



universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Wie man den Ausgang der
österreichischen Fußballbundesliga
berechnen kann –
wahrscheinlichkeitstheoretische
Betrachtungen zum Fußballspiel

Verfasserin

Lisa Posch

Angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, Februar 2011

Studienkennzahl laut Studienblatt: A 190 406 482

Studienrichtung laut Studienblatt: Lehramtsstudium UF Mathematik UF Bewegung und Sport

Betreuer: ao. Univ.-Prof. Dr. Peter Raith

INHALTSVERZEICHNIS

1. Einleitung	7
2. Das Fußballspiel	9
2.1. Die Regeln	9
3. Wahrscheinlichkeitstheorie und Fußball	13
3.1. Auswirkung der geringen Toranzahl in einem Spiel	13
3.1.1. Ungerade Toranzahl	13
3.1.2. Gerade Toranzahl	14
3.1.3. Resultat	15
3.2. Wahrscheinlichkeit für k Tore pro Spiel	20
3.2.1. Die Poissonverteilung	20
3.2.2. Die österreichische Fußball Bundesliga	23
3.2.3. Der Chi Quadrat Anpassungstest	29
3.2.4. Wahrscheinlichkeit für ein Unentschieden	35
3.2.5. Wahrscheinlichkeit für k Tore Unterschied	37
3.2.6. Toranzahl im Laufe der Zeit	39
3.3. Tordifferenz	45
3.3.1. Berechnung der mittleren Toranzahl über die Tordifferenz	46
3.3.2. Heimvorteil	48
3.3.3. Spiel endet mit Tordifferenz r	50
3.4. Zufall	55
3.4.1. Zufallstore	55
3.4.2. Auswirkung des Zufalls auf die Bundesligatabellen	56
3.5. Sportwetten	61
3.5.1. Toto	64
4. Aufgabensammlung	69
5. Resümee	81
Literatur	83
Abbildungsverzeichnis	85
Tabellenverzeichnis	86

ZUSAMMENFASSUNG

In der vorliegenden Arbeit geht es um die Zusammenhänge zwischen dem Sportspiel Fußball und der Stochastik. Es wird gezeigt, warum sich das Fußballspiel sehr gut für wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtungen eignet. Aufgrund der wenigen Tore, die in einem Match fallen, spielt der Zufall, abgesehen vom Können, eine beachtliche Rolle. Er trägt dazu bei, dass Fußballergebnisse nur schwer prognostizierbar sind. Auch wenn es widersprüchlich klingt, macht aber genaue diese Zufallskomponente das Spiel mathematisch analysierbar. Sie ist zusätzlich mit ein Grund für die Beliebtheit dieser Sportart, da oftmals das vermeintlich schlechtere Team gewinnt.

Es kann bewiesen werden, dass die Anzahl der Tore, die ein Team in einem Spiel erzielt, in dem n Tore gefallen sind, (n, p) -binomialverteilt ist. Dabei ist p die Wahrscheinlichkeit, dass wenn ein Tor gefallen ist, es von diesem Team erzielt wurde. Außerdem wird gezeigt, die Tore, die in einem Fußballspiel fallen, sind annähernd poissonverteilt und somit können mögliche Spielausgänge simuliert werden. So kann zum Beispiel die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, ob bei einem Wiener Derby SK Rapid Wien oder FK Austria Wien gewinnt oder wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass in einem Spiel mehr als ein Tor fällt. Grundlage für die Simulationen ist, die durchschnittliche Toranzahl pro Spiel (also in 90 Minuten) bzw. von jedem Team zu kennen. Diese kann direkt aus Tabellen entnommen werden oder für etwas bessere Simulationen über die Tordifferenz berechnet werden. Das Miteinbeziehen der Tordifferenz berücksichtigt auch das Abwehrverhalten bei den Berechnungen. Es wird in der Arbeit ausgehend von einem sehr einfachen Modell zum Errechnen möglicher Spielausgänge ein verfeinertes vorgestellt, das auch die erhaltenen Tore und den Heimvorteil miteinbezieht. Weiters wird die Toranzahl im Laufe der Zeit betrachtet, da es bei einem Fußballspiel immer interessant ist wann das erste Tor erzielt wird. Es wird gezeigt, wie die Besselsche Funktion mit der Wahrscheinlichkeit für ein Unentschieden zusammenhängt. Außerdem wird untersucht, wie stark sich der Zufall letztendlich auf die Punktetabellen der österreichischen Bundesliga auswirkt. Alle Berechnungen werden beispielhaft für die Bundesligasaisons 2008/09 und 2009/10 durchgeführt.

Im Zusammenhang mit der Zufallskomponente wird auch auf das Thema Fußballwetten eingegangen, vor allem auf die Sportwette Toto.

Eine abschließende Aufgabensammlung soll die Bedeutung dieser Thematik für den Unterricht verdeutlichen. Es lassen sich praxisnahe Aufgaben erstellen, die das Interesse der Schüler/innen wecken sollen.

ABSTRACT

In this paper I deal with the coherence of football (soccer) and stochastics. It will be shown that soccer can be described very well using probabilistic considerations. In a soccer match only a few goals are scored. Therefore random effects are important apart from the athletic performance of the players. It's not possible to predict the final score of a match. Although it sounds contradictorily the game is mathematical analysable because of the randomness. That's also the reason for the popularity of soccer, because often the underdog team wins.

It will be shown that the number of goals scored by a team in a match with totally n goals is binomial distributed ((n, p) - distributed). Here p is the probability that a goal is scored by this team if a goal is scored. It will also be proved that the numbers of goals in a soccer match is Poisson distributed. Hence it's possible to simulate the final score of a match. For example, one can calculate the probability that SK Rapid Vienna or FK Austria Vienna wins the Vienna derby. Also the probability to score more than one goal in a match can be calculated. To this end it's necessary to know the average number of goals which are scored in 90 minutes or to know the average number of goals for each team. One can find the average goal numbers in football tables or one can calculate them using the average goal difference. Using the average goal difference also the defensive performance of the teams is considered. Starting with a simple model to calculate eventually final scores in this paper better ones are developed which also take account of the defensive performance and the home advantage. Furthermore the number of goals in relation to the playing time will be considered. In particular the first goal in a match plays an important role. The connection of the probability for a draw with the Bessel function will be discussed. Also the influence of the random effects on the final ranking of the Austrian soccer league is investigated. All calculations will be done for the season 2008/09 and season 2009/10 of the Austrian soccer league.

The issue soccer betting will be mentioned because it's also influenced by the randomness. In the last chapter a collection of problems usable in school education is presented. One can find problems close to reality in order to motivate the students.

1. EINLEITUNG

Fußball ist wohl eine der bekanntesten und weit verbreitetsten Sportarten der Welt. In Österreich gibt es sehr viele Menschen, die den Sport Fußball ausüben. Berichten des ÖFB (Österreichischer Fußballbund) zu Folge, vgl. [18], gibt es fast „600 000 gemeldete Spieler und Spieler/innen in über 2 000 Vereinen“ und Fußball „ist neben Skifahren der Lieblingssport der Österreicher“. Abgesehen davon hat Fußball einen großen Unterhaltungswert. Es gibt immer sehr viele Zuschauer/innen, die sich von dieser Sportart im Stadion oder vor dem Fernseher mitreißen lassen. Zum Beispiel sind bei einem Fußballbundesligaspiel im Schnitt 8000 Zuseher im Stadion, vgl. [27], und im Jahr 2010 haben die Spiele des ÖFB-Teams, also die Länderspiele, etwa 622 000 Zuschauer/innen im ORF verfolgt und es waren im Schnitt 19 450 Zuschauer/innen im Stadion, nach [13].

Nach [22] macht es den Reiz des Fußballspiels aus, dass es ein relativ einfaches und leicht nachvollziehbares Spiel ist. Eine weitere Ursache für die Beliebtheit dieser Sportart sind groteskerweise die wenigen Tore, die bei einem Fußballspiel fallen. Auch wenn es viele Fußballfans nicht hören wollen spielt dabei der Zufall eine gewisse Rolle. In [22, S. 115] wird das mit einer einfachen Formel: „Erfolg = Glück + Können“ beschrieben.

Wenn man Fußballstatistiken betrachtet, fallen, wie später genauer gezeigt wird, in einem Bundesligaspiel im Schnitt ca. 3 Tore. In 90 Minuten Spielzeit wird aber wesentlich öfter versucht ein Tor zu erzielen, nämlich wie [6] schreibt etwa 10 bis 20 Mal. Wenn bei etlichen Versuchen nur ein, zwei Treffer pro Team erzielt werden, spielen offensichtlich der Zufall bzw. Glück oder Pech eine gewisse Rolle. Und genau das macht das Fußballspiel attraktiv. Bei Spielen, wie Handball, wo weitaus mehr Tore erzielt werden (etwa 50 Tore pro Spiel) ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein schlechteres Team gewinnt geringer, als bei einem Spiel, in dem weniger Tore fallen, vgl. 3.1 auf Seite 13. Das heißt es setzen sich die besseren Teams meistens durch. Beim Fußball kommt es gegenüber Sportarten mit vielen Toren bzw. Punkten zu mehr Überraschungssiegen, was zur Faszination dieser Sportart beiträgt.

Annahmen wie diese können mathematisch gezeigt werden. Es gibt viele weitere Dinge, wie Vermutungen über den Spielausgang, die mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung analysiert werden können. Ich möchte nun in den folgenden Kapiteln zeigen welcher Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeitstheorie, Statistik und Fußball besteht. Dazu wird aber zuerst ein kurzer Überblick über das Fußballspiel gegeben.

2. DAS FUSSBALLSPIEL¹

Fußball zählt zu den bekanntesten Spielen der Welt. Quellen zu Folge ist China das Ursprungsland, wo bereits 2000 vor Christus ein fußballähnliches Spiel namens „Ts’uh-küh“ gespielt wurde. Dabei bedeutet „Ts’uh“ mit dem Fuß stoßen und „küh“ Ball. Dieses Spiel geriet allerdings in Vergessenheit, wie [22, S. 4] berichtet.

Die Grundzüge des Spiels, wie man es jetzt kennt, wurden im 19. Jahrhundert in England gelegt. Zuvor war „Fußball ein simples, wildes und unreguliertes Volksspiel, das nach ungeschriebenen tradierten Regeln gespielt wurde“, wie [24, S. 37] schreibt.

Im Jahr 1849 wurden in Eton die ersten Regeln schriftlich fixiert und von da an ähnelte es sehr dem Spiel, wie wir es heute kennen. Unter anderem wurde die entscheidende Regel, die das Spielen mit der Hand verbietet, festgelegt. Damit trennte sich das Fußballspiel letztlich eindeutig vom Spiel Rugby, denn zuvor durfte der Ball auch mit der Hand gespielt werden. Mit der Gründung des ersten Fußballverbands, der „Football Association“ 1863 in London wurde ein weiterer wichtiger Schritt zur Entwicklung des heutigen Fußballs gesetzt, indem versucht wurde die Regeln in einem ausführlichen Regelwerk zu vereinheitlichen. So wurden seit 1863 nach und nach Regeln entwickelt. Am 21.05.1904 wurde in Paris der Fußballweltverband, die „Fédération Internationale de Football Association“ (FIFA) gegründet. Heute ist der Hauptsitz in Zürich und es gehören 208 Fußballverbände der FIFA an. Das offizielle Regelwerk der FIFA besteht aus 17 Spielregeln, die seit 1938 bestehen und nur geringfügig geändert wurden. Die FIFA kontrolliert jährlich, ob die Regeln noch passend sind und führt gegebenenfalls Änderungen durch.

2.1. Die Regeln²

Bei dem Spiel Fußball spielen pro Team 11 Spieler/innen, einschließlich eines Torwarts/einer Torwartin auf einem rechteckigen Feld. An dessen Enden stehen, wie an der Abbildung 1 auf Seite 10 erkennbar, zwei Tore. Das Spielfeld ist 90 bis 120 Meter lang und 45 bis 90 Meter breit, wobei für Länderspiele die Maße 105 x 68 Meter vorgegeben sind. Die Torhöhe beträgt 8 Feet, was 2,44 Meter entspricht und die Torbreite 8 Yards, was 7,32 Meter entspricht. Ziel des Spieles ist es den Ball in das gegnerische Tor zu bringen. „Ein Tor ist gültig erzielt, wenn der Ball die Torlinie zwischen den Torpfosten und unterhalb der

¹nach [22], [25] und [27]

²nach [22] und [27]

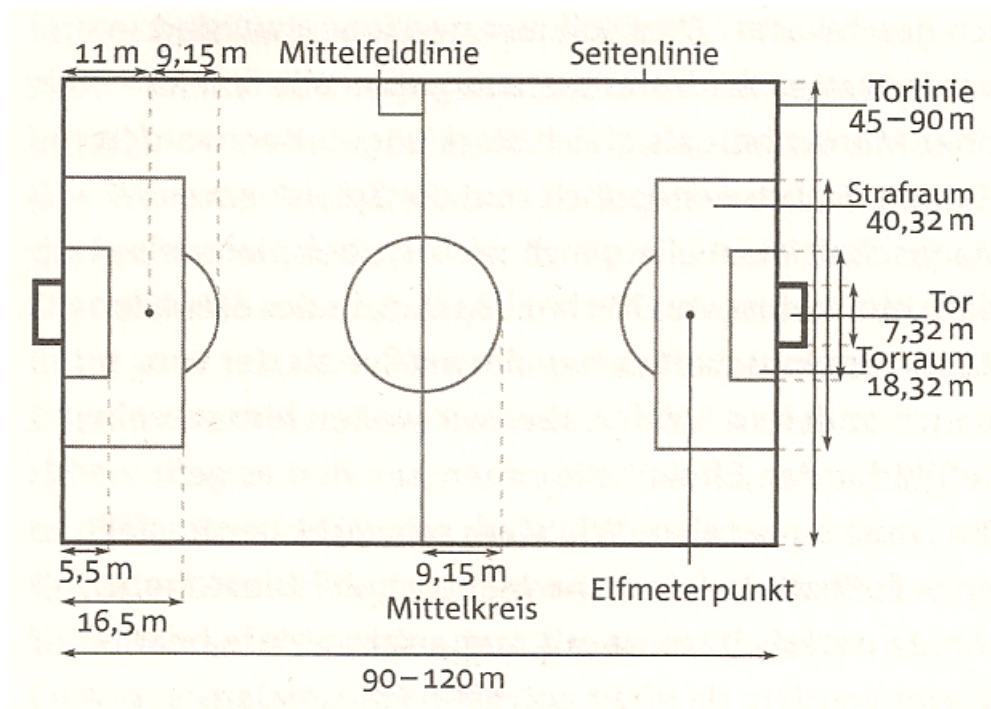


ABBILDUNG 1. Aufbau und Maße eines Fußballfeldes nach [22, S. 32].

Querlatte in vollem Umfang überquert, ohne dass ein vorgängiges Vergehen des Teams vorliegt, das den Treffer erzielt hat“, nach [22, S. 25]. Es gewinnt das Team, das am Ende die meisten Tore erzielt hat bzw. kann ein Spiel auch unentschieden enden, außer bei sogenannten K.o. Runden, in denen ein Team als Gewinner hervorgehen muss. Der Ball kann mit dem Fuß und allen anderen Körperteilen, außer den Händen und Armen gespielt werden. Nur der Torwart/die Torwartin darf im eigenen Strafraum Hände und Arme verwenden.

Die Spieldauer beträgt zweimal 45 Minuten mit einer Halbzeitpause von 15 Minuten. Die Einhaltung der Regeln wird von einem Schiedsrichter/einer Schiedsrichterin und zwei Schiedsrichterassistent/innen überwacht. Bei internationalen Spielen und in der Bundesliga gibt es noch einen „vierten“ Offiziellen als weiteren Assistenten und einen „fünften“ als Reserve für die anderen beiden Schiedsrichterassistent/innen. Ein Feldverweis eines Spielers/einer Spielerin wird mit einer „roten Karte“ angezeigt, eine weniger schwere Tat durch eine „gelbe Karte“. Wenn ein Spieler/eine Spielerin in einem Spiel zum zweiten Mal die gelbe Karte erhält wird er/sie auch vom Platz verwiesen („Gelb-Rote-Karte“). Bei

einem Feldverweis darf, im Gegensatz zu anderen Sportarten, der Spieler/die Spielerin nicht ersetzt werden, dass heißt das Team spielt mit einem Mann/einer Frau weniger. Eine „rote Karte“ führt darüber hinaus meist zu weiteren Konsequenzen, wie einer Sperre oder einer Geldstrafe, während eine „Gelb-Rote-Karte“ nur einen frühzeitigen Spelausschluss, ohne weitere Konsequenzen, nach sich zieht.

Da es jetzt zu weit führen würde auf die Regeln genauer einzugehen, können die offiziellen Spielregeln der FIFA bei Interesse unter der Internetadresse

<http://de.fifa.com/worldfootball/lawsofthegame.html>

nachgelesen werden.

3. WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE UND FUSSBALL

In der Einleitung wurde bereits angedeutet, warum ich das Spiel Fußball für die folgende Arbeit ausgewählt habe. Abgesehen von der hohen Popularität des Spiels, eignet es sich sehr gut für wahrscheinlichkeitstheoretische und statistische Analysen, da der Zufall eine große Rolle spielt. Inwiefern wird im Folgenden näher ausgeführt.

3.1. Auswirkung der geringen Toranzahl in einem Spiel³

In einem Fußballspiel fallen gesamt, wie später noch gezeigt wird (vgl. 3.2.2 auf Seite 27), durchschnittlich etwa 3 Tore pro Spiel. Diese, im Vergleich zu anderen Sportarten wie Handball, geringe mittlere Toranzahl kann, wenn zwei Teams mit unterschiedlicher Spielstärke aufeinandertreffen zu Überraschungssiegen führen. Wenn gesamt nur wenige Tore erzielt werden, kann das dem schwächeren Team nutzen. Mathematisch kann diese Eigenschaft auf folgende Art gezeigt werden: Zwei Teams A und B spielen gegeneinander. Sei p die Wahrscheinlichkeit, dass das stärkere Team A ein Tor erzielt und entsprechend $q = 1 - p$ die Wahrscheinlichkeit, dass das schwächere Team B ein Tor erzielt. Es wird nun angenommen Team A sei dreimal so stark wie Team B. Dann ist $p = \frac{3}{4}$ und $q = \frac{1}{4}$. Nun kann die Gewinnwahrscheinlichkeit für das schwächere Team in einem Spiel, in dem n Tore gefallen sind, ermittelt werden. Dazu werden Spiele mit ungerader und gerader Toranzahl unterschieden, da bei gerader Toranzahl noch der Fall Unentschieden dazu kommt:

3.1.1. Ungerade Toranzahl

$n = 1 \Rightarrow P(\text{B gewinnt}) = \frac{1}{4} = 0.25$. Also hätte das schlechtere Team eine Gewinnchance von 25%.

Wenn der Fall für $n = 3$ betrachtet wird, gewinnt Team B genau dann wenn es 2 oder 3 Tore schießt, der 2:1 Sieg kann dabei auf 3 Arten erfolgen, nämlich ABB, BAB oder BBA (A bedeutet ein Tor von A und B bedeutet ein Tor von B). Das entspricht in der Kombinatorik der Fragestellung wie viele Teilmengen mit genau k Elementen eine Menge mit n Elementen besitzt und die Antwort darauf ist $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, nach [14, S. 11]. Das heißt die Frage auf wie viele Arten Team B mit einem Endstand von 2:1 gewinnen kann, kann schneller mit Hilfe des Binomialkoeffizienten beantwortet werden, wobei $n = 3$ und $k = 2$ ist. Es ist $\binom{3}{2} = 3 \Rightarrow$ es gibt also genau 3 Möglichkeiten.

³nach [22] und [25]

Für die weitere Rechnung bedeutet das:

$$n = 3 \Rightarrow P(\text{B gewinnt}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{32} = 0,15625 \Rightarrow \text{die Gewinnchance für B beträgt in diesem Fall } 15,63\%.$$

Die Gewinnwahrscheinlichkeit ist also stark zurück gegangen. Analog dazu kann die Gewinnwahrscheinlichkeit für mehr als 3 Tore berechnet werden. Abbildung 2 auf Seite 14 veranschaulicht den Zusammenhang zwischen der Gewinnwahrscheinlichkeit des schwächeren Teams und der Anzahl der gefallenen Tore bei ungerader Toranzahl.

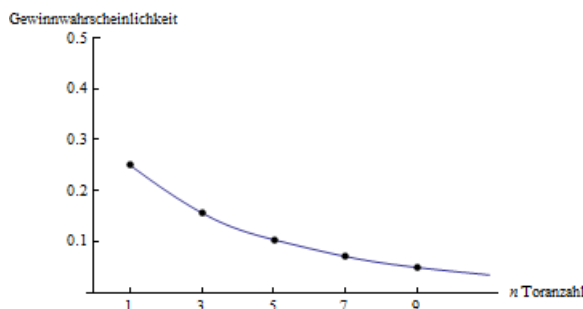


ABBILDUNG 2. Gewinnwahrscheinlichkeit des schwächeren Teams bei ungerader Toranzahl, modifiziert nach [25, S. 86].

3.1.2. Gerade Toranzahl

Wenn ein Spiel mit einer geraden Toranzahl endet ist es interessant auch die Wahrscheinlichkeit für ein Unentschieden zu betrachten. Wenn insgesamt 2 Tore erzielt werden, gewinnt Team B nur dann wenn es beide Tore erzielt, also

$$n = 2 \Rightarrow P(\text{B gewinnt}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} = 0,0625 \Rightarrow \text{die Gewinnchance entspricht } 6,25\%.$$

Das Spiel endet unentschieden, wenn jedes Team ein Tor erzielt und das kann auf zwei Arten geschehen (entweder erzielt Team A oder Team B das erste Tor):

$$P(\text{Spiel endet unentschieden}) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8} = 0,375 \Rightarrow \text{Das entspricht } 37,5\%.$$

Wenn insgesamt 4 Tore fallen gewinnt Team B entweder wenn es alle 4 Tore schießt oder 3 der 4 Tore. Der 3:1 Gewinn kann dabei, wie oben erklärt, auf $\binom{4}{3} = 4$ Möglichkeiten erreicht werden.

$$n = 4 \Rightarrow P(\text{B gewinnt}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^4 + 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{13}{256} = 0,05078125 \Rightarrow \text{die Gewinnchance entspricht } 5,07\%.$$

Ein Unentschieden kann auf sechs verschiedene Arten eintreten, da $\binom{4}{2} = 6$ ist.

$P(\text{Spiel endet unentschieden}) = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = 6 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{128} = 0,2109375 \Rightarrow \text{das entspricht } 21,09\%.$

Analog können die Wahrscheinlichkeiten für ein Unentschieden bzw. für einen Sieg des schwächeren Teams für mehr als 4 Tore berechnet werden. Das ist in Abbildung 3 auf Seite 15 veranschaulicht.

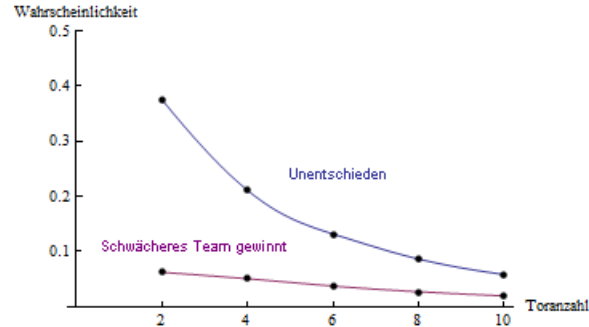


ABBILDUNG 3. Gewinnwahrscheinlichkeit des schwächeren Teams bei gerader Toranzahl, modifiziert nach [25, S. 87].

3.1.3. Resultat

Aus dieser Rechnung zeigt sich, die Gewinnchance des schwächeren Teams ist bei ungerader Toranzahl wesentlich höher je weniger Tore fallen. Bei gerader Toranzahl ist die Gewinnchance des schwächeren Teams geringer als bei ungerader Toranzahl, dafür ist aber die Chance auf ein Unentschieden höher je weniger Tore fallen. Das obige Beispiel zeigt, wenn ein Team dreimal stärker ist als ein anderes, hat das schlechtere Team trotzdem eine Gewinnchance von 25%, wenn gesamt nur ein Tor fällt. Wenn gesamt 2 Tore fallen, endet das Spiel mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,375 mit einem Unentschieden. Somit stehen bei einer geringen gesamten Toranzahl die Chancen für das schlechtere Team gut Punkte zu erzielen. Rechnet man das Beispiel mit anderen Werten für p und q durch, wie in den Abbildungen 4, 5 und 6 auf Seite 16 veranschaulicht, kommt man zu dem selben Endresultat: Je weniger Tore in einem Fußballspiel fallen, desto höher ist die Chance für das schlechtere Team zu gewinnen oder ein Unentschieden herauszuspielen.

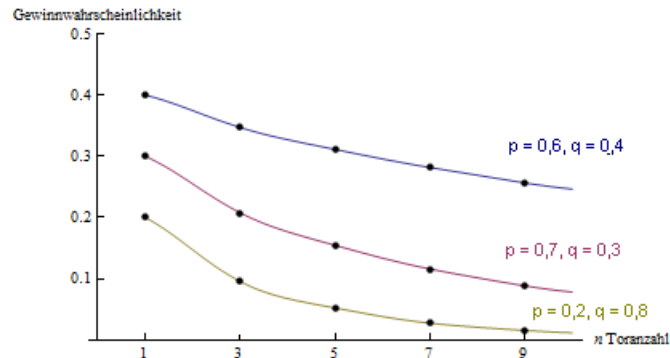


ABBILDUNG 4. Gewinnwahrscheinlichkeit des schwächeren Teams bei ungerader Toranzahl und unterschiedlichen Werten für p und q , modifiziert nach [22, S. 50].

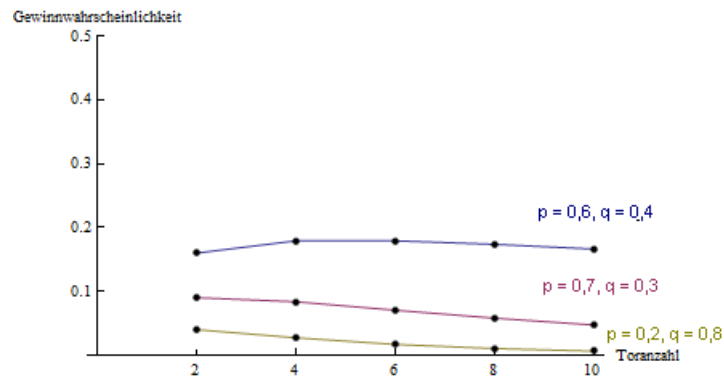


ABBILDUNG 5. Gewinnwahrscheinlichkeit des schwächeren Teams bei gerader Toranzahl und unterschiedlichen Werten für p und q , modifiziert nach [22, S. 50].

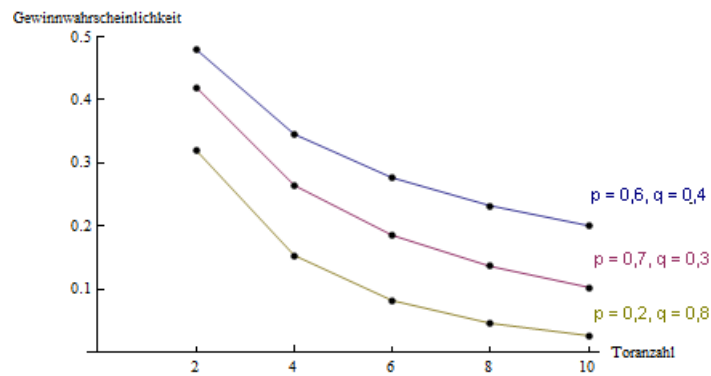


ABBILDUNG 6. Wahrscheinlichkeit für ein Unentschieden mit unterschiedlichen Werten für p und q , modifiziert nach [22, S. 50].

Dass es bei wenigen Toren eine doch relativ hohe Gewinnchance für schwächere Teams gibt, macht den „Reiz und die Spannung“ des Fußballspiels aus, weil es zu Überraschungssiegen kommen kann, wie [25, S. 88] schreibt. Und wie [22, S. 47] schreibt ist dadurch Fußball „der ungerechteste Sport der Welt“, weil der Zufall nicht ausgeschaltet werden kann und somit nicht immer das bessere Team gewinnt. Bei Spielen, bei denen viele Tore erzielt werden, wie zum Beispiel Handball (es fallen ca. 50 Tore pro Spiel) ist das anders. Es können zufällige Tore viel eher ausgeglichen werden, als bei Spielen mit wenigen Toren. Nach einem Treffer greift das andere Team an und erzielt mit ziemlich hoher Wahrscheinlichkeit den nächsten Treffer. Ein Tor beeinflusst das Fallen des nächsten Tores, man kann auch sagen beim Handball fallen die Tore korreliert. Es gibt dadurch nicht so eine große Zufallskomponente und folglich sind Überraschungen seltener. In [6] wird die höhere „Erfolgsquote bei Angriffen“ in einem Spiel wie Handball, wo viele Tore fallen mit dem Würfeln verglichen: „Es ist wie beim Würfeln: Je öfter geworfen wird, umso näher kommt man dem Ergebnis, das zu erwarten ist, also einer Gleichverteilung der Augenzahlen oder beim Ballspiel dem Sieg des Favoriten. Wer nur wenige Male würfeln oder schießen darf, muss vor allem Glück haben.“

Somit setzen sich bei Handball meist die besseren Teams durch und es sind die Tabellen in zwei Klassen geteilt, wie [22, S. 53f.] näher ausführt. Das heißt „Teams aus der oberen Tabellenhälfte verlieren in der Regel nicht gegen Teams aus der unteren Hälfte“ [22, S. 58]. Beim Fußball hingegen gibt es in den Tabellen immer ein deutliches Mittelfeld. Durch die große Zufallskomponente beim Fußball sind die Tabellen gut berechenbar. Vielleicht ist das einer der Gründe warum bei uns Fußball beliebter ist als Handball, es herrscht mehr Spannung, ob tatsächlich das bessere Team gewinnt. Der Physiker Ben-Naim, vgl. [1], bestätigt, dass Fußball eine spannende Sportart ist. Er untersuchte wieviele Spiele überraschend endeten und folgerte daraus die Vorhersagbarkeit von Spielausgängen. Dazu analysierte er und sein Team 300 000 Spiele, vom Beginn der Aufzeichnungen an, die bis ans Ende des 19. Jahrhunderts zurückreichen, bis heute. Es wurden Spielergebnisse der Sportarten Fußball, Basketball, Eishockey, Baseball und Football in England und den USA ausgewertet, indem erfasst wurde, wie oft ein vermeintlich schlechteres Team, ein sogenannter „underdog“, gewann. Zusätzlich wurde ein theoretisches Modell erstellt und die Wahrscheinlichkeit für Überraschungssiege berechnet, die Ben-Naim als Maßstab für die Spannung eines Spiels sieht. Das Ergebnis dieser Untersuchung

war, dass Fußball der spannenste Teamsport ist, da 45% aller Spiele mit Überraschungssiegen endeten, also der eigentliche Favorit verlor. Somit sind Fußballergebnisse am schwierigsten vorherzusagen. An zweiter Stelle stand Baseball mit 44,1%, gefolgt von Eishockey mit 41,2%. Bei Basketball mit 36,5% und Football mit 36,4% gibt es die wenigsten Überraschungssiege und dadurch weniger Spannung, weil selten der Favorit verliert. Allerdings zeigt der Trend der letzten Jahre, Football und Baseball werden spannender, während in den letzten 60 Jahren die Anzahl Überraschungssiege beim Fußball zurückgegangen ist.

Diese Untersuchung bestätigt obige Aussage: je mehr „Tore“ in einem Spiel fallen, desto wahrscheinlicher gewinnt der Favorit: Bei einem Fußballmatch fallen ca. 3 Tore pro Spiel, beim Eishockey ca. 6 Tore und bei einem Basketballspiel werden gesamt ca. 80 Körbe pro Spiel erzielt (die mittleren Toranzahlen wurden jeweils aus den österreichischen Tabellen ermittelt). Football und Baseball passen aufgrund der Spielregeln nicht in dieses Schema, da keine Tore bzw. Körbe wie bei den anderen Spielen erzielt werden.

Mathematisch lassen obige Berechnungen vermuten, dass die Anzahl der Tore, die ein Team in einem Spiel in dem n Tore gefallen sind, erzielt, (n, p) -binomialverteilt ist. Dabei ist p die Wahrscheinlichkeit, dass wenn ein Tor gefallen ist, es von diesem Team erzielt wurde.

Definition (Binomialverteilung). Nach [4, S. 254] ist die Binomialverteilung wie folgt definiert: (Ω, P) sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und Z eine Zufallsvariable auf Ω , die die Werte $0, 1, \dots, n$ annimmt. Z heißt **binomialverteilt** mit den Parametern n und p (kurz $B(n, p)$ -verteilt), wenn es ein $p \in [0; 1]$ gibt mit

$$P_Z(k) = P(Z = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

für $k = 0, 1, \dots, n$. Dabei ist $E(Z) = np$ und $\sigma(Z) = \sqrt{np(1 - p)}$.

Satz 1. Wenn zwei Teams A und B gegen einander Fußball spielen, Team A mit der Wahrscheinlichkeit p und Team B mit der Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ ein Tor erzielt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Team A in einem Spiel, in dem n Tore gefallen sind, genau k Tore erzielt hat, (n, p) -binomialverteilt:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \text{ für } k = 0, 1, \dots, n$$

Beweis. nach [20]: Der Beweis erfolgt durch Induktion nach n . Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Tore die A erzielt hat.

Induktionsanfang für $n = 0$: Team A erzielt mit der Wahrscheinlichkeit 1 null Tore: $P(X = 0) = \binom{0}{0} p^0 q^{0-0} = 1$

Induktionsannahme: $P(X = k) = \binom{n-1}{k} p^k q^{n-1-k}$ für $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Induktionsschritt für $n > 0$:

Für $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ sei $P(j)$ die Wahrscheinlichkeit, dass A j Tore erzielt hatte, bevor das letzte Tor fiel. Nach der Induktionsannahme gilt: $P(j) = \binom{n-1}{j} p^j q^{n-1-j}$.

Falls $k = 0$, also A erzielt 0 Tore, in einem Spiel in dem n Tore fielen, dann muss B das letzte Tor erzielen, und es gilt:

$$P(X = 0) = q \cdot P(0) = q \binom{n-1}{0} p^0 q^{n-1} = q^n = \binom{n}{0} p^0 q^{n-0}.$$

Wenn $k = n$, dann muss A das letzte Tor erzielen und es gilt:

$$P(X = n) = p \cdot P(n-1) = p \binom{n-1}{n-1} p^{n-1} q^0 = p^n = \binom{n}{n} p^n q^{n-n}.$$

Schließlich sei $0 < k < n$. Falls A das letzte Tor erzielt muss A zuvor $k-1$ Tore erzielt haben, und wenn B das letzte Tor erzielt, muss A zuvor k Tore erzielt haben. Daher gilt:

$$\begin{aligned} P(X = k) &= p \cdot P(k-1) + q \cdot P(k) = \\ &= p \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} + q \binom{n-1}{k} p^k q^{n-1-k} = p^k q^{n-k} \left(\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right) = \\ &= \binom{n}{k} p^k q^{n-k}. \end{aligned} \quad \square$$

Dementsprechend können folgende Formeln aufgestellt werden, um die Wahrscheinlichkeit auszurechnen, dass das Team A ein Spiel, in dem insgesamt n Tore gefallen sind, gewinnt, verliert oder das Spiel unentschieden ausgeht. Team A gewinnt genau dann, wenn es mehr als die Hälfte der gefallen Tore erzielt hat. Team A verliert, wenn es weniger als die Hälfte der gefallen Tore erzielt hat. Und das Spiel endet Unentschieden, genau dann wenn A die Hälfte der gefallen Tore erzielt hat:

$$P(\text{Team A gewinnt}) = \sum_{k > \frac{n}{2}} \binom{n}{k} p^k q^{n-k},$$

$$P(\text{Team A verliert}) = \sum_{k < \frac{n}{2}} \binom{n}{k} p^k q^{n-k},$$

$$P(\text{Spiel endet unentschieden}) = \binom{n}{\frac{n}{2}} p^{\frac{n}{2}} q^{\frac{n}{2}}, \text{ falls } n \text{ gerade und}$$

$$P(\text{Spiel endet unentschieden}) = 0, \text{ falls } n \text{ ungerade.}$$

3.2. Wahrscheinlichkeit für k Tore pro Spiel⁴

Im vorhergehenden Kapitel wurde erläutert, die geringe Toranzahl, die im Durchschnitt in einem Fußballspiel erzielt wird, trägt zur Spannung dieser Sportart bei. Es ist nun interessant zu betrachten wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein Spiel mit gesamt k Toren endet bzw. dass in einer gewissen Zeit t genau k Tore fallen. Diese Wahrscheinlichkeit kann mit Hilfe der Poissonverteilung berechnet werden:

3.2.1. Die Poissonverteilung⁵

Nach [7, S. 40] ist die Poissonverteilung $P(\lambda)$ -Verteilung ein „natürliches Modell für die Anzahl von rein zufälligen Zeitpunkten in einem Zeitintervall. Typische Anwendungssituationen...sind die Anzahl der in einer Telefonzentrale eingehende Anrufe bzw. der über einen Mail-Server geleiteten E-Mails, die Anzahl der Atomzerfalls-Zeitpunkte einer radioaktiven Substanz oder der an einem Schalter ankommenden Kunden, die Anzahl der Fahrzeuge auf einem Straßenabschnitt, und so weiter.“ Die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Poissonverteilung setzt also voraus, dass die Tore zu zufälligen Zeitpunkten in 90 Minuten statt finden und das ist der Fall.

Definition (Poissonverteilung). Sie wird von [4, S. 264] wie folgt definiert (im Buch von Büchter und Henn wird statt λ ein μ verwendet): Eine Zufallsvariable X mit Werten auf $\mathbb{N}_0$ heißt **Poisson - verteilt** mit Parameter $\lambda > 0$, wenn gilt

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Die Poissonverteilung ist eine Approximation für die Binomialverteilung bei großem n und kleinem p . Denn wird eine Serie von binomialverteilten Zufallsvariablen mit selben Erwartungswert λ ($\lambda = n \cdot p$) betrachtet, wie [4, S. 262] näher ausführt, erkennt man, die Verteilungen unterscheiden sich kaum und nähern sich einer Grenzverteilung mit festem λ an. Es lässt sich zeigen, dass es diese Grenzverteilung gibt, nach [4, S. 262] und [20]:

Satz 2. Sei $\lambda > 0$, $k \in \mathbb{N}_0$, dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B(n, \frac{\lambda}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

⁴nach [8], [22] und [25]

⁵nach [4], [7] und [15]

Beweis.

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{n-\lambda}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n-\lambda} \cdot \frac{n-1}{n-\lambda} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{n-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{n}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 - \frac{\lambda}{n}} \cdot \dots \cdot \frac{1 - \frac{k+1}{n}}{1 - \frac{\lambda}{n}} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

□

Nach [4, S. 263] gilt: „Als Faustregel betrachtet man diese Näherung als hinreichend gut, wenn gilt $p \leq 0,1$ und $n \geq 100$.“

Siméon Denis Poisson (1781 - 1840) hat diese Approximation der Binomialverteilung 1832 entdeckt, wie [15, S. 93] berichtet. Er veröffentlichte sie mit seiner Wahrscheinlichkeitstheorie 1837 in dem Werk „Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile“ („Untersuchungen zur Wahrscheinlichkeit von Urteilen in Straf- und Zivilsachen“), wie [4, S. 264] schreibt. Allerdings geriet die Poissonverteilung in Vergessenheit und erst 1898 berichtete L. v. Bortkiewicz (1868 - 1931), ein russischer Mathematiker, in dem publizierten Büchlein „Das Gesetz der kleinen Zahlen“ über ihre Wichtigkeit, nach [15, S. 93].

Dass es sich bei der Poissonverteilung tatsächlich um eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung handelt, kann einfach nachgerechnet werden:

$$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \geq 0 \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

Es handelt sich also um den Wahrscheinlichkeitsvektor einer Verteilung.

Satz 3. *Sei X eine $P(\lambda)$ -verteilte Zufallsvariable, dann gelten:*

$$E(X) = \lambda \text{ und } \sigma(X) = \sqrt{\lambda}.$$

Beweis. Nach [4, S. 265] und [20].

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda \cdot \lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot k \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda \cdot \lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \\ &= e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{\lambda^k}{k!} = \\ &= e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} + e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \\ & \quad \left(\text{da } \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = E(X) \text{ folgt} \right) \\ &= \lambda \cdot \lambda + \lambda = \lambda^2 + \lambda \end{aligned}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$$

□

Da die erzielten Tore in einem Fußballspiel zufällige Ereignisse in einem gewissen Zeitraum sind, kann die Wahrscheinlichkeit für k Tore pro Spiel mit Hilfe der Poissonverteilung berechnet werden. Es wird betrachtet wie oft in 90 Minuten ein Treffer erzielt wird. Dabei ist λ die durchschnittliche Anzahl der Tore pro Spiel und kann auch dargestellt werden als $\lambda = r \cdot t$, wobei r die Anzahl der Tore in einer Stunde (mittlere Torrate) beschreibt und t in Stunden einzusetzen ist.

Um zu zeigen, dass das zutrifft, werde ich beispielhaft die Torverteilung für die österreichische Bundesliga (2 Saisons) mit den tatsächlichen Werten darstellen, anschließend die theoretisch berechnete Verteilung angeben und dann die tatsächliche mit der theoretischen Verteilung vergleichen. Aber zuvor ein kurzer Überblick über die österreichische Bundesliga:

3.2.2. Die österreichische Fußball Bundesliga⁶

Seit 1911 gibt es in Österreich offizielle Fußballmeisterschaften. Bis zur Saison 1949/50 wurden diese allerdings nur unter den Wiener Vereinen ausgetragen, das heißt in der höchsten Spielklasse wurde ein Meister unter den Teams von Wien und Niederösterreich ermittelt. Auf den Antrag von Niederösterreich wurde schließlich die Einführung einer gesamtösterreichischen Staatsliga beschlossen, die seit der Saison 1949/50 existiert. Bis 1991 wurde die Profiligen vom ÖFB (Österreichischer Fußballbund) und einer selbstständigen Liga organisiert. Am 17.11.1991 wurde die österreichische Fußball Bundesliga als eigener Verband festgelegt und am 1.12.1991 als 10. ordentliches Mitglied in den ÖFB aufgenommen.

Aufgrund von Reformen kam es immer wieder zu Namensänderungen. So wurde die gesamtösterreichische Fußballliga bis inklusive der Saison 1964/65 Staatsliga bzw. Liga A genannt, anschließend in Nationalliga umbenannt und erst 1974/75 in Bundesliga. 1976 wurde der Name in 1. Division geändert und seit einer erneuten Reform 1993 heißt die Liga wieder Bundesliga. Seit der Saison 2008/09 trägt sie zusätzlich den Sponsornamen tipp3-Bundesliga powered by T-Mobile.

Die Fußball Bundesliga ist als gemeinnütziger Verein zuständig für die zwei höchsten Spielklassen im österreichischen Fußball, nämlich die tipp3-Bundesliga powered by T-Mobile (höchste Spielklasse) und der „Heute für Morgen“ Ersten Liga (zweit höchste Spielklasse), denen je zehn Fußballvereine angehören. Sie vertritt also den Berufsfußball in Österreich und ist auch für die Umsetzung der Fußball-Jugend verantwortlich.

In der Bundesliga spielen zehn Vereine um den österreichischen Meistertitel, im ÖFB - Cup (ein nationaler Cupbewerb im K.o.-System) und um Startplätze für Europacupbewerbe. Das Meisterschaftsjahr geht von Juli bis Juni des darauffolgenden Jahres und ist in eine Herbst- und Frühjahrsaison geteilt. Es findet ein doppelter Meisterschaftsdurchgang mit Hin- und Rückspielen statt, was bedeutet jedes Team spielt in einer Saison 4 Mal gegen jedes andere Team. Es gibt also 36 Meisterschaftsrunden mit je 5 Spielen. (*Hinweis:* Daraus lässt sich eine kombinatorische Aufgabe für Schüler/innen erstellen siehe Kapitel 4 auf Seite 69). Meister ist letztendlich jenes Team, das am Ende die meisten Punkte hat (es gilt die 3-Punkte Regel: ein Sieg zählt 3 Punkte und ein Unentschieden 1 Punkt), wobei bei Punktegleichheit die Tordifferenz zählt. Der Tabellenletzte der Bundesliga steigt in die zweitklassige Erste Liga

⁶nach [12] und [28]

ab und der Meister der Ersten Liga steigt dafür in die Bundesliga auf. Aufgrund der Platzierung bei der Bundesliga werden auch Europacupplätze vergeben:

Der österreichische Meister ist zu der Teilnahme an der 2. Qualifikationsrunde zur UEFA Champions League berechtigt und der Zweit- und Drittplatzierte zur Teilnahme an der 2. Qualifikationsrunde zur UEFA Europa League. Für die folgenden Berechnungen sind die Statistiken von der Saison 2008/09 und 2009/10 wichtig (vgl. Abbildung 7 auf Seite 25 und Abbildung 8 auf Seite 25).

TABELLENSTAND	ERGEBNISSE 2008/09																				
FC Red Bull Salzburg			2:1	1:0	5:1	4:1	2:1	3:1	2:1	2:0	4:1	6:0	2:1	1:0	2:5	7:3	6:0	2:0	1:4	3:0	
SK Rapid Wien	4:2	2:2			3:2	3:0	0:1	2:1	1:1	1:0	4:2	1:0	5:0	1:1	6:0	3:1	2:3	1:0	5:1	8:1	
FK Austria Wien	1:1	3:2	2:0	2:2			1:3	2:0	3:1	3:1	4:1	1:1	5:0	4:0	0:0	2:1	2:1	0:0	4:1	2:1	
SK Puntigamer Sturm Graz	2:2	2:0	3:1	2:2	0:0	2:2			3:0	1:1	3:0	0:0	2:0	2:0	2:0	1:3	3:0	1:0	3:1	6:0	
SV Josko Fenster Ried	3:0	2:2	3:0	1:0	3:1	0:0	3:2	4:1			0:0	2:0	3:0	1:0	2:1	3:0	4:0	0:0	3:0	3:2	
SK Austria Kelag Kärnten	2:0	1:0	3:3	1:3	0:1	1:1	0:2	4:2	1:1	1:2			1:0	0:1	6:0	0:2	2:0	0:0	0:3	2:1	
LASK Linz	0:2	0:3	2:5	0:2	0:1	4:0	0:3	1:0	2:1	0:3	0:2	3:2			2:0	2:2	0:0	2:1	1:3	2:0	
KSV Superfund	1:1	0:2	0:2	0:4	2:2	1:2	1:3	3:3	2:0	2:1	2:1	0:2	0:1	4:1			2:1	3:1	3:2	1:1	
SV Mattersburg	1:2	2:4	0:1	0:3	0:0	0:2	5:6	0:0	2:1	2:2	0:0	3:2	1:4	3:1	2:1	3:1			3:1	5:4	
Cashpoint SCR Altach	3:4	1:2	1:1	2:7	0:1	2:1	1:1	1:0	1:1	0:1	0:3	2:5	1:3	1:1	5:1	3:0	2:2	4:1			HEIM
	F C R e d B u l l S a l z b u r g	S K R a p i d W i e n	F K A u s t r i a W i e n	S K P u n t i g a m e r S t u r m G r a z	S V J o s k o F e n s t e r R i e d	S K A u s t r i a K e l a g	L A S K L i n z	K S V S u p e r f u n d	S V M a t t e r s b u r g	C a s h p o i n t S C R A l t a c h	G A S T										

ABBILDUNG 7. Ergebnisse der österreichischen Bundesliga Saison 2008/09 modifiziert nach [12].

TABELLENSTAND	ERGEBNISSE 2009/10																				
FC Red Bull Salzburg			0:1	2:1	1:1	0:0	4:2	3:0	4:2	1:1	2:0	2:0	3:2	3:0	2:0	1:1	4:0	1:0	7:1	1:0	
FK Austria Wien	1:0	1:1			1:1	1:0	1:0	1:0	2:1	1:0	1:0	5:1	3:0	0:1	1:1	2:0	3:0	4:3	1:0	4:1	
SK Rapid Wien	0:1	2:2	4:1	2:0			4:1	2:1	3:1	3:0	3:0	4:0	4:1	0:0	1:0	2:1	3:1	5:3	5:1	1:0	
SK Puntigamer Sturm Graz	0:0	0:2	2:2	0:1	1:0	1:1			3:0	1:0	4:0	2:0	3:3	0:1	1:0	0:2	1:1	0:0	3:2	4:0	
SC Magna Wr. Neustadt	2:3	1:1	0:1	4:3	2:2	0:4	0:0	0:0			2:1	3:0	4:0	4:1	2:0	2:1	2:3	3:1	3:1	2:1	
SV Mattersburg	1:6	2:3	1:1	1:3	1:3	2:1	0:0	0:2	1:0	1:3			3:2	2:1	3:1	3:0	3:1	4:1	1:1	4:1	
LASK Linz	0:0	0:0	4:5	0:1	3:3	4:2	2:2	1:2	4:2	1:1	4:0	2:0			2:2	3:0	4:0	1:1	3:1	0:0	
SV Josko Ried	1:0	1:2	0:1	0:2	1:3	1:1	1:2	1:2	3:0	0:1	3:0	0:0	2:2	5:2			2:1	3:0	3:1	1:0	
KSV Superfund	0:2	2:0	1:0	1:1	2:2	0:1	0:1	0:3	2:3	3:1	0:1	2:2	7:2	2:0	0:1	1:1			0:0	3:2	
SK Austria Kelag Kärnten	1:2	0:2	2:1	0:2	1:3	2:4	1:3	0:3	0:0	2:2	0:3	2:4	1:1	2:2	0:0	1:0	0:1	1:1			HEIM
	F C R e d B u l l S a l z b u r g	F K A u s t r i a W i e n	S K R a p i d W i e n	S K P u n t i g a m e r S t u r m G r a z	S C M a g n a W r . N e u s t a d t	S V M a t t e r s b u r g	L A S K L i n z	S V J o s k o R i e d	K S V S u p e r f u n d	S K A u s t r i a K e l a g K ä r n t e n	G A S T										

ABBILDUNG 8. Ergebnisse der österreichischen Bundesliga Saison 2009/10 modifiziert nach [12].

Nach diesem kurzen Überblick über die österreichische Bundesliga wird mit Hilfe der Poissonverteilung die Anzahl der Tore, die während eines Spiels erzielt werden, ermittelt und mit den tatsächlichen Werten verglichen (in Anlehnung an [22]). Da ein Bundesligaspiel wirklich 90 Minuten dauert und es im Gegensatz zu Cupbewerben (Pokalturniere, die im K.o.-System ausgetragen werden) keine Verlängerung gibt, können die Spiele miteinander verglichen werden.

Dafür werden die Torstatistiktabelle der Saison 2008/09 und 2009/10 (siehe Seite 25) betrachtet, also gesamt 360 Spiele. Zuerst muss herausgelesen werden, wie viele Spiele mit gesamt k Toren endeten. Das ist in Tabelle 1 auf Seite 26 dargestellt:

erzielte Toranzahl k pro Spiel	Anzahl der Spiele mit k Toren 2009/10	Anzahl der Spiele mit k Toren 2008/09	Gesamt- anzahl der Spiele mit k Toren
0	14	12	26
1	33	20	53
2	35	36	71
3	32	39	71
4	33	31	64
5	15	19	34
6	10	14	24
7	4	4	8
8	2	0	2
9	2	3	5
10	0	1	1
11	0	1	1

TABELLE 1. Einteilung nach der gesamt pro Spiel erzielten Toranzahl.

Die Tabelle zeigt also, dass in der Saison 2009/10 in 14 Spielen und in der Saison 2008/09 in 12 Spielen kein Tor erzielt wurde. 2009/10 wurde in 33 Spielen gesamt 1 Tor erzielt und 2008/09 in 20 Spielen, usw. Um in der Theorie, das heißt mit Hilfe der Poissonverteilung nachzurechnen, wie viele Spiele mit k Toren enden, wird zuerst der Mittelwert berechnet, das bedeutet wie viele Tore insgesamt im Schnitt pro Spiel erzielt werden.

Definition (Mittelwert). Nach [5, S. 13] ist der Mittelwert so definiert:

Ist $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ eine Stichprobe vom Umfang n , dann heißt

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

der **(empirische) Mittelwert (arithmetisches Mittel)** der Stichprobe x .

In diesem Beispiel ergibt sich der Mittelwert über die erzielte Toranzahl k pro Spiel aus:

$$\bar{x} = \frac{1}{360} \cdot (0 \cdot 26 + 1 \cdot 53 + 2 \cdot 71 + 3 \cdot 71 + 4 \cdot 64 + 5 \cdot 34 + 6 \cdot 24 + 7 \cdot 8 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 5 + 10 \cdot 1 + 11 \cdot 1) = 3,1$$

Das heißt die Anzahl der erzielten Tore ist poissonverteilt mit $\lambda = 3,1$:

$$P(X = k) = \frac{3,1^k}{k!} e^{-3,1}.$$

Durch einsetzen in die Poissonverteilung ergibt sich nun folgende theoretische Tabelle 2 auf Seite 27, die zeigt wieviele Spiele mit k Toren endeten:

Toranzahl k pro Spiel	$P(X = k)$	Anzahl der Spiele mit k Toren (ger.)
0	0,045049202	16
1	0,139652527	50
2	0,216461418	78
3	0,223676798	81
4	0,173349519	62
5	0,107476701	39
6	0,055529629	20
7	0,024591693	9
8	0,009529281	3
9	0,003282308	1
10	0,001017515	0
11	0,000286754	0

TABELLE 2. Berechnete Torverteilung für $\lambda = 3,1$.

Der Vergleich der tatsächlichen und der errechneten Werte wird in der Tabelle 3 auf Seite 28 gezeigt und durch Abbildung 9 auf Seite 28 veranschaulicht:

Toranzahl k pro Spiel	tatsächlicher Wert	errechneter Wert
0	26	16
1	53	50
2	71	78
3	71	81
4	64	62
5	34	39
6	24	20
7	8	9
8	2	3
9	5	1
10	1	0
11	1	0

TABELLE 3. Vergleich errechneter und tatsächlicher Werte für die Spiele mit Toranzahl k .

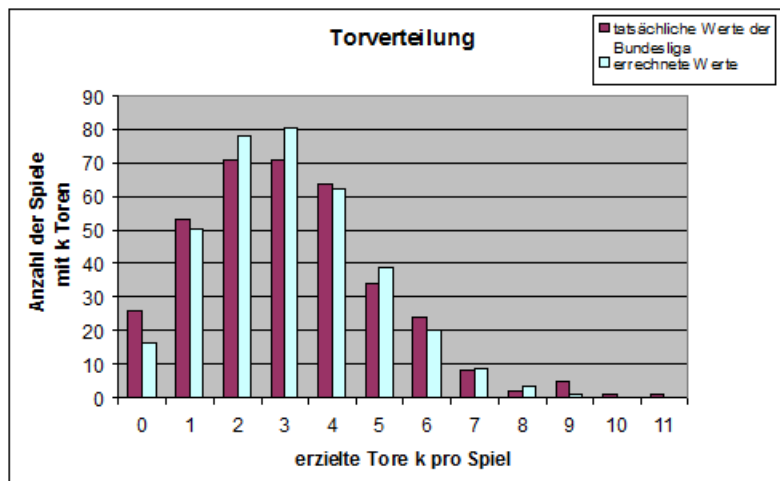


ABBILDUNG 9. Torverteilung der österreichischen Bundesliga.

Es zeigt sich, in der österreichischen Bundesliga gibt es mehr 0:0 Ergebnisse als in der Theorie. Andererseits gibt es bei den errechneten Werten mehr Spiele die mit 2 oder 3 Toren enden, als in der Praxis. Trotzdem zeigt dieses Beispiel, wie auch [22] anführt, die Gesamtanzahl der Tore, die in einem Spiel erzielt werden, lässt sich erstaunlich gut mit der Poissonverteilung berechnen. Es darf hier schließlich nicht vergessen werden: es handelt sich um ein stark vereinfachtes Modell, bei dem folgende Punkte außer Acht gelassen wurden:

Die Torverteilung wurde nur beispielhaft für 2 Saisonen, also nur 360 Spiele berechnet. Außerdem wurde die Verteidigung gänzlich vernachlässigt und nur die erzielten Tore für die Berechnungen verwendet. Zusätzlich wurden in der Theorie die Tore als nicht zusammenhängend angenommen, das heißt es wird davon ausgegangen, dass ein gefallenes Tor keinen Einfluss auf das Fallen der weiteren Tore hat. Denn das Modell der Poissonverteilung setzt voraus, wie in der Definition auf Seite 20 beschrieben, das Eintreten eines Ereignisses wurde durch das vorhergehende nicht beeinflusst, es ist also rein zufällig. Das ist in der Praxis anders, da ein Tor meist eine Änderung des Spielverhaltens bzw. der Taktik nach sich zieht und zumindest eine geringe Korrelation der Tore anzunehmen ist (es wird später gezeigt, dass die Korrelation der Tore sehr gering und somit vernachlässigbar ist). Weiters ist in der Praxis die Torrate nicht konstant, wie [22, S. 99] berichtet: „Mit zunehmender Spieldauer fallen mehr Tore pro Minute.“

Trotz der Vernachlässigung einiger Faktoren konnten brauchbare Ergebnisse berechnet werden.

Abgesehen von dieser Analyse und Interpretation der Daten, wäre es natürlich interessant mittels mathematischer Methoden zu zeigen, dass die Torverteilung tatsächlich der Poissonverteilung gleicht. Dafür kann der sogenannte Chi Quadrat Anpassungstest verwendet werden:

3.2.3. *Der Chi Quadrat Anpassungstest*⁷

Der Chi Quadrat Anpassungstest (kurz: χ^2 - Test) ist ein nichtparametrischer Test und zählt zu den ältesten Testmethoden. Nach [4, S. 361] wurde er von Karl Pearson im Jahr 1900 entwickelt. Bei diesem Test wird untersucht, ob eine vorgegebene Zufallsvariable einer vermuteten Wahrscheinlichkeitsverteilung entspricht. Die Nullhypothese H_0 lautet: „Die Zufallsvariable X ist ... (z.B. Poisson) verteilt“ und dementsprechend lautet H_1 : „Die Zufallsvariable X ist nicht ... (z.B. Poisson) verteilt“. Genauer bedeutet das folgendes: Für den einfachen Anpassungstest muss folgendes gelten:

⁷nach [4] und [5]

$A_1, \dots, A_r \in \mathcal{A}$, paarweise disjunkt und $\bigcup_{i=1}^r A_i = \Omega$.

Für $p_1, \dots, p_r$ gilt: $p_i > 0 \forall i$ und $\sum_{i=1}^r p_i = 1$.

Es ergeben sich die Hypothesen:

$H_0 : P(X \in A_i) = p_i \forall i \in 1, 2, \dots, r$.

$H_1 : \exists i \in 1, 2, \dots, r$ mit $P(X \in A_i) \neq p_i$.

Im Folgenden handelt es sich um keine exakte Herleitung, sondern es werden verschiedene Ideen aufgezeigt, warum die entsprechende Testgröße χ^2 - verteilt ist.

Sei T_i die Zufallsvariable, die beschreibt wie oft A_i bei n Versuchen auftritt. Wenn H_0 richtig ist, ist T_i binomialverteilt ($B(n, p_i)$ -verteilt) mit $E(T_i) = np_i$ und $V(T_i) = np_i(1 - p_i)$.

Für große n ist T_i näherungsweise normalverteilt mit $\mu = np_i$ und $\sigma = \sqrt{np_i(1 - p_i)}$. Ebenso ist $Z_i = \frac{T_i - np_i}{\sqrt{np_i}}$ näherungsweise normalverteilt, mit $\mu = 0$ und $\sigma = \sqrt{(1 - p_i)}$.

Es gilt $\sum_{i=1}^r T_i = n$, da n Versuche durchgeführt werden und $\sum_{i=1}^r p_i = 1$. Es folgt $\sum_{i=1}^r (T_i - np_i) = 0$. Daraus und aus $Z_i = \frac{T_i - np_i}{\sqrt{np_i}}$ ergibt sich die lineare Gleichung:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^r \sqrt{p_i} Z_i = \sum_{i=1}^r \frac{(T_i - np_i)}{\sqrt{n}} = 0$$

Die Zufallsgröße $D^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(T_i - np_i)^2}{np_i}$ heißt Pearsonsche Testfunktion. Nach Gleichung 1 hängt diese Testgröße nur von den ersten $r - 1$ Faktoren ab.

Bestimmt man den Erwartungswert von D^2 :

$E(D^2) = \sum_{i=1}^r \frac{np_i(1-p_i)}{np_i} = \sum_{i=1}^r (1 - p_i) = r - \sum_{i=1}^r p_i = r - 1$, fällt auf, dass dieser nur von r abhängt und nicht von der Versuchsanzahl n oder der vermuteten Wahrscheinlichkeit p_i . Die Pearsonsche Testfunktion ist also unabhängig von der zugrunde liegenden Verteilungsart. Sie ist verteilungsfrei und $r - 1$ gibt die Anzahl der Freiheitsgrade an.

Definition (Chi - Quadrat - Verteilung). Nach [20] und [15, S. 173] ist die χ^2 - Verteilung mit r Freiheitsgraden die Verteilung der Summe der Quadrate von r unabhängigen standardnormalverteilten Zufallsvariablen.

Sei $r \in \mathbb{N}$. Dann heißt X **Chi - Quadrat - verteilt** mit r Freiheitsgraden, falls X die Dichte hat:

$f(t) = 0$ falls $t \leq 0$ und

$f(t) = \frac{1}{2^{\frac{r}{2}} \Gamma(\frac{r}{2})} t^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}}$, falls $t > 0$ (die Gamma - Funktion ist definiert

als: $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ für $x > -1$).

Es gilt: $E(X) = r$ und $\sigma(X) = \sqrt{2r}$.

Z_i^2 ist näherungsweise χ^2 - verteilt mit 1 Freiheitsgrad. Seien X, Y zwei unabhängige Zufallsvariable. X ist χ^2 - verteilt mit p Freiheitsgraden und Y ist χ^2 - verteilt mit s Freiheitsgraden. Dann kann mit Hilfe der Faltung gezeigt werden, $X + Y$ ist χ^2 - verteilt mit $p + s$ Freiheitsgraden. Demnach wäre D^2 χ^2 - verteilt mit r Freiheitsgraden, allerdings sind die Summanden in D^2 nicht linear unabhängig, siehe Gleichung 1. Somit ist D^2 für große n näherungsweise Chi-Quadrat verteilt mit $r - 1$ Freiheitsgraden. Oder direkt gesagt gilt:

$\lim_{n \rightarrow \infty} P(D^2 \leq x) = \int_0^x f(t) dt$, wobei f die Dichte der χ^2 - Verteilung mit $r - 1$ Freiheitsgraden ist. Die Approximation ist sinnvoll für $n \cdot \min(p_1, \dots, p_r) \geq 5$.

Die Realisierung der Zufallsgröße ist gegeben durch:

$d^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(h_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^r \left(\frac{h_i^2}{np_i} - 2h_i + np_i \right) = \sum_{i=1}^r \frac{h_i^2}{np_i} - n$, wobei h_i für $i = 1, \dots, r$ die absoluten Häufigkeiten der betrachteten Ereignisse darstellen. Anders ausgedrückt stellt dieser Wert ein Abweichungsmaß dar, nämlich die Abweichung der Messwerte von den „Sollwerten“. Es wird untersucht wie stark die Erwartungswerte np_i von den absoluten Häufigkeiten h_i abweichen. Im Idealfall wäre $np_i = h_i$. Um einen relativen Wert zu erhalten wird das Quadrat der Differenz noch durch np_i dividiert.

Das wiederum bedeutet die Nullhypothese ist richtig für kleine Werte von d^2 und wird verworfen, für große Abweichungen. Der kritische Wert x wird aus der χ^2 - Verteilung mit $r - 1$ Freiheitsgraden ermittelt, sodass $\int_0^x f(t) dt = \gamma$, wobei f die Dichte der χ^2 - Verteilung ist und γ die Sicherheit bzw. Signifikanz. Daraus folgt:

$d^2 < x$: Die Daten sprechen mit Sicherheit γ nicht gegen die vorgegebene Verteilung.

$d^2 > x$: Mit Sicherheit γ wurde bewiesen, dass die vorgegebene Verteilung falsch ist.

Um nun zu untersuchen, ob die Zufallsvariable X , die die Anzahl der erzielten Tore in einem Spiel beschreibt, tatsächlich poissonverteilt ist, wird der χ^2 Anpassungstest mit der Sicherheit $\gamma = 0,95$ durchgeführt. Zuerst muss geprüft werden, ob die Voraussetzungen erfüllt sind: Die Ereignisse sind paarweise disjunkt, da ein Spiel nur mit einer bestimmten Toranzahl enden kann und bilden die Vereinigung aller möglichen Ereignisse. Die Summe aller Eintrittswahrscheinlichkeiten ist 1. Betrachtet man allerdings Tabelle 3 auf Seite 28 fällt auf, dass nicht alle $np_i \geq 5$ sind, was aber wichtig ist um sinnvoll die χ^2 - Verteilung approximieren zu können. Dem kann abgeholfen werden, indem die Toranzahlen $k \geq 8$ zusammengefasst werden. Die Wahrscheinlichkeit für $P(X \geq 8)$ ergibt sich aus: $P(X \geq 8) = 1 - P(X < 8) = 0,014212513$.

Es ergibt sich folgende Tabelle mit $n = 360$:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	≥ 8
h_i	26	53	71	71	64	34	24	8	9
np_i	16,2177	50,2749	77,9261	80,5236	62,4058	38,6916	19,9907	8,8530	5,11650

TABELLE 4. Tabelle für den χ^2 Anpassungstest.

Nun wird d^2 ermittelt:

$$d^2 = \sum_{i=1}^r \frac{h_i^2}{np_i} - n = \frac{26^2}{16,2177} + \frac{53^2}{50,2749} + \frac{71^2}{77,9261} + \frac{71^2}{80,5236} + \frac{64^2}{62,4058} + \frac{34^2}{38,6916} + \frac{24^2}{19,9907} + \frac{8^2}{8,8530} + \frac{9^2}{5,1165} - 360 = 12,23385478$$

x wird nun aus der χ^2 - Verteilung mit 8 Freiheitsgraden ermittelt, sodass $\int_0^x f(t)dt = 0,95$ gilt: $x = 15,507$

Da $d^2 < x$ ist: Die Daten sprechen mit Sicherheit 0,95 nicht gegen die vorgegebene Verteilung, also gegen die Poissonverteilung.

Durch Berechnen von $\int_0^{d^2} f(t)dt$ erhält man, dass mit einer Sicherheit von 0,8589 gerade noch bewiesen werden kann, dass die vorgegebene Verteilung falsch ist. Für alle höheren Sicherheiten sprechen die Daten nicht gegen die vorgegeben Verteilung.

Somit wurde auch mit mathematischen Methoden gezeigt, die Torverteilung der österreichischen Bundesliga ist, zumindest für die beispielhaften 2 Saisonen, poissonverteilt.

Um mit der Poissonverteilung mögliche Ergebnisse berechnen zu können ist es allerdings wichtig, dass es bei den Teams keine zu starken Leistungsunterschiede gibt, da Ergebnisse wie 15:0 die Verteilung stark verändern würde.

Werden also die oben genannten Schwächen des Modells berücksichtigt, können mit Hilfe der Poissonverteilung mögliche Spielausgänge simuliert werden. Tolan, vgl. [22, S. 80], bezeichnet das als „Radioaktivität im Fußball“ und Heuer, vgl. [11], stellt den Vergleich an Poissonverteilung „bekommt man auch, wenn man die Zahl radioaktiver Zerfälle in einem festen Zeitintervall misst. Die vorhandenen Abweichungen wollen wir beschreiben, indem wir die Qualitätsunterschiede der verschiedenen Teams berücksichtigen. Statistisch gesehen ist Tore schießen also wie ein radioaktiver Zerfall mit Zerfallsraten, die von den Sturm- und Abwehrqualitäten der Mannschaften abhängen.“

Wenn zwei Teams A und B gegen einander spielen, wobei Team A im Schnitt λ_1 Tore pro Spiel erzielt und Team B λ_2 Tore. Dann ist die Wahrscheinlichkeit für den Endstand $A : B = n : m$ nach 90 Minuten:

$$P(n : m) = P(X = n) \cdot P(X = m) = \frac{\lambda_1^n}{n!} e^{-\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_2^m}{m!} e^{-\lambda_2} \Rightarrow$$

$$(2) \quad P(n : m) = \frac{\lambda_1^n \lambda_2^m}{n!m!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}.$$

Zum Beispiel (Daten von [12]) hat in der Saison 2009/10 SK Sturm Graz in 36 Spielen 50 Tore erzielt, das heißt im Durchschnitt ca. 1,4 Tore pro Spiel und SK Rapid Wien in 36 Spielen 80 Tore, durchschnittlich also ca. 2,2 Tore pro Spiel. Um auszurechnen wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass Sturm Graz 1:0 gegen Rapid gewinnt muss einfach in die Poissonverteilung (vgl. Formel 2 auf Seite 33) eingesetzt werden, wobei $\lambda_1 = 1,4$ und $\lambda_2 = 2,2$ ist:

$P(\text{Spiel endet 1:0 für Sturm Graz}) = P_1(X = 1) \cdot P_2(X = 0) = \frac{1,4^1}{1!} e^{-1,4} \cdot \frac{2,2^0}{0!} e^{-2,2} = 0,038253211$, das entspricht also ca. 3,8%. Obwohl theoretisch die Wahrscheinlichkeit sehr gering war, dass Sturm Graz gegen Rapid 1:0 gewinnt, ist dieses Ereignis in der Saison 2009/10 eingetreten. Es war aber das einzige von 4 Spielen, das Sturm Graz in dieser Saison gegen Rapid gewonnen hat. Es handelte sich dabei um ein Heimspiel für Graz und es bestätigt die Aussage von Kapitel 3.1 auf Seite 13, je weniger Tore fallen, desto höher ist die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn des schwächeren Teams.

Mit Hilfe der Poissonverteilung kann nicht nur der Spielausgang berechnet werden. Es kann zum Beispiel auch berechnet werden, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass FK Austria Wien mit einer mittleren Toranzahl von $\lambda = 1,65$, in den Saisons 2008/09 und 2009/10, mehr als 2 Tore in einem Spiel erzielt. Die Berechnung erfolgt über die Gegenwahrscheinlichkeit:

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) = 1 - \frac{1,65^0}{0!} e^{-1,65} - \frac{1,65^1}{1!} e^{-1,65} - \frac{1,65^2}{2!} e^{-1,65} = 0,229630804$$

Tatsächlich hat FK Austria Wien in der Saison 2008/09 in 7 von 36 Spielen mehr als 2 Tore erzielt und in der Saison 2009/10 in 8 von 36 Spielen. Austria Wien hat also gesamt in 15 von 72 Spielen mehr als 2 Tore erzielt, das entspricht etwa 20,8% und liegt nahe dem errechneten Wert von etwa 23%.

Es können auch die Wahrscheinlichkeiten ausgerechnet werden, dass ein Team gewinnt, verliert oder das Spiel unentschieden endet, wobei der Fall Unentschieden in Kapitel 3.2.4 auf Seite 35 noch genauer betrachtet wird.

Es spielen zwei Teams A und B gegeneinander, wobei λ_1 die mittlere Toranzahl von Team A und λ_2 die mittlere Toranzahl von Team B ist. Team A gewinnt wenn es zumindest ein Tor mehr als Team B erzielt. Es verliert, wenn es zumindest ein Tor weniger als B erzielt und das Spiel endet unentschieden, wenn beide Teams gleich viele Tore erzielen:

$$(3) \quad P(\text{Team A gewinnt}) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\lambda_2^r}{r!}$$

$$(4) \quad P(\text{Team A verliert}) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_2^k}{k!} \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\lambda_1^r}{r!}$$

$$(5) \quad P(\text{Spiel endet unentschieden}) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} \frac{\lambda_2^k}{k!}$$

So kann zum Beispiel ausgerechnet werden, wie hoch die Wahrscheinlichkeit bei einem Wiener Derby ist, dass FK Austria Wien gewinnt, SK Rapid gewinnt oder das Spiel unentschieden ausgeht. Es muss in die Formeln 3, 4 und 5 die mittlere Toranzahl eingesetzt werden. FK Austria Wien erzielte in den Saisons 2008/09 und 2009/10, also in 72 Spielen, 119 Tore und SK Rapid Wien 169. Es ergeben sich $\lambda_1 = \lambda_{\text{Austria Wien}} = 1,65$ und $\lambda_2 = \lambda_{\text{Rapid Wien}} = 2,35$:

$$P(\text{Austria gewinnt}) = e^{-(1,65+2,35)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1,65^k}{k!} \sum_{r=0}^{k-1} \frac{2,35^r}{r!} = 0.268945218$$

$$P(\text{Rapid gewinnt}) = e^{-(1,65+2,35)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2,35^k}{k!} \sum_{r=0}^{k-1} \frac{1,65^r}{r!} = 0.534783034$$

$$P(\text{Unentschieden}) = e^{-(1,65+2,35)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1,65^k}{k!} \frac{2,35^k}{k!} = 0.196271748$$

FK Austria Wien gewinnt das Derby zu etwa 26,89%, SK Rapid Wien zu etwa 53,48% und das Spiel endet zu 19,63% unentschieden.

Tatsächlich hat FK Austria Wien 2 von 8 Spielen (25%) in den Saisons 2008/09 und 2009/10 gewonnen, SK Rapid Wien 4 (50%) und 2 Spiele (25%) endeten unentschieden. Die errechneten Werte stimmen also ganz gut mit der Wirklichkeit überein.

Trotzdem darf bei Berechnungen wie diesen nicht vergessen werden, dass es sich um Wahrscheinlichkeiten handelt. Es macht gerade die Spannung eines Fußballspiels aus, die Ergebnisse nicht vorhersagen zu können. Eben angeführte theoretische Berechnungen sind stark vereinfachte Modelle der Praxis. Die Stärke eines Teams wird über die erzielten Tore definiert und es werden einige Faktoren vernachlässigt, wie der Heimvorteil eines Teams, die Korrelation der Tore oder die Verteidigung, die bei solchen Offensivmodellen komplett ausser Acht gelassen wird. Trotzdem lassen sich mit Hilfe der Poissonverteilung Simulationen erstellen und es können meiner Meinung nach interessante

Aufgaben für Schüler/innen zusammengestellt werden, die nicht kompliziert zu rechnen sind und einen Realitätsbezug haben (vgl. Kapitel 4 auf Seite 69).

3.2.4. Wahrscheinlichkeit für ein Unentschieden⁸

Mit Hilfe der Poissonverteilung kann auch die Wahrscheinlichkeit für ein Unentschieden berechnet werden, wie [22, S. 105f.] näher ausführt. Dafür wird angenommen, dass beide Teams gleich stark sind und die durchschnittliche Toranzahl λ beider Teams gleich groß ist:

$$P(\text{Unentschieden mit gesamt } 2k \text{ Toren}) = P(X = k) \cdot P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2} e^{-2\lambda}.$$

Um nun die Gesamtwahrscheinlichkeit für ein Unentschieden auszurechnen, müssen die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse addiert werden: ein Spiel endet Unentschieden mit gesamt null Toren, ein Spiel endet Unentschieden mit gesamt zwei Toren, usw. :

$$P(\text{Spiel endet unentschieden}) = \frac{\lambda^{2 \cdot 0}}{(0!)^2} e^{-2\lambda} + \frac{\lambda^{2 \cdot 1}}{(1!)^2} e^{-2\lambda} + \frac{\lambda^{2 \cdot 2}}{(2!)^2} e^{-2\lambda} + \dots = e^{-2\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda^k}{k!} \right)^2.$$

Setzt man nun $2\lambda = x$, wobei x die Gesamtzahl der durchschnittlichen Tore pro Spiel beschreibt erhält man:

$$P(\text{Spiel endet unentschieden}) = e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k} \frac{1}{(k!)^2}$$

Die Summe ist die sogenannte modifizierte Besselsche Funktion.

Definition (Besselsche Funktion erster Art der Ordnung 0).

Nach [10, S. 286] erhält man als Lösung der Besselschen Differentialgleichung der Ordnung 0:

$$J_0(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k}$$

Man nennt J_0 **Besselsche Funktion erster Art der Ordnung 0**.

Die modifizierte Besselsche Funktion ist definiert als

$$I_0(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k}.$$

Somit kann man die Wahrscheinlichkeit für ein Unentschieden mit Hilfe der Besselschen Funktion ausrechnen. Wenn davon ausgegangen wird, dass in einem Bundesligamatch im Schnitt gesamt 3,1 Tore fallen (wie auf Seite 27 berechnet), bedeutet das $x = 3,1$ und es ergibt sich:

⁸nach [22]

$$P(\text{Spiel endet unentschieden}) = e^{-3,1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3,1}{2}\right)^{2k} \frac{1}{(k!)^2} = e^{-3,1} \cdot I_0(3,1) = 0,045049202 \cdot 5,294491490 = 0,238512619 \Rightarrow 23,9\%$$

Es endet also ca. jedes 4. Spiel unentschieden, unter der Annahme, beide Teams seien gleich stark.

Tatsächlich endeten 37 Spiele in der Saison 2008/09 (vgl. Tabelle 7 auf Seite 25) und 44 Spiele in der Saison 2009/10 (vgl. Tabelle 8 auf Seite 25) mit einem Unentschieden. Gesamt endeten also von 360 Spielen 81 unentschieden, das entspricht 22,5 % und liegt nahe bei dem errechneten Ergebnis.

Nun kann noch geschaut werden wie viele dieser Spiele mit einem Endstand von 0:0, 1:1 usw. endeten. Wird wieder angenommen, dass die Teams gleich stark sind und ein Team durchschnittlich 1,55 Tore pro Spiel erzielt ergeben sich folgende Wahrscheinlichkeiten für ein Unentschieden mit 0,2,4,... Toren (vgl. Tabelle 5 auf Seite 36):

Endstand	$P(k : k) = \left(\frac{1,55^k}{k!}\right)^2 \cdot e^{-3,1}$
0:0	0,045049202
1:1	0,108230709
2:2	0,065006069
3:3	0,017353009
4:4	0,002605663
5:5	0,000250404
6:6	0,000016711
7:7	0,000000819
8:8	0,000000031
9:9	0,000000001
10:10	0,000000000

TABELLE 5. Wahrscheinlichkeiten für ein Unentschieden mit Endstand $k : k$.

Der Vergleich mit den tatsächlichen Werten der Saisons 2008/09 und 2009/10 ist in Grafik 10 auf Seite 37 veranschaulicht. Es endeten in diesen beiden Saisons gesamt 81 Spiele mit einem Unentschieden. Davon, wie der Grafik entnommen werden kann, 26 mit einem 0:0, 31 mit einem 1:1, 20 mit einem 2:2 und 4 mit einem 3:3. Unentschieden mit mehr als gesamt 6 Toren traten nicht ein. Der Vergleich der tatsächlichen und errechneten Werte zeigt, es gibt in Wirklichkeit wesentlich mehr Unentschieden mit 0 Toren, als in der Theorie, dafür

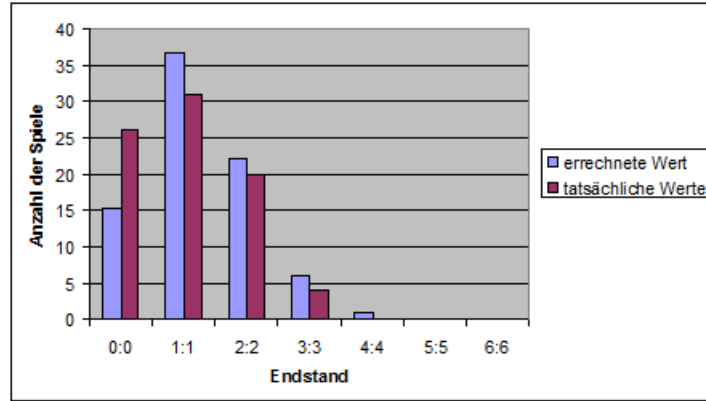


ABBILDUNG 10. Vergleich der tatsächlichen und errechneten Anzahl der Unentschieden mit Endstand $k : k$, modifiziert nach [22, S. 89].

gibt es weniger Unentschieden mit gesamt 2 Toren als bei den Berechnungen. Bei den Unentschieden mit gesamt 4 und mehr Toren stimmen die Berechnungen recht gut mit der Wirklichkeit überein. Natürlich können aus dieser kleinen Stichprobe (81 Spiele) keine allgemeinen Schlussfolgerungen gezogen werden, aber es zeigt sich in Theorie und Praxis ist die Wahrscheinlichkeit für ein 1:1 am größten. Ein Unentschieden mit mehr als gesamt 6 Toren tritt sehr unwahrscheinlich ein.

3.2.5. Wahrscheinlichkeit für k Tore Unterschied⁹

Wie eben beschrieben kann auch die Wahrscheinlichkeit dafür ausgerechnet werden, dass eine Spiel mit 1,2,3,... Toren Unterschied endet, vgl. [22, 104f.]:

$$\begin{aligned}
 P(\text{Spiel endet mit 1 Tor Unterschied}) &= 2(P(X = 0) \cdot P(X = 1) + \\
 &P(X = 1) \cdot P(X = 2) + \dots) = 2\left(\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} + \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} + \dots\right) = \\
 &= 2e^{-2\lambda}\left(\frac{\lambda^0}{0!} \cdot \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^1}{1!} \cdot \frac{\lambda^2}{2!} + \dots\right) = 2e^{-2\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} = 2e^{-2\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{k!(k+1)!}.
 \end{aligned}$$

Die Multiplikation mit 2 ergibt sich, weil sowohl Team A, als auch Team B mit einem Tor Unterschied gewinnen kann. Setzt man wie oben $2\lambda = x$, wobei x die Anzahl der Tore ist, die im Schnitt pro Spiel fallen erhält man:

$$P(\text{Spiel endet mit 1 Tor Unterschied}) = 2e^{-x} \left(\frac{x}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

In diesem Fall ist im Ergebnis die modifizierte Besselsche Funktion erster Art der Ordnung 1 enthalten.

⁹nach [22]

Definition (Besselsche Funktion erster Art der Ordnung 1).

Nach [10, S. 289] heißt

$$J_1(x) := \frac{x}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

Besselsche Funktion erster Art der Ordnung 1.

Die modifizierte Besselsche Funktion ist definiert als

$$I_1(x) := \frac{x}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Wenn man wieder davon ausgeht, dass in einem Bundesligamatch im Schnitt gesamt 3,1 Tore fallen (wie auf Seite 27 berechnet):

$$\begin{aligned} P(\text{Spiel endet mit 1 Tor Unterschied}) &= 2e^{-3,1} \left(\frac{3,1}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+1)!} \left(\frac{3,1}{2}\right)^{2k} = \\ &= 0.090098405 \cdot 4.326206027 = 0.389784262 \Rightarrow 38,99\%. \end{aligned}$$

In der Realität endeten 53 Spiele in der Saison 2008/09 (vgl. Tabelle 7 auf Seite 25) mit der Tordifferenz 1 und 60 Spiele in der Saison 2009/10 (vgl. Tabelle 8 auf Seite 25). Gesamt endet also 113 von 360 Spielen mit der Tordifferenz 1, das sind etwa 31,39%.

Dieses Ergebnis unterscheidet sich vom errechneten Wert. Grund dafür ist wahrscheinlich die Annahme, beide Teams wären gleich stark, also dass die Teams die gleiche durchschnittliche Toranzahl λ pro Spiel erzielen. Zusätzlich handelt es sich generell wieder, wir bereits beschrieben, um ein stark vereinfachtes Modell, bei dem Faktoren wie der Heimvorteil oder die Korrelation der Tore komplett außer Acht gelassen wurden. Macht man sich diese Vereinfachungen bewusst, können analog zu den bisherigen Berechnungen die Wahrscheinlichkeiten hergeleitet werden, dass ein Spiel mit einer Tordifferenz von 2,3,... endet. Allgemein ergibt sich die Formel:

$$P(\text{Spiel endet mit } k \text{ Toren Unterschied}) = (2 - \delta_{k,0}) \cdot e^{-x} \cdot J_k(x).$$

Wobei $\delta_{k,0} = 1$ für $k = 0$, da sonst die Spiele, die mit einem Unentschieden endeten zweimal gezählt werden. Ansonsten ist $\delta_{k,0} = 0$ für alle $k \neq 0$, da wie bereits oben erwähnt ein Spiel mit der Tordifferenz k einen Gewinn für das Team A oder das Team B bedeuten kann. Die Funktion $J_k(x)$ ist die modifizierte Besselsche Funktion erster Art der Ordnung k und x ist die mittlere Toranzahl pro Spiel.

Tolan hat dieses Modell verfeinert, indem er den Heimvorteil und die Korrelation der Tore in die Berechnungen miteinbezogen hat. Er hat nach den passenden Parametern gesucht, um das Modell besser der Realität anzugleichen. So hat er herausgefunden, das Heimteam hat in

etwa die doppelte Torrate im Vergleich zum Auswärtsteam. Die Korrelation der Tore ist gering und beträgt seinen Berechnungen zu folge 5%. Ein Tor beeinflusst das darauffolgende also nur zu 5%. Die Annahme, die Tore fallen in einem Fußballspiel nahezu unkorreliert, ist demnach berechtigt.

Bei Betrachtung der österreichischen Bundesliga (Daten von [12]), waren in der Saison 2008/09 von gesamt 588 Toren 361 Heimtore und 227 Auswärtstore. In der Saison 2009/10 wurden gesamt 528 Tore erzielt und davon waren 325 Heimtore und 203 Auswärtstore. Das bedeutet in diesen zwei Saisonen waren ca. 61,64% aller Tore Heimtore und 38,64% Auswärtstore. Man sieht in den betrachtenden 2 Saisonen der österreichischen Bundesliga ist das Torverhältnis von Heim- zu Auswärtstoren = 1,6 : 1, also etwas geringer als die von Tolan verwendete doppelte Torrate des Heimteams.

3.2.6. Toranzahl im Laufe der Zeit¹⁰

Da bisher nur der Endstand der Spiele relevant war, ist es interessant die Toranzahl im Laufe der Zeit zu betrachten, vgl. [25, S. 100f.]. Zuerst soll die untenstehende Grafik 11 auf Seite 40 verdeutlichen, wie sich die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass ein Team in einem Spiel 0,1,2,... Tore erzielt, im Laufe der Zeit verändern. Dazu muss einfach in die Poissonverteilung $P(X = k) = \frac{(rt)^k}{k!} e^{-(rt)}$ eingesetzt werden: r ist die mittlere Torrate und beschreibt wie viele Tore ein Team im Schnitt pro Stunde erzielt. Die Zeit t wird in Stunden eingesetzt. Es wird wieder von dem auf Seite 27 errechneten Wert ausgegangen, dass in einem Bundesligaspiel durchschnittlich gesamt ca. 3 Tore fallen. Ein Team erzielt somit im Mittel 1,5 Tore pro Spiel und das entspricht einer Torrate von $r = 1$. Um zum Beispiel die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass ein Team nach 30 Minuten noch kein Tor erzielt hat, setzt man $t = 0,5$ und erhält:

$$P(X = 0 \text{ nach } 30 \text{ Minuten}) = \frac{(1 \cdot 0,5)^0}{0!} e^{-(1 \cdot 0,5)} = e^{-0,5} = 0,60653066$$

(weitere Aufgaben befinden sich in Kapitel 4 auf Seite 69.)

An der Grafik kann zum Beispiel abgelesen werden: die Wahrscheinlichkeit, dass ein Team mit einer Torrate von $r = 1$ in einem Spiel Null Tore erzielt, ist klarer Weise zu Beginn des Spieles gleich 1 und sinkt dann im Laufe der Zeit, also in 90 Minuten auf ca. 0,22. Die Wahrscheinlichkeit ein Tor zu erzielen steigt in 60 Minuten von 0 auf ca. 0,37 an und ist zu diesem Zeitpunkt gleich der Wahrscheinlichkeit für Null Tore, da $P(X = 0 \text{ nach einer Stunde}) = \frac{1^0}{0!} e^{-1} = e^{-1}$ und

¹⁰nach [25]

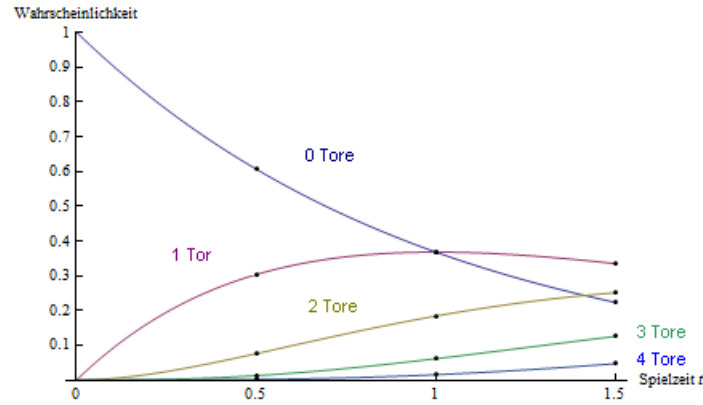


ABBILDUNG 11. Wahrscheinlichkeit für k Tore in Abhängigkeit von der Spielzeit t , bei einer Torrate des Teams von $r = 1$, modifiziert nach [25, S. 100].

$P(X = 1 \text{ nach einer Stunde}) = \frac{1}{1!}e^{-1} = e^{-1}$. Danach sinkt diese wieder leicht auf 0,33 nach 90 Minuten. Die Wahrscheinlichkeiten mehr als ein Tor zu erzielen, wachsen im Laufe eines Spiel bis zum Ende. Betrachtet man die Wahrscheinlichkeit nach 60 Minuten bzw. 90 Minuten mehr als ein Tor erzielt zu haben:

$$P(X > 1 \text{ nach einer Stunde}) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - e^{-1} - e^{-1} = 1 - 2e^{-1} = 0,264241118$$

$$P(X > 1 \text{ nach 1,5 Stunden}) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \frac{1,5^0}{0!}e^{-1,5} - \frac{1,5^1}{1!}e^{-1,5} = 1 - e^{-1,5} - 1,5e^{-1,5} = 0,4421746$$

Das zeigt, die Wahrscheinlichkeit zwischen 60 und 90 Minuten mehr als ein Tor zu erzielen steigt von ca. 0,26 auf 0,44 an und ist höher als die Wahrscheinlichkeit in dieser Zeit ein Tor zu erzielen. Das erklärt warum die Wahrscheinlichkeit ein Tor zu erzielen nach einer Stunde bis zum Ende des Spieles sinkt: gegen Ende eines Spiels ist die Wahrscheinlichkeit höher mehr als ein Tor zu erzielen.

Bei einem Fußballmatch ist es immer interessant wann das erste Tor erzielt wird. Diese Wahrscheinlichkeit, in der Zeit t das erste Tor zu erzielen kann, wie [25, S. 208] beschreibt, auf folgende Art berechnet werden: Die Wahrscheinlichkeit für 0 Tore in der Zeit t beträgt, nach der Formel 2 auf Seite 33:

$$\begin{aligned} P(\text{noch kein Tor erzielt}) &= P(X = 0) \cdot P(X = 0) = \frac{\lambda_1^0 \lambda_2^0}{0!0!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} = \\ &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} = e^{-(r_1 + r_2)t}, \text{ mit } \lambda_1 = r_1 t \text{ und } \lambda_2 = r_2 t, \text{ wobei } r_1 \text{ die Tor-} \\ &\text{rate (Anzahl der Tore pro Stunde) von Team A ist und } r_2 \text{ die Torrate} \\ &\text{von Team B. Die Wahrscheinlichkeit, dass Team A in einem Zeitraum} \\ &dt \text{ genau ein Tor erzielt beträgt } r_1 dt. \text{ Die Wahrscheinlichkeit, dass in} \\ &\text{einem Spiel, in dem bis zum Zeitpunkt } t \text{ kein Tor erzielt wurde, Team A} \end{aligned}$$

in der darauffolgenden Zeitspanne dt ein Tor erzielt, ist gegeben durch $dP = e^{-(r_1+r_2)t} r_1 dt$. Will man nun berechnen, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass Team A in der Zeit t das erste Tor erzielt, also spätestens nach der Zeit t , muss obiger Ausdruck von 0 bis t integriert werden: $P(\text{A erzielt spätestens nach der Zeit } t \text{ das 1. Tor}) = \int_0^t e^{-(r_1+r_2)t} r_1 dt =$

$$= -\frac{e^{-(r_1+r_2)t}}{(r_1+r_2)} r_1 \Big|_0^t = -\frac{e^{-(r_1+r_2)t}}{(r_1+r_2)} r_1 + \frac{r_1}{r_1+r_2} \Rightarrow \text{also gilt:}$$

$$P(\text{A erzielt in der Zeit } t \text{ das 1. Tor}) = \frac{r_1}{r_1+r_2} (1 - e^{-(r_1+r_2)t})$$

Das bedeutet zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Wahrscheinlichkeit 0, dass Team A ein Tor erzielt, denn es ist nicht möglich wenn noch nicht gespielt wurde ein Tor zu erzielen. Die Wahrscheinlichkeit nähert sich für $t \rightarrow \infty$ dem Wert $\frac{r_1}{r_1+r_2}$ an.

Wird davon ausgegangen, dass zwei Teams mit der gleichen mittleren Torrate von $r = 1$ gegeneinander spielen, verdeutlicht folgende Grafik (vgl. Abbildung 12 auf Seite 41) die Wahrscheinlichkeit spätestens nach der Zeit t das erste Tor zu erzielen. Am Anfang steigt die Wahrscheinlichkeit sehr stark, dann wird die Kurve flacher (nach ca. 45 Minuten) und nähert sich schließlich dem Wert 0,5 an. Für sehr unterschiedliche

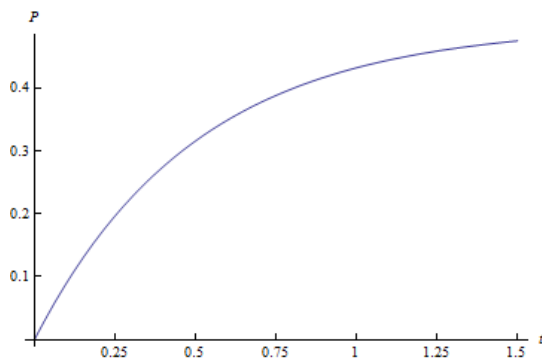


ABBILDUNG 12. Wahrscheinlichkeit eines Teams das erste Tor spätestens nach der Zeit t zu erzielen mit $r = 1$ für beide Teams, modifiziert nach [25, S. 108].

Torraten, wie zum Beispiel $r_1 = 0,5$ und $r_2 = 2$ ist die Kurve wesentlich flacher, da sich die Wahrscheinlichkeit dem Wert $\frac{0,5}{2,5} = 0,2$ annähert. Für ein wesentlich schwächeres Team ist es natürlich schwieriger das erste Tor zu erzielen. Umgekehrt, wenn $r_1 = 2$ und $r_2 = 0,5$ ist das Gegenteil der Fall. Die Kurve ist steiler und nähert sich dem Wert 0,8 an. Es ist also sehr wahrscheinlich, dass das stärkere Team im Laufe der Zeit das erste Tor erzielt. Das veranschaulicht Abbildung 13.

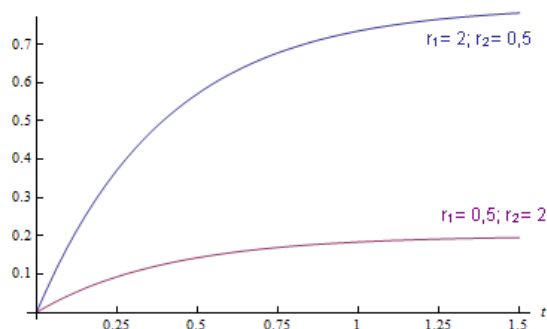


ABBILDUNG 13. Wahrscheinlichkeit eines Teams das erste Tor spätestens nach der Zeit t zu erzielen mit unterschiedlichen Torraten, modifiziert nach [25, S. 107].

Zum Beispiel kann so berechnet werden, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, wenn FK Austria Wien gegen FC Redbull Salzburg spielt, dass Austria Wien in 25 Minuten das erste Tor erzielt (Daten von [12]):

FK Austria Wien hat 119 Tore in den Saisons 2008/09 und 2009/10 erzielt, also in 72 Spielen:

$\lambda_1 = 1,65$ in 1,5 Stunden. Da $\lambda = r \cdot t \Rightarrow r_1 = 1,10$

FC Redbull Salzburg hat 154 Tore in den Saisons 2008/09 und 2009/10 erzielt: $\lambda_2 = 2,14 \Rightarrow r_2 = 1,43$

$$P(\text{Austria Wien erzielt spätestens nach 25 Minuten das 1. Tor}) = \frac{1,10}{1,10+1,43}(1 - e^{-(1,10+1,43)\frac{5}{12}}) = \frac{1,10}{2,53}(1 - e^{-2,53\frac{5}{12}}) = 0,283268388$$

Somit erzielt FK Austria Wien mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 28,34% nach spätestens 25 Minuten das erste Tor bei einem Spiel gegen FC Redbull Salzburg.

Tatsächlich erzielte FK Austria Wien in der Saison 2008/09 in keinem der vier Spiele in 25 Minuten das erste Tor und in der Saison 2009/10 in zwei der vier Spiele. Nämlich bei den zwei Heimspielen: einmal in der 20. Minute, das Spiel endete mit einem Endstand von 1:0 und einmal in der 21. Minute, das Spiel endete mit einem Endstand von 1:1. Es gelang also FK Austria Wien in zwei von acht Spielen, nach spätestens 25 Minuten das erste Tor zu erzielen. Das entspricht etwa 25% und liegt nahe dem errechneten Wert.

Nach einem Artikel in der Zeitung, vgl. [3], ist das erste Tor für ein Team in der österreichischen Bundesliga besonders wichtig, es ist sogar von der „Magie des ersten Tores“ die Rede. Grund dafür ist, es gewinnt sehr oft jenes Team, das das erste Tor erzielt hat. In der Bundesligasaison 2010/2011 hat bis zum 13.11.2010 in 51 von 63 Fällen jenes Team gewonnen, das mit 1:0 in Führung ging, 5 Mal hat dieses Team verloren

und 7 Mal endete ein Spiel nach einer 1:0 Führung unentschieden. Bei der WM 2010 in Südafrika war dieser Trend auch zu erkennen. Von 64 Spielen gewann 45 Mal jenes Team, das mit 1:0 in Führung ging und verlor nur in 3 Fällen. 9 Mal endete ein Spiel unentschieden nach einem Spielstand von 1:0. Auch in der Champions League lässt sich dieses Phänomen beobachten.

Mathematisch betrachtet kann die Wahrscheinlichkeit, dass ein Team, das bereits ein Tor erzielt hat gewinnt, verliert oder das Spiel nach einer 1:0 Führung unentschieden endet wie folgt berechnet werden:

Angenommen Team A erzielt in der Zeit t ein Tor. A gewinnt genau dann, wenn es in der verbleibenden Zeit $(1,5 - t)$ mindestens so viele Tore wie Team B erzielt. Das Spiel endet unentschieden, wenn Team B in der verbleibenden Zeit 1 Tor mehr als Team A erzielt. Team A verliert, wenn Team B in der verbleibenden Zeit mind. 2 Tore mehr erzielt als Team A:

$$P(\text{A gewinnt}) = e^{-(r_1+r_2)(1,5-t)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r_1(1,5-t))^k}{k!} \sum_{n=0}^k \frac{(r_2(1,5-t))^n}{n!}$$

$$P(\text{Unentschieden}) = e^{-(r_1+r_2)(1,5-t)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r_1(1,5-t))^{k-1}}{(k-1)!} \frac{(r_2(1,5-t))^k}{k!}$$

$$P(\text{A verliert}) = e^{-(r_1+r_2)(1,5-t)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(r_2(1,5-t))^k}{k!} \sum_{n=0}^{k-2} \frac{(r_1(1,5-t))^n}{n!}$$

Ein Beispiel soll das verdeutlichen. Spielen zwei Teams mit der selben Torrate von $r = 1$ gegeneinander. Team A erzielt in der ersten halben Stunde ein Tor. Die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis wird nach Formel 2 auf Seite 33 durch

$$P(\text{Spielstand nach 30 Minuten 1:0}) = e^{-1} \cdot \frac{0,5^1}{1!} \cdot \frac{0,5^0}{0!} = 0.183939721$$

berechnet.

Es wird nun die verbleibende Spielzeit, also 1 Stunde betrachtet:

$$P(\text{A gewinnt}) = e^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1^k}{k!} \sum_{n=0}^k \frac{1^n}{n!} = 0.654254161$$

$$P(\text{Spiel endet unentschieden}) = e^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1^{k-1}}{(k-1)!} \frac{1^k}{k!} = 0.215269289$$

$$P(\text{A verliert}) = e^{-2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1^k}{k!} \sum_{n=0}^{k-2} \frac{1^n}{n!} = 0.130476549.$$

Das bedeutet, Team A gewinnt nach einer 1:0 Führung, mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 65,43%, verliert mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 13,05% und das Spiel endet zu 21,53 % unentschieden. Dabei ist zu beachten das Ereignis Team A führt nach einer halben Stunde mit

1:0, bei gleicher Torrate von 1 beider Teams, tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 18,39%. Gesamt betrachtet ergeben sich also die Wahrscheinlichkeiten:

$P(\text{Team A gewinnt}) \approx 0.1203$,

$P(\text{Spiel endet unentschieden}) \approx 0.0396$ und

$P(\text{A verliert}) \approx 0.0240$, nach einer 1:0 Führung von Team A in der ersten halben Stunde, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass Team A in der ersten halben Stunde ein Tor erzielt, miteinberechnet wird.

Rechnet man dieses Beispiel mit sehr unterschiedlichen Torraten, z.B. mit $r_1 = 0,5$ und $r_2 = 1,5$, gewinnt das schlechtere Team nach einer 1:0 Führung mit einer Wahrscheinlichkeit von 37,34%, es verliert mit einer Wahrscheinlichkeit von 33,14% und das Spiel endet unentschieden mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 28,93%. Allerdings beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass das schlechtere Team in der ersten halben Stunde ein Tor erzielt nur ca. 9,20%. Somit tritt das Ereignis nach einer 1:0 Führung in der ersten halben Stunden das Spiel zu gewinnen gesamt mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 3,49% ein.

Das soll zeigen, es ist für ein vermeintlich schlechteres Team zwar schwierig ein Tor zu erzielen, aber gelingt das dann stehen die Chancen nicht so schlecht das Spiel zu gewinnen, wie auch schon in Kapitel 3.1 auf Seite 13 analysiert wurde.

Ich habe die Tabellen der österreichischen Bundesliga (Daten wurden von der Homepage der österreichischen Bundesliga entnommen, siehe [12]) der Saisons 2008/09 und 2009/10 ausgewertet, um festzustellen wie oft ein Team nach einer 1:0 Führung gewonnen hat, verloren hat oder das Spiel mit einem Unentschieden ausgegangen ist. Die Ergebnisse sind in der Tabelle 6 auf Seite 44 dargestellt: In der Saison

Saison	Anzahl der Spiele	Gewinn	Niederlage	Unentschieden
2008/09	168	121	22	25
2009/10	166	114	22	30
Gesamt	334	235	44	55

TABELLE 6. Spielausgang nach einer 1:0 Führung.

2008/09 endeten nach einer 1:0 Führung eines Teams etwa 72% der Spiele mit einem Sieg für das Team, das das erste Tor erzielte, ca. 13% mit einer Niederlage und ca. 15% mit einem Unentschieden.

In der Saison 2009/10 gewann in etwa 69% der Fälle das Team, das mit einem 1:0 in Führung ging, verlor in ca. 13% der Fälle und 18% der Spiele endeten mit einem Unentschieden.

Gesamt betrachtet endeten etwa 70% der Spiele mit einem Gewinn, 13% mit einer Niederlage und 17% mit einem Unentschieden. Der Vergleich mit den errechneten Wahrscheinlichkeiten (65%, 21% und 13%), bei der Annahme beide Teams hätten die gleiche Torrate, zeigt, dass in der Realität sogar noch mehr Spiele mit einem Gewinn für das Team endeten, das mit 1:0 in Führung war, dafür weniger mit einem Unentschieden. Die Wahrscheinlichkeiten nach einer 1:0 Führung zu verlieren sind in der Theorie und Praxis gleich. Die berechneten Werte stimmen relativ gut mit den tatsächlichen Werten überein und es zeigt sich, die Wahrscheinlichkeit nach einer 1:0 Führung noch zu verlieren, ist in der österreichischen Bundesliga eher gering, wie auch die errechneten Werte ergeben.

3.3. Tordifferenz¹¹

Bisher wurde bei den Berechnungen immer nur die Anzahl der erzielten Tore verwendet, da in der österreichischen Bundesliga letztendlich die erzielten Tore zur Punktevergabe führen (vgl. Kapitel 3.2.2 auf Seite 23). Das Problem bei der Betrachtung der geschossenen Tore ist allerdings die Vernachlässigung des Abwehrverhaltens. Es handelt sich also um ein reines Offensivmodell und somit um eine grobe Vereinfachung der Wirklichkeit. Heuer, vgl. [8] und [9] vertritt die Ansicht, dass die Tordifferenz, also das Verhältnis zwischen erzielten und erhaltenen Toren, mehr über die Qualität eines Teams aussagt als die Punktezahl. So können knappe Ergebnisse durch die Punktezahl besser aussehen. Endet ein Spiel mit 1:0 gibt es für das Gewinnerteam ebenso 3 Punkte wie bei einem 6:0 Gewinn. Wie in Kapitel 3.1 auf Seite 13 näher ausgeführt, kann ein 1:0 eher auf den Zufall zurückgeführt werden, als ein Spielstand von 6:0, bei dem mit hoher Wahrscheinlichkeit das Können für das Resultat verantwortlich war und weniger der Zufall. Ein anderes Beispiel, das die Gerechtigkeit der Punktevergabe in Frage stellt ist folgendes: Gewinnt ein Team 4 Mal hintereinander mit zum Beispiel 1:0, 2:1, 1:0, 1:0 erhält es letztendlich 12 Punkte (3 Punkte für jeden Gewinn).

Ein Team, das 3 Mal gewinnt mit den Ergebnissen 3:0, 5:0, 6:0 und einmal 0:1 verliert, erhält jedoch nur 9 Punkte, obwohl es aufgrund der hohen Gewinne besser zu sein scheint, als das Team, das immer nur mit einer Tordifferenz von 1 gewinnt. Ein knapper Gewinn kann schließlich auch mit Glück zu tun haben.

Diese Beispiele legen die Vermutung nahe, die Betrachtung der erzielten Tore ist nicht ausreichend, um Aussagen über das Können eines Teams zu treffen.

¹¹nach [8] und [9]

„Zunächst braucht man ein sehr gutes Maß für die Qualität einer Mannschaft – und das ist eher die Tordifferenz, nicht die Punktezahl. Wenn man die Wahrscheinlichkeit optimieren will, dass die beste Elf Meister wird, sollte man die Tabelle gemäß der Tordifferenz aufstellen. Trotzdem macht der Zufall am Saisonende immer noch 30 Prozent aus. Bei den Punkten sind es sogar 40 Prozent. Da ist reichlich Glück im Spiel.“, wie Heuer in einem Interview sagt, vgl. [11].

Heuer, vgl. [9], geht darüber hinaus, definiert die Fitness eines Teams über die Tordifferenz und untersucht die zeitliche Entwicklung davon. Er sagt die Tordifferenz sei ein besserer Maßstab als die Punkteanzahl, um das tatsächlich bessere Team herauszufinden. Er analysiert und beweist das in seiner Arbeit. Darüber hinaus zeigt er, die Fitness eines Teams bleibt während einer Saison, abgesehen von kleinen Schwankungen, konstant. Weiters, dass der Heimvorteil eine Konstante ist, die zur Fitness des Heimteams dazu addiert wird und es kein generell starkes Heimteam gibt, sondern alle Teams den gleichen Heimvorteil haben. Er führt an, es gäbe keine nachweisbare Siegesserien, sondern nur Verlustserien, das heißt ab 4 Verlusten hintereinander spielt ein Team schlechter, als es eigentlich kann, was am wahrscheinlichsten auf psychologische Gründe zurückzuführen ist.

Ich möchte nicht auf alle seine Ergebnisse näher eingehen, aber mich im folgenden mit der Tordifferenz, als Maßstab für das Können eines Teams, genauer befassen. Das bedeutet im Unterschied zu den vorhergehenden Kapiteln spielt nicht nur die erzielte Toranzahl eines Teams eine Rolle, sondern auch die Anzahl der erhaltenen Tore.

3.3.1. Berechnung der mittleren Toranzahl über die Tordifferenz¹²

Ausgehend davon, dass die Tordifferenz ein wesentlicher Faktor bei der Betrachtung der Qualität eines Teams ist, erarbeitet Heuer in dem Artikel „Soccer: is scoring goals a predictable Poissonian process?“ ein Modell zur Vorhersage des Spielausganges. Bei diesem wird bei der Berechnung der mittleren Toranzahl für jedes Team, die Tordifferenz verwendet, um dann mit Hilfe der Poissonverteilung mögliche Spielausgänge zu simulieren. Genauer wird für jedes Team die mittlere Tordifferenz aus der Vergangenheit ermittelt, dann die zu erwartende Tordifferenz berechnet und schließlich mit Hilfe der zu erwartenden gesamten Toranzahl, die zu erwartende Toranzahl für jedes Team ermittelt. Das möchte ich nun an einem Beispiel zeigen (vgl. [6] und [8], die Daten stammen von [12]):

¹²nach [8]

Die Saison 2009/10 endete für den SK Puntigamer Sturm Graz mit einem Torverhältnis von 50:36, das bedeutet sie erzielten 50 Tore und erhielten 36. Das ergibt die Tordifferenz $\Delta G=14$.

Die Saison 2008/09 endete mit dem Torverhältnis 68:45, das heißt $\Delta G=23$.

Bei gesamt 72 Spielen macht das also eine mittlere Tordifferenz von $\frac{37}{72} \approx 0,51$ pro Spiel.

Für den Verein FC Red Bull Salzburg, der in beiden Saisons Meister wurde, endete die Saison 2009/10 mit 68 erzielten und 27 erhaltenen Toren, das macht eine Tordifferenz von $\Delta G=41$.

Die Saison 2008/09 endete mit dem Torverhältnis 86:50, also $\Delta G=36$. Im Mittel hatte FC Red Bull Salzburg in diesen beiden Saisons eine Tordifferenz von $\frac{77}{72} \approx 1,07$ pro Spiel.

Die zu erwartende Toranzahl in einem Spiel wird nach Heuer errechnet aus $\sum G_i + \sum G_j - \lambda$, wobei G_i bzw. G_j die durchschnittliche Summe der erhaltenen und erzielten Tore pro Spiel von Team i bzw. j ist und λ die im Durchschnitt pro Spiel erzielte gesamte Toranzahl in der betrachtenden Saison, also in diesem Beispiel $\lambda = 3,1$ (vgl. 3.2.2 auf Seite 27).

$$\sum G_{\text{Sturm Graz}} = \frac{1}{72}(50 + 36 + 68 + 45) = \frac{199}{72} \approx 2,76$$

$$\sum G_{\text{Salzburg}} = \frac{1}{72}(68 + 27 + 86 + 50) = \frac{231}{72} \approx 3,21$$

Also ist die zu erwartende Toranzahl, in einem Match von Sturm Graz gegen Redbull Salzburg: $2,76 + 3,21 - 3,1 = 2,87$

Die zu erwartende Tordifferenz beträgt $1,07 - 0,51 = 0,56$ zum Vorteil für Redbull Salzburg. Somit kann die zu erwartende Toranzahl beider Teams aus den folgenden Gleichungen berechnet werden:

$$\lambda_{\text{Salzburg}} + \lambda_{\text{Sturm Graz}} = 2,87 \text{ und } \lambda_{\text{Salzburg}} - \lambda_{\text{Sturm Graz}} = 0,56 \Rightarrow \lambda_{\text{Salzburg}} = \lambda_1 = 1,715, \lambda_{\text{Sturm Graz}} = \lambda_2 = 1,155$$

Diese Werte können nun in die Poissonverteilung (vgl. die Formeln 3, 4 und 5 auf Seite 34) eingesetzt werden um mögliche Spielausgänge zu simulieren. Zum Beispiel:

$$P(\text{Spiel endet unentschieden}) = e^{-2,87} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1,715^k 1,155^k}{(k!)^2} = 0.238509726$$

$$P(\text{Salzburg gewinnt}) = e^{-2,87} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1,715^k}{k!} \sum_{r=0}^{k-1} \frac{1,155^r}{r!} = 0.504787890$$

$$P(\text{Sturm Graz gewinnt}) = 1 - P(\text{Unentschieden}) - P(\text{Salzburg gewinnt}) = 1 - 0,5048 - 0,2385 = 0,2567 \text{ bzw.}$$

$$P(\text{Sturm Graz gewinnt}) = e^{-2,87} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1,155^k}{k!} \sum_{r=0}^{k-1} \frac{1,715^r}{r!} = 0.256702383$$

Das bedeutet ein Spiel zwischen dem SK Puntigamer Sturm Graz und dem FC Redbull Salzburg endet mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa

23,85% unentschieden, mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 50,48% mit einem Gewinn von Redbull Salzburg und zu 25,67% mit einem Gewinn von Sturm Graz. In Wirklichkeit endeten in den Saisonen 2008/09 und 2009/10 (siehe Abbildung 7 und 8 auf Seite 25) von 8 Spielen 5 mit einem Gewinn für Salzburg, 2 Spiele unentschieden und nur 1 Spiel mit einem Gewinn für Sturm Graz. Das bedeutet ein Gewinn für Salzburg trat in ca. 62,5% der Fälle ein, ein Gewinn für Sturm Graz in 12,5% und ein Unentschieden in 25% der Fälle. Das errechnete Ergebnis stimmt für den Fall Unentschieden sehr gut mit der Wirklichkeit überein. Es gab aber mehr Gewinne für Salzburg als in der Theorie berechnet und daraus ergeben sich natürlich weniger Gewinne für Sturm Graz. Das Ergebnis ist, aber trotzdem nicht schlecht, wenn man bedenkt, dass die Stichprobe sehr klein ist und der Heimvorteil außer Acht gelassen wurde.

Wird dieses Beispiel, ohne Berücksichtigung der Tordifferenz berechnet, also nur mit Hilfe der erzielten Tore erhält, führt das zu folgenden Ergebnissen: FC Salzburg hat in den betrachteten 2 Saisonen (72 Spiele) gesamt 154 Tore erzielt also beträgt $\lambda_1 = 2,14$.

SK Sturm Graz erzielte 118 Tore, also im Durchschnitt etwa $\lambda_2 = 1,64$ Tore pro Spiel. Einsetzen in die Formeln 3, 4 und 5 auf Seite 34 ergibt:

$$P(\text{Spiel endet unentschieden}) = e^{-(3,78)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1,64^k 2,14^k}{(k!)^2} = 0.207548910$$

$\Rightarrow$ das entspricht ca. 20,75%

$$P(\text{Salzburg gewinnt}) = e^{-(3,78)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2,14^k}{k!} \sum_{r=0}^{k-1} \frac{1,64^r}{r!} = 0.494397569$$

$\Rightarrow$ das entspricht ca. 49,44%

$$P(\text{Sturm Graz gewinnt}) = e^{-(3,78)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1,64^k}{k!} \sum_{r=0}^{k-1} \frac{2,14^r}{r!} = 0.298053520$$

$\Rightarrow$ das entspricht ca. 29,81%

Das zeigt das Miteinbeziehen der Tordifferenz führt zu besseren Ergebnissen, die näher an den tatsächlichen Ergebnissen liegen.

3.3.2. Heimvorteil¹³

Das Modell kann noch verfeinert werden, indem der Heimvorteil in die Berechnungen mit einbezogen wird. Generell wird der Heimvorteil in die Berechnung der zu erwartenden Tordifferenz miteinbezogen. Nach [9, S. 19] kann der Heimvorteil auf folgende Art berechnet werden: $\Delta(\Delta G) = \Delta G_H(N) - \Delta G_A(N)$, wobei $\Delta G_H(N)$ die Tordifferenz bei N Heimspielen beschreibt und $\Delta G_A(N)$ die Tordifferenz bei N Auswärtsspielen. Betrachtet man die Saisonen 2008/09 und 2009/10

¹³nach [8]

(Daten von [12]) ist $\Delta G_H(360) - \Delta G_A(360) = \frac{256}{360} + \frac{256}{360} = 1,42$. Der Heimvorteil beträgt etwa 1,42 pro Spiel, das bedeutet ein Team erzielt im Durchschnitt 0,71 Tore mehr zu Hause, andererseits erhält es im Mittel um 0,71 Tore mehr bei Auswärtsspielen. Bei einem Heimspiel für den FC Redbull Salzburg lässt sich dieser Wert so ausrechnen:

In zwei Saisons finden 72 Spiele statt, also 36 Heim- und 36 Auswärtsspiele. In der Saison 2008/09 hatte Salzburg bei Betrachtung der Heimspiele eine Tordifferenz von 35 und 2009/10 eine Tordifferenz von 29. Bei den Auswärtsspielen hatte dieses Team 2008/09 eine Tordifferenz von 1 und 2009/10 eine Tordifferenz von 12. Gesamt ist nun $\Delta G_H(36) - \Delta G_A(36) = \frac{35+29}{36} - \frac{1+12}{36} = \frac{51}{36} \approx 1,42$. Der FC Salzburg erzielt somit bei Heimspielen etwa 0,71 Tore mehr als bei Auswärtsspielen. Dieser Faktor fließt in die Berechnung der zu erwartenden Tordifferenz ein:

$1,07 + 0,71 - 0,51 = 1,27$. Das bedeutet bei einem Heimspiel für Salzburg ist die zu erwartende Tordifferenz mehr als doppelt so hoch, als bei obiger Berechnung, in der der Heimvorteil vernachlässigt wurde. Die zu erwartende Toranzahl von 2,87 ändert sich nicht und es ergeben sich folgende Werte für die zu erwartende Toranzahl jedes Teams:

$\lambda_{\text{Salzburg}} = \lambda_1 = 2,07$ und $\lambda_{\text{Sturm Graz}} = \lambda_2 = 0,8$

Es ergeben sich nun folgende Wahrscheinlichkeiten:

$$P(\text{Spiel endet unentschieden}) = e^{-2,87} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2,07^k 0,8^k}{(k!)^2} = 0.197408297$$

$$\Rightarrow 19,74\%$$

$$P(\text{Salzburg gewinnt}) = e^{-2,87} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2,07^k}{k!} \sum_{r=0}^{k-1} \frac{0,8^r}{r!} = 0.668502285$$

$$\Rightarrow 66,85\%$$

$$P(\text{Sturm Graz gewinnt}) = e^{-2,87} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{0,8^k}{k!} \sum_{r=0}^{k-1} \frac{2,07^r}{r!} = 0.134089418$$

$$\Rightarrow 13,41\%$$

Tatsächlich hat der FC Redbull Salzburg 4 von 4 Heimspielen in den Saisons 2008/09 (2:1 und 3:1) und 2009/10 (4:2 und 3:0) gewonnen. Ebenso können die Wahrscheinlichkeiten bei einem Heimspiel für den SK Puntigamer Sturm Graz berechnet werden. Der Heimvorteil in den betrachteten Saisons ergibt sich wie oben gezeigt aus den Tordifferenzen bei den Heimspielen (2008/09: $\Delta G_H = 26$, 2009/10: $\Delta G_H = 11$) weniger den Tordifferenzen bei den Auswärtsspielen

(2008/09: $\Delta G_A = -3$, 2009/10: $\Delta G_A = 3$) durch:

$$\Delta G_H(36) - \Delta G_A(36) = \frac{11+26}{36} - \frac{-3+3}{36} = \frac{37}{36} \approx 1,03 \Rightarrow \text{Sturm Graz erzielt also bei Heimspielen etwa 0,52 Tore mehr als bei Auswärtsspielen.}$$

Somit ergibt sich die zu erwartende Tordifferenz für Sturm Graz:

$$0,51 + 0,51 - 1,07 = -0,05 \Rightarrow$$

$$\lambda_{\text{Sturm Graz}} = \lambda_1 = 1,41 \text{ und } \lambda_{\text{Salzburg}} = \lambda_2 = 1,46$$

$$P(\text{Spiel endet unentschieden}) = 0.249151628 \Rightarrow 24,92\%$$

$$P(\text{Sturm Graz gewinnt}) = 0.364210232 \Rightarrow 36,42\%$$

$$P(\text{Salzburg gewinnt}) = 0.386638139 \Rightarrow 38,66\%$$

In der Praxis endeten von 4 Heimspielen von SK Puntigamer Sturm Graz 2 mit unentschieden (entspricht 50%), 1 mit einem Gewinn für Salzburg (entspricht 25%) und 1 mit einem Gewinn für Sturm Graz (entspricht 25%). (Ergebnisse 2008/09: 2:2 und 2:0, Ergebnisse 2009/10: 0:0 und 0:2).

Auch wenn sich diese errechneten Ergebnisse von den tatsächlichen aufgrund der kleinen Stichprobe unterscheiden, liefert der Einbezug des Heimvorteils trotzdem bessere Ergebnisse als die Berechnung auf Seite 47.

3.3.3. *Spiel endet mit Tordifferenz r* ¹⁴

Mit Hilfe dieses Modells kann auch die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dass ein Spiel mit einer bestimmten Tordifferenz endet:

Team A erzielt r Tore mehr als Team B, also Team A gewinnt um r Tore:

$$(6) \quad P(A : B = (k + r) : k) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^{k+r}}{(k + r)!} \frac{\lambda_2^k}{k!}$$

bzw.

Team A erzielt r Tore weniger als Team B, also Team A verliert um r Tore:

$$(7) \quad P(A : B = (k - r) : k) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} \frac{\lambda_2^{k+r}}{(k + r)!}$$

Für obiges Beispiel ergeben sich, wenn der Fall Salzburg gegen Sturm Graz betrachtet wird folgende Wahrscheinlichkeiten, wenn ohne Berücksichtigung des Heimvorteils gerechnet wird, also mit den Werten

$$\lambda_{\text{Salzburg}} = \lambda_1 = 1,715, \lambda_{\text{Sturm Graz}} = \lambda_2 = 1,155:$$

Spiel endet mit der Tordifferenz 0:

$$P((k + 0) : k) = e^{-2,87} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1,715^k}{k!} \frac{1,155^k}{k!} = 0.238509726$$

Spiel endet mit der Tordifferenz 1 bzw. 2 für Salzburg, das heißt Salzburg gewinnt mit 1 bzw. 2 Toren Unterschied:

¹⁴ [8]

$$P((k+1) : k) = e^{-2,87} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1,715^{k+1}}{(k+1)!} \frac{1,155^k}{k!} = 0.231143436$$

$$P((k+2) : k) = e^{-2,87} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1,715^{k+2}}{(k+2)!} \frac{1,155^k}{k!} = 0.154026618$$

Spiel endet mit der Tordifferenz -1 bzw. -2 für Salzburg, das bedeutet Salzburg verliert mit 1 bzw. 2 Toren Unterschied:

$$P((k-1) : k) = e^{-2,87} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1,715^k}{k!} \frac{1,155^{k+1}}{(k+1)!} = 0.155668028$$

$$P((k-2) : k) = e^{-2,87} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1,715^k}{k!} \frac{1,155^{k+2}}{(k+2)!} = 0.069860469$$

Die untenstehende Grafik 14 auf Seite 51 veranschaulicht die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spiel zwischen Salzburg und Sturm Graz mit der Tordifferenz r für Salzburg endet.

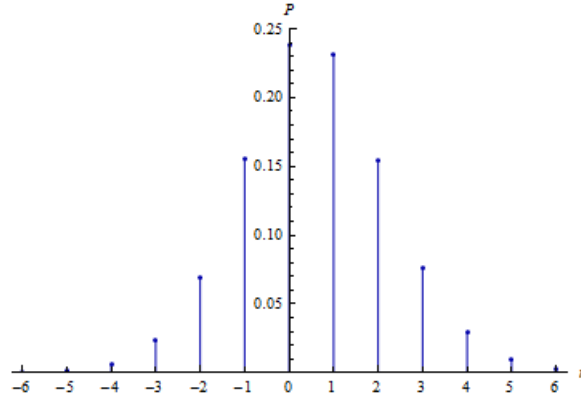


ABBILDUNG 14. Wahrscheinlichkeit für den Spielausgang mit Tordifferenz r , am Beispiel FC Redbull Salzburg gegen SK Puntigamer Sturm Graz, modifiziert nach [8].

Die Tordifferenz 0 ist mit der höchsten Wahrscheinlichkeit zu erwarten, knapp danach die Tordifferenz 1 für Salzburg. Die Grafik verdeutlicht, ein Gewinn für Salzburg ist eher zu erwarten, als einer für Sturm Graz, da die positiven Tordifferenzen mit deutlich höheren Wahrscheinlichkeiten eintreten.

Wird das Ganze nun unter Berücksichtigung des Heimvorteils berechnet, also mit den Werten $\lambda_{\text{Salzburg}} = \lambda_1 = 2,035$ und $\lambda_{\text{Sturm Graz}} = \lambda_2 = 0.835$ ergibt sich folgende Abbildung 15 auf Seite 52.

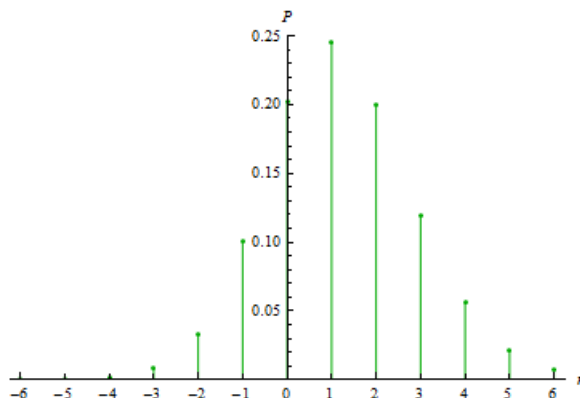


ABBILDUNG 15. Wahrscheinlichkeit für den Spielausgang mit Tordifferenz r unter Berücksichtigung des Heimvorteils, am Beispiel FC Redbull Salzburg gegen SK Puntigamer Sturm Graz, modifiziert nach [8].

Wird der Heimvorteil miteinbezogen, tritt das Ereignis Tordifferenz 1 für Salzburg mit der höchsten Wahrscheinlichkeit ein. Die gesamte Grafik verschiebt sich zu Gunsten von Salzburg, da ein Gewinn von Sturm Graz mit noch geringerer Wahrscheinlichkeit eintritt, was an den Wahrscheinlichkeiten für negative Tordifferenzen erkennbar ist, und auch die Wahrscheinlichkeit für ein Unentschieden sinkt auf knapp 0.2.

Es macht nicht viel Sinn, eine Grafik mit den tatsächlichen Werten zu erstellen, da in den Saisonen 2008/09 und 2009/10 (Daten von [12]) gesamt 8 Spiele statt fanden, in denen Salzburg gegen Sturm Graz spielte und davon waren vier Heimspiele für Salzburg. Gesamt endeten 2 Spiele mit $\Delta G = 0$ (25%), 1 Spiel mit der $\Delta G = 1$ (12,5%), 3 Spiele mit $\Delta G = 2$ (37,5%), 1 Spiel mit $\Delta G = 3$ (12,5%) und nur 1 Spiel mit einem Verlust von Salzburg, mit $\Delta G = -2$ (12,5%). Es trat also am häufigsten das Ergebnis Tordifferenz 2 ein. Die Werte stimmen, abgesehen von der Wahrscheinlichkeit für ein Unentschieden, nicht gut mit den errechneten Werten überein, aber das ist bei der kleinen betrachteten Stichprobe keine Überraschung.

Von den vier Heimspielen endeten alle mit einem Gewinn von Salzburg, nämlich 1 Spiel mit $\Delta G = 1$ (25%), 2 Spiele mit $\Delta G = 2$ (50%) und 1 Spiel mit $\Delta G = 3$ (25%).

Um zu sehen, dass das obige Modell mit der Realität übereinstimmt, kann es beispielhaft auf die österreichische Bundesliga in den Saisonen 2008/09 und 2009/10 angewendet werden, indem die Heim- und Auswärtsspiele verglichen werden:

Die zu erwartende Toranzahl in einem Spiel der österreichischen Bundesliga ist 3,1 (vgl. 3.2.2 auf Seite 27). Die Summe der Tordifferenzen

der einzelnen Teams in einer Saison ergibt Null, somit sind die durchschnittlich erwartenden Tordifferenzen pro Spiel, bei Betrachtung aller Spiele einer Saison, gleich Null und die zu erwartende Tordifferenz wenn ein Heim- gegen ein Auswärtsteam spielt ergibt sich über den Heimvorteil, der auf Seite 49 mit etwa 1,42 berechnet wurde:

$$0 + 0,71 - 0 = 0,71.$$

Da $\lambda_{\text{Heim}} + \lambda_{\text{Auswärts}} = 3,1$ und $\lambda_{\text{Heim}} - \lambda_{\text{Auswärts}} = 0,71$ können:

$\lambda_{\text{Heim}} = \lambda_1 = 1,905$ und $\lambda_{\text{Auswärts}} = \lambda_2 = 1,195$ berechnet werden. Das bedeutet im Durchschnitt erzielt das Heimteam ca. 1,9 Tore und das Auswärtsteam 1,2 Tore.

Mit Hilfe der Formeln 6 und 7 auf Seite 50, werden die Wahrscheinlichkeiten für die Tordifferenzen berechnet und in der Abbildung 16 auf Seite 53 zusammen mit den tatsächlichen Werten dargestellt.

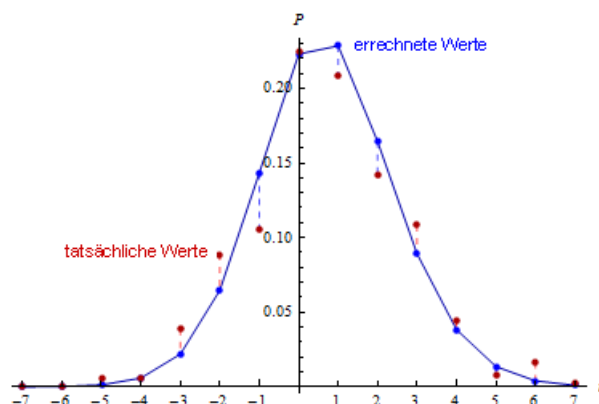


ABBILDUNG 16. Wahrscheinlichkeit für den Spielausgang mit Tordifferenz r für das Heimteam, modifiziert nach [8].

Es zeigt sich, dass die Werte relativ gut übereinstimmen. Die Anzahl der Unentschieden ist genauso groß wie erwartet, ebenso stimmen die Werte für Tordifferenzen größer als 4 und kleiner als -4 nahezu perfekt überein. Abweichungen gibt es bei den Tordifferenzen 1,2,3 und ebenso bei -1,-2,-3. Die größte Abweichung ist bei der Tordifferenz -1. Grund dafür ist, in der Saison 2008/09 sind lediglich 14 von 180 Heimspielen mit einem Verlust von einem Tor Unterschied ausgegangen, im Vergleich dazu endeten 24 Spiele in der Saison 2009/10 mit dieser Tordifferenz. Diese geringe Anzahl an Spielen, die mit einem Gewinn für das Auswärtsteam von einem Tor Unterschied in der Saison 2008/09 endeten, schlägt sich in höheren Gewinnen, also mit mehr als einem Tor Unterschied für das Auswärtsteam nieder. Das erklärt warum die tatsächlichen Werte für die Tordifferenzen -2 und -3 über den errechneten Werten liegen. Die anderen Abweichungen betragen

ca. 0,03 und zeigen, dass es in den betrachtenden Saisons weniger Gewinne für das Heimteam gab mit 1 oder 2 Toren Unterschied als erwartet, dafür aber mehr mit 3 Toren Unterschied.

Es zeigt sich, wie auch in Kapitel 3.2 analysiert, die Torverteilung in einem Fußballspiel kann gut über die Poissonverteilung abgeschätzt werden. Das Miteinbeziehen der Tordifferenz berücksichtigt gegenüber dem Rechnen ausschließlich mit den erzielten Toren, das Abwehrverhalten, da die Tordifferenz aus den erzielten und erhaltenen Toren berechnet wird. Somit wird nicht nur die Tor-, sondern auch die Abwehrstärke betrachtet. Heuer, vgl. [8], hat dieses Modell mit noch einem Faktor verfeinert. Er hat externe und interne Faktoren, die das Spiel beeinflussen können miteinberechnet. Unter externen Faktoren versteht er Dinge wie das Wetter, müde Spieler/innen oder rote Karten, etc. die den Spielverlauf beeinflussen. Interne Faktoren hingegen, hängen vom selbst Spiel ab. So wird zum Beispiel das Spielverhalten von der Anzahl der erzielten Tore beeinflusst. Der Einfluss dieser Faktoren ist natürlich schwer vorherzusagen, aber das Modell wird dadurch noch besser. Allerdings hat Heuer herausgefunden, dass der Einfluss der äußern und inneren Umstände klein ist, denn sonst würde es mehr und stärkere Abweichungen geben. Es wirkt sich also nicht so stark aus, wenn wie in obigen Berechnungen diese Größen vernachlässigt werden. Die Schlussfolgerung von Heuer ist, dass Tore schießen ein zufälliger Prozess ist. Er vergleicht es, wenn man von dem Unterschied zwischen Binomial- und Poissonverteilung absieht mit dem Würfeln: „The number 6 means goal and the number of attempts of both teams is fixed already at the beginning of the match, reflecting their respective fitness in that season“ ([8, S. 4]). Wie oft getroffen wird ist also von der Tor- und der Abwehrstärke abhängig und diese fließt über die Tordifferenz in die Berechnungen mit ein.

Obwohl Heuer sehr gute Ergebnisse erhalten hat und auch in dieser Arbeit beispielhaft gezeigt wurde, dass das Modell mit der Realität gut übereinstimmt, darf folgendes nicht vergessen werden: eine berechnete Wahrscheinlichkeit ist keine Garantie für ein Tor. Gerade diese Unberechenbarkeit macht den Reiz des Fußballspiels aus. Es ist eine Kombination aus Zufall und Können.

3.4. Zufall¹⁵

Schon in den vorhergehenden Kapiteln wurde deutlich, der Zufall spielt bei einem Fußballspiel eine gewisse Rolle. Nun soll erläutert werden, wie stark sich der Zufall tatsächlich auswirkt und mit welchen Konsequenzen.

3.4.1. *Zufallstore*¹⁶

Martin Lames, ein Sportwissenschaftler der Universität Augsburg untersuchte den Zufallsanteil beim Zustandekommen von Toren. Hintergrund dieses Forschungsprojekts war die Trainingswissenschaft, bei der es um die Leistungsstrukturen der einzelnen Sportarten geht. Beim Fußball wird die Leistungsstruktur auch durch den Zufall mitbestimmt und somit war es von Interesse, den Einfluss des Zufalls zu messen. Die ursprüngliche Idee war den Zusammenhang zwischen Torchancen und Toren zu untersuchen, doch es erwies sich als Problem eine Torchance zu operationalisieren. Somit beschränkte sich die systematische Spielbeobachtung auf die Torerfolge beim Fußball. Es wurden 6 Merkmale definiert, die darauf hindeuten, dass die Tore nicht geplant waren, sondern der Zufall eine Rolle spielte:

- Pfosten- oder Lattenberührung (Ball springt von Pfosten oder Latte ins Tor)
- Torwartberührung
- abgefälschte Bälle
- Abpraller
- Abwehr an Tor beteiligt
- große Entfernung (ab einer Entfernung von etwa 17 Metern kann der Ball nicht mehr kontrolliert aufs Tor gezielt werden.)

All diese Punkte sind ein Zeichen für ein nicht geplantes Tor, denn wenn zum Beispiel der Ball vom Torwart berührt wird, bevor er ins Tor geht hätte eine kleine Bewegung genügt, um das Tor zu verhindern. Oder wenn ein Ball von der Latte, vom Torwart oder einem Abwehrspieler abprallt und ein Angreifer diesen Abpraller in einen Torerfolg verwandelt, war das keine geplante Handlung des Angreifers, sondern es spielte der Zufall eine Rolle. Das Problem der Spielbeobachtung ist allerdings: „Sie kann lediglich Verhalten registrieren, nicht jedoch die zugrundeliegenden Intentionen erfassen“, wie [16, S. 144] schreibt. Bei der Spielbeobachtung wurde schließlich erfasst, wie oft beim Erzielen eines Tores zumindest eines der angeführten Merkmale beteiligt war.

¹⁵nach [16], [22] und [25]

¹⁶nach [16] und [17]

Bei der ersten Untersuchung sind in die Stichprobe „Tore aus den europäischen Erstligen eingeflossen. Die (deutschen) Bundesligatoren von 1994 aus der Saison 1993/94 sind vollständig enthalten. Aus den ersten Divisionen von Spanien, England, Portugal, den Niederlanden, der Schweiz und Belgien wurden diejenigen Spiel einbezogen, die von Januar bis Mai 1994 in einer bekannten Fernsehsendung über europäische Ligen ausgestrahlt wurden“, wie [16, S. 146] angibt. Von 920 erfassten Toren konnten bei ca. 46,6% mindestens eines der Merkmale beobachtet werden. Bei einer späteren Untersuchung 2005 wurden 638 Tore erfasst, wobei Stichproben aus europäische Erstligen aus Deutschland, Italien, Spanien, England, Frankreich und den Niederlanden genommen wurden. Das Ergebnis dieser Untersuchung war: 38,9% aller Tore waren vom Zufall bestimmt. Bei der WM 2006 wiesen von 146 Toren 41,8% mindestens eines der definierten Merkmale auf. Gesamt (Stand 2006: Untersuchungen aus den Jahren 1994, 1999, 2005, EM 2004, WM 2006) hat Lames und sein Team 2306 Tore nach obigen Merkmalen beobachtet und bei 44,4% spielte der Zufall eine Rolle.

Für Lames ist das Resultat seiner Beobachtungen, „dass der Zufall als reguläre Einflussgröße zu betrachten ist“ und er meint: „...für den Stellenwert des Fußballs bei Zuschauern und Medien, für seinen Unterhaltungswert und den Spannungsgehalt einer Partie ist dieser hohe Zufallsanteil bei den relativ wenigen Toren im Fußball geradezu das Salz in der Suppe“, nach [17].

Diese Untersuchung muss natürlich kritisch beobachtet werden, da nur Stichproben erfasst wurden und die von Lames beschriebene Problematik auftritt, dass einerseits bei einer Spielbeobachtung nicht herausgefunden werden kann, welche Absichten hinter einer Handlung stecken und andererseits die ausgelassenen Torchancen unberücksichtigt blieben, weil diese nicht operationalisierbar sind. Trotzdem ist das Resultat brauchbar. Der Zufall spielt beim Erzielen von Toren eine Rolle und das erklärt, warum gewisse Ereignisse mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitstheorie berechnet werden können.

3.4.2. *Auswirkung des Zufalls auf die Bundesligatabellen*¹⁷

Da bisher oftmals die Rede vom Zufall war, der einen gewissen Beitrag zum Ausgang eines Fußballspiels leistet, stellt sich die Frage wie sehr sich dieser letztlich auf die Bundesligatabelle auswirkt. Es wäre interessant zwischen „Können und Glück“ unterscheiden zu können. Wesson formuliert das folgenderweise: „Der Punktebereich, über den sich die Abschlusstabelle einer Liga erstrecken kann, hängt von zwei

¹⁷ [22] und [25]

Einflüssen ab. Der eine geht auf die Zufälle zurück, die die Ergebnisse der einzelnen Spiele während der Saison beeinflusst haben, und der andere beruht auf den unterschiedlichen Spielstärken der Mannschaften“, vgl. [25, S. 215].

Um diesen Unterschied heraus zu finden führen Tolan, vgl. [22, S. 114f.] und Wesson ,vgl. [25, S. 215f.], eine einfache Methode an. Im ersten Schritt wird eine hypothetische Liga erstellt und somit „der Faktor Können ausgeschaltet“, [22, S. 115]. Für diese hypothetische Liga werden Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung berechnet:

Definition (Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung).

Nach [4, S. 236] gilt:

Es sei (Ω, P) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und Z eine Zufallsvariable auf Ω . Dann heißt die Zahl

$$E(Z) := \sum_{x \in Z(\Omega)} P(Z = x) \cdot x$$

(sofern sie existiert) der **Erwartungswert** von Z . Die Zahlen

$$V(Z) := \sum_{x \in Z(\Omega)} P(Z = x) \cdot (x - E(Z))^2$$

und

$$\sigma_Z := \sqrt{V(Z)}$$

heißen (sofern sie existieren) **Varianz** und **Standardabweichung** von Z . Statt $E(Z)$ schreibt man auch μ_Z .

Wie in Kapitel 3.2.4 auf Seite 35 beschrieben endet ca. jedes 4. Spiel unentschieden. Es wird also angenommen, dass $\frac{1}{4}$ aller Spiele unentschieden ausgeht, $\frac{3}{8}$ mit einem Gewinn und dementsprechend $\frac{3}{8}$ aller Spiele mit einer Niederlage. Da es für einen Gewinn 3 Punkte, für ein Unentschieden 1 Punkt und für eine Niederlage 0 Punkte gibt, kann der Mittelwert an Punkten pro Spiel durch $\frac{3}{8} \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 0 = \frac{11}{8} = 1,375$ berechnet werden. Die Varianz beträgt

$V(Z) = \frac{3}{8}(3 - 1,375)^2 + \frac{1}{4}(1 - 1,375)^2 + \frac{3}{8}(0 - 1,375)^2 = 1,734375$ und somit die Standardabweichung $\sigma_Z = 1,316956719$ pro Spiel.

In der österreichischen Bundesliga gibt es 10 Teams und 36 Spiele für jedes Team, also ist $E(Z) = 49,5$ und $\sigma_Z \approx 7,90$. Das bedeutet in einer hypothetischen Liga mit 10 Teams, in der jedes Team 4 Mal gegen jedes andere Team spielt, werden im Schnitt 49,5 Punkte in einer Saison erzielt und die Standardabweichung beträgt etwa 7,90.

Betrachtet man nun die Tabellen der Saisonen 2008/09 und 2009/10, ergaben sich folgende Punktetabellen:

Platzierung	Verein	Punkte
1.	FC Red Bull Salzburg	74
2.	SK Rapid Wien	70
3.	FK Austria Wien	62
4.	SK Puntigamer Sturm Graz	60
5.	SV Josko Fenster Ried	60
6.	SK Austria Kelag Kärnten	41
7.	LASK Linz	37
8.	KSV Superfund	36
9.	SV Mattersburg	33
10.	Cashpoint SCR Altach	30

TABELLE 7. Punktetabelle der österreichischen Bundesliga: Saison 2008/09, nach [12].

Platzierung	Verein	Punkte
1.	FC Red Bull Salzburg	76
2.	FK Austria Wien	75
3.	SK Rapid Wien	73
4.	SK Puntigamer Sturm Graz	58
5.	SC Magna Wr. Neustadt	47
6.	SV Mattersburg	41
7.	LASK Linz	40
8.	SV Josko Ried	38
9.	KSV Superfund	33
10.	SK Austria Kelag Kärnten	15

TABELLE 8. Punktetabelle der österreichischen Bundesliga: Saison 2009/10, nach [12].

Nun können für diese Saisonen die tatsächlichen Werte berechnet werden. Zur Berechnung des Mittelwerts vgl. 3.2.2 auf Seite 27, die Standardabweichung wird mit der Formel $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ berechnet. Es ergeben sich:

für die Saison 2008/09: $\bar{x}_{08/09} = 50,3$ und $s_{08/09} \approx 16,51$

für die Saison 2009/10: $\bar{x}_{09/10} = 49,6$ und $s_{09/10} \approx 20,39$

In beiden Saisonen liegen die tatsächlichen Mittelwerte sehr nah beim errechneten Wert von 49,5 Punkten. Das ist damit zu erklären, dass in der Praxis wirklich etwa ein Viertel aller Spiele mit einem Unentschieden ausgeht (vgl. [22], vgl. Kapitel 3.2.4 auf Seite 35). Die Standardabweichungen sind allerdings wesentlich größer, woran das Können der Teams ersichtlich wird.

Die untenstehende Grafik 17 auf Seite 59 zeigt die unterschiedlichen Punkteverteilung für die Saisons 2008/09, 2009/10 und eine rein zufällige Liga.

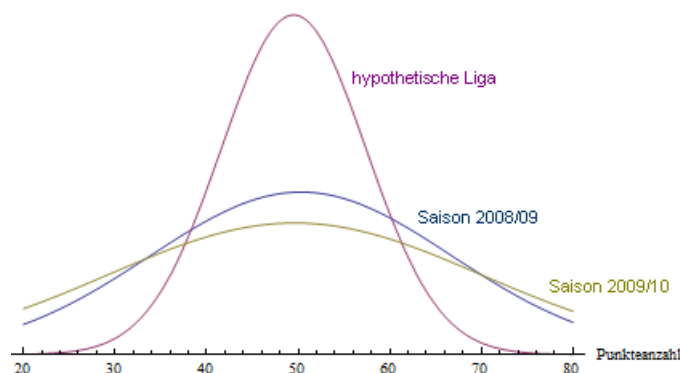


ABBILDUNG 17. Verteilung der Punktezahlen im Vergleich, modifiziert nach [25, S. 216].

Nach obigen Berechnungen für eine rein zufällige Liga können die im Intervall $[\mu - \sigma, \mu + \sigma] = [41, 6; 57, 4] \approx [42; 57]$ liegenden Punkte rein auf den Zufall zurückgeführt werden und es sollte auch beachtet werden, dass 95% der 10 gleich starken Teams einer hypothetischen Liga eine Punktezahl im Intervall $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma] = [33, 7; 65, 3] \approx [34; 65]$ erzielen.

In der Saison 2008/09 zeigt sich, dass keiner der Werte in dem Intervall $[42; 57]$ liegt, aber 6 Teams eine Punkteanzahl im Intervall $[34; 65]$ erzielten. Bei dieser Tabelle kann nicht gesagt werden, dass zwischen dem 3. und 8. Platz nur das Glück entschied, denn sie ist im Grunde in zwei Gruppen geteilt, vom 1. bis zum 5. Platz und vom 6. bis zum 10. Platz. Zwischen 5. und 6. Platz sind 19 Punkte Unterschied und das deutet auf einen starken Leistungsunterschied zwischen den Teams in der oberen und unteren Hälfte hin. Betrachtet man die Punkte in der oberen Hälfte, könnte man auf Grund der knappen Punkteverteilung zwischen dritten und fünften Platz (FK Austria Wien hatte 62 Punkte, Sturm Graz und SV Ried hatten je 60 Punkte) sagen, dass zwischen diesen Teams das Glück entschieden hat. FC Redbull Salzburg und SK Rapid Wien heben sich deutlich ab, was auf das Können dieser Teams zurückzuführen ist. In der unteren Hälfte ist zwischen dem 6. und dem 8. Platz kein großer Punkteunterschied (SK Austria Kärnten hatte 41 Punkte, LASK Linz 37 und KSV Superfund 36), auch hier könnte man daraus schließen, dass zwischen diesen Teams letztendlich der Zufall die Platzierung bestimmt hat. Der 9. und 10. Platz haben Punktezahlen erreicht, die stark vom Mittelwert abweichen und es ist anzunehmen, diese Teams sind wirklich leistungsschwächer.

In der Saison 2009/10 liegt nur ein Wert im Intervall $[42; 57]$, die Punktezahl vom Neueinsteiger SC Magna Wiener Neustadt. Im Intervall $[34; 65]$ liegen 5 der 10 Werte. Diese Plätze, vom 4. bis zum 8., bilden ein Mittelfeld, wobei zwischen dem 4. und dem 5. Platz ein größerer Punkteunterschied von 11 Punkten ist, der nicht auf reinen Zufall zurückgeführt werden kann. Bei den Plätzen 5 bis 8 (47 Punkte für SC Magna Wiener Neustadt, 41 Punkte für SV Mattersburg, 40 Punkte für LASK Linz und 38 Punkte für SV Josko Ried) könnte durchaus der Zufall eine Rolle bei der Platzierung gespielt haben.

Die ersten drei Teams erreichten 76, 75 und 73 Punkte, was sich deutlich vom Mittelwert abhebt und für das Können dieser Teams spricht. Aufgrund der geringen Punktedifferenz bei den ersten drei Plätzen ist allerdings zu bezweifeln, dass sich tatsächlich das stärkste Team durchgesetzt hat. Alle drei Teams scheinen aufgrund der erreichten Punktezahl gleich stark zu sein und es ist anzunehmen, der Zufall spielte bei der endgültigen Platzierung unter den drei Teams doch eine Rolle. Es steht jedoch außer Frage, dass diese Teams den anderen überlegen waren. Es braucht mehr als nur Glück, um solche Punktezahlen zu erreichen. Das letztplatzierte Team scheint auch nicht nur durch Pech verloren zu haben. Mit einer Punktezahl von 15 ist es deutlich schlechter als alle anderen Teams. KSV Superfund am 9. Platz ist mit 33 Punkten daher eher dem Mittelfeld zuzuordnen, auch wenn es knapp außerhalb der Intervalle liegt, die sich durch den Zufall ergeben. (Interessant ist es auch Heim- und Auswärtstabellen zu vergleichen siehe Kapitel 4 auf Seite 69.)

Bei einer Analyse wie dieser könnte man natürlich in Anlehnung an das vorhergehende Kapitel auch noch die Tordifferenzen betrachten, um Vermutungen über die Platzierung anzustellen, das heißt ob sich tatsächlich das beste Team durchgesetzt hat oder der Zufall mitentschied. Aber hier sollte nur gezeigt werden, wie mit Hilfe des Mittelwerts und der Standardabweichung Punktetabellen im Hinblick auf den Zufall analysiert werden können. Und auch wenn die Punktevergabe, wie in Kapitel 3.3 auf Seite 45 erläutert, nicht optimal ist um Platzierungen zu ermitteln, entscheiden letztendlich die Punkte in der österreichischen Bundesliga, welches Team den Meistertitel holt.

Generell zeigt sich, in der österreichischen Bundesliga weichen die tatsächlichen Standardabweichungen, sehr stark von den errechneten Wert ab. Das deutet auf eine eher geringe Zufallskomponente hin und somit darauf, dass sich meist eine Gruppe von Teams durchsetzen kann bzw. ein paar Teams deutlich schlechter sind. Tolan, vgl. [22, S. 114 f.], zeigt, in der deutschen Bundesliga ist der Unterschied zwischen der tatsächlichen und der errechneten Standardabweichung viel geringer (etwa 1,7

bei Betrachtung der Hinrundentabelle) und somit ist die Zufallskomponente in der deutschen Bundesliga höher. In der deutschen Bundesliga spielen allerdings auch 18 Teams um den Meistertitel, während es in Österreich nur 10 sind.

Vergleicht man die Saisonen 2008/09 und 2009/10 in der österreichischen Bundesliga erscheinen 3 Teams deutlich stärker und 1-2 deutlich schwächer. Es kann nicht gesagt werden, dass zwischen den restlichen Teams nur der Zufall entscheidet, sondern es müssen die Tabellen genauer betrachtet werden. Wenn sich Platzierungen durch sehr knappe Punktedifferenzen ergeben ist darauf zu schließen, nicht nur das Können, sondern auch Glück hat entschieden welches Team sich durchsetzt. Das Existieren einer Zufallskomponente ist wichtig, da es unter anderem den Reiz des Spiels ausmacht, dass nicht immer das vermeintlich bessere Team gewinnt, wie schon in vorhergehenden Kapiteln diskutiert wurde. In der österreichischen Bundesliga entscheidet der Zufall zwar nicht alle Plätze, da es offenbar ein paar stärkere Teams gibt, die sich meist durchsetzen, aber wer letztendlich von diesen Teams den Meistertitel gewinnt, hängt doch vom Zufall ab, wie an den geringen Punktedifferenzen zu erkennen ist. Es würde erst dann langweilig werden, wenn sich immer dasselbe Team gegen alle durchsetzen könnte.

3.5. Sportwetten¹⁸

Ein Bereich, in dem der Faktor Zufall auch eine Rolle spielt sind Sportwetten. Früher waren bei den Sportwetten die Sportarten Boxen und Pferderennen sehr beliebt. Doch mittlerweile dominiert die Fußballwette in Europa das Wettgeschehen.

Wäre der Ausgang eines Fußballspiels prognostizierbar würde kein Wettmarkt existieren. Quitzau definiert deshalb den Zufall als „...all jene Umstände eines Fußballspieles, die bis zum Spielbeginn in keiner Weise bekannt bzw. prognostizierbar sind“ [19, S. 2]. Der Zufall in einem Fußballspiel kann sich entweder auf das Ergebnis auswirken oder nicht. Im ersten Fall bedeutet das, wenn ein Team 3:0 in Führung und das andere Team durch einen Zufall, wie eine Fehlentscheidung des Schiedsrichters, ein Tor erzielt, hat das keinen Einfluss auf das Ergebnis. Ist der Spielstand allerdings 0:0, ein Team erzielt durch einen glücklichen Zufall ein Tor, zum Beispiel durch einen Abpraller, und gewinnt letztendlich 1:0, dann hat der Zufall das Spiel entschieden. Es existiert also kein sicherer Spielausgang. Das macht, wie schon öfter in dieser Arbeit beschrieben, die Spannung des Fußballspiels aus. Inwieweit der Zufall den Spielausgang beeinflussen kann, schlägt sich in den Wettquoten

¹⁸nach [2], [19], [21], [23], [26] und [29]

nieder. „Je geringer die angebotene Quote, desto überlegener ist die auf Grund theoretischer Erwägungen favorisierte Mannschaft und desto mehr Zufall ist erforderlich, um den erwarteten Sieg des Favoriten in Gefahr zu bringen“ [19, S. 7].

Bei den Sportwetten gibt es unterschiedliche Wettarten. Die einfachste Fußballwettart ist die Einzelwette, bei der auf den Ausgang eines Spiels, also eines einzelnen Ereignisses gewettet wird. Dabei sind die Tendenz- und Ergebnisswette zu unterscheiden. Bei der ersten muss nur Gewinn, Niederlage oder Unentschieden vorhergesagt werden, während bei der zweiten Wettform ein genaues Ergebnis prognostiziert werden muss. Eine weitere Wettart ist die Kombinationswette, die aus mehreren Einzelwetten besteht. Es werden also verschiedene Tipps zu einer Wette kombiniert. Die Gesamtquote der Kombinationswette ergibt sich aus der Multiplikation der Quoten der Einzelwetten, wodurch der Gewinn deutlich erhöht wird. Allerdings müssen alle Spiele richtig vorhergesagt werden, sonst ist der Wetteinsatz verloren.

Die Systemwette besteht aus mehreren Kombinationswetten, somit können auf einem Wertschein mehrere Kombinationswetten abgegeben werden. Vorteil dieser Wettart ist, es müssen nicht alle Tipps richtig sein, um einen Gewinn zu erzielen, dafür ist der Wetteinsatz aber auch höher. Bei Live Wetten kann noch während des Spiels auf verschiedene Ereignisse gewettet werden, wobei sich die Quoten ständig und rasch ändern.

Eine weitere Unterscheidung bei den Sportwetten, gibt es aufgrund der Quotenfestsetzung. Am häufigsten gibt es Fußballwetten mit festen Quoten, die von einem Buchmacher/einer Buchmacherin festgelegt werden. Aus den Quoten kann der mögliche Gewinn errechnet werden. Zum Beispiel könnte die Wettquote, wenn SK Rapid Wien gegen FC Wacker Innsbruck spielt so aussehen: Tipp 1: 2,1 ; Tipp X: 3,5 und Tipp 2: 2,1. Das bedeutet wenn Rapid gewinnt und das getippt wurde erhält man den Einsatz mal 2,1. Eine Wettquote von 2,1 wiederum bedeutet, dass der Buchmacher/die Buchmacherin die Wahrscheinlichkeit für einen Sieg von Rapid auf $\frac{1}{2,1}$ schätzt, also etwa 47,62%, wobei hier auch die Gewinnmarge des Buchmachers/der Buchmacherin miteinbezogen ist.

Bei der Quotenfestsetzung wird zuerst eine Grundquote mit geeigneten mathematischen Mitteln berechnet. Es ist leider nicht möglich darüber von Wettbüros Informationen zu erhalten. Eine Möglichkeit Eintrittswahrscheinlichkeiten für ein Fußballspiel zu ermitteln wurde in Kapitel 3.3 auf Seite 45f. vorgestellt. Das heißt mit Hilfe der Poissonverteilung unter Berücksichtigung der Tordifferenz und des Heimvorteils. Auch

wenn Buchmacher/innen mit anderen Methoden die Grundquote ermitteln, kann auf diese Weise versucht werden Wettquoten zu simulieren.

Dann kommt es zur Quotenanpassung, in die Fachwissen und aktuelle Informationen über den Wettmarkt einfließen. Zum Beispiel wissen Buchmacher/innen darüber Bescheid, wenn wichtige Spieler/innen verletzt sind oder sie berechnen in die Quote mit ein, wenn ein Team zuvor anstrengende Spiele hatte und deshalb geschwächt sein könnte usw. Zusätzlich berechnet der Buchmacher/die Buchmacherin eine Gewinnmarge mit ein, wie bei [2] und [26] nachzulesen ist. Das bedeutet er/sie errechnet zuerst die Eintrittswahrscheinlichkeiten, deren Summe 1 ergibt. Daraus würden sich die sogenannten fairen Quoten ergeben. Doch nun bestimmt der Buchmacher/die Buchmacherin, welchen Gewinn er/sie erzielen möchte und multipliziert die Eintrittswahrscheinlichkeiten dementsprechend. Bei einem Gewinn von 20% zum Beispiel werden die Eintrittswahrscheinlichkeiten mit 0,8 multipliziert und dann daraus die Quoten berechnet ($\text{Quote} = \frac{1}{\text{Eintrittswahrscheinlichkeit}}$).

In obigen Beispiel kann wie folgt die Gewinnspanne ermittelt werden: aus den angegebenen Quoten ergeben sich Eintrittswahrscheinlichkeiten $\frac{1}{2,1}$; $\frac{1}{3,5}$ und $\frac{1}{2,1}$. Die Summe davon beträgt etwa 1,2381. Die Gewinnspanne des Buchmachers/der Buchmacherin wird nun berechnet aus: $1 - \frac{1}{1,2381} = 0,1923$. Er/sie gewinnt also in jedem Fall 19,23% des Gesamteinsatzes. Weiters bedeutet das, es wurde die Gewinnwahrscheinlichkeit von SK Rapid Wien, sowie die von FC Wacker Innsbruck auf $\frac{1}{2,1} \cdot 0,8077 \approx 0,3846$ geschätzt und die für ein Unentschieden auf $\frac{1}{3,5} \cdot 0,8077 \approx 0,2308$.

Es gibt aber auch Wetten, bei denen es keine festen Quoten gibt, sondern das Totalisatorprinzip herrscht. Bei solchen Wetten, wird unter den Teilnehmern und nicht gegen einen Buchmacher/eine Buchmacherin gewettet, das heißt die Gewinnsumme wird auf alle richtigen Tipps aufgeteilt. Ein Beispiel für eine Sportwette nach dem Totalisatorprinzip ist die Fußballwette Toto:

3.5.1. *Toto*¹⁹

Die gesetzliche Grundlage zur Einführung von Toto wurde 1948 gelegt, das sogenannte Sporttoto - Gesetz. Toto wurde dann im Jahr darauf eingeführt, um „die erforderlichen finanziellen Mittel zum Wiederaufbau des österreichischen Sports nach dem Krieg zu erwirtschaften“, [21, S. 24]. Damals führte die österreichische Glücksspielmonopolverwaltung die Spiele Sporttoto, Brieflotterie, das kleine Zahlenlotto und die Klassenlotterie durch. Im Jahr 1985 kam es dann zur Reorganisation des österreichischen Glücksspielmonopols. Es sollte Lotto „6 aus 45“ nach dem internationalen Vorbild eingeführt werden und Toto von einer privat wirtschaftlich organisierten Gesellschaft übernommen werden. Nach entsprechenden Vorbereitungen wurde im Jahr 1986 die Österreichische Lotto Toto Gesellschaft gegründet. Diese führten das Glücksspiel Lotto „6 aus 45“ ein und übernahmen das Spiel Sporttoto von dem österreichischen Glücksspielmonopol. Zum Unterschied zu Lotto, als reines Glücksspiel, ist Toto eine Fußballwette, bei der nicht nur Glück entscheidet, sondern auch Fachwissen zum Erfolg beitragen kann. Um die Sportförderung nach der Übernahme von Toto weiterhin zu garantieren, wurde eine Bestimmung im österreichischen Glücksspielgesetz aufgenommen, nach der es zu einer jährlichen Förderung auf der Basis der Steuererträge aus Lotto und Toto kommt (zum Beispiel betrug diese 71 341 341 € im Jahr 2009). Dabei handelt es sich um eine wichtige Finanzierungsquelle des österreichischen Sports, die auch die Nachwuchsförderung unterstützt.

Im Jahr 1991 wurde die Lotto Toto Gesellschaft in „Österreichische Lotterien Gesellschaft m.b.H.“ umbenannt, da sich das Spielangebot der Unternehmens erweiterte: 1988 wurden die Torwette und Joker als neue Spiele eingeführt. Im Jahr 1990 wurden die Spiele Brieflos, Zahlenlotto und österreichische Klassenlotterie von der Glücksspielmonopolverwaltung auf die österreichische Lotterien Gesellschaft übertragen. Zum Spieleangebot kam 1995 noch das Rubbellos dazu. 1998 wurde das Internet Spielangebot über WebClub.at ins Leben gerufen, was 2003 von der Spieleplattform win2day.at abgelöst wurde. Das Spiel Bingo kam 1999, die Nummernlotterie ToiToiToi 2003 und Euromillionen 2004 dazu. Seit 2004 gibt es auch Video Lotterien Terminals unter dem Namen WINWIN.

Nun zum Spielablauf. Beim Spiel Toto geht es um das Vorhersagen von Fußballergebnissen. Ein Tipp besteht aus 12 Spielen, bei denen das Ergebnis vorhergesagt werden muss: 1 = Gewinn des Heimteams, 2 = Gewinn des Auswärtsteams und X = Unentschieden. Es handelt

¹⁹nach [21], [23] und [30]

sich also um eine Tendenzwette. Gewinne gibt es ab 10 richtigen Vorhersagen in einem Tipp. Ein Tipp beim Spiel Toto kostet 0,60 €. Die Gewinnsumme beträgt 50% des gesamten Toto Wetteinsatzes und wird auf folgende Weise aufgeteilt, vgl. [21, S. 44]:

1. Rang (Zwölfer): 50%
2. Rang (Elfer): 25%
3. Rang (Zehner): 25%

Die Rangsummen werden dann noch durch die Anzahl der Gewinner in diesem Rang dividiert und so die Gewinnsummen pro Person berechnet.

Zusätzlich kann eine Torwette (Ergebniswette) gespielt werden, wobei das genaue Resultat der ersten vier Toto Spiele vorhergesagt werden muss. Dafür muss zumindest ein Toto Tipp abgegeben werden. Bei der Torwette gewinnt man, wenn entweder 4 oder 3 richtige Ergebnisse getippt wurden. Ein sogenannter Hattrick ist eine zusätzliche Gewinnmöglichkeit, wenn 12 Richtige beim Toto und 4 richtige Ergebnisse bei der Torwette erraten wurden.

Ein Toto Tipp mit Torwette kostet 1,50 €. Die Gewinnsumme für die Torwette wird so aufgeteilt, vgl. [21, S. 44]:

1. Rang (4 Richtige): 60%
2. Rang (3 Richtige): 30%
3. Rang (Hattrick): 10%

Beim Toto kann auch nach System gespielt werden. Bei Systemtipps gibt es die Möglichkeit zwischen Bank (nur ein Ausgang ist möglich), Zweiweg (es können zwei mögliche Ausgänge getippt werden: 1 und 2, 1 und X oder 2 und X) und Dreiweg (der Spielausgang ist sehr ungewiss und es werden alle drei Kästchen angekreuzt) zu wählen. Das System, das gespielt wird, kann ausgewählt werden, dabei gibt die erste Zahl die Bankzahlen, die zweite den Zweiweg und die dritte den Dreiweg an. Zum Beispiel bedeutet das System 9-3-0: 9 Bankwege, 3 Zweiwegen und 0 Dreiwegen anzukreuzen. Es kann auch bei der Torwette nach System gespielt werden. Das System 2-2-1-1 zum Beispiel bedeutet es können zweimal 2 Ergebnisse angekreuzt werden und zweimal nur 1 Ergebnis. Die Kosten für einen Systemtipp hängen von dem gespielten System ab. Sie betragen zwischen 4,80 € (System 9-3-0) und 583,20 € (System 5-2-5). Die Gewinne ergeben sich in Abhängigkeit vom System. Zum Beispiel ist der Gewinn beim System 9-3-0, wenn man alles richtig getippt hat: 1 Zwölfer, 3 Elfer, 3 Zehner. Der Zwölfer ergibt sich, wenn bei allen 3 Zweiwegen, das richtige Ergebnis genommen wird. Beim Elfer darf ein Ergebnis falsch sein. Es gibt 3 Möglichkeiten, ein falsches Ergebnis zu wählen, da bei drei Spielen zwei mögliche Spielausgänge angekreuzt wurden. Beim Zehner dürfen zwei Ergebnisse falsch sein.

Bei 3 Spielen, bei denen es je ein richtiges und falsches Ergebnis gibt, können auf 3 Arten zwei falsche Ergebnisse bzw. ein richtiges Ergebnis gewählt werden.

Wenn ein Bankweg falsch ist, gewinnt man einen Elfer (bei allen Zweiwegen wird das richtige Ergebnis gewählt) und 3 Zehner, da für den Zehner von den drei Spielen, wo zwei Ergebnisse angekreuzt werden, je einmal das falsche gewählt werden darf.

Wenn ein Zweiweg falsch ist, gibt es 2 Elfer und 4 Zehner. Ein falscher Zweiweg bedeutet es kann maximal nur noch 11 richtige Ergebnisse geben. Das heißt ein Elfