausgedrückt werden können.

Es hat die Bedeutung ‚weder...noch‘ (bzw. ‚nicht gemeinsam...‘)¹⁵. Diese Innovation blieb aber unbeachtet, bis Sheffer 1913 diese Möglichkeit einer Reduktion wieder entdeckte. (Kneale, S. 423).

Peirce bemerkte ebenfalls, dass relative Beziehungen in logischen Arbeiten nur geringe Behandlung erfahren hätten, bis De Morgan eine beachtliche Untersuchung der formalen Regeln vornahm, welche Relationen bestimmen. Sein System sei mangelhaft, dennoch wandte er eine nützliche algebraische Notation an, wobei

$X \cdot LY$ bedeutet, dass X eines der Gedankengegenstände sei, welche zu Y in Relation L stehen, oder dass es eines der L von Y

$X \cdot LMY$ bedeutet, dass X nicht ein L von einem M eines Y ist

$X \cdot (L, M) Y$, dass X weder ein L noch ein M von Y ist

LM' , ein L von jedem M . L, M ein L von nichts außer M 's

$L [-^1] Y$ etwas zu welchem $Y \cdot L$ ist. $1(L)$ non $-L$.

(Peirce 1967, 3.45]

Die Entwicklung De Morgans einer Algebra der zweistelligen Relationen, erfolgte durch seine Anwendung der Operationszeichen, die als Durchschnitt, Vereinigung, Komplement, relative Summe, relatives Produkt, und die Konversion beliebiger zweistelliger Relationen definiert wurden (Mates, S. 294).

Er trug aber diese Lehre nicht sehr weit aus. Am bekanntesten, wurde er für die Gesetze, die seinen Namen tragen¹⁶.

¹⁵ Dargestellt als der Peircesche Pfeil ($\downarrow$) bzw. Sheffers Strich ($|$).

¹⁶ Wonach "the contrary of an aggregate is the compound of the contrary of the aggregates; the contrary of a compound is the aggregate of the contraries of the components" und in der algebraischen Notation, jeweils als $1 - (x + y) = (1 - x) (1 - y)$ und $1 - xy = (1 - x) + (1 - y)$ ausgedrückt worden. (Kline, S. 1189)

Die Ausarbeitung der Relationenalgebra geht ebenfalls auf Peirce zurück. Wobei die Dualitätsrelationen

$$(\mathbf{C} A) \cap (\mathbf{C} B) = \mathbf{C} (A \cup B)$$

$$(\mathbf{C} A) \cup (\mathbf{C} B) = \mathbf{C} (A \cap B)$$

formuliert wurden. (Bourbaki, S. 18)

De Morgan arbeitete ebenfalls an einer Interpretation der aristotelischen Syllogistik, indem er von der Quantifizierung der Terme ausging.

Er zeigte, dass aus zwei partikulären Prämissen, ein gültiger Schluss möglich sei (was in der Syllogistik nicht der Fall war), wenn die Quantitäten der beiden Termini angegeben sind und aus ihrer Addition die Quantität des mittleren Begriffs überschritten wird. (Jevons, S.190)

So konnte er auch weitere gültige Formen des Syllogismus einführen.

Denn er definierte die Aussage als die Behauptung von einer ‚mehr oder weniger‘ Übereinstimmung, oder ‚mehr oder weniger‘ Nicht-Übereinstimmung zwischen zwei ‚Namen‘. Die Aussage drückt aus, dass von den Gegenständen des Denkens X s genannt, solche unter den Gegenständen Y s gefunden werden oder auch nicht. Es gibt Gegenstände, die beide Namen haben, oder nur eines aber nicht das andere, oder gar keinen. Gemeinsam mit jedem Namen X , nimmt De Morgan das konträre x (also nicht- X) hinzu und führt somit eine Duplizierung der traditionellen Aussageformen ein.

Durch die Wiedergabe der vier kategorischen Sätze in den Ausdrücken

$X)Y$ für A, XY für I, $X.Y$ für E und $X:Y$ für O,

führte er acht einfache Grundformen (nach der obigen Einführung der Paare). Diese machen aber nur eine unvollständige Angabe über die Relationen zwischen den zwei Termen. Dieses ist nur in komplexen Aussagen möglich, welche aus den (unabhängigen) einfachen Formen bestehen. De Morgan geht weiter, die daraus entstehenden Möglichkeiten zu bestimmen. (Kneebone, S. 22f)

Die Quantifikation erlaubte es ebenfalls zu zeigen, dass aus einer universalen Prämisse, ein partikulärer Schluss möglich sei, ohne dass die Existenz des Subjektbegriffs (es gibt ein A) angenommen wird.

Im Fall der partikulären Prämissen, zeigte De Morgan, dass aus „Most M 's are A 's“ und „Most M 's are B 's“, mit Notwendigkeit folgt, dass „Some A 's are B 's“.

In der quantitativen Schreibweise, heißt es, wenn es m von den M 's gibt; und a von den M 's sind in A , und b von den M 's sind in B , dann gibt es mindestens $(a + b - m)$ A 's, welche B 's sind. (Kline, S. 1189)

Bezüglich Booles Algebra, so schränkte er dessen Auffassung des Universums ein.

Er ging dabei von der Überlegung aus, dass die Schlussfolgerung häufig unter einer implizierten Einschränkung stattfindet, worin bestimmt wird, was möglich sei. Diese Einschränkung, welche auf die Gesamtheit der ausgedrückten Sätze zutrifft, müsse nicht ausdrücklich genannt sein.

Er nennt nun alles, was wir für möglich halten „the universe of discourse“, welches sehr limitiert werden kann. Eine Weise dieses zu bewerkstelligen wäre, nur jenes in Betracht zu ziehen, was tatsächlich stattfindet - und somit alles was nicht vorfällt, für unmöglich gehalten wird. (Peirce 1967, 3.174]

3.3 Gottlob Freges Neuerung

In ihrer Tragweite, so Bocheński, kann die *Begriffsschrift* Freges, nur mit einem anderen aus der Geschichte der Logik verglichen werden – Aristoteles *Erste Analytik*.

In diesem kompakten Werk, soll „zum ersten Mal“, ein auf axiomatische Grundlage, ein vollständig formalisiertes und widerspruchsfreies Logiksystem dargestellt worden sein.

Und wenn alle Historiker der Logik in „*einem* Punkte“ übereinstimmen sollten, so ist es, was die besondere Stellung von Freges (1848 – 1925) Leistungen betrifft. (Mates, S. 294-5)

So lautet es beispielsweise über dieses Werk, sie sei „the first really comprehensive system of formal logic“. (Kneale, S. 510)

3.3.1 Merkmale der Begriffsschrift

Aus dem Bedürfnis heraus die Grundsätze der Arithmetik durch logische Schlüsse allein zu begründen, ging der Gedanke der *Begriffsschrift* hervor.

Denn hierfür, musste die „Lückenlosigkeit der Schlusskette“ gewährleistet werden, zum Ausschluss anschaulicher Erkenntnisse.

Da sich aber die gewöhnliche Sprache für diesen Zweck als unzulänglich erwies (je komplexer die Sachverhalte wurden, insbesondere), entwarf er eine Bezeichnungsweise, welche die notwendige Genauigkeit zur Prüfung der Beweisschritte liefern konnte, sodass ein Aufdecken und die Zurückführung des Ursprungs unzulässiger Voraussetzungen ermöglicht wird.

Aus diesem Grund, mussten alle Ausdrücke ausgeschlossen werden, welche für die „Schlussfolge“ ohne Belang waren.

So betonte Frege die Wichtigkeit des ‚begrifflichen Inhalts‘ für seine Überlegungen, gar das „Wesen“ seiner Formelsprache, was auch die Namengebung seines ‚Büchleins‘¹⁷ erkläre.

Gleichfalls der Zusatz „Formelsprache des reinen Denkens“, da er nur solche Beziehungen ausdrückte, welche von der „besonderen Beschaffenheit der Dinge“ absehen. Die ebenfalls im Titel erwähnte arithmetische „Nachbildung“, beziehe sich eher auf die „Grundgedanken“, so Frege, als auf die „Einzelgestaltung“.

Und selbst wenn in seiner Schrift, „neue Wahrheiten“ nicht auftreten, so sieht er dennoch eine Förderung der Wissenschaft durch die Entwicklung seiner Methode. Denn er verstand seine Begriffsschrift als „Hilfsmittel“ für „bestimmte wissenschaftliche Zwecke“.

Eine Anwendung erhoffte er sich aber vor allem in den Bereichen, wo die „Bündigkeit der Beweisführung“ von Wichtigkeit ist. (BS, S. IX-XII)

Zunächst unterscheidet Frege, den Ausdruck eines Satzes, von der Behauptung, dass er wahr sei.

Einem Urteil wird das Zeichen ($\vdash$) vorangestellt.

Dessen waagerechter Strich ist als „der Umstand, dass“ oder „der Satz, dass“ zu verstehen. Dieser „Inhaltsstrich“ verbindet alle darauffolgende Zeichen zu einem „Ganzen“.

Und Frege betont, dass, was auf ihn folgt, immer einen „beurtheilbaren Inhalt“ haben muss. Die „Bejahung“, durch den senkrechten „Urtheilsstrich“ gekennzeichnet, bezieht sich nun auf dieses Ganze.¹⁸ (BS, S.1f)

¹⁷ Als solches von Frege genannt. (GGA, S. VI)

¹⁸ Im Tractatus Logico - Philosophicus, kritisiert Wittgenstein diese Auffassung. Freges (und Russells) Anwendung des Urteilsstrichs sei logisch „ganz bedeutungslos“. Er zeigt bei ihnen lediglich an, dass die Verfasser den als solchen bezeichneten Satz für wahr halten. Das Zeichen gehöre, wie beispielsweise die Nummer des Satzes, nicht zum „Satzgefüge“, denn ein Satz, so Wittgenstein, kann „unmöglich von sich selbst aussagen, dass er wahr ist“. (TL-P, 4.44)

Als Grundbegriffe, wählt Frege die „Bedingtheit“¹⁹ und die „Verneinung“.

Letztere, soll als den „Umstand“ verstanden werden, dass der Inhalt „nicht stattfindet“.

Da beurteilbare Inhalte ausschließlich wahr oder falsch sind, gehen aus der hypothetischen Satzverbindung der Gedanken A und B vier mögliche Fälle hervor:

- 1) A wird bejaht und B wird bejaht
- 2) A wird bejaht und B wird verneint
- 3) A wird verneint und B wird bejaht
- 4) A wird verneint und B wird verneint

Er bediene sich nur einer einzigen Schlussregel, wobei aus den Urteilen:

$\begin{array}{|l} \hline A \\ \hline B \end{array}$

und $\vdash B$

das neue Urteil

$\vdash A$

hervorgeht. (BS, S. 7)

Diese Schlussweise, soll zumindest überall dort, wo aus mehreren Urteilen ein neues abgeleitet wird, verendet werden. Und es können alle anderen Schlussarten auf diese zurückgeführt werden.

¹⁹ Frege interpretiert die Bedingtheit als philonisches Konditional, vor allem im Sinne des modus ponens, welche er als einzige Schlussweise wählt. (Kneale, S. 481) Aber er geht sogar so weit, in manchen Fällen, eine „ursächliche“ Verknüpfung anzunehmen, wobei die Folge „nothwendig“ aus der Bedingung hervorgeht. (BS, S. 28)

Wenn es möglich ist, so Frege, mit einer einzigen Schlussregel auszukommen, dann sollte das auch allein aus Übersichtlichkeitsgründen so gehandhabt werden.

Die Anwendung einer einzigen Schlussregel sei lediglich eine "Formfrage", die so, mit der „größten Zweckmäßigkeit“ entschieden wird (BS, 9).

Frege weist aber auch ausdrücklich auf die Möglichkeit hin, mittels der Negation, die Bedingtheit als „und“ auszudrücken, wie auch die umgekehrte Darstellung durchführbar sei. (BS, S. 12)

Später, bemerkt er, dass vom logischen Standpunkt aus, beide Verbindungen als „gleich ursprünglich“ zu erachten sind. Weil aber die hypothetische Satzverbindung mit dem „Schliessen näher zusammenhängt“, ist sie als die „ursprüngliche“ anzusehen, und der „Gedankenverein“ auf sie zurückzuführen. (NS 216)

Des weiteren, führt Frege die drei parallelen Striche zum Ausdruck der „Inhaltsgleichheit“ ein. Im Urteil

$$\vdash (A \equiv B),$$

hat das Zeichen A denselben „begrifflichen Inhalt“, sodass überall A an die Stelle von B gesetzt werden kann und umgekehrt. (BS, S. 15)

Die Funktion als den im Ausdruck „unveränderlich erscheinenden Theil“, und der ersetzbare das Argument ist, lässt den Ausdruck

$$\vdash \Phi (A)$$

bedeuten, „ A hat die Eigenschaft Φ “. Wobei A das Argument der unbestimmten Funktion Φ ist. (BS, S.16, 18)

In diesem Sinne, bestimmt Frege die „Allgemeinheit“ eines Urteils, wobei

$$\alpha$$

$$\vdash \bigcup \vdash \Phi (\alpha)$$

bedeutet, dass diese Funktion, ungeachtet der Argumente die man darin sehen könnte, eine „Thatsache“ sei.

Der deutsche Buchstabe, in die Höhlung des Inhaltsstrichs gesetzt, soll das „Gebiet“ abgrenzen, worauf sich die Allgemeinheit (durch den Buchstaben bezeichnet) bezieht: Ein lateinischer Buchstabe, hingegen, hat den Inhalt des ganzen Urteils als Gebiet. (BS, 19ff)

Im späteren Werk der *Grundgesetze der Arithmetik*, nimmt Frege Ergänzungen vor, trifft weitere Unterscheidungen (welche mit der Ausarbeitung seiner semantischen Theorie einhergehen), und führte die Konzeption des „Begriffsumfangs“ ein, für die Ausarbeitung seines Projekts, welche auf eine Fundierung der Arithmetik auf logischer Grundlage abzielte.

Folgen, so Frege, einer „eingreifenden Entwicklung seiner logischen Ansichten“. Die „alten Urzeichen“, welche in ihrer äußeren Form unverändert blieben, bekamen andere Erklärungen hinzugefügt (der Algorithmus dieser blieb auch weitgehend unverändert). So erscheint der frühere „Inhaltsstrich“ als „Wagerechter“ wieder. (GGA, S. X)

Frege ersetzte auch die drei parallelen Striche, zur Bezeichnung der Inhaltsgleichheit, durch das gewöhnliche Gleichheitszeichen. Denn er habe sich überzeugt, dass es in der Arithmetik „gerade die Bedeutung“ hat, welche auch er bezeichnen wollte. So gebraucht er das Wort ‚gleich‘ in derselben Bedeutung wie „zusammenfallend mit“ oder „identisch mit“ (wie es in der Arithmetik der Fall ist). Im Widerspruch zu dieser Entscheidung sieht er, übrigens, einen Mangel an der „Unterscheidung von Zeichen und Bezeichnetem“.

Besondere Hervorhebung, widmet er der Einführung eines neuen Zeichens zur Bezeichnung des „Werthverlaufs“ einer Funktion (in Form eines *spiritus lenis*). Vor allem in dieser, sieht er einen großen Fortschritt, da es eine „weit grössere Beweglichkeit“ erlaubt. Sie hat aber eine „grundsätzliche Wichtigkeit“ für sein System, weil er die „Anzahl selbst“ als einen Begriffsumfang definiert, und dieser, seiner Bestimmung nach, ein Wertverlauf ist.

Frege meint „ohne diese wäre also gar nicht auszukommen“. (GGA, S. IX)

Im vorausseilenden Werk der *Grundlagen der Arithmetik*, dessen Ausführungen in theoretischer Form dargelegt werden, geht Frege in diesem auf sein Unternehmen, der logischen Ableitung arithmetischer Grundsätze, ein (auf dieses Vorhaben wird im folgenden Hauptteil meiner Arbeit näher eingegangen).

3.3.2 Die Aufnahme Freges Leistungen

Es heißt in der *Einführung in die mathematische Philosophie* bei Bertrand Russell, dass „... Freges Arbeit ziemlich unbekannt blieb, wahrscheinlich vor allem wegen der Schwierigkeit seines Symbolismus“ (Russell, S.97).

Dass sich dieser mit Freges Entwurf befasste²⁰, trug dazu bei dass dessen Bedeutung überhaupt erkannt wurde (Church, S. 156). Über die *Begriffsschrift* merkt er an „ Trotz des großen Wertes dieser Arbeit war ich m. E. der erste Mensch, der sie überhaupt gelesen hat – und das über 20 Jahre nach ihrer Veröffentlichung“ (Russell, S. 25)

Dass Freges Schriften erst späte Beachtung erfuhren, gründet in der ‚unvermittelten‘ Einführung einer Vielzahl komplizierter Neuheiten, die ‚wenig Rücksicht auf menschliche Schwäche‘ zeigte. Weiters bewirkte die ‚abschreckende‘ Gestalt seines Symbolismus die begrenzte Verbreitung seiner Werke. (Kneale, S. 511)

²⁰ Bei seiner Mitwirkung in der gemeinsamen Ausarbeitung der *Principia Mathematica* mit A. N. Whitehead.

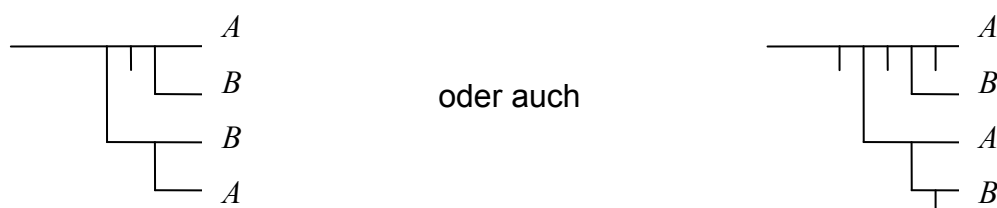
Seine Symbole seien „unglücklicherweise... wenig einprägsam, schreibtechnisch fürchterlich kompliziert und weit entfernt von der Praxis der Mathematiker“. ²¹

Nicht zuletzt also verantwortet seine komplizierte Schreibweise den Mangel an Beachtung seiner logischen Arbeiten seitens seiner Zeitgenossen. (Bourbaki, S. 20).

Frege aber erklärt die Vorzüge seiner Notation.

Die Nutzung der Begriffsschrift der „zweifachen Ausdehnung der Schreibfläche“ sieht er als Vorteil zugunsten der Übersichtlichkeit. Indem er die beurteilbaren Inhalte von oben nach unten und von links nach rechts aufeinander folgen lässt, „so werden die einzelnen Inhalte von einander deutlich getrennt und doch in ihren logischen Beziehungen leicht übersehbar“.

Als Beispiel für das ausschließende >oder< (in >Der Fall *A* oder *B* <), hätte man:



Der entsprechende Boolesche Ausdruck wäre $a + b = 1$ (bzw. in der „weitläufigeren“ Darstellung Schröders $ab_1 + a_1b = 1$)²².

Nun sind aber alle vorangegangenen Formeln „leere Schemata“ und man müsse bedenken dass bei der Anwendung an der Stelle der Variablen „ganze

²¹ So beschrieben, im Gegensatz zu Peanos Schreibweise, welche – obwohl in ihr die Quantifizierung einen eingeschränkten Ausdruck findet – einen deutlicheren Symbolismus habe, was eine praktischere Anwendung zulässt. Dieses hängt mit dem sich unterscheidenden Ziel Peanos zusammen, das „weiter und praxisnäher“ gesetzt war, die Formeln nicht nur der mathematischen Logik, sondern auch jene aller wichtigen Gebiete der Mathematik darzustellen. Beide überlieferten aber die wichtigsten Bestandteile der gebräuchlichen Notation, wobei es die Bezeichnungsweise von Russell und Whitehead – in der Principia Mathematica entwickelt – welche die größte Verbreitung fand. Sie vereinige „in glücklicher Weise die Exaktheit von Frege mit der Eleganz von Peano“. (Bourbaki, S. 20f)

²² Wobei hier, als Zeichen der Verneinung, Schröder den Buchstaben mit dem Index 1 versteht.

Formeln, vielleicht ausgedehnte Gleichungen, Congruenzen, Projectivitäten“ treten werden.

So würde diese gedrängtere, weniger raumverschwendende, Schreibweise bei Boole alsbald dem „Nachteil der Unübersichtlichkeit“ weichen, denn es würde „eine einzige oft überlange Zeile“ entstehen.²³

Seine Formelsprache würde dann „der japanesischen Verticalschrift“ huldigen, wenn sie eine bloße Darstellung logischer Formen wäre. Es liege aber „nichts Ungewöhnliches“ vor, wenn für die einzelnen Buchstaben ganze Formeln gesetzt gedacht wird. Arithmetische Gleichungen etwa. Diese lässt man in jeder arithmetischen Ableitung, der Übersichtlichkeit halber, von oben nach unten aufeinander folgen. Es werden die einzelnen Gleichungen nicht nebeneinander geschrieben. (BS, S. 103f).

Es ist nicht zuletzt auf die (im folgenden Kapitel noch zu erwähnende) Kritik Schröders an der Freges Begriffsschrift zurückzuführen, dass sein Entwurf wenig Beachtung erfuhr.

Nicht zuletzt wegen ihrer Komplexität und der zweidimensionalen Ausbreitung, sollte sich die Notation Freges nicht durchsetzen. So, im Unterschied zu anderen, linearen und kompakteren, Schreibweisen. Beispielsweise die Peano - Russellsche, welche weite Verbreitung fand. (Kneale, S. 520f)

So ist es, aber, die Einführung von genauen Unterscheidungen, welche sich für die Logik „von größter Bedeutung“ erweisen sollen. Herbeigeführt, durch die detaillierte „Exaktheit“ seiner Begriffsanalyse, welche für seine Ausführungen charakteristisch ist. (Boubaki, S. 19)

Seinen Leistungen werden auch die unterschiedlichsten Wirkungen zugeschrieben²⁴.

²³ Da Boole diese Verwendung seiner Formeln nicht im Sinn gehabt habe, wäre es ein „Unrecht“ ihm die resultierenden „leicht erkennbaren Nachteile zur Last zu legen“. Überhaupt gelten die Ausführungen Freges als Antwort auf die Kritik Schröders seiner Begriffsschrift

²⁴ Auch in der Metamathematik wird sein Einfluss festgestellt. Denn in seiner formalisierten Logik lieferte er ihr „grundlegendes Werkzeug“ durch seine Einführung quantifizierbarer Aussagevariablen für die Darstellung unbestimmter Relationen. (Bourbaki, S. 19)

So es sei Freges Verdienst die Unzulänglichkeit der traditionellen Logik für den logischen Aufbau der Mathematik aus ihren Grundlagen heraus aufzuzeigen, denn vor ihm (und Peano) habe „niemand eine restlose Analyse der in der Mathematik verwendeten logischen Schlußweisen vorgenommen“. (Hilbert & Ackermann, S. 66).

Während, nach Russell aber, Peano die „letzte Vollendung“ der *Arithmetisierung* der Mathematik darstellte, ist es Frege „als ersten gelungen“, die Mathematik zu *logisieren*. Die arithmetischen Begriffe (von den Vorgängern als ausreichend für die Mathematik gehalten), also, auf die Logik zurückzuführen. (Russell, S. 6)

Die bereits erwähnte Präzision und differenzierte Behandlung logischer Fragen mit begriffsanalytischer Gewichtung (die mit einer äußersten Strenge der Beweisführung einhergeht), sind es aber, welche eine maßgebliche Formgebung der modernen Logik erwirkten - nicht zuletzt durch die Bestimmung seines Einflussbereichs.

So erstreckt sich dieser bis auf die Ausarbeitung der *Principia Mathematica* von Whitehead und Russell hinaus, welche in „allen logisch-analytischen Fragen“, das Hauptsächliche, Frege „verdanken“. (PM, S. 6)

Überhaupt, beinhalte Freges System alles Grundlegende der modernen Logik, so dass das Jahr 1879 als ‚wichtigstes Datum‘ ihrer Geschichte angesehen werden kann (Kneale, S. 511)

4 Zwei Modelle, eine Gegenüberstellung

4.1 Freges Kritik am Booleschen System

Die Polemik aus der Gegenüberstellung beider Systeme, wie auch die negative Rezeption des Fregeschen Entwurfs, wurde nicht zuletzt durch Ernst Schröder angefacht, der, neben Boole, an der Konstruktion einer Algebra der Logik maßgeblich beteiligt, und in Deutschland deren wichtigster Vertreter war.

Zwischen Schröder und Frege entstand eine Rivalität, vor allem da Ersterer zum Zeitpunkt der Entstehung der *Begriffsschrift*, für zahlreiche bedeutende Publikationen bekannt, und bereits als etablierter Mathematiker galt.

Der minder bekannte Frege, hatte hingegen mit der Verbreitung seiner Veröffentlichungen weniger Erfolg, und Schröders Kritik seines Entwurfs zeigte sich hierfür keineswegs förderlich.

So machte ihm Schröder den Vorwurf, in der Entwerfung seines Systems, nicht auf die vorhandenen Leistungen der algebraischen Logik und ihre Notation zurückgegriffen, ja diese sogar ganz außer Acht gelassen zu haben.²⁵

Schröder sah in ihrem Inhalt keine wesentlichen Neuerungen. Zumindest nichts, was sich nicht schon in Booles Formelsprache finden ließe. Und überhaupt sei das Unternehmen des Fregeschen Projekts, durch seine neue Logik, die Arithmetik einer Analyse zu unterwerfen, absonderlich und unzeitgemäß.

²⁵ Zu diesem Vorwurf soll Frege später behaupten, dass „die boolesche Formelsprache in den mehr als zwanzig Jahren, die seit ihrer Erfindung verflossen sind, keineswegs so durchschlagende Erfolge erzielt, dass ein Verlassen der durch sie gelegten Grundlage von vornherein als thöricht erscheinen müsste, und dass nur eine Weiterentwicklung in Frage kommen könnte“. Und die von Boole behandelten Aufgaben, fügt er hinzu, scheinen „zum grössten Theil erst zu dem Zwecke eronnen zu sein, um mittels seiner Formeln gelöst zu werden“. (BS, S, 97)

Und hinsichtlich der Notation, so stehe diese in keinstenweise der Booleschen Schreibweise gegenüber, im Vorteil. (Sluga I, S. 374f).

Schröders Kritik der *Begriffsschrift* veranlasste Frege, sich in Beiträgen, wie „Über den Zweck der Begriffsschrift“, „Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift“ und „Booles logische Formelsprache und meine Begriffsschrift“ gegen diese Vorwürfe zu verteidigen.

Im Vergleich den er vorlegte, unterstrich er vor allem die unterschiedlichen Zielsetzungen beider Modelle, welche eine Verschiedenheit der Durchbildung und Ausdrucksweise hervorriefen.

So kritisierte Frege die Anwendungsweise arithmetischer Zeichen in den algebraischen Gleichungen der Booleschen Logik.

Ihr Gebrauch weise „grosse Abweichungen“ auf, und „es geht nicht an“ wenn in ein und derselben Formel, Zeichen „theils im logischen theils im arithmetischen Sinne“ vorkommen.

Eine solche „Bezeichnungsweise“ wie die Boolesche, könne er „nicht gebrauchen“, und er „musste daher andere Zeichen für die logischen Beziehungen erfinden“.

Über Booles Formelsprache sagt er, sie sei „eine Einkleidung der abstracten Logik in das Gewand algebraischer Zeichen; zur Wiedergabe eines Inhalts ist sie nicht geeignet“.

Seine Absicht, hingegen, sei, die von ihm eingeführten logischen Zeichen mit den „schon vorhandenen Zeichen der Mathematik zu einer einzigen Formelsprache zu verschmelzen“ (BS, S. 99f)

In seiner Beurteilung gehe Schröder von einer nicht-vorhandenen „unmittelbaren Vergleichbarkeit“ der Begriffsschrift mit der Booleschen Formelsprache aus. So gehe dieser von der Auffassung aus, dass weil aus der einen Formelsprache in die andere übertragen werden kann, beide Bezeichnungsweisen im wesentlichen nicht verschieden seien.

Aus der Darstellung desselben Sachgebiets durch unterschiedliche Zeichensprachen, entgegnete Frege, folgt aber „von selbst“, dass eine solche Umschreibung möglich ist. Aus dieser möglichen Übertragung folgt auch umgekehrt, dass ein gemeinsames Sachgebiet vorhanden ist. Eine solche gegenseitige Intelligibilität „beweist nichts“. Und die Zeichensysteme „können dabei von Grund auf verschieden sein“. (BS, S. 104)

Über die Frage der Ausführbarkeit bzw. dem Gebiet einer solchen Übertragung, habe Schröder lediglich in der „Rechnung mit Urteilen“ eine Entsprechung der Begriffsschrift in Booles Logik festgestellt. Er meinte, sie „entspräche nur dem zweiten Teil Booles“ (NS, S. 15). Sie habe aber keine Gemeinsamkeiten mit der „Rechnung mit Begriffen“. Dieses würde bedeuten, dass sie das Verhältnis der Unterordnung nicht auszudrücken vermag.

Frege führt einen Beweis zur Darstellung zum Gegenteil an.

So fasst er im Urteil (BS, S. 104f)

$$\begin{array}{|l} \text{---} x^4 = 81 \\ \text{---} x^2 = 9 \end{array}$$

die Unterordnung des Begriffes „Quadratwurzel aus 9“ unter den Begriff „vierte Wurzel aus 81“ als „alle Quadratwurzel aus 9 sind vierte Wurzeln aus 81“ auf.

Der Buchstabe x macht das ganze Urteil allgemein. In der Hinsicht nämlich, dass der Inhalt gelten soll, was für x auch eingesetzt wird.

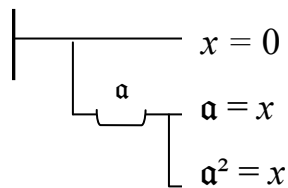
Es geht ein richtiges Urteil hervor wenn für x beispielsweise 1 gesetzt wird:

$$\begin{array}{|l} \text{---} 1^4 = 81 \\ \text{---} 1^2 = 9 \end{array}$$

Der Fall wo also $1^2 = 9$ und 1 nicht gleich wäre 81 ist falsch, wenn 1 nicht gleich 9 ist.

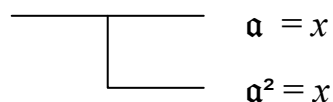
Nach Frege, muss aber die Allgemeinheit auf einen Teil des Urteils beschränkt werden.

So drückt das Urteil



aus: wenn jede Quadratwurzel aus x gleich x selber ist, so ist $x = 0$. (BS, S. 105)

Hier verwendet er für die Allgemeinheit deutsche statt lateinische Buchstaben und die Höhlung mit dem a deutet an, dass sich die Allgemeinheit nur auf den folgenden Inhalt erstreckt.



Diese Abgrenzung des Gebiets, auf das sich die Allgemeinheit beschränken soll, in der Darstellung des Verhältnisses der Unterordnung, sieht Frege als einen wichtigen Bestandteil seiner Begriffsschrift. Dieser „Kern der Sache“ wird jedoch in Booles Formelsprache „nicht erfasst“.

Denn, es konnte ein „organischer Zusammenhang“ zwischen den Begriffen hergestellt werden, was in der Booleschen „Künstelei“ im Übergang zwischen *primary* und *secondary propositions* nicht ermöglicht wird. (BS, S. 105)

So beherrscht seine Bezeichnungsweise „dank dem Allgemeinheitszeichen“ ein „etwas weiteres Gebiet“ als Booles Formelsprache, auch im Bereich „des vom Inhalte absehenden rein Logischen“. (NS, S. 52)

Diese Darstellung sei auch imstande den Unterschied zwischen Begriff und Einzeldingen zu zeigen, bei Boole ist sie „ganz verwischt“. Dessen Buchstaben bedeuten „immer“ Umfänge von Begriffen und „streng genommen nie Einzeldinge“ (NS, S. 19). Es ist ein „Mangel der boolschen Formelsprache“, wo Einzeldinge als solche nicht bezeichnet werden.

So wird beispielsweise in der Gleichung

$$A = A \cdot B$$

die Unterordnung des einen Begriffs unter dem anderen bezeichnet.

Wenn A der Umfang des Begriffs „Säugethier“ und B den von „Luftathmend“, so wird in der Gleichung ausgedrückt dass „alle Säugethiere sind luftathmend“. Die Umfänge der Begriffe „Säugethier“ und „luftathmendes Säugetier“ sind hier gleich.

Frege hält also fest, dass selbst wenn unter den Begriff nur ein einziges Ding fällt, so bleibt „immer noch ein grosser Unterschied“ zwischen ihm und dem Ding das er seinem Umfange nach unter sich fasst. Bei Boole, aber, fehlt der Ausdruck für das Fallen eines Einzelnen unter einen Begriff, das von der Unterordnung eines Begriffes unter einen anderen ganz verschieden ist. (BS, S. 98f)

Frege führt diese Schwächen auf Booles Einteilung der Aussagen.

In Freges Verständnis würden die *primary propositions*, einen Vergleich der Begriffsumfänge anstellen; und die *secondary propositions*, die „Beziehungen“ zwischen „beurteilbaren Inhalten“ ausdrücken. (BS, S. 98)

Sie sei auch eine mangelhafte Einteilung, da in ihr partikuläre Urteile²⁶ ungenügend repräsentiert werden und Existentialurteile „gar keinen Ausdruck“ finden. (NS, S. 15)

Bei der „in gekünstelter Weise“ durchgeführten Zurückführung Booles, der *secondary* auf *primary propositions* handle es sich ebenfalls um einen Vergleich der Umfänge von Begriffen, und Frege nennt die näher Bestimmung der *secondary propositions* als Klasse von Zeitmomenten in denen ein Satz wahr ist.

Anhand eines Beispiels, zeigt Frege, wie seiner Auffassung nach, eine Zurückführung in der Booles Algebra aufgefasst wird.

So fasse das hypothetische Urteil „wenn $x = 2$ ist, so ist $x^2 = 4$ “, den Fall der Unterordnung als die Klasse von Zeitmomenten in denen $x = 2$ ist, der Klasse von Zeitmomenten untergeordnet ist in denen $x^2 = 4$, auf. (BS, S. 99f)

Der Zusammenhang zwischen den „beiden Teilen“ Booles werde so „abgeschnitten“.

Gleichungen seines „ersten Teiles“ verwende er nicht als „Bestandteile“ von Gleichungen des „zweiten Teiles“. Dass er beide in keine „organische Verbindung setzt“ hänge, so Frege, in ebendieser „Hilfsvorstellung der Classe von Zeitmomenten“. (NS, S. 17)

So ist beispielsweise $A = B$ im ersten Teil ein Urteil. Als Bestandteil einer Gleichung im zweiten Teil, wie z. B.

$$(A = B) C = D$$

bedeutet $A = B$, jedoch, die Klasse von Zeitmomenten in denen der Inhalt des Urteils „ $A = B$ “ zu bejahen wäre.

²⁶ Boole verwendet aber das „auxiliary symbol“ v um eine Partikularisierung auszudrücken. Beispielsweise wird „Some Xs are Ys“ mithilfe dieser Variable als „ $v_x = v_y$ “ ausgedrückt. (MA, S. 32)

Dass der Übergang zwischen einer Art von Urteilen zu einer anderen „abgeschnitten“ sei führt Frege auf den Gebrauch der Zeichen in doppelter Bedeutung zurück.

Boole gebrauche seine Zeichen wie 0, 1, + usw. sowohl im logischen wie auch im arithmetischen Sinne. Ihre Bedeutungen gelten sowohl im ersten wie auch im zweiten Teil.

So drückt beispielsweise das Gleichheitszeichen in „ $= 1$ “ eine Bejahung aus (wo Frege den Urteilsstrich verwendet). Daneben hat es in Formeln wie beispielsweise $A=B$ eine „selbstständige Bedeutung“. (NS, S. 17).

Eine solche Abweichung kritisiert Frege, sie sei „doch so wesentlich“. (NS, S. 13)

Denn die Unterschiedlichkeit der logischen „Rechnung“ einerseits und der mathematischen andererseits, seien „so folgenreich“, dadurch dass Auflösungen der logischen bzw. algebraischen Gleichungen „kaum etwas...gemein hat“. (BS, S. 99)

Dies sei besonders im Symbol „1“ ersichtlich. Diese ‚Einheit‘ drücke für Boole den „Umfang eines Begriffs, wovon gerade die Rede“ sei. In der Arithmetik, aber, hat dieses Zeichen eine gänzlich andere Bedeutung.

In den *primary propositions*, werden für den Vergleich der Begriffsumfänge, die Variable durch „logische“ Addition und Multiplikation verknüpft.

Wenn also beispielsweise der Umfang des Begriffs „Dreieck“ bedeutet und den vom Begriff „Regelmäßig“, so ist unter der Verbindung

$$A + B$$

der Umfang des Begriffs „Dreieck oder regelmäßig“, die Summe also, zu verstehen.

Und weiters bezeichnet das „logische Product“ in der Verknüpfung

$$A . B$$

den Umfang des Begriffs „regelmäßiges Dreieck“

Die „Rechtfertigung“ Booles dieser Ausdrücke von Summe und Produkt, durch das „Bestehen“ in den Gleichungen,

$$\begin{array}{ll} A + B = B + A & A + (B + C) = (A + B) + C \\ A \cdot B = B \cdot A & A (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C \\ & A (B + C) = AB + AC. \end{array}$$

enthalte große Abweichungen von der Übereinstimmung mit den algebraischen Operationen der Addition und Multiplikation.²⁷

Es sei logisch dass, z. B.

$$\begin{array}{l} A = A \cdot A = A \cdot A \cdot A, \\ A = A + A = A + A + A, \end{array}$$

Dies gelte in der Algebra, jedoch, nicht allgemein. (BS, S. 98f)

Die Abweichung vom arithmetischen Sinn im Gebrauch der Zeichen, könne Boole aber nicht zum Vorwurf gemacht werden, so Frege, denn eine solche Verwendung von Formeln, wie sie ihm vorschwebte, beabsichtigte Boole nicht. Denn für diesen galt „die Zeichen der Mathematik durch einen formalen Teil“ zu vervollständigen (wobei es „unzweckmäßig“ wäre schon vorhandene Zeichen „unbenutzt zu lassen“). Seine Aufgabe sah er in der Aufstellung logischer Beziehungen, in einer Weise dass sie mit der mathematischen Formelsprachen zu „verschmelzen“ geeignet sind. (NS, S. 15)

Die Analogie zwischen den logischen und den arithmetischen Rechnungsarten hätten eine verwirrende Wirkung wenn sie in Verbindung gesetzt werden. Und da nach Frege die Boolesche Formelsprache nur in „gänzlicher Trennung“ von

²⁷ Boole war bewusst, dass sich die Interpretation einer Auswahlgleichung durch algebraische Verfahren ändern kann (obwohl diese auf sein System anwendbar seien). Er hatte darauf hingewiesen, dass eine Einschränkung der ‚Tatsache‘ stattfindenden würde, welche in der allgemeineren, ursprünglichen Aussage behauptet wurde. (MA, S. 18f, s. Darstellung auf S. 53)

der Arithmetik denkbar ist, sah er sich gezwungen neue Zeichen für die logischen Relationen einzuführen

Denn was die „Rechnung mit Urteilen“ betrifft, so habe er diese mit Boole tatsächlich gemein.

Er unterscheidet aber die „That des Urtheilens“ von der „Bildung eines beurtheilbaren Inhalts“ auf gänzlich andere Weise. Und es ist der „bedeutendste Unterschied“ seiner „Auffassungsweise“ von der Booleschen, dass er „nicht von den Begriffen, sondern von den Urtheilen“ ausgeht.(BS, S. 100f) ²⁸

Frege führt nun, umgekehrt, Booles *primary propositions* auf die *secondary* zurück.

Beispielsweise, fasst er die Unterordnung des Begriffs „Quadratwurzel aus 4“ unter den Begriff „4te Wurzel aus 6“ als „wenn etwas Quadratwurzel aus 4 ist, so ist es 4te Wurzel aus 16“:

$$\begin{array}{l} \text{┌} \quad \quad \quad x^4 = 16 \\ \quad \quad \quad \text{└} \quad \quad \quad x^2 = 4 \end{array}$$

Seine Darstellung der Urteile vermeide ein „Zerfallen“ in Booles zwei Teile, indem er das Urteilen der Begriffsbildung vorangehen lässt. Er, hingegen, stelle „das Ganze aus einem Gusse her“.

So „laufen“ Booles *primary* und *secondary propositions* „nebeneinander her“, der eine Teil wie ein „Spiegelbild“ für das andere, jedoch in „keiner organischen Verbindung“ mit ihm stehend. (NS, S.19)

Es gehe ebenfalls hervor, dass sich nicht alles, was er ausdrücken kann, in die Booleschen Zeichen übersetzen lässt, während die „umgekehrte Übertragung

²⁸ In diesem Zusammenhang, könnte der Ausspruch Booles in „*The Calculus of Logic*“, genannt werden, dass „antecedently to our recognition of the existence of propositions, there are laws to which the conception of a class is subject“. (CL, S. 1)

möglich ist“. Womit er die Meinung Schröders, die Begriffsschrift würde „nur dem zweiten Teile Booles“ entsprechen, als widerlegt sah.(NS, S. 15).

So lasse die Boolesche Algebra auch die Klassen- und Aussagenlogik ohne Verbindung.

Frege widersprach ferner der Auffassung, die Klassenlogik als primär der Aussagenlogik vorzuziehen.

Die Logik Booles interpretiere die gewöhnliche Algebra als Klassenlogik, indem die Buchstaben ihrer Gleichungen anstelle von Zahlen, Klassen repräsentieren; und die algebraischen Operationen der Addition bzw. Multiplikation als solche von Klassenprodukt und –summe verstanden werden. Die Zahlen „1“ und „0“ stehen für das Universum und die leere Klasse, beziehungsweise.

Diese Klassenlogik, wiederum, könne man als Aussagenlogik interpretieren, wenn nun die Buchstaben als Klassen von Momenten aufgefasst werden, in denen Aussagen wahr sind (wobei „1“ und „0“ die Klassen aller bzw. keiner Momente repräsentieren).

Somit habe man die Klassenlogik für primär und die daraus gezogene Aussagenlogik, für sekundär erachtet.

Für Frege gehen aber Aussagen (oder ‚Urteile‘) den Begriffen (und deren Klassen) voraus, womit die Aussagenlogik als primär und ‚fundamental‘ zu erachten wäre²⁹. (Sluga I, S. 385)

Frege betont immer wieder den grundlegenden Unterschied in seiner Begriffsschrift gegenüber Booles Logik, von den „Urteilen und deren Inhalten statt von den Begriffen“ auszugehen.

Wo für ihn die genau definierte hypothetische Verbindung von beurteilbaren Inhalten zur Grundlegung seiner Logik steht, hätte, andererseits, für Boole die Umfangsgleichheit eine ähnliche Bedeutung. So sagt er: „Das Bilden der Begriffe lasse ich erst aus den Urteilen hervorgehen“.

²⁹ Später in *Die Grundgesetze der Arithmetik*, überarbeitet Frege diese Ansicht, und versucht die Aussagenlogik mit der Quantifizierung gemeinsam zu entwickeln. (Sluga, S. 391)

Diese Auffassung Freges bildet einen wichtigen Punkt seiner Kritik an Booles Algebra. (Sluga I, S. 380)

Sie wird auch „priority principle“ genannt. Die Erkennung ihrer zentralen Wichtigkeit für Freges Verständnis seiner Logik jedoch, weichte dem besser bekannten „context principle“.

Es ist einer von drei Grundsätzen, die Frege in *Die Grundlagen der Arithmetik* darlegt.

So müsse nach der Bedeutung der Wörter nicht „in ihrer Vereinzelung“ sondern im „Satzzusammenhange“ gefragt werden. (GLA, S. X). Bei Frege wird dieses ‚Kontextprinzip‘ unter einem solchen Terminus aber nicht genannt.

Wenn also ein behaupteter Satz durch den Ausdruck eines Urteils eine Bedeutung hat; weiters, dass die Worte, die diesen Satz bilden, eine Bedeutung haben (was besagt dass sie Begriffe ausdrücken) — dann geht aus der Annahme, Urteile würden Begriffen vorausgehen, hervor, dass die Bedeutung der Worte auf die Bedeutung eines Satzes folgt.

Das *context principle* ist also die ‚logische Konsequenz“ des *priority principle* und könnte als dessen ‚linguistische‘ Übertragung angesehen werden.

Im Gegensatz zum *priority principle* aber wird es in späteren Abhandlungen von Frege nicht mehr explizit genannt. (Sluga I, S. 380)

In seiner Kritik an Booles Methode, ist unter dem Gesichtspunkt ebendieses Prinzips, dass sich Frege von der klassischen Auffassung der Beziehung zwischen dem Urteil und seinen Bestandteilen distanziert. (Sluga I, S. 380)

Denn bei Boole wie bei Aristoteles, werde die Begriffsbildung „durch Abstraction“ als logische „Urtätigkeit“ angesehen und das Urteilen bzw. Schließen in einem „mittelbaren oder unmittelbaren“ Vergleich der Begriffe bestünde.

Der Unterschied sei nur der, dass Aristoteles den Fall der Unterordnung, also „wo der Umfang des einen Begriffes den des anderen umschliesst“ in den

Vordergrund stelle, Boole aber auf den „Fall der Gleichheit der Umfänge“ Begriffe auf die anderen zurückführe.

Dass er sich „von der aristotelischen Logik weiter entfernt“ habe, erlaubte es seiner Begriffsschrift auf Booles Formelsprache, auch in der „Beschränkung auf reine Logik“, einen Vorsprung zu erhalten (NS, S. 16)

Von beiden unterscheide er sich in seiner „Auffassungsweise“, das Bilden der Begriffe erst aus den Urteilen hervorgehen zu lassen (BS, S. 101)

Frege verwirft die Methode, eine Komposition des Urteils aus Subjekt und Prädikat vorzunehmen.

So sagt er in §3 der „Erklärung der Bezeichnungen“ zu Beginn der *Begriffsschrift* ausdrücklich:

„Die Unterscheidung von *Subject* und *Prädicat* findet bei meiner Darstellung eines Urtheils *nicht statt*“.

Selbst wenn man eine solche Unterteilung in seiner Begriffsschrift würde vornehmen wollen, so würde sich herausstellen dass das ‚Subjekt‘ den ganzen Inhalt enthält, und das ‚Prädikat‘ nur den Zweck hat, diesen „als Urteil hinzustellen“. Von Subjekt und Prädikat, im gewöhnlichen Sinne also, kann an dieser Stelle „keine Rede sein“. Denn eine „solche Sprache“ hätte für alle Urteile nur ein einziges Prädikat, nämlich „*ist eine Thatsache*“. Diese ist seine Begriffsschrift worin das Zeichen (| —) „*ihr gemeinsames Prädicat für alle Urteile*“ ist. (BS, S. 2ff)

In der klassischen Auffassung, würde man das Urteil aus einem „Einzeldinge“ als Subjekt und einem „vorher gebildeten“ Begriff als Prädikat zusammenfügen. Er lässt umgekehrt den beurteilbaren Inhalt „zerfallen“ um so den Begriff zu gewinnen.

Prädikate, seien „nichts Vollständiges“, und „ein solches Bruchstück als etwas Ganzes“ zu behandeln, verantworte unnötige Schwierigkeiten und viele „unerquickliche Erörterungen“ die von einer solchen kompositorischen Auffassung hervorgehen. (NS, S. 18)

Sie verleiht, fälschlicherweise, den Ausdrücken eine selbstständige Bedeutung, denn nach Frege wird dieser erst im Kontext eines Satzes gewonnen.

Die Begriffsbildung, auf diesem Aristotelisch – Booleschen Wege, wäre also immer eine Frage der neuen ‚Kombination‘ (konjunktiv oder disjunktiv) von bereits gegebenen Begriffen.

Unter dieser Form der Begriffsbildung habe man sich ein als gegebenes System von Begriffen vorzustellen, oder im übertragenen Sinne ein ‚Netzwerk von Linien‘, worin die neuen Begriffe eigentlich bereits enthalten sind (Sluga I, S. 383)

Frege sieht in der bisherigen Logik eine enge Behaftung an „Sprache und Grammatik“, wie sie beispielsweise in der Subjekt – Prädikat Form auftritt. Er nimmt hingegen eine „Ersetzung“ dieser beiden Begriffe in Argument und Funktion vor.

Diese neue Einteilung in seiner *Begriffsschrift*, sagt Frege zuversichtlich, werde sich „auf die Dauer bewähren“. Und dass diese Auffassung eines Inhalts als Funktion eines Arguments eine begriffsbildende Wirkung hat, werde sich leichter erkennen lassen. (BS, S. XIII)

Es kommt an dieser Stelle die Rolle des *priority principle*, welches die zusammensetzende Auffassung von Bedeutung der Subjekt – Prädikat Urteile zurückweist, zum Vorschein.

Diese ‚Segmentierung‘ soll nicht nur eine neue ‚Terminologie‘ einführen und eine technische Hilfe sein, sondern der leitendende Gedanke für eine Sprache, die den Einschränkungen der Tradition entkommen soll. (Sluga I, S. 382)

Im Gegensatz zur Subjekt – Prädikat Sprache, die ihren beurteilbaren Inhalten eine einzige und bestimmte Struktur gibt, zeigt sie wie derselbe Inhalt in unterschiedlicher Weise analysiert werden kann. Diese neugewonnene vielseitige Anwendung sei es die eine leichtere Bildung neuer Begriffe ermöglicht. (Sluga I, S. 383)

Die Art der Zerlegung unterscheidet Frege vom Inhalt der Aussage. Beispielsweise im Fall von singulären Aussagen. So sagt Frege dass in einem solchen zusammengesetzten Gedanken, den die „hergebrachte Logik ein *singuläres Urteil*“ nennt, gilt die Bezeichnung ‚singulär‘ nicht für den „Gedanken schlechweg, sondern nur hinsichtlich einer besonderen Weise der Teilung“. So erscheint jeder der Teilsätze im Beispiel

» 1 ist grösser als 2« und » 1^2 ist grösser als 2«

aus dem Eigennamen » 1 « und einem ungesättigten Teil zusammengesetzt zu sein (und Entsprechendes gilt von den dazugehörigen Gedanken).

Es sei aber zu unterstreichen, dass ein Gedanke in verschiedener Weise aus Teilen zusammengesetzt erscheint, weil „ein und derselbe Gedanke oft in verschiedener Weise zerlegbar ist“. (NS, S. 218)

Dieses neue Argument - Funktion Analyse der Urteile habe Frege zur Entdeckung seiner quantifizierten Analyse allgemeiner Urteile geführt. (Sluga I, S. 383)

Nicht zuletzt ist es durch letztere dass „Begriffsbildungen, wie sie die Wissenschaft braucht“ darstellbar werden. Denn Booles „multiplicativen und additiven“ Verbindungen wären für diesen Zweck „verhältnismässig unfruchtbar“. (NS, S. 52)

Denn dank der Quantifizierung, können gänzlich neue Klassen definiert werden, dessen Grenzen mit denen bereits gegebener Klassen zusammenfallen. Weiters wies er auf die Definitionen der Begriffe ‚Gebiet‘; ‚Aufeinanderfolge in einer Reihe‘ sowie ‚Fortsetzung in einer Funktion‘.

Durch diese sah Frege den Vorteil seiner Begriffsschrift gegen die Boolesche Algebra verdeutlicht. (Sluga I, S. 383)

Die ‚Überlegenheit‘ des Fregeschen Systems im Vergleich zu Booles Algebra wird in ebendieser Innovation, prädikatenlogische Quantoren zum Binden freier Variable einzuführen, gesehen.

Überhaupt sei diese ‚ohne Übertreibung‘, „one of the greatest intellectual inventions of the nineteenth century“. (Kneale, S. 511)

Nicht so Schröder. Er räumte zwar ein, dass Booles Formelsprache im Hinblick auf Existentialurteile einen unzulänglichen Ausdruck hatte, sah aber keine besondere Leistung in Freges Quantorennotation. (Sluga I, S. 376)

4.1.1 Die Mängel Schröders „Gebietekalkül“ nach Frege

Das Unternehmen dieses ‚Gebietekalküls‘ geht auf Schröders Verwerfung der Booleschen Auffassung der Universalklasse zurück.

Er wollte zeigen dass so ein *universe of discourse* nicht allumfassend sein darf. Frege sah in diesem Versuch „üble Folgen“, die aus „allerlei Verschiebungen“ resultierten. (LU, S. 96)

Er untersuchte³⁰ diese Mängel und stellte daraufhin fest, dass ein solcher Gebietskalkül „von der Logik ganz getrennt“ werden müsste. (LU, S. 112)

Schröder gehe zunächst von einer Mannigfaltigkeit von Elementen aus. Und es wird eine beliebige Zusammensetzung solcher Elemente ein ‚Gebiet‘ dieser Mannigfaltigkeit genannt. Wobei als wichtigste Beziehung zwischen Gebieten, diejenige der Unterordnung bestimmt wird, welche besagt, dass das erste Gebiet im anderen enthalten ist; und der Fall wo beide Gebiete zusammenfallen, eingeschlossen sein soll.

³⁰ Im Beitrag „Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröders Vorlesungen über die Algebra der Logik“. (LU, S. 92-112)

Aus dieser Beziehung gehen nun die Grundsätze hervor, dass jedes Gebiet sich selbst eingeordnet ist, ebenfalls dass ein erstes Gebiet einem dritten eingeordnet ist, wenn es einem zweiten Gebiet, das seinerseits einem dritten, eingeordnet ist. (LU, S. 92)

Diese Beziehung der ‚Subsumtion‘ sei „nichts anderes“, so Frege, als die Beziehung des Teiles zum Ganzen, mit dem Zusatz, dass „jedes Ganze als Teil seiner selbst“ angesehen werden solle. Überhaupt, könne man hier immer auch anstelle von ‚Gebiete‘, ‚Klassen‘ sagen (wenn diese als „kollektive Ganze“ verstanden werden). (LU, S. 93)

Nach der Auffassung Schröders sei es „einerlei“, welche Teile des Ganzen Elemente genannt werden sollen, solange nur jedes betrachtete Gebiet aus ihnen zusammenstellbar ist (wobei es „gar nicht nötig“ sei, Teile anzunehmen die „nicht weiter teilbar“ sind). Man brauche hier, so Frege, gar nicht erst von ‚Elementen‘ zu sprechen.

Die unscharfen Definitionen von Worten wie ‚Klasse‘, ‚Element‘, ‚Subsumtion‘ oder ‚Mannigfaltigkeit‘ stellen ein Hindernis dar, den Gebietekalkül „ganz rein durchzuführen“ und sollten daher ganz vermieden werden.

So bewirke ebenfalls der Terminus ‚Mannigfaltigkeit‘ eine Unklarheit, denn er wird in Verbindung mit einem Begriffswort angewendet.

Wie beispielsweise ‚Mannigfaltigkeit von Punkten‘ oder ‚Mannigfaltigkeit von Bäumen‘.

Hier werde etwas „Logisches in die Betrachtung eingemischt“, was an dieser Stelle noch zu vermeiden sei. (LU, S. 93)

Frege hält fest, dass der Umfang eines Begriffs, nicht aus den Gegenständen besteht, die unter ihn fallen („etwa wie ein Wald aus Bäumen), sondern, dass dieser am „Begriffe selbst und nur an diesem seinen Halt“ hat.

So betont er seine Auffassung, „der Begriff hat also den logischen Vorrang vor seinem Umfange“. (LU, S.112)

Und bei der Mannigfaltigkeit, so Frege, könne man eher von einem „Hauptgebiet“ sprechen.

Denn nach Schröder, kann auch ein einzelnes Individuum als eine Klasse bezeichnet werden, die hier eben nur dieses Individuum selbst enthält. Es kann aber auch die Klasse, welche selbst eine Menge von Individuen umfasst, als „Gedankending“ und somit auch als ‚Individuum‘, (in weiterer Sicht als beispielsweise ‚relativ‘ einer höheren Klasse gegenüber stehend) aufgefasst werden.

Eine solche Abgrenzung des Unterschieds zwischen Individuum und Klasse, ist nach Frege problematisch. Denn dieser Unterschied wird „als ein fließender behandelt“. (LU, S. 93)

Der Definition nach sind Klassen auch Gebiete, und es kann ohne weiteres mit den Gesetzen des ‚Gebietekalküls‘ verfahren werden. Jedoch sei die Verbindung die zwischen Klassen und Begriffen hergestellt wird, eine mangelhafte.

Denn was bisher mit den Worten ‚ A ist ein Teil von B ‘ ausgedrückt werden konnte, würde dann in der Übertragung ‚Alle A sind B ‘ lauten.

Es bestehe eine „Unebenheit“, so Frege, wenn A und B als Klassen oder Umfänge von Begriffen zu verstehen sind, diese aber im Satz ‚Alle A sind B ‘ wiedergegeben werden, wo sie in einem anderen Sinne gebraucht werden.

Wenn A , beispielsweise, der Umfang des Begriffs *Quadrat*, und B jene des Begriffs *Rechteck*, so kann nicht gesagt werden: ‚Aller Umfang des Begriffes *Quadrat* ist Umfang des Begriffes *Rechteck*‘ oder ‚Der Umfang des Begriffes *Quadrat* ist der Umfang des Begriffes *Rechteck*‘ oder ‚Alle Umfänge des Begriffes *Quadrat* sind Umfänge des Begriffes *Rechteck*‘. (LU, S. 96)

Dieser Gebietskalkül - durch das Bestimmen der Grundbeziehung als jene des Teils zum Ganzen - sei ferner nicht in der Lage die *Sub-* bzw. *Subter-*Beziehungen „auseinanderzuhalten“.

So ist die Beziehung, wo ein Gegenstand (oder Individuum) zu dem Umfang eines Begriffs steht, insofern dass er unter den Begriff fällt (*Subter* -Beziehung), zu unterscheiden von der

Sub –Beziehung, die zwischen dem Umfang eines Begriffes und dem Umfang eines anderen Begriffs dann besteht, insofern als der erste dem zweiten untergeordnet ist. (LU, S. 112)

Für Schröder steht die 1 nun für die Mannigfaltigkeit, welche die Gebiete (oder Klassen) enthält, „innerhalb deren sich das Denken in einem gegebenen Falle bewegt“. Und um sie, im Gegensatz zu Boole einzuschränken, heißt es über das Symbol 0, es sollte in jeder Klasse, die aus der Mannigfaltigkeit 1 ‚hervorgehoben‘ werden kann, auch mitenthalten sein. Und dass in weiterer Folge 0 Subjekt zu jedem Prädikat sein sollte. (LU, S. 97).

Dadurch dass Schröder dem Zeichen 0 die Eigenschaft ‚zugeschrieben‘ hat, in jedem Gebiet der Mannigfaltigkeit enthalten zu sein, habe er „vermöge dieser schöpferischen Definition“, ein Gebiet „gewonnen“, das in jedem Gebiet der Mannigfaltigkeit enthalten ist. (LU, S. 106)

Durch eine Definition könne man aber nicht, so Frege, einen Gegenstand mit beliebigen Eigenschaften „schaffen“, auch nicht einem leeren Namen oder Zeichen „anzaubern“. (LU, S. 112)

Dieses 0 –Symbol, ist hier nur ein leeres Zeichen, da es aber die „verlangte“ Eigenschaft hat, „haben wir alles was wir brauchen“, kritisiert Frege.

Schröder begehe damit einen „bei den Mathematikern beliebten Fehler“. Denn wenn das Nullzeichen ein leeres ist, dann bezeichnet es nichts und erfüllt somit nicht seinen Zweck.

Schröder habe jedoch behauptet, dass es bei der „Identitätssprechung“ oder „Gleichsetzung“, einzig auf die Bedeutung und nicht die Gestalt des Ausdrucks ankäme. (LU, S.106)

Die Einführung einer solchen ‚identischen Null‘, bringe eine ungenügende Behandlung der leeren Begriffe mit sich.

Wenn der Satz ‚es gibt‘ zugelassen wird, so kann der Satz ‚es gibt kein‘ nicht ausgeschlossen werden. Denn der Satz ist selbst ohne Sinn, wenn seine Verneinung keinen Sinn hat.

Es seien hier verschiedene, leicht zu vermengende Fälle zu unterscheiden, weil in beiden von „*Existenz*“ gesprochen wird.

So ist zu unterscheiden ob ein Eigename „etwas bezeichnet“ (also „Name für etwas ist“), oder ob ein Begriff Gegenstände „unter sich befaßt“.

Nur diesen letzten Fall erhält man, wenn die Worte ‚es gibt‘ gebraucht werden.

Und wenn diese Begriffe keine Gegenstände unter sich befassen (also leer sind), so haben diese eine „logische Berechtigung“. Ganz im Gegensatz zu Eigennamen, die nichts bezeichnen. (LU, S. 110)

Schröder „vermischt diese beiden Fälle“. Er nenne beispielsweise ‚rundes Quadrat‘ und ‚Nichts‘, ‚sinnlose‘, ‚undeutige‘ oder ‚unsinnige‘ Namen.

Schröder verwende häufig „sein“ ‚Nichts‘ in Sätzen wie ‚das Nichts ist schwarz‘ und ‚das Nichts ist nicht schwarz‘, in diesen ist er ein bedeutungsloser Eigename und somit „logisch unberechtigt“.

Dagegen sei ‚rundes Quadrat‘, so Frege, „kein leerer Name, sondern Name eines leeren Begriffs“ und nicht bedeutungslos (z. B. in Sätzen wie ‚der Mond ist kein rundes Quadrat‘ oder ‚es gibt kein rundes Quadrat‘)

Und das, was Schröder ‚Gemeinname‘ nennt, sei „verwirrend“. Denn er gebe den Eindruck, als würde er sich auf eine ähnliche Weise zu den „unter den Begriff fallenden“ Gegenständen beziehen, wie der Eigename auf einen einzelnen Gegenstand.

So beziehe sich das Wort ‚Planet‘ gar nicht unmittelbar auf die Erde, sondern auf einen Begriff, unter den u. a. auch die Erde fällt. (LU, S.110)

Und damit Worte wie ‚Mensch‘ oder ‚Planet‘ logisch berechtigt sind, müsse nur ein „entsprechender scharf begrenzter Begriff“ vorhanden sein. Ob dieser unter sich etwas befasst, komme „dabei nicht in Betracht“.

An der Anwendung dieses Wortes hänge, so Frege, mit der Auffassung zusammen, die Klasse oder der Begriffsumfang würden aus Einzeldingen bestehen bzw. zusammengestellt. Wobei in beiden Fällen, der Begriff „übersehen“, und der „Nachdruck“ auf diese Dinge gelegt werde. (LU, S.111)

Denn es ist zu trennen, ob ein Eigennamen etwas bedeutet, oder ob ein Begriff etwas unter sich befasst. Wo leere Begriffe nicht ausgeschlossen werden können, haben bedeutungslose Eigennamen „in der Wissenschaft keine Berechtigung“. (LU, S. 112)

So kommt Frege zum Ergebnis, dass es eine Verfehlung sei den Umfang des Begriffs (als Klasse) auf Einzeldinge, und nicht auf den Begriff zu beziehen. Eine solche Auffassung, führe zu einem Gebietekalkül „aber nicht zu einer Logik“. (LU, S. 112)

Und obwohl er Schröder in mancher Hinsicht nahe stehe, so stelle er sich im „Streite der Logiker des Umfangs und der des Inhalts auf die Seite dieser“. (LU, S.111)

4.2 Zum Verständnis von Booles Vorhaben

„The laws we have to examine are the laws of one of the most important of our mental faculties. The mathematics we have to construct are the mathematics of the human intellect“.

So sieht Boole, neben ihrer Interpretation, in der Gestalt und den Eigenschaften seiner Methode, den Anspruch der Allgemeinheit als erfüllt.

Die allgemeinen Theoreme (welche er im letzteren Teil des Werks behandelt), würden auf bemerkenswerte Weise, die Freiheit von Ausnahmen veranschaulichen. In den entsprechenden Fällen der gegebenen Mathematik, sei dieses besondere Merkmal nicht zu beobachten

So soll die Analysis nicht um ihrer selbst willen betrachtet werden, sondern unter dem neuen Gesichtspunkt, für jede Gleichung eine Lösung und für jedes Ergebnis eine Interpretation zu haben. Ferner, dass jede Eigentümlichkeit der Form dieses Kalküls, ein korrespondierendes Charakteristikum in der Beschaffenheit des Intellekts besitze. (MA, S. 7)

In den allgemeinen Theoremen - welche in widerspruchsfreier Darstellung gegeben seien - sieht er den Anspruch seiner Methode, einen „Calculus of Deductive Reasoning“ zu sein, am besten verdeutlicht.

Er hält fest, dass der Wert eines Systems, nicht bloß durch seine ‚Wahrheit‘ bestimmt sei, sondern auch von der Bedeutung seines Gegenstands und dem Ausmaß seiner Anwendung abhängen (er räumt auch einen Platz für die ‚Willkür‘ der menschlichen Meinung ein).

In diesem Zusammenhang, siehe er die Nützlichkeit der Anwendung mathematischer Formen in der „science of Logic“, als eine Frage der Notation. Er rekurriert dabei auf Mills Feststellung, dass eine Sprache so mechanisch wie möglich konzipiert sein soll. Nämlich überall dort, wo die ‚Natur‘ des Gegenstands, gefahrlos eine mechanische Ausübung des schließenden Denkens zulässt. Andernfalls, müsse sie so konstruiert sein, dass sie der bloßen mechanischen Anwendung, ein größtmögliches Hindernis darstellt.

Denn in einer Sache, so Boole, unterscheide sich die Wissenschaft der Logik von allen anderen, indem die Vollendung ihrer Methode, hauptsächlich als Beweis der ‚spekulativen‘ Wahrheit ihrer Prinzipien wertvoll sei.

So sei es keineswegs seine Absicht, die gewöhnlichen Formen des Denkens zu ersetzen, noch diese auf eine bloß technische Ausführung zu reduzieren. (MA, S. 2)

In *Mathematical Analysis of Logic* sagte Boole, dass es verfrüht sei festzustellen, inwiefern die Methode seines Kalküls als Werkzeug für die

wissenschaftliche Forschung geeignet sei. Überhaupt ging es ihm zunächst darum, die überlieferte Logik darzustellen.

Auch hier wird Booles Sicht bezüglich der Logik ersichtlich. Denn als es daran ging, eine Interpretation für die allgemeinen Theoreme des Kalküls festzulegen, mussten bereits vorhandene und anerkannte Annahmen der Logik außer Acht gelassen, und die Methode selbst für einen gerechten Ausdruck der Grenzen ihrer Anwendung befragt werden.

Und in der Abhandlung über die Lösung von Auswahlgleichungen, liefere die dort angewandte Methode, die Mittel für eine vollkommene Analyse eines jeden denkbaren Systems von Aussagen.

Jedoch sei er mit den Erkenntnissen der logischen Wissenschaft nicht zu sehr vertraut (vor allem nicht mit der ‚älteren Literatur‘), als dass er sich über eine Innovation in seinen Ansichten sprechen könnte. (MA, S. 7ff)

Es wird in der Wahrnehmung die Arbeit Booles (und De Morgans) an der Algebra der Logik und dem aristotelischen Syllogismus, die Wirkung genannt, dass sich eine logische Wissenschaft bildet, welche sich von der Philosophie entfernt und sich der Mathematik³¹ anschließt. (Kline, S. 1191)

Boole nennt in seinen Überlegungen bezüglich der Frage ob „Logic as a branch of Philosophy“ zu erachten sei, die Beschreibung der Philosophie als einer nach dem ‚warum‘ fragenden Disziplin. In ihr gehe es um die Fragen nach den Gründen und dem wahren Wesen der Dinge. Aus ihrer Klassifizierung als „science of real existence“ und ihrer Aufgabe der „research for causes“, siehe er sich gezwungen zu behaupten, dass zu dieser ‚Natur‘ der Philosophie „*Logic forms no part of it*“.

So soll die Logik nicht mit der ‚Metaphysik‘, sondern mit der Mathematik verbunden werden.

³¹ In diesem Zusammenhang sei gesagt, dass gegebenenfalls die Logik sogar als angewandte Mathematik angesehen wird. Denn die Aussagenlogik zu gebrauchen, um logische Strukturen zu verdeutlichen, beispielsweise von solch einem demonstrativen Verfahren wie dem Beweis durch *reductio ad absurdum*, sei eine gänzlich typische Anwendung einer mathematischen Theorie. Tatsächlich, eine Anwendung der booleschen Algebra an dem schlussfolgernden Verfahren. (Kneebone, S. 332)

Seine Darstellungen sollen den Beweis gegen den Zweifel am Zutreffen dieser Ansicht liefern. Er geht von den gemeinsamen Merkmalen in den grundlegenden Prinzipien dieser beiden Wissenschaften aus.

Die Logik beruht, wie die Geometrie, auf axiomatische Wahrheiten, so Boole. Und ihre Theoreme bauen auf der „general doctrine of symbols“, welche auch Grundlage der anerkannten Analysis ist. (MA, S. 13)

Dieses sieht er am Beispiel der Auslegung der aristotelischen Syllogismen verdeutlicht. Denn dort werden Formeln dieser logischen Wissenschaft, durch solche einer anderen ausgedrückt. Hier sieht er eine ‚absolute‘ Genauigkeit dieser Parallele.

Allerdings zeichne sich die Logik durch eine besondere Fähigkeit aus, welche der Mathematik versagt bleibt. So sei sie nicht nur imstande eine Wissenschaft zu bilden, sie vermag es auch nach dem Ursprung und der Beschaffenheit ihrer eigenen Prinzipien zu fragen.

In Anbetracht dieser Unterscheidung, so stehe für ihn, nichtsdestotrotz, eine fundamentale Gemeinsamkeit zwischen der Logik und der Mathematik fest.

So sei die mentale Bemühung, welche im Studium der Logik „as an exact science“ geleistet wird, in ihrem Wesen, jener gleich, die für die Analysis auch getätigt wird. (MA, S. 13)

Boole erklärt die Zielsetzung seines Projekts, auf umfassendere Weise, im späteren Werk *The laws of Thought*.

Es sei seine Absicht eine Untersuchung der fundamentalen Gesetze jener gedanklichen Operationen zu bewerkstelligen, mit denen das schlussfolgernde Denken durchgeführt wird. Diesen soll auch der symbolische Ausdruck eines Kalküls verliehen werden. Auf dieses Fundament soll nun die Wissenschaft der Logik gebildet, und ihre Methode konstruiert werden. Diese Methode,

wiederum, soll zur Basis einer allgemeinen Methode gemacht werden (nämlich für die Anwendung der mathematischen ‚Doktrin‘ der Wahrscheinlichkeiten‘). Schließlich soll auf dem Wege dieser Fragestellungen, aus den einzelnen hervorgebrachten Erkenntnissen („elements of truth“), Einsichten in die „nature and constitution“ des menschlichen Denkens erlangt werden. (LT, S. 1)

4.3 Unterschiedliche Voraussetzungen

So wird der Nachteil festgestellt, im Vorhaben Booles (und Schröders) die Methoden der Booleschen Algebra, in Anlehnung an die klassische Algebra, zu entwickeln, sich dieser Kalkül zur „Umschreibung“ der mathematischen Schlüsse als unpassend erwies. Freges formalisierte Konstruktion hatte „die Anwendungen hingegen auf die Grundlagen der Mathematik im Sinn“. (Bourbaki, S. 19)

Dieses war auch nicht Booles erklärtes Ziel. In seinem System, ging es um die Anwendung einer spezifischen Methode, welche er als neue Form der Mathematik auffasste, auf gedankliche Operationen – ihrerseits, Gesetze des Denkens.

Der mathematische Ausdruck dieser, mache sie zur Basis für die Erschaffung eines Kalküls des deduktiven Denkverfahrens.³²

Überhaupt, hatte Boole eine andere Ansicht bezüglich der Beziehung zwischen Mathematik und Logik (wie im vorangegangenen Abschnitt erläutert).

Und wenn er über Letztere in *The Laws of Thought* sagt, dass ihre “ultimate laws and processes are mathematical”, so behauptete er nicht dass die Logik auf Algebra reduzierbar sei.

Denn beide haben sie gemeinsam, dass der Gebrauch von Symbolen (die Elemente einer wissenschaftlichen Sprache), auf allgemeine Prinzipien „founded in the very nature of language“ zurückgeht.

Diese schreiben vor, dass in ein und demselben Prozess, keine Abweichung von der Bedeutung der Symbole (durch Konvention bestimmt) statfinde.

Außerdem, dass die Gesetze zur Ausführung des Verfahrens, ausschließlich von dieser festgelegten Bedeutung der verwendeten Symbole ausgeht.

³² Nach Jevons, habe Boole die Logik als „branch of Mathematics“ erachtet, und er glaubte alle Ableitungen der Logik durch Prinzipien der Algebra erreichen zu können (überhaupt, sei das Verfahren in diesem System der Logik „very obscure and difficult“). (Jevons, S. 191)

Es ist aus der Übereinstimmung beider Disziplinen in ihren „laws of the symbols“ (beide durch die obigen Prinzipien bestimmt), dass auch ein „agreement of processes“ unmittelbar hervorgeht.

Er geht aber grundsätzlich davon aus, dass „The two provinces of interpretation remain **apart** and **independent**, each subject to its own laws and conditions.“ (LT, S. 6; meine Hervorhebungen)

Und mit einer einzigen Einschränkung, seien die logischen Gesetze, so Boole, in ihrer Form, sogar „identisch“ mit den Gesetzen der allgemeinen Symbole der Algebra.³³

Dass letztere jenem Gesetz („index law“) nicht unterliegen, bilde auch den „essential ground of difference“, zwischen den logischen Ableitungsformen, und solche, welche sich in der ‚science of Number‘ manifestieren.

Als Fundament „of general reasoning“, bestimmt es die intellektuellen Tätigkeiten des Auffassungsvermögens, welche den Prozessen des logischen Deduzierens vorausgehen (so werden ihnen auch Form und Ausdruck verliehen). (LT, S. 7)

Zudem seien die „mathematical sciences“ die vollkommensten Beispiele der Methode überhaupt. In ihnen zeichnet sich Letztere vor allem durch ihre „directive function“ aus.

So seien, beispielsweise, die fundamentalen Verfahren der Arithmetik für sich, erst Elemente einer ‚möglichen‘ Wissenschaft. Diese zu beschreiben sei die erste Aufgabe ihrer Methode. Die folgende und höhere Funktion, sei es, die Aufeinanderfolge aufzustellen.

Und bei komplexeren Fällen der deduktiven Logik³⁴, sei die Hilfe einer solchen anweisenden Methode unverzichtbar. Es ist auch ausschließlich ein „Calculus“, der diese zur Verfügung stellen kann. (LT, S. 11)

³³ Er weist daraufhin, dass in dieser Untersuchung, die Logik in ihrem „practical aspect“ darstellen. Als System von Verfahren, nämlich, welche durch Symbole ausgeführt werden, die eine bestimmte Interpretation haben, und Gesetzen unterliegen, welche nur auf diese Interpretation gründen. (LT, S. 6)

³⁴ Besonders jene, die eine Basis für die Lösung von schwierigen Fragen in der Theorie der Wahrscheinlichkeiten bilden.

Auch hier, stellt Boole fest, dass es nicht dem Wesen der Mathematik angehört, über die Ideen der Zahl und Quantität nachzudenken. Es sei die Logik, welche es vermag, eine Einsicht in ihre eigenen Prinzipien zu erlangen.

Und er beteuert in diesem späteren Werk erneut, keine Ersetzung des Denkens anzustreben bzw. dieses einer Reduzierung auf technische Formen unterziehen zu wollen. (LT, S. 12)

So wollte er auf logischer Grundlage die „mathematical doctrine of Probabilities“ entwickeln.

Auf das Fundament seines Kalküls (die symbolische Sprache zum Ausdruck der fundamentalen Gesetze welche die gedanklichen Operationen leiten), soll die Logik und ihre Methoden gebildet werden – die Basis, wiederum, für eine allgemeine Methode zur Anwendung der mathematischen Lehre von Wahrscheinlichkeiten und ihren korrespondierenden Methoden.

Es sei erwähnt, dass er jede Annäherung an eine allgemeine Methode in der Logik als vollzogene Entwicklung des oben genannten Gesetzes ansieht. Für diese bilde er den ‚Keim‘ bzw. das ‚fruchtbare‘ Prinzip.

Es bestehe, nämlich, die Notwendigkeit einer vorangehenden logischen Methode als Fundament für diese Theorie der Wahrscheinlichkeiten.

So müssen wir mit der gegenseitigen Abhängigkeit von Ereignissen selbst, vertraut sein, bevor „the mode“ bestimmt werden kann, in welchem die erwartete Häufigkeit des Auftretens eines bestimmten Ereignisses von der bereits bekannten anderer Ereignisse abhängt.

‚Technisch‘ gesprochen, muss das Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit wir bestimmten wollen, als Funktion der Ereignisse, dessen Wahrscheinlichkeiten gegeben sind, ausgedrückt werden.

Diese ausdrückliche Bestimmung, gehöre in allen Fällen der Logik an.

Die mathematische Auffassung, andererseits, erlaubt eine „numerical measurement“ der Wahrscheinlichkeit.

So gehöre der Gegenstand der Wahrscheinlichkeit gleichermaßen, der Wissenschaft der Logik, wie auch jener der Zahlen, an. (LT, S. 13)

Mit diesen Überlegungen als Hintergrund, ging Boole (nicht zuletzt) in seiner Abhandlung der Wahrscheinlichkeiten und ihre Entwicklung auf das Fundament seines bereits ausgearbeiteten Kalküls, aus.

Freges Konstruktion seiner Begriffsschrift hängt unmittelbar mit seinem Vorhaben zusammen, die Gesetze der Arithmetik zu beweisen und so weit als möglich eine Zurückführung ihrer Grundsätze zu unternehmen.

Denn in der Einteilung der Wahrheiten, geht der Beweis entweder rein logisch vor oder er stützt sich auf die Erfahrung.

Und es ist in der rein logischen, dass Frege die „festeste Beweisführung“ sieht, Sie sieht von der „besonderen Beschaffenheit der Dinge“ ab und gründet ausschließlich auf jene Gesetze, auf denen „alle Erkenntnis beruht“.

Und so ist sie die „vollkommenste Art der Beweisführung“.

Allein auf diese Schlüsse, welche nur auf - „über allen Besonderheiten erhabene“ - Denkgesetze gründen, wollte er seine Untersuchung der Grundlagen der Arithmetik ansetzen.

Für diesen Zweck, war die lückenlose „Schlusskette“ von der aller größten Wichtigkeit, damit sich nichts „Anschauliches eindrängen könnte.“

(BS, S. IXf).

Frege setzt in seinem methodischen Vorgehen betont die strengste Beweisführung voraus.

Er sieht im Beweis nicht nur den Zweck, die Wahrheit eines Satzes zweifellos festzustellen, sondern auch eine Einsicht in die gegenseitige Abhängigkeit der Wahrheiten von einander zu erlangen. Und nachdem man sich von der „Unerschütterlichkeit“ überzeugt hat, so kann man fragen, was es denn sei, welches diese sichere Stützung gewährt.

In der Fortsetzung der Untersuchung, nämlich, wird die Zurückführung auf eine immer geringere Menge von „Urwahrheiten“ erlangt. Überhaupt sieht er ein „erstrebenswertes Ziel“ in dieser Vereinfachung. (GLA, S. 2)

Es waren „philosophische Beweggründe“ von denen Frege in seinen Untersuchungen ausging. So ging es um die Frage über die „Natur“ arithmetischer Wahrheiten, ob sie denn analytisch oder synthetisch, apriorisch oder aposteriorisch sind (wobei diese Unterscheidungen in Freges Auffassung, nicht den Inhalt des Urteils, sondern die „Berechtigung zur Urtheilsfällung“ betreffen).

Und obwohl es sich hier um philosophische Begriffe handelt, so sei die „Beihilfe“ der Mathematik dennoch für die „Entscheidung“ wichtig. (GLA, S. 3)

So ist ein Satz analytisch, wenn man im Beweis nur auf Definitionen und allgemeine logische Gesetze stößt. Und apriorisch, wenn die Beweisführung aus allgemeinen Gesetzen, welche eines Beweises nicht fähig oder bedürftig sind, erfolgen kann. (diese hatte Frege nämlich vor, in den arithmetischen Wahrheiten festzustellen).

Es entstand aber unabhängig in der Mathematik, ebenfalls die Forderung nach einem strengen Beweis der arithmetischen Grundsätze, so Frege.

Denn nur in einer lückenlosen Schlusskette wird ersichtlich, auf welche Urwahrheiten der Beweis gründet. (GLA, S. 4)

In der Erfüllung dieser Forderung, werden zuletzt Sätze erreicht, welche zu beweisen „solange unmöglich ist“ als eine Zurückführung auf „Allgemeineres“ und eine weitere Auflösung der vorkommenden Begriffe in einfachere, nicht gelingen wird.

In diesem Fall, geht es um den Begriff der Anzahl und seine Definierbarkeit. Und es ist aus ihrer „Lösung“, dass die Natur arithmetischer Wahrheiten festgestellt wird. (GLA, S. 5)

Denn ausgehend vom Begriff der Anzahl, wird Freges Fundierung der Arithmetik ausgehen.

Auch hier seien seine Ausführungen „wohl philosophischer ausgefallen, als vielen Mathematikern angemessen erscheinen mag“, dieses war aber für eine

„gründliche“ Untersuchung des Zahlbegriffs notwendig. Und überhaupt sei „Diese Aufgabe der Mathematik und Philosophie gemeinsam“. (GLA, S. V)

Für Frege, wird das „Bestreben“ eines strengen Beweises und das genaue Ziehen der „Gültigkeitsgrenzen“, nur durch das ‚scharfe‘ Fassen der Begriffe möglich. (GLA, S. 1)

Es hängt also für Frege die „Strenge der Schlußfolgerungen“ mit der Beschaffenheit der verwendeten Sprache zusammen. (BS, 110ff)

Für ihre wissenschaftliche Berechtigung, unterliegt die Bildung einer „wahren“ Begriffsschrift bestimmten Forderungen (wobei Frege immer die Tauglichkeit für eine scharfe Schlussfolgerung im Auge behält).

So ‚verlangt‘ Frege, dass sie für ihre logischen Verhältnisse möglichst einfache und leicht zu beherrschende „Ausdrucksweisen“ findet (die Zahl dieser soll auch möglichst beschränkt werden³⁵). Diese Form muss auch imstande sein, sich mit einem Inhalt „auf das Innigste“ zu verbinden.

In einem solchen „Ganzen von Zeichen“, darf aus dessen exakten logischen Form der Inhalt nicht „entschlüpfen“. Denn die strenge Schlussweise kann nur erzielt werden, wenn „das Zeichen unmittelbar die Sache bedeutet“. (BS, S. 11f)

So sei ein „streng abgegrenzter Kreis von Formen des Schließens“ in der gewöhnlichen Sprache nicht gegeben. Denn sie ist nicht „durch logische Gesetze beherrscht“, hier sind logische Verhältnisse nur „angedeutet“, aber nicht „eigentlich ausgedrückt“. (BS, S. 108f)

In der algebraischen Bezeichnungsweise, komme der Inhalt abhanden und die logischen Formen, obwohl nicht vollständig ausgearbeitet, ausgeprägter zum Vorschein.

Umgekehrt, findet in der arithmetischen Formelsprache ein unmittelbarer Ausdruck des Inhalts statt. Der Ausdruck logischer Verknüpfungen weist, aber,

³⁵ Später soll er im Vergleich zu Booles System den Vorteil seiner Begriffsschrift auch darin sehen, dass sie für logische Beziehungen weniger „Urzeichen“ bedarf, und daher auch weniger „Urgesetze“. (NS, S. 52)

eine schwächere Ausprägung auf. So muss in manchen Weisen des Schließens, der logische „Fortgang“ dieser, durch Worte erläutert werden. Daher „verdient“ die Arithmetik „den Namen einer Begriffsschrift nicht im vollen Sinne“. (BS, S. 112)

Der ergänzungsbedürftigen mathematischen Formelsprache, fügte er nun Zeichen zum Ausdruck logischer Beziehungen, sodass er zunächst für die Mathematik, eine Begriffsschrift entwarf. (BS, S. 113)

Die Anwendung seines Zeichensystems auf andere Gebiete sei dadurch nicht ausgeschlossen, denn die logischen Beziehungen „kehren überall wieder“ und die jeweiligen Inhalte können in seine Begriffsschrift eingefügt werden, wenn sie auf bestimmte Weise gewählt werden.³⁶

Überhaupt gehe die Bedeutung weit über die mathematische hinaus, da es sich um eine Darstellung von Denkformen handelt. Dieses soll auch das Interesse der Philosophen wecken, fügt Frege hinzu. (BS, S. 114)

Die Einsetzbarkeit seiner Begriffsschrift sieht er aber vor allem dort, wo die „Bündigkeit der Beweisführung“ beachtet werden muss. (BS, S. XII)

Da Frege überhaupt davon ausgeht, dass wir uns ohne Zeichen nicht zu einem begrifflichen Denken „erheben“ können (BS, S. 107), so zeigt er sich zuversichtlich, dass aus einer unter diesen verlangten Voraussetzungen angefertigten Begriffsschrift, die „Entwicklung der Vernunft“ hervorgeht und in weiterer Folge eine Förderung der Wissenschaft ermöglicht wird. (BS, S. 113)

Es ist nämlich in der Vereinigung aus der strengen logischen Form und der Ausdruck eines gedanklichen Inhalts in einer Begriffsschrift, dass Frege eine Förderung der Logik und somit auch wissenschaftliche Vorteile ansetzt.

³⁶ Zuvor hatte Frege nämlich erläutert, dass die Zeichen von „inhaltlicher Bedeutung“ auch nachgebildet werden können, wenn die „allgemeinen“ Formen bereits vorhanden sind. So kann man sich zunächst mit „vorläufigen“ Zeichen begnügen, sollte eine Zerlegung des Begriffs in seine „letzten Teile“ nicht nötig bzw. nicht möglich sein. (BS, S. 113)

Denn es geht um die wissenschaftliche „Begriffsbildung“, und die „Unfähigkeit“ einer solchen zu folgen liege in der Ermangelung eines der beiden Teile, welche jede „ausgebildete Sprache“ beinhalten muss.

Der Arithmetik, beispielsweise, fehle der „logische Mörtel“. Denn obwohl sie auch Begriffe bildet, von einem „Reichtum und einer Feinheit der inneren Gliederung“ und zu anderen Wissenschaften eine fast unvergleichliche logische „Vollkommenheit“ aufweist - so muss sie, dennoch, bei der Einführung neuer Begriffe oder bei der Legung neuer Grundlagen (an den „wichtigsten Stellen“, also), der Wortsprache „das Feld überlassen“, womit sie selbst für ihr eigenes Feld nicht hinreicht. (NS, S. 14)

So gehen aus seiner Darstellungsweise Begriffsbildungen „wie sie die Wissenschaft braucht“ hervor, v. a. im Vergleich zu Booles algebraischen Verknüpfungen, welche relativ „unfruchtbar“ sein. (NS, S. 52)

Die ‚begriffbildende‘ Wirkung, sah er am Beispiel seiner Segmentierung, welche den Inhalt als Argument einer Funktion ansieht, dargestellt (als Ersetzung der Subjekt-Prädikat Begriffe). (BS, S. XIII)

Es ist auch insofern, dass er die boolesche Algebra und die aristotelische Logik kritisierte. Denn, überhaupt, nehme die Begriffsbildung keinen „grossen Raum in ihren Darstellungen ein“. Ihre „Logiken“ seien hauptsächlich „Schlusslehren“ und die Bildung der Begriffe setzen diese als bereits „vollzogen“ voraus. (NS, S. 16)

Und im Hinblick auf die wissenschaftliche Begriffsbildung, weist Frege auf die Problematik der Definition hin.

Aus seinen Feststellungen, musste Frege die „allgemeinen logischen Grundlagen“ heranziehen. Näher als es von den „meisten Mathematikern für nöthig gehalten wird“.

Fragen, aber, über die Bündigkeit der Beweisführung und der „Berechtigung“ einer Definition, welche logisch sein müssen, sind aber nicht „abzuweisen“, wenn auch nur, weil dadurch die „nöthige Sicherheit erreichbar ist“.

Er kritisiert das Vorgehen der Mathematiker, nicht nach der logischen Rechtfertigung einer Definition zu fragen. Diese erachten sie für „genügend gesichert“, wenn sie sich dem Beweis „willig“ hergibt, wenn im Verfahren nicht auf Widersprüche gestoßen wird, wenn sich Verbindungen zwischen „scheinbar entlegenen“ Dingen herstellen lassen und man somit eine „Ordnung und Gesetzmässigkeit“ annimmt.

Auch er sei der Ansicht, dass sich Definitionen durch ihre „Fruchtbarkeit“ bewähren müssen (indem es möglich ist, Beweise mit ihnen durchzuführen).

Er sieht aber eine Gefahr für die Strenge der Beweisführung (lückenlos wie die Schlusskette auch sein mag), dass die Rechtfertigung der Definition – dadurch, dass kein Widerspruch festzustellen war – „nachträglich“ erfolgt. Denn das „ganze Gebäude“ kann „zum Einsturze“ kommen, weil man damit nur eine „erfahrungsmässige Sicherheit“ erreicht, und ein Widerspruch dennoch vorzufinden sein kann. (GLA, S. IX)

In einem Entwurf eines Briefes an Peano, ‚bedauert‘ er die mangelnde Übereinkunft bei den Mathematikern, über die Grundsätze, welche beim Definieren zu befolgen sind, nicht einmal darüber, was Definieren „eigentlich sei“, gibt es eine Übereinstimmung. Und dieses sei für die Wissenschaft „schädlich“.

Er sieht eine „völlige Gesetzlosigkeit“ im Gebiet der Mathematik.

So glauben manche, durch Definitionen „etwas schaffen zu können“.

Diese „Schöpfermacht“ habe aber „Schranken“, welche vorhanden sein müssen. (BW, S. 123f)³⁷

Man muss sich klar machen, so Frege, „was Definieren ist und was dadurch erreicht werden kann“.

Und ihre „schöpferische Kraft“ erreicht nichts weiter, als dass eine Sache „abgrenzend hervorgehoben“ und mit einem Namen bezeichnet wird.

³⁷ Er habe in § 33 des ersten Bandes seiner *Grundgesetze der Arithmetik*, solche Grundsätze angegeben, welche beim Definieren zu befolgen seien. (BW, S. 124)

Auch der Mathematiker kann durch sein Definieren, nichts „eigentlich“ schaffen.³⁸

Einem Ding, kann man nicht durch „blosse“ Definition, eine Eigenschaft „anzaubern“, welche es nicht besitzt. Außer die eine, nämlich „so zu heissen, wie man es etwa benannt hat“. (GGA, S. XIII)

Frege unterscheidet, nämlich, zwischen der Eigenschaft eines Gegenstands und dem Merkmal eines Begriffs.

So sei beispielsweise, in der Definition der Zahl Null, als „etwas, was zu Eins addiert, Eins ergibt“, eine Verwechslung des Sachverhaltes vorhanden.

Hier wurde ein Begriff definiert, indem die Eigenschaft angegeben wurde, welche ein Gegenstand haben muss, um unter den Begriff zu fallen. Diese Eigenschaft, aber, ist nicht Eigenschaft des definierten Begriffs.

Und es sei ein Irrtum zu glauben, dass hier durch die Definition etwas „geschaffen“ wurde, welches, zu eins addiert, eins ergibt. Sie gewährleistet auch nicht die „Erfüllung“ des Begriffs. Und erst wenn bewiesen wird, dass es einen einzigen Gegenstand von der „verlangten“ Eigenschaft gibt, kann dieser auch mit dem „Eigennamen“ ‚Null‘ belegt werden. Es ist also unmöglich die Null zu „schaffen“. (GGA, S. XIV)

Überhaupt, wird Freges Voranstellung der angemessenen Begriffsbildung so verdeutlicht, wenn er über eine Begriffsbildung durch „bloße Sammlung von Einzeldingen“ sagt, sie sei „doch sehr willkürlich und im wirklichen Denken ohne Bedeutung, wenn diese Dinge nicht durch gemeinsame Merkmale zusammengehalten werden. Gerade diese machen das Wesen eines Begriffes aus.“ (NS, S. 38)

Nicht zuletzt so zu verstehen, wenn Frege, bereits in der *Begriffsschrift*, ausgesprochen „jene Bestrebungen“ kritisiert, welche eine „künstliche“

³⁸ So am Beispiel von Schröders Definition der Nullklasse (worin Frege auch den Grundirrtum dessen ‚Gebietekalküls‘ sieht). Hier stellte er fest, dass es eine Klasse, welche in allen Klassen als Element enthalten ist, nicht geben kann. So kann sie auch nicht durch Definition geschaffen werden. (LU, S. 14)

Assimilierung – einen Begriff als „Summe seiner Merkmale“ zu sehen – herzustellen versuchten.

Und überhaupt unpassend für die Ausarbeitung seines Programms, habe ihm eine solche Auffassung „durchaus fern gelegen“. (BS, S. X)

Da er in seinen Untersuchungen der arithmetischen Grundlagen von der Definition des Begriffs der Anzahl ausging, kritisiert er die „Roheit“ der Auffassungen, welche ein „aggregatives, mechanisches Denken“ in der Arithmetik sehen.

Ob es ein solches Denken „überhaupt giebt“, bezweifle er. Denn das Denken sei „überall dasselbe“. So kommen nicht unterschiedliche „Arten von Denkgesetze“ einem jeweiligen Gegenstand zu. (GLA, S. III)

Die Definition des Zahlbegriffs (wobei zunächst „der Begriff der Anordnung in einer Reihe“ auf die „logische Folge“ zurückgeführt werden sollte), wollte er rein logisch bewerkstelligen. (BS, S. X)

Da aber die Bündigkeit der Schlussfolge sowie die Berechtigung einer Definition logisch sein müssen, so hält er eine „scharfe Trennung“ der Mathematik und der Logik für „unthunlich“³⁹. (GLA, S. IX)

Freges Auffassung über die Beziehung der beiden Disziplinen, als Grundgedanke für die Konstruktion seines Systems, sollte selbst zum Gegenstand einer Entwicklung werden.

So sprach er in der *Begriffsschrift* noch von einem ‚Versuch‘, mathematische Wahrheiten auf logischer Grundlage begründen zu wollen. (BS, S. X)

Und später in den *Grundlagen* den Beweis der analytischen Natur arithmetischer Sätze „wahrscheinlich“ gemacht zu haben, da außer den

³⁹ Russell vertritt ebenfalls die Meinung, dass ein „Trennungsstrich“ zwischen den beiden Disziplinen zu ziehen, „unmöglich“ sei - „Tatsächlich sind sie eins“. Der Beweis dieser „Identität“ von Mathematik und Logik muss allerdings „im einzelnen“ geführt werden. Denn beginnend mit Voraussetzungen, welche (nach der „allgemeinen Anschauung“) der Logik angehören, werden auf „deduktivem Weg“ Resultate erzielt, die „augenscheinlich“ der Mathematik gehören – so ist kein „Punkt“ vorhanden, wo eine Trennung gemacht werden kann. (Russell, S. 196)

logischen Gesetzen, ein „Beweisgrund anderer Art“ nicht ganz ausgeschlossen werden kann. (GLA, S. 102)

In den *Grundgesetzen*, aber, sollte der endgültigen Beweis für die Herleitung der Arithmetik aus logischen Grundsätzen gezeigt werden (hierfür sollten noch nähere Definitionen, seine semantische Theorie und die Einführung des Begriffsumfangs hinzukommen).

Denn in diesem späteren Werk, sagt er auch rückblickend, dass er in den vorangegangenen *Grundlagen* als wahrscheinlich zu zeigen vorhatte, dass die Arithmetik ein „Zweig der Logik“ sei, und sie keinen „Beweisgrund“ aus der Erfahrung oder Anschauung entlehnen muss.

Dieses soll nun im vorliegenden Werk „bewährt“ werden, durch seine Ableitung der einfachsten Gesetze der „Anzahlen“, nämlich „allein mit logischen Mitteln.“

Damit eine ‚überzeugende‘ Darstellung vorliegt, musste die Beweisführung viel höheren Ansprüchen genügen, als es in der Arithmetik der Fall ist. (GGA, S. 1)

Sie sei dann „nur weiter entwickelte“ Logik⁴⁰, wenn keine Übergänge des Beweises auftreten, welche nicht nach logischen Gesetzen vorgenommen wurden (sondern auf einem „anschauenden Erkennen“ zu bauen scheinen). Und es ist erst die Zerlegung der Übergänge in „einfache logische Schritte“, welche uns zeigt, dass diese „nichts als Logik“ zum Grunde haben. (GGA, S. VII)

Seiner Untersuchung der arithmetischen Grundlagen, geht für Frege voran, dass alles Denkbare auf logische Gesetze beruht (in ihren allgemeinsten Sätzen).

⁴⁰ Die Mathematik als ‚Zweig‘ der Logik zu sehen (die Frege – Russell ‚Doktrin‘), wird als ‚logistisch‘ bezeichnet, so Church. Wobei die Mathematik als auf reine Logik reduzierbar gilt. Dieser Terminus wird aber auch in Zusammenhang mit Russels ‚Schule‘ angewendet. (Church, S. 57 & 332). Unabhängig von Frege, entwickelten Russell und Whitehead in der *Principia Mathematica*, das Programm ihrer so genannten ‚Logistik‘, die Nachbildung der Logik und aus dieser, die Herleitung der Mathematik. Wobei zunächst eine (gänzlich symbolisierte) Axiomatisierung der Logik vorangeht, und daraus Theoreme deduziert werden, welche für die weitere Schlussfolgerung angewandt werden (bzw. für die Ableitung mathematischer Theoreme). Und ohne Gebrauch von Axiomen der Mathematik selbst, folgt diese als ‚natürliche‘ Erweiterung des logische Gegenstandsbereichs und seinen Gesetzen (rein formal und logisch-deduktiv). (Kline, 1192-7)

Das Verständnis dieser, gehe unmittelbar mit der Auffassung des Wortes ‚wahr‘ einher. Denn diese Gesetze seien „Richtschnuren für das Denken“ zur Erlangung der Wahrheit. Frege zeigt aber den mehrfachen Sinn im Wort ‚Gesetz‘ auf. Im einen besagt es nämlich „was ist“, und schreibt im anderen vor, „was sein soll“.

Nur so – „indem sie festsetzen wie gedacht werden soll“ – seien logische Gesetze als „Denkgesetze“ zu verstehen.

Aber indem es besagt was ist, so ist ein jedes Gesetz auch „vorschreibend“, und das Denken sollte „im Einklange damit“ geschehen. Es ist also somit ein Denkgesetz (dieses gilt nicht nur für die logischen Gesetze, so Frege, sondern auch für die physikalischen oder geometrischen).

Sie seien nur dann „mit mehr Recht“ ‚Denkgesetze‘ zu nennen, wenn sie die „allgemeinsten“ sind, und „überall da“ vorschreiben wie gedacht werden soll, wo „überhaupt gedacht wird“. (GGA, S. XV)

Es sei auch das „Fürwahrgehaltenwerden“ vom „Wahrsein“ strengstens zu unterscheiden (hier, wie anderswo, attackiert Frege die Psychologie).

So ist es kein Widerspruch, dass etwas wahr ist, was „von Allen für falsch gehalten wird“. Und anders als die (psychologischen) Gesetze des „Fürwahrhaltens“, versteht er unter den logischen Gesetzen, die vorschreiben wie gedacht werden soll, „Gesetze des Wahrseins“.

In ihrem Wahrsein, unabhängig von der Anerkennung durch eine bestimmte Person, seien diese Gesetze „Grenzsteine“. Zwar „überfluthbar“ von unserem Denken, aber nicht „verrückbar“. Daraus geht hervor, dass sie „maassgebend“ für unser Denken sind, wenn es „die Wahrheit erreichen will“. (GGA, S. XVI)

Es sei eine „Unmöglichkeit“ ein Gesetz zu „verwerfen“ – es zugleich „anzuerkennen“ und zu „bezweifeln“. Denn „einmal“ ein Gesetz des Wahrseins erkannt zu haben, bedeutet auch das Anerkennen eines Gesetzes, welches vorschreibt wie „geurtheilt“ werden soll, „wo immer, wann immer und von wem auch immer geurtheilt wird“.

Im divergierenden Verständnis „des Wahren“, sieht Frege den „Ursprung des Streites“. Für ihn, aber, „ist es etwas Objectives, von dem Urtheilenden Unabhängiges“. (GGA, S. XVII).

Ein logisches Gesetz ist (welches die Logik als ‚wahr‘ rechtfertigt, dadurch dass es auf andere logische Gesetze zurückgeführt wird), für Frege, also, ein allgemeinstes Denkgesetz für alles, was gedacht wird. So besagt es was ist, ist als solches auch vorschreibend; und in seiner Führung zur Wahrheit, auch ein Gesetz des Wahrseins.

Im Gegensatz zur booleschen, wird eine philosophische Charakteristik, nicht zuletzt in dieser Betrachtung Freges der Wahrheit ersichtlich.

Denn sie ist für ihn nicht nur absolut, sondern auch auf ontologischer Grundlage gebaut.

Der Aufbau seiner Sprache selbst, ist von der ontologischen Ausstattung durchzogen.

In der *Begriffsschrift* nahm er eine Unterteilung in Funktion und Argument vor, und es war die Nachbildung des ‚begrifflichen Inhalts‘, worauf eine formalisierte Sprache abzielen sollte. (BS, S. X)

In den *Grundgesetzen*, nahm er weitere Unterteilungen vor. So bestand die „äußere Form“ des Behauptungssatzes aus der ‚Anerkennung‘ der Wahrheit, und dem Inhalt, welcher als wahr anerkannt wird.

Diesen ‚beurteilbaren Inhalt‘ sei ihm nun „zerfallen“ in „Gedanke“ und „Wahrheitswert“⁴¹. Diese Unterscheidungen hängen mit seiner Abhandlung über Sinn und Bedeutung zusammen. So wird der Sinn des Satzes der

⁴¹ Russell weist darauf hin, dass der Begriff ‚Wahrheitswert‘ auf Frege zurückgeht. (zu beachten, in der Auffassung der ‚Wahrheit‘ oder ‚Falschheit‘ eines Satzes). (Russell, S. 149) Später in der *Principia Mathematica*, wird auch eine ausdrückliche Bezugnahme auf Freges Auffassungen in der Definition des Wahrheitswertes gemacht: „The „truth-value“ of a proposition is *truth* if it is true, and *falsehood* if it is false“ of So sei bemerkt, dass „the truth values of $p \vee q$, $p \cdot q$, $p \supset q$, $p \sim q$, $p \equiv q$, depend only upon those of p and q , namely the truth-value of „ $p \vee q$ “ is truth if the truth value of either p or q is truth, and is falsehood otherwise“ etc. (W & R. 1925, S.7f)

Gedanke, und seine Bedeutung der Wahrheitswert. Hier kommt noch die Anerkennung des Wahrheitswertes als „das Wahre“ hinzu. (GGA, S. X)

Frege geht davon aus, dass Argumente gesättigt, und Funktionen ungesättigt sind. Die Argumentstellen in den ergänzungsbedürftigen Funktionen werden durch Argumente ergänzt. Und „das, wozu sie ergänzt wird“ nennt Frege den „Werth“ der Funktion für das Argument.

Den „Umkreis“ von dem was als Argument „zugelassen“ wird, soll nun auf „Gegenstände überhaupt“ ausgedehnt werden. Jetzt stehen Gegenstände Funktionen gegenüber. Zu den ersteren rechnet er „demnach Alles, was nicht Funktion ist“ (Zahlen, Wahrheitswerte aber auch Namen von Gegenständen, oder „Eigennamen“, die keine Argumentstellen ‚mit sich führen‘ und somit gesättigt sind).

In der Ergänzung einer Funktion, zu ihrem Wert, also, ist dieser immer ein Gegenstand. Und besondere unter diesen sind Wahrheitswerte.

In weiterer Folge wird ein „Begriff“ als einstellige Funktion aufgefasst, welche nur Wahrheitswerte als Werte hat; und „Beziehung“, eine mehrstellige Funktion mit dieser Eigenschaft.

So fasst er Wahrheitswerte als Gegenstände auf, und von denen gibt es zwei, nämlich ‚das Wahre‘ und ‚das Falsche‘⁴². (GGA, S. §1-4)

Bei Boole, hingegen, stellte eine Aussage einen Wahrheitswert dar (indem eine Gleichung entweder 0 oder 1 ergibt), und er ordnete ihr die Menge der Fälle zu in denen sie wahr ist (und später, die nähere Bestimmung eines Zeitmoments, in welchem eine Aussage wahr ist).

⁴²Nach Freges Auffassung, wonach sich der Sinn eines Satzes durch Angabe der notwendigen und hinreichenden Wahrheitsbedingungen bestimmt wird, wird also durch diese Angabe, nicht nur festgestellt ob der Satz wahr ist, sondern sein Sinn auch festgelegt (welcher der Sinn von ‚solche und solche Wahrheitsbedingungen sind erfüllt‘ ist). (Geach/ Sluga I [Hrsg.], S. 13)
In Übereinstimmung mit dieser, lautet es in Wittgensteins *Tractatus*, dass, der Satz „Ausdruck seiner Wahrheitsbedingungen“ ist. So war Freges Vorausschickung dieser als „Erklärung der Zeichen“ in seiner Begriffsschrift „ganz richtig“. Nur sei dessen Erklärung des Wahrheitsbegriffs „falsch“ gewesen. Wären ‚das Wahre‘ und ‚das Falsche‘, nämlich, „wirklich Gegenstände“, und die Argumente in $\neg p$, so würde –nach Freges Bestimmungen – der Sinn von » $\neg p$ «, „keineswegs bestimmt“. (TLP, 4.431])

So bestimmte er die Wahrheit nicht, wie Frege, im philosophisch-ontologischen Sinne, und in ihrer fallbezogenen Zuordnung, nicht als absolut.

Nicht zuletzt ist unter den oben angeführten Gesichtspunkten zu verstehen, wenn Frege die boolsche Logik, welche in ihrer Zielsetzung die Grundlagen der Mathematik nicht im Sinn hatte, kritisiert.

Denn aus dem Anspruch, dass „das Verhältnis der Zeichen mit dem der Sachen in möglichstem Einklange stehe“, sieht er eine „Umkehrung des wahren Sachverhalts“, wenn keine besonderen Zeichen aus der „eigenen Natur“ der Logik entwickelt werden (was sie auch geeignet macht für eine Anwendung auf andere Wissenschaften wo es auf die Wahrung der „strengen Formen der Schlussfolge“ ankommt).

Denn der Ausdruck der logischen Denkform in unmittelbarem Zusammenhang mit dem reinen gedanklichen Inhalt, ermöglicht die strenge Schlussfolge.

Und die festeste dieser Art, ist die rein logische, da sie gänzlich auf logische Gesetze zurückgeht (und auf Letztere beruhen alle Wahrheiten).

Sie sagen, nämlich, zugleich was ist und wie gedacht werden sollte – sind Gesetze des richtigen Denkens und des Wahrseins.

So ist für Frege „die Logik, deren Gegenstand das richtige Denken ist, die Grundlage auch der Arithmetik“. (NS, S. 13)

4.4 Realisierung des Leibnizschen Traums?

Es stellte sich - nicht zuletzt für die Autoren bzw. Vertreter der unterschiedlichen Logiksysteme - die Frage, inwiefern die vorliegenden Entwürfe, die Verwirklichung einer universalen Wissenschaftssprache in Übereinstimmung mit der Leibnizschen Idee, darstellten.

Schröder widersprach dem Anspruch Freges, eine partielle Realisierung des leibnizschen Ideals erzielt zu haben. Und überhaupt, stimme der Inhalt der *Begriffsschrift* nicht mit dem Anspruch ihres Titels überein.

Denn dieser hatte nämlich über andere Formelsprachen (wie die arithmetische, geometrische, chemische) und deren Zeichen gesagt, dass sie lediglich für „einzelne Gebiete“, eine Verwirklichung des „Leibnizschen Gedankens“ erzielt hätten.

Das „in der Mitte gelegene“ und mit allen anderen verwandte, fügt nun seine „vorgeschlagene“ Begriffsschrift hinzu. Es soll dadurch eine „Ausfüllung der Lücken“ gelingen, sodass diese getrennten Gebiete zu „einer einzigen“ verbunden werden, und eine „Ausdehnung“ auf andere Bereiche erzielt werden kann, welche „bisher einer solchen ermangelten“ – mit der „grössten Aussicht auf Erfolg“, nämlich. (BS, S. XI f)

Die Differenzen in dieser Angelegenheit beruhten im unterschiedlichen Verständnis jeweils einer *lingua universalis* bzw. eines *calculus ratiocinator*, wie auch der Eigenschaften und Kriterien, welche diese zu erfüllen hätten.

Denn Schröders Auffassung nach, müsse eine allgemeine Charakteristik, alle komplexen Begriffe durch einfache und festgelegte Operationen aus einem möglichst begrenzten Kontingent grundlegender, klar abgegrenzter Begriffe, bilden können. Und dieses sei in Freges Symbolsprache nicht ersichtlich.

In diesem Sinne, liege keine Verwirklichung einer universalen Sprache im Leibnizschen Sinne, vor. Viel eher, tendiere der Entwurf gen einen *calculus* .

In diesem Sinne, sei in Booles System eher die Annäherung an einer logischen oder charakteristischen Sprache dargeboten. (Sluga I, S. 377)

Unter der Annahme, dass in der Sprache wie auch im Denken einfache und zusammengesetzte Elemente vorhanden sind, ging Leibniz tatsächlich von der Möglichkeit aus, den einfachen „Bausteinen“ des Denkens auf einer Weise Zeichen zuzuordnen, sodass sich die Zeichen zusammengesetzter Bausteine, immer eindeutig aus den einfachen Zeichen ihrer Bestandteile bilden lassen. (Mates, S. 291-2)

Insbesondere habe eine charakteristische Sprache deutlich zu zeigen, dass alle Begriffe, mittels einfacher Operationen (Disjunktion, Konjunktion, Negation), aus elementaren Bestandteilen aufgebaut sind.

In Übereinstimmung mit dieser Auffassung, also, war für Schröder, Freges System nicht im leibnizschen Sinne geschaffen worden, da sie der Struktur einer solchen Bestimmung ermangelte. (Sluga I, 378f)

Frege hatte aber eine andere Auffassung darüber, welche Gesichtspunkte eine Begriffsschrift enthalten muss.

Er griff auf einen anderen Aspekt in den Überlegungen Leibnizens zurück, worin er mit diesem übereinstimmte.

Denn dieser erkannte die Notwendigkeit einer künstlichen Sprache für das Denken bzw. für wissenschaftliche Zwecke, weil sich die mehrdeutige, ungenaue und mit Überflüssigem behaftete Umgangssprache hierfür als ungeeignet erweist.

In dem die Zeichen ein Abbild der von ihnen dargestellten Gedanken sein sollte, würde eine solche *lingua philosophica* oder *characteristica universalis*, die Struktur des Denkens widerspiegeln. (Mates, S. 291f)

So auch Frege. Wo er es doch für eine „Aufgabe“ der Philosophie erachtete, die „Herrschaft des Wortes“ über den „menschlichen Geist“ zu brechen. Die „Täuschungen“ des Sprachgebrauchs über die Beziehungen der Begriffe

aufzudecken, und die „Befreiung“ des Denkenden von der Behaftung mit der „Beschaffenheit“ von sprachlichen ‚Ausdrucksmitte[n]‘ zu erwirken.

Hier soll seine Begriffsschrift ansetzen und ein „brauchbares Werkzeug“ für den Philosophen werden. (BS, S. XII f)

Denn das Wesentliche, nämlich der gedankliche oder begriffliche Inhalt, werde von der ‚Sprache des Lebens‘ nicht rein wiedergegeben.

Wie Leibniz, der aus einer Bezeichnungsweise welche die „Sachen selbst“ trifft, eine „Vermehrung der geistigen Kraft“ hervortreten sah, verstand auch Frege eine allgemeine Charakteristik. (BS, S. XI)

Frege betont den Anspruch wiederholt, nicht zuletzt in der Untersuchung von Booles Logik, dass die Zeichen zur ‚Wiedergabe‘ eines Inhaltes (ausgedrückt im Einklange mit der logischen Form des Zeichens) geeignet sein sollten. Vom Inhalt hätte diese „ganz abgesehen“, weshalb er meinte, dass sie ein auf „reine Logik beschränkter *calculus*“ sei.

Er, hingegen, habe „von vornherein“ den Ausdruck, und somit zielten seine Bestrebungen auf eine „*lingua characterica* zunächst für die Mathematik“ ab.

Die Absicht Booles, aber, soll es gewesen sein, eine „Technik“ für die systematische Auflösung logischer Aufgaben, auszubilden. (NS, S. 13)

Die Missachtung des genannten Gebots, wobei der Inhalt aus seinen Bestandteilen, gemeinsam mit demselben Zeichen der logischen Form welcher der „Rechnung“ dient, aufgebaut werden sollte (und nicht nur „angedeutet“ sein), sei der hauptsächliche Mangel an einer unvollkommenen Begriffsbildung. (NS, S. 39)

Überhaupt, aber, setze Booles Formelsprache „logisch vollkommene Begriffe“ als „fertig“ voraus, und zieht aus „gegebenen Voraussetzungen“ Folgerungen durch ein „mechanisches Rechnungsverfahren“. ⁴³

⁴³ In diesem Punkt ist auch eine Übereinstimmung mit Leibniz festzustellen. Er ging dabei vom Zusammenspiel der analytischen (Bestimmung der Elemente) und der synthetischen (mechanisches Operieren) Methoden aus. Denn die Übertragung eines Gedankens in die Struktur einer anderen Sprache, muss das genaue Erfassen von diesem (nicht nur dessen Struktur) der mechanischen Manipulierung der Elemente dieser neuen Struktur vorausgehen. So beinhaltet die Konstruktion eines logischen Symbolismus, nicht nur das rechnende Verfahren, sondern auch eine philosophisch-begriffliche Analyse. (Sluga, S. 378-9)

Sie stellt nur einen Teil des Denkens dar, durch eine „rein mechanische Tätigkeit“, kann aber „das ganze“ nicht ersetzt werden. (NS, S. 39)

So leugnet Frege nicht den Vorteil des technischen Verfahrens eines Kalküls, welcher der präzisen Durchführung von Schlussfolgerungen dient.

Denn über seine eigene Begriffsschrift sagte er, sie soll sich „in wenigen festen Formen nach Art der Rechnung bewegen sodass kein Übergang gestattet wird, der nicht den ein für alle Mal aufgestellten Regeln gemäss ist“. (GLA, S. 103)

Aber anders als Boole, wollte Frege nicht „eine abstracte Logik“ in Formeln darstellen, sondern durch Symbole, einen Inhalt in „genauer und übersichtlicherer Weise“ ausdrücken. (BS, S. 97)

Denn eine „schlussfolgernde Rechnung“ erkenne er als einen notwendigen Bestandteil einer „*lingua characterica*“ an, und diese sei auch in seiner Begriffsschrift enthalten⁴⁴. (BS, S. 98)

Und wo Leibniz, im Hinblick auf die Struktur einer charakteristischen Sprache, den Kalkül als Mechanismus auffasste, welcher zur Überprüfung der Wahrheit bzw. Widerspruchsfreiheit dienen soll – dann hatten Frege und Schröder eine übereinstimmende Auffassung eines *calculus*.⁴⁵ (Sluga, S. 377)

Frege sah, jedoch, dass ein logisches System, mehr beinhalten muss als einen bloßen Apparat des rechnenden Verfahrens wie sie in der Booleschen Algebra zu sehen sei. Auf diesen Aspekt allein hatte sie sich beschränkt.

Der Grund für dieses Versäumnis sei, nach Frege, dass sie die erwähnte Begriffsbildung nicht einhielt, welche er für wesentlich erachtete.

Den „schwierigsten Teil der Arbeit“, nämlich, setzte sie als „getan“ voraus.

⁴⁴ Frege sah Peanos mathematische Logik, hauptsächlich als *lingua characterica*, da sie zwar eine prädikatenlogische Notation beinhaltet, in ihr aber eine schlussfolgernde Rechnung, weniger ausgebildet sei. Bei Boole sei letztere stärker ausgeprägt, was sie zu einem *calculus* macht, während seine Begriffsschrift beide vereinen wolle. Und eine universale Symbolsprache müsse einen Kalkül beinhalten, nicht aber umgekehrt. (LU, S. 10)

⁴⁵ Der Grund, aber, warum Schröder in Freges System, primär einen *calculus* sah, könnte auf die Insistierung Freges beruhen, dass seine Bezeichnungsweise für die Überprüfung der Gültigkeit der Schlussfolge geeignet sei. (Sluga, S. 377)

Die Ermangelung dieser Voraussetzung, hätte auch Leibniz am „weiteren Fortschreiten gehindert, so Frege.“ (NS, S. 39)

Und obwohl Leibniz die „Vorteile einer angemessenen Bezeichnungsweise“ erkannte, konnte dieser seinen Gedanken, welches „zu riesenhaft“ war, im Hinblick auf die schwierigen Vorbereitungen, nicht realisieren. (BS, S. XI)

Und wenn er in seiner Begriffsschrift, durch die strenge Rechnung hindurch, eine Übersichtlichkeit der Ausdrücke erzielen wollte, so soll sie dennoch einen Inhalt „auszudrücken im Stande sein“, und nicht wie „boolesche Bezeichnungsweise“ nur die logische Form wiedergeben. (GLA, S. 103)

So wollte er „in der That nicht einen blossen „*calculus ratiocinator*“ sondern eine „*lingua chacterica*“ im leibnizschen Sinne“ schaffen. (BS, S. 98)

Denn wo Boole in seiner Logik durch algebraische Operationen logische Beziehungen auszudrücken versuche, ging es ihm darum, logische Strukturen der Inhalte klar und durchsichtig auszudrücken.

In dieser Hinsicht, sah er also eine angemessenere Realisierung einer universalen Symbolsprache in seiner Begriffsschrift gegeben.

Die „Fragestellung“, aber, welche der beiden Formelsprachen vorzuziehen ist, wies Frege zurück. Es sollten also nicht in ihrem Sinne (über den von ihm angestellten Vergleich der beiden Entwürfe), eine „Entscheidung herbeigeführt werden“. Denn die Unterschiede gehen, so Frege, auf „die letzten Ziele“ (bei ihm übrigens „weiter gesteckt“), welche beide zur Entwicklung ihrer jeweiligen Verfahren und den dazugehörigen Aufgaben stellten, zurück.

So hätten beide „neben aller Verschiedenheit“, doch die gemeinsame Aufgabe, „logische Verhältnisse durch Schriftzeichen anschaulich zu machen“. (NS 15)

Booles Mittel, so Frege, entsprechen „im Allgemeinen ihrem Zwecke, wenigstens in bezug auf den Kreis von Aufgaben“ die dieser stellte. (NS, S. 13)

Kurt Gödel, seinerseits, versteht die *Characteristica universalis* im Sinne der mathematischen Logik, wobei es sich hier um eine Wissenschaft handelt, die

allen anderen vorausgeht, deren zugrundeliegenden Prinzipien und Ideen sie enthält.⁴⁶

Eine solche Auffassung findet sich erstmals in Leibnizens Vorstellung einer *Characteristica universalis* - worin Gödel die „Mathematische Logik“ als einen zentralen Teil einnehmend, sieht.

Verstanden als Idee, also, eines Logikkalküls, welcher für die Schlussarten der „exakten“ Wissenschaften „wirklich hinreicht“.

Unter diesem Aspekt sieht er in Freges und Peanos Unternehmen „zumindest in irgendeiner Form“ eine Antwort auf diesen Anspruch gegeben („wenn auch nicht in der, die Leibniz im Sinn hatte“).

Denn Freges Interesse galt hauptsächlich der „Analyse des Gedankens“, und er habe seinen „Kalkül“ primär für eine Ableitung der Arithmetik aus der reinen Logik verwendet. Peano, seinerseits, interessierte sich für den Gebrauch seines Systems innerhalb der Mathematik. (PM, S. V)

Gödel stellte aber dennoch fest – „Leibniz hat in seinen Schriften über die *Characteristica universalis* nicht von einem utopischen Projekt gesprochen.“ (PM, S. XXVIII)

Booles Verständnis einer wissenschaftlichen Sprache, wie das eines logischen Systems überhaupt, geht von den mentalen Operationen und deren Darstellung aus (bei ihm wird auch keine Bezugnahme auf Leibniz genannt).

Im Beitrag *The Calculus of Logic*, bemerkt er, dass die Formen der Aussagen, nach den Prinzipien seines Kalküls dargestellt, ‚analog‘ zu denen einer ‚philosophischen Sprache‘ seien. (CL, S. 1)

Wie er letztere verstand, hatte er im vorausgehenden Werk der *Mathematical Analysis of Logic* erläutert.

⁴⁶ In einem anderen Sinne, so Gödel, ist sie als „Abschnitt“ der Mathematik zu verstehen. Wobei es an der Stelle von „Zahlen, Funktionen, geometrischen Figuren“ etc, nun von „Klassen, Relationen, Kombinationen von Symbolen“ etc. handelt.

Seiner Auffassung nach, seien die allgemeinen Konzeptionen des menschlichen Denkens dasjenige, „which renders Logic possible“.

Die Vorstellungsfähigkeit, also, einer Menge und die Namengebung ihrer Elemente.

Daher geht er von einer engen Beziehung zwischen der „theory of Logic“ und jener der Sprache, aus. (MA, 5). Denn beide hängen unmittelbar von unserer Fähigkeit ab, allgemeine Gedanken durch Abstrahierung zu bilden.

Die Sprache, so Boole, sei ein Instrument für die Logik. Aber kein unentbehrliches. (MA, S. 81)

Er geht davon aus, logische Aussagen durch Symbole auszudrücken, wobei die Gesetze ihrer Kombination auf den Gesetzen der gedanklichen Verfahren gründen sollten, welche sie darstellen. Und ein erfolgreicher Versuch dieses zu tun, wäre in dieser Hinsicht, „a step toward a philosophical language“.

(MA, S. 5)

Und wie zu Beginn angeführt, sieht er in der Darstellungsweise von Aussagen, in Übereinstimmung mit den Gesetzen seines speziellen Kalküls (die Boolesche Algebra), die entsprechenden Charakteristiken einer wissenschaftlichen Sprache, tatsächlich verbildlicht.⁴⁷

Wenn in einem anderen Sinne, so sah auch Boole, dass der Gebrauch einer symbolischen Sprache, einen wissenschaftlichen Fortschritt erlaubt.

So soll auf deren Hilfe auch zurückgegriffen werden, wenn höhere Fragestellungen durch eine wissenschaftliche Methode erreicht werden können.

Nach Boole hätte die unterschiedliche Anwendungsweise von Symbolen, eine „material consequence“. Er stellt den Vergleich, nämlich, im Hinblick auf ihre Auswirkungen auf den menschlichen Intellekt.

So können die Symbole mit vollstem Verständnis für ihre Bedeutung gebraucht werden, und für die Bedingungen, welche diesen zulässig machen. Auch, dass die abgekürzten Formen des Denkens, welche mit den Symbolen einhergehen, auf ihre vollständige schlussfolgernde Entwicklung erweitert werden.

⁴⁷ Es sei bemerkt, dass im früheren ‚Essay‘ noch von einem ‚Schritt‘ gesprochen, und im späteren – zur zusätzlichen Erläuterung veröffentlichten – Werk, ein Realisierungsanspruch explizit ausgedrückt wird (zumindest, in dem eine ‚Analogie‘ festgestellt wird).

Hier sei eine höhere intellektuelle Disziplin gegeben, welche nicht nur das Denken fordert, sondern auch die Verallgemeinerungsfähigkeit.

Andererseits, kann es sich um nichts sagende Charaktere handeln, welche dem Ermessen des Benützers unterliegen. In diesem Fall sei gar keine Verstandesdisziplin gestellt, und er sieht auch eine Gefahr im unbedachten Verlass auf Symbole. (MA, S. 9f)

4.5 Doch so unterschiedlich?

Im Hinblick auf die philosophische Charakteristik, welche Frege zugeschrieben und in Booles Modell vermisst wird, so sei bemerkt dass für die Verwirklichung seines Vorhabens, die eingehenden Untersuchungen (vor allem der Begriffsanalyse) des Ersteren, auch notwendigerweise betrieben wurden.

Nur so konnte die Sicherstellung der notwendigen Mittel für die Behandlung des Gegenstands seiner Zielsetzung erfolgen, und die Umsetzung seiner Vorhaben erlangt werden.

Überhaupt, waren es die unterschiedlichen Zielsetzungen, welche die Merkmale ihrer jeweiligen Systeme gestalteten. So gingen auch unterschiedliche Entwürfe hervor, wo eine bestimmte Vorgehensweise und die Wahl der benötigten Bestandteile für die Ausbildung der jeweiligen Konstruktionen gemacht wurden. Durch ihre unterschiedlichen Absichten, fand also eine Verschiebung des Aufgabenbereichs statt, und der Anwendungszweck eines formallogischen Symbolismus als Instrumentarium hierfür, wurde auch anders verlagert.

Zudem waren es die gestellten Anforderungen, welche ein formallogisches System zu erfüllen habe, die ein weiteres Kriterium bildeten.

Denn wo Boole die Logik auf der Grundlage seines Kalküls, einer speziellen algebraischen Nachbildung, aufbauen wollte, war es Freges erklärtes Programm, die Arithmetik auf Logik zurückzuführen.

Im Hinblick auf diese Ausgangspunkte, könnte tatsächlich an einigen Stellen eine Gegensätzlichkeit beider Systeme festgestellt werden.

Hier sollen nur flüchtig Beispiele solcher angeführt werden.

Frege wollte aus der logischen Bezeichnungsweise und der mathematischen Formelsprache, eine einheitliche Begriffsschrift entwerfen, welche nur eine Interpretation zulässt. Booles algebraische Symbolik erlaubte in ihrer Anwendung mehrere Interpretationen des Logikkalküls.

Boole sah die mathematische Methode als vollkommen, ihr schrieb er auch eine leitende Funktion zu. Hingegen sah Frege die ‚festeste‘ Beweisführung in der rein logischen, und als ‚Richtschnur‘ erkannte er die logischen Gesetze an.

Diese seien die allgemeinsten, liegen allem zugrunde, und nur darauf soll gebaut werden. Boole, jedoch, unterschied seine fundamentalsten Gesetze, und bestimmte eines als der Logik eigentümlich.

Und wenn, ferner, ein letzter oder wesentlicher Leitgedanke aufgezeigt werden sollte, welcher den Kern ihrer Überlegungen bildete, diese leitete, den Aufbau und die Ausarbeitung ihrer Systeme bestimmte – so könnte man Freges Gewichtung auf das begriffliche Denken, der Voranstellung Booles mentaler Operationen entgegenstellen.

Es könnte aber umgekehrt eine Konzeption genannt werden, worin ein Zusammenfallen besteht. Und wenn sie unterschiedlich verstanden wurde, und im jeweiligen Modell eine bestimmte Gestalt annehmen sollte, so hatten Boole und Frege die Gesetze des Denkens vor Augen.

Nichtsdestotrotz, ging ebenfalls hervor, dass sie unterschiedliche Auffassungen über die Beziehung der Logik zur Mathematik hatten.

Vor allem in diesem Zusammenhang, sei aber erwähnt, dass der historische Kontext, in welchem Boole eingebettet war, auch andere wissenschaftliche Vorraussetzungen darbot.

Denn im Gegensatz zu Letzterem, gehörte Frege einer Epoche an, wo die Untersuchung der mathematischen Grundlagen nun zu einem Forschungsgebiet geworden war, und mit der betonten Einbeziehung der Logik betrieben wurde.

Und dass diese Systeme zueinander in scharfem Kontrast gebracht wurden, verantworteten außenstehende Denker. Letztere sahen die Gegensätzlichkeit darin betont, dass Boole die Logik als ‚Teil‘ der Mathematik zeigen wollte, und Frege, die Arithmetik als erweiterte Logik.

Selbst wenn ihre jeweiligen Programme dieser Klassifizierung unterzogen werden, lautet eine entgegengesetzte Meinung, so sei der Unterschied nicht so

groß, da sie in einem wesentlichen Punkt übereinstimmten. Eine Notwendigkeit, nämlich, in der symbolischen Unterziehung von logischen Beziehungen für die Erschaffung eines Kalküls zu sehen. (Kneale, S. 435)

So mögen hier, auch andere Gemeinsamkeiten genannt werden.

Denn Boole sprach der Mathematik die Fähigkeit ab, eine Einsicht in ihre eigenen Prinzipien erlangen zu können, und dass es nicht ihrem Wesen angehört, über die Ideen der Zahl und der Quantität nachzudenken.

So zog Frege, zur Durchleuchtung der Natur arithmetischer Sätze, philosophische Überlegungen heran, bevor er zur Definition des Zahlbegriffs übergehen sollte.

Obwohl grundverschieden, legten beide eine axiomatische Basis fest, auf welche ihre Logiksysteme fundiert werden sollten.

Und was die Rolle einer symbolischen Sprache betrifft, so schrieben ihr beide eine für die Wissenschaft fördernde Wirkung zu (wenn auch aus verschiedener Sicht).

Bezüglich Freges Kritik an Booles System zeigte sich, dass sie nicht zuletzt aus der Verteidigung seines eigenen Modells hervorging.

Denn wo sein System zunächst wenig Beachtung erfuhr, so war sie dann aber der Kritik ausgesetzt (nicht zuletzt durch Schröder, einem Hauptvertreter der Algebra der Logik und zu jener Zeit ein bereits anerkannter Mathematiker), und musste sich einem etablierten System gegenüber, erst behaupten.

Jedenfalls standen Frege und Boole zueinander nicht in polemischer Beziehung, da sich ihre Lebzeiten nur begrenzt überschneiden. Zumindest nicht als 1879 die *Begriffsschrift* Freges erschien.

Hier könnte eher der Austausch Freges mit anderen Denkern genannt werden. Nicht zuletzt an der Korrespondenz ersichtlich, welche er mit einigen unterhielt (z. B. Hilbert, Husserl oder Russell)

Zur Frage ob nun ein Zusammenprall - vermeintlich oder tatsächlich - besteht oder nicht, so sei schlussendlich auf die Entstehungsvoraussetzungen hingewiesen.

Denn dass sie verschiedene Auffassungen der Logik hatten, überhaupt von unterschiedlichen Absichten ausgingen, so könnten – in der Gegenüberstellung – ebendiese Umstände bedacht werden, welche die Beschaffenheit des jeweiligen Systems verantworten.

5 Eine andere Entwicklung

Unter den unterschiedlichen Denkansätzen zur Untersuchung der Grundlagen der Mathematik, für welche die Einbeziehung der formalen Logik wesentlich geworden war, ging von David Hilbert (1862 – 1943) der Formalismus aus. Gemeinsam mit seinen Schülern, darunter Wilhelm Ackermann und Paul Bernays, wurde als weiterer Schritt die Metamathematik entwickelt. (Kline, S. 1205)

In seinem Programm, ging Hilbert vom Vorhaben aus, die Widersprüche, welche aus der Axiomatisierung der Logik, Arithmetik, Analysis und Mengenlehre entstanden sind, zu eliminieren.

Entgegen der Ansicht, die Arithmetik auf Logik zu reduzieren, schlug er vor beide gemeinsam zu entwickeln um die Widerspruchsfreiheit des gesamten Systems nachzuweisen. (Kneale, S. 683)

Hierfür⁴⁸ war die Axiomatik von größter Wichtigkeit, allerdings im formalen und nicht im materialen (oder inhaltlichen) Sinne.

Zuvor wurde aber eine logische Symbolik entwickelt, welche als Formelsprache zur Verdeutlichung der Struktur mathematischer Axiome dienen sollte.

In der Axiomatisierung wurde von der „sachlichen“ Bedeutung der Gegenstände und Beziehungen abstrahiert, und „nur noch“ auf die formale Struktur der Verbindungen geachtet.

Auf dieser Grundlage, sollte die Formalisierung der logischen Schlüsse erlangt werden, wobei auch in diesem Fall, nur die formale Struktur in Frage kam, und die inhaltliche Bedeutung logischer Zusammenhänge und Schlussfolgerungen ‚ausgeschaltet‘ wurde. (H. & B. 1968, S. 45)

⁴⁸ Im Werk *Grundlagen der Mathematik*, präsentierten Hilbert und Bernay ihre Ergebnisse zu diesem Projekt. Und obwohl sie, den Autoren nach, von der Lösung dieses Problems, „noch weit entfernt“ seien, eröffnete sich doch in aus ihren Untersuchungen ein „neues Feld der Forschung“. (H. & B. 1968, S. 44)

Die Aufgabe des Beweises der Widerspruchsfreiheit, soll durch die Methode zu einem „*finiten*“ Problem gemacht werden, und diese Bedingung muss in der Methode erfüllt sein.

In der ausgebildeten Methode der Formalisierung sei die genannte Bedingung (sofern die formale Axiomatik vollständig gelingt), den Beweis zu einem finiten Problem zu machen, auch realisiert.

Denn die Formalisierung der arithmetischen Axiome geht so vor, dass ihre Voraussetzungen „übersetzt“ werden, in „Ausgangsformeln“ und Regeln der Ableitung.

So wird der arithmetische Beweis als eine „anschaulich überblickbare Aufeinanderfolge von Prozessen“ dargestellt. Und jeder dieser Prozesse gehört einem „von vornherein“ angeführten Bestand von „in Betracht kommenden Handlungen“. (H. & B. 1968, S. 44)

Zur Formalisierung der logischen Schlüsse, wobei das logische Schließen nach bestimmten Regeln durch „äußeres Handeln“ nachgebildet wurde, gelangte man zuvor auf der Grundlage der formalisierten Axiome. (H. & B. 1968, S. 45)

Und indem die axiomatischen Formeln in einer begrenzten Anzahl festgelegt werden und die Schritte der logischen Schlussfolge auf eine begrenzte Anzahl festgelegter Regeln vorgenommen wird, ergibt sich auch eine finite Methode (welche ebenfalls verlangt wurde).

Denn wie in der elementaren Zahlentheorie, bestehe für die formalisierte Arithmetik, „grundsätzlich dieselbe methodische Sachlage“.

Denn in Ersteren gelingt es Unmöglichkeitsbeweise im finiten Sinne zu führen. Beispielsweise wird gezeigt, dass es zwei Ziffern m, n nicht „derart“ geben kann, dass

$$m \cdot m = 2 \cdot n \cdot n.$$

So ist es auch in der formalisierten Arithmetik ein finites Problem, wenn gezeigt wird, dass in diesem System nicht zwei Beweise auf eine Weise vorhanden sein

können, wo die Endformel des einen Beweises mit der Negation der Endformel des anderen übereinstimmt.

Und in ebendiesem sieht das hilbertsche Programm vor, die Widerspruchsfreiheit eines Systems zu beweisen.

So reicht es für den Nachweis der Widerspruchsfreiheit eines Formalismus aus, dass eine bestimmte Formel aus diesem Formalismus als „unableitbar“ zu erkennen, wobei die Negation einer ableitbaren Formel unableitbar sein muss, damit eine Widerspruchsfreiheit besteht. (H. & B. 1968, S. 219)

In diesem Sinne des Beweises, wurde die vollzogene Formalisierung der logischen Schlüsse „zu einer systematischen *Beweistheorie* verwertet“.

Sie ist imstande die „Tragweite“ der logischen Schlüsse geeigneter zu behandeln, als es in der traditionellen Logik der Fall war, weil sie hier mit „systematischer Allgemeinheit“ durchgeführt wurde.

Und in der Untersuchungsmethode dieser Theorie sah man ein Gelingen des Vorhabens, die Grundlagen der Mathematik mit jenen der Logik „in unmittelbaren Zusammenhang“ zu bringen.

Letzteres bildet den Gegenstand des Unternehmens, und überhaupt der Ausgangspunkt der Überlegungen war. Und das Wesentliche in diesem Programm, ist die Widerspruchsfreiheit des gesamten Systems nachzuweisen.

Hier setzt die Weiterentwicklung dieser Beweistheorie, auch „Metamathematik“ genannt, an. Wobei zuvor die Formalisierung des Schließens unabhängig von ihrer Anwendung auf die Beweistheorie dargelegt wird. (H. & B. 1968, S.44)

Es sei auf die sich unterscheidenden Merkmale jeweiliger Konzeptionen hingewiesen, welche aus den Vorgehensweisen, bzw. aus der Zielsetzung eines jeden Vorhabens überhaupt, resultieren.

So steht dieses Programm, unter mehreren Gesichtspunkten, in scharfem Kontrast zu den Auffassungen Freges.

Im Gegensatz zur Zielsetzung des obigen Programms, war es sein erklärtes Vorhaben, die Arithmetik auf Logik zurückzuführen.

Und nicht zuletzt im geforderten Formalismus der Struktur, der vom Inhalt absieht, kann eine direkte Umkehrung der Fregeschen Gewichtung auf den gedanklichen Inhalt festgestellt werden, welcher die Beschaffenheit seiner Logik wesentlich bestimmt.

Es ist ferner der Aspekt der Allgemeinheit in Freges Logik zu beachten, wo doch dieser den Ausschluss metasystematischer Fragestellungen (wie Vollständigkeit, Widerspruchsfreiheit oder Unabhängigkeit der Axiome) zur Folge hat. (Heijenoort/ Sluga I [Hrsg.], S. 74)

Durch ihren Aufbau, nämlich.

Auch Frege sieht, dass ein formales System Regeln bedarf, die außerhalb dessen Bereichs liegen. Sie sollen aber für die Zeichenbedienung gebraucht werden.

Solche Grundsätze des Denkens zog er auch heran, und diese wurden in solche Regeln „verwandelt“, die der „Anwendung unserer Zeichen“ dienen.

Als „Abbilder“ der Gesetze, können diese Regeln aber deshalb nicht in der Begriffsschrift ausgedrückt werden, „weil sie ihr zu Grunde liegen“. (BS, S. 25)

Indem ‚äußere‘ Grundsätze des Denkens diese Zuweisung erteilt bekommen, wird eine Abgeschlossenheit des Systems erlangt (sofern Frege von einer solchen überhaupt sprechen würde), sodass nichts außerhalb dieses gesagt werden kann oder muss.

6 Schlusswort

Die Relevanz der dargestellten Innovationen – ob zur Entstehungszeit der formalen Logik, oder in späteren Abschnitten ihrer Geschichte – sollte im Hinblick auf ihre Voraussetzungen, ihren Anforderungen, und ihr Verständnis für die logische Disziplin selbst, untersucht werden.

Über Leibnizens Idee, beispielsweise, einer universalen Symbolsprache und dem dazugehörigen logischen Kalkül, fanden sich unterschiedliche Auffassung über die Beschaffenheit einer solchen Sprache und welchen Anforderungen sie genügen muss, um als eine adäquate Begriffsschrift zu gelten. Womit die Bestimmung der geeigneten Ausstattung eines Systems verschieden war, und so auch die Bedingungen ihrer Konstruktion.

Aber vor allem im Hinblick auf die Gegenüberstellung von Freges und Booles Modelle ging hervor, dass aus dem divergierenden Verständnis der Logik wie auch ihrer Beziehung zur Mathematik, die Gestalt der Projekte bestimmt wurde - in ihrer Gliederung, ihren Hauptmerkmalen und den Instrumentarien welcher sie sich bedienten. Wobei die Tragweite der Anwendung ihrer Modelle, nicht zuletzt in der Rezeption bzw. Annahme durch Dritte gekennzeichnet wurde.

Nicht zuletzt anhand dieser, sollte sichtlich gemacht werden, welche eine Verschiedenheit aus einer bestimmten Auffassung eines Logiksystems, resultieren kann.

Und dennoch, steht, in seiner inneren Gliederung, mitsamt der dazugehörigen Bestandteile und Methoden, jedes für sich als eigenständiges System da.

Wie aber dem Titel zu entnehmen ist, bildete schlussendlich die formale Logik den übergreifenden Bogen, und wie sie sich als wissenschaftliche Disziplin entwickelte, den Leitgedanken.

Und zumindest im Vorhaben, eine Einsicht in die Bedingungen zur Erschaffung eines logischen Systems zu erlangen, sieht sich die Zielsetzung dieser Arbeit realisiert. Und wenn nicht in dieser, dann im Wunsch die logische Disziplin weiterhin zu erforschen.

7 Anhänge

7.1 Literaturverzeichnis

PRIMÄRLITERATUR

Aristoteles: Organon I & II – *Kategorien & Lehre vom Satz*, Hamburg: Felix Meiner Verlag, 1958

Aristoteles: Organon III – *Lehre vom Schluß (oder Erste Analytik)*, Hamburg: Felix Meiner Verlag, 1975

Boole, George: *The Mathematical Analysis of Logic – Being an Essay towards a Calculus of deductive Reasoning*, Oxford: Basil Blackwell, 1948

Boole, George: *The Calculus of Logic*, Cambridge and Dublin Mathematical Journal Volume III, 1848 (S. 183- 198)⁴⁹

Boole, George: *An Investigation of the Laws of Thought on which are founded the mathematical Theories of Logic and Probabilities*, New York: Dover Publications Inc., 1958

Berka, Karel/ **Kreiser**, Lothar [Hrsg.]: *Logik-Texte - Kommentierte Auswahl zur Geschichte der modernen Logik*, Berlin: Akademie Verlag, 1983³

Church, Alonzo: *Introduction to mathematical Logic*, Princeton: Princeton University Press, 1956

⁴⁹ Quelle aus dem Internet, URL: <http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Boole/CalcLogic> – Text transkribiert von D. R. Wilkins, School of Mathematics, Trinity College, Dublin.

Frege, Gottlob/ Hermes, Hans; Kambartel, Friedrich; Kaulbach, Friedrich [Hrsg.]: Nachgelassene Schriften und wissenschaftlicher Briefwechsel Band I – Nachgelassene Schriften, Hamburg: Felix Meiner Verlag, 1969

Frege, Gottlob/ Gabriel, Gottfried [Hrsg.] : Schriften zur Logik und Sprachphilosophie – Aus dem Nachlaß, Hamburg: Felix Meiner Verlag, 1971

Frege, Gottlob/ Patzig, Günther [Hrsg.]: Logische Untersuchungen, Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1976²

Frege, Gottlob/ Angelelli, Ignacio [Hrsg.]: Begriffsschrift und andere Aufsätze, Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1988³

Frege, Gottlob: Die Grundlagen der Arithmetik – *Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Hamburg: Felix Meiner Verlag, 1988

Frege, Gottlob: Grundgesetze der Arithmetik I & II, Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1998

Gabriel, Gottfried [Hrsg.]: Gottlob Freges Briefwechsel mit D. Hilbert, E. Husserl, B. Russell, sowie ausgewählte Briefe Freges, Hamburg: Felix Meiner Verlag: 1980

Gödel, Kurt: Über die Vollständigkeit des Logik Kalküls, o. J.

Hilbert, D. & **Ackermann**, W.: Grundzüge der theoretischen Logik, Heidelberg: Springer Verlag Berlin, 1967 (5. Aufl.)

Hilbert, D. & **Bernays**, P.: Grundlagen der Mathematik I, Heidelberg: Springer Verlag Berlin, 1968²

Hilbert, D. & Bernays, P.: Grundlagen der Mathematik II, Heidelberg: Springer Verlag Berlin, 1970²

Jevons, W. Stanley: Elementary Lessons in Logic, London: Macmillan, 1886

Kant, Immanuel: Logik, Physische Geographie, Pädagogik – *Kants Werke Band IX*, Berlin: de Gruyter & Co., 1968

Leibniz, Gottfried Wilhelm von: Philosophische Schriften Band IV - *Schriften zur Logik und zur philosophischen Grundlegung von Mathematik und Naturwissenschaften*, Darmstadt: Wissenschaftliche Buchges., 1992

Leibniz, G. W. v./ Schupp, Franz [Hrsg.]: Die Grundlagen des logischen Kalküls, Hamburg: Felix Meiner Verlag GmbH, 2000

Łukasiewicz, Jan: Aristotle's Syllogistic, Oxford: Clarendon Press, 1957²

Łukasiewicz, Jan: Elements of Mathematical Logic, New York: Pergamon Press, 1958²

Łukasiewicz, Jan / Borkowski, L. [Hrsg.] : Selected Works, Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1970

Peano, Giuseppe: Notations de Logique Mathématique – Introduction au Formulaire de Mathématique Turin: Imprimerie Charles Guadagnini, 1894

Peano, Giuseppe/ Asser, G. [Hrsg.]: Arbeiten zur Analysis und zur mathematischen Logik, Leipzig: Teubner Verlag, 1990

Peirce, Charles Sanders/ Hartshorne, Charles; Weiss, Paul [Hrsg.] : Collected Papers – *Vol. III Exact Logic & Vol. IV The Simplest Mathematics* , Cambridge: Harvard University Press, 1967³

Peirce, Charles Sanders/ Ketner, Kenneth Laine [Hrsg.]: Reasoning and the Logic of Things – *The Cambridge Conferences. Lectures of 1898*, Cambridge: Harvard University Press, 1992

Quine, Willard Van Orman: Grundzüge der Logik, Frankfurt am Main: Suhrkamp Verlag, 1974

Quine, Willard Van Orman : Mathematical Logic, Cambridge: Harvard University Press, 1951

Russell, Bertrand: Einführung in die mathematische Philosophie, München: Drei Masken Verlag, 1930²

Schröder, Ernst: Vorlesungen über die Algebra der Logik – *Exakte Logik Band I*, Verlag Teubner: 1890

Whitehead, Alfred North/ **Russell**, Bertrand: Principia Mathematica- Vorwort und Einleitungen mit einem Beitrag von Kurt Gödel, Berlin, Suhrkamp: 1984

Whitehead, A. N./ **Russell**, Bertrand/: Principia Mathematica Volume I, London: Cambridge University Press: 1925²

Whitehead, A. N. : Einführung in die Mathematik, Wien: Humboldt Verlag, 1948

Whitehead, A. N.: Philosophie und Mathematik – Vorträge und Essays, Wien: Humboldt Verlag, 1949

Wittgenstein, Ludwig: Tractatus Logico - Philosophicus, Frankfurt am Main: Suhrkamp Verlag, 1984

SEKUNDÄRLITERATUR

Angelelli, Ignacio/ Cerezo, Maria [Hrsg.]: Perspektiven der analytischen Philosophie Band VIII – Studies on the History of Logic, Berlin: De Gruyter, 1996

Beaney, Michael [Hrsg.]: The Frege Reader, Oxford: Blackwell, 1997

Blum, Wolfgang: Die Grammatik der Logik – Einführung in die Mathematik, München: dtv, 2002³

Böhme, Gert: Einstieg in die mathematische Logik, Wien & München: Hanser Verlag, 1981

Boehner, Philoteus: *Medieval Logic An Outline of its Development from 1250 to c. 1400*, Manchester: Manchester University Press, 1966

Bourbaki, Nicolas: Elemente der Mathematikgeschichte, Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1971

Brown, Frank Markham: Boolean Reasoning – The Logic of Boolean Equations, N. Y.: Dover Publications Inc., 2003²

Demopoulos, William [Hrsg.]: Frege's Philosophy of Mathematics, Cambridge: Harvard University Press, 1997

Düring, Ingemar: Aristoteles – Darstellung und Interpretation seines Denkens, Heidelberg: Carl Winter Universitätsverlag, 1993

Kline, Morris: Mathematical Thought from ancient to modern Times, N.Y.: Oxford University Press, 1979 (5. Aufl.)

Kneale, William & Martha: The Development of Logic, Oxford:
Clarendon Press, 1962

Kneebone, G. T.: Mathematical Logic and the Foundation of Mathematics – *An introductory Survey*, N. Y.: Dover Publications Inc., 2001

Lemmon, E. J.: Beginning Logic, London: Chapman & Hall, 1992²

Mates, Benson: Elementare Logik – Prädikatenlogik der 1. Stufe, Göttingen:
Vandenhoeck & Ruprecht, 1978²

Mates, Benson: Stoic Logic, Berkeley & Los Angeles: University
of California Press, 1953

Menne, Albert: Einführung in die formale Logik, Darmstadt: wissenschaftliche
Buchgesellschaft, 1991²

Resnik, Michael D.: Frege and the Philosophy of Mathematics, Ithaca: Cornell
University Press, 1980

Savigny, Eike von: Grundkurs im logischen Schließen, München:
dtv wissenschaftliche Reihe 1976

Scholz, Heinrich: Geschichte der Logik, Berlin: Junker und Dünhaupt Verlag,
1931

Sluga, Hans [Hrsg.]: The Philosophy of Frege *Volume I – General Assessments
and historical Accounts of Frege's Philosophy*, New York: Garland Publishing
Inc. 1993

Sluga, Hans [Hrsg.]: *The Philosophy of Frege Volume II - Logic and Foundation of Mathematics in Frege's Philosophy*, New York & London: Garland Publishing Inc. 1993

Speck, Josef [Hrsg.]: *Grundprobleme der großen Philosophen - Philosophie der Gegenwart I*, Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1972

Stelzner, Werner [Hrsg.]: *Perspektiven der analytischen Philosophie Band III - Philosophie und Logik*, Hamburg: De Gruyter, 1993

Tichý, Pavel: *The Foundations of Frege's Logic*, Berlin: De Gruyter, 1988

Tiles, Mary: *Mathematics and the Image of Reason*, London: Routledge, 1991

Urchs, Max: *Klassische Logik – Eine Einführung*, Berlin: Akademie Verlag, 1993

7.2 Abstract

In der vorliegenden Arbeit sollte zunächst, anhand von ausgewählten Stationen der Logikgeschichte, ihre Entwicklung dargestellt werden. Wobei die Merkmale der jeweiligen Systeme dargestellt, wie auch ihre Besonderheiten aufgezeigt werden sollten.

So, die erste systematische Konstruktion eines logischen Systems durch Aristoteles, dessen Lehre auch großen Einfluss ausübte.

Die Ausbildung einer Aussagenlogik dank der Stoiker, und in bestimmten Punkten eine Antizipation moderner Auffassungen darstellt.

Von besonderer Relevanz, allerdings in anderer Hinsicht, sollten sich Leibnizens Ansätze erweisen. So gilt er mancherorts als Schöpfer der mathematischen Logik, da er die Wichtigkeit einer symbolischen Sprache für die Darstellung eines logischen Kalküls erkannte und einforderte.

Den Neuerungen der folgenden Zeit, aber, und welche sich für die moderne Logik von grundlegender Wichtigkeit erweisen sollten, gilt das besondere Interesse.

Peano, welcher eine Axiomatisierung der Arithmetik unternahm, und dessen logisch - mathematische Notation zu seinen Hauptverdiensten gezählt wird.

Boole, welcher eine bestimmte Algebra entwarf und auf dieser Grundlage ein Logikkalkül konstruierte.

Und Frege, dessen Projekt es war, die Arithmetik als Zweig der Logik zu zeigen, und für diesen Zweck seine Begriffsschrift konzipierte.

Ebenfalls, als Beispiel einer Weiterentwicklung in der Logik angeführt, wird die formalistische Schule Hilberts vorgestellt, in welcher die Metamathematik ihren Ausgangspunkt hatte.

Der Gegenüberstellung der Modelle von Boole und Frege, gilt aber das besondere Augenmerk. In bestimmter Hinsicht, nämlich. So galt es zu

durchleuchten, inwiefern ein unterschiedliches Verständnis von Logik, die Auffassung ihrer Beziehung zur Mathematik, die Voraussetzungen, welche sich bezeichnend für das Vorgehen des jeweiligen Denkers erwiesen - den Entwurf, auch, unterschiedlicher Systeme zur Folge hatten.

7.3 Curriculum Vitae

Maram Maria Salah

Viktorgasse 14 /22,

A – 1040 Wien

Email: eossalah@yahoo.com

Geboren am: 30.09.1982

Staatsbürgerschaft: Österreich

Ausbildung

- 11/ 2008 Vorrausichtliche Erlangung des Magister Grades
 Studienrichtung: Philosophie, Universität Wien
 *Titel der Diplomarbeit: „Zur Entwicklung der formalen Logik- Die Systeme
Booles und Freges als Herausragungen ihrer Geschichte“*
- 03/ 2007- Studium der Kunstgeschichte an der Universität Wien
- 10/ 2000- Studium der Philosophie und Französisch an der Universität Wien
- 12/ 2004
- 07/ 2000 Erlangung der Allgemeinen Jordanischen Reifeprüfung, Naturwissenschaften
 Collège des Sœurs de Nazareth, Amman- Jordanien

Studienbegleitende Tätigkeiten/ Berufserfahrung

- seit Juli 2008 Recherche und Datenauswertung
 Internationale Handelskammer, Wien
- seit Februar 2008 Pressearbeit/ Praktikum
 Michael Grabner Media GmbH, Wien
- Seit 2007 Arztassistentz
 Ordination Dr. Michael Kuhn, Wien
- Sommer 2003 Praktikum, abteilungsübergreifende Unterstützung
 Nationales Forensisches Institut, Amman/ Jordanien
- Sommer 2000 Projektbezogene Mitarbeit in der Marketingabteilung
 Asset Marketing GmbH, Wien

Sprachkenntnisse

- Deutsch, Arabisch (Muttersprachen)
- Englisch (fortgeschritten in Wort und Schrift)
- Französisch (sehr gut in Wort und Schrift)

Sonstige Kenntnisse

Windows XP, Mac, MS Office Package (Word, Excel, Power Point)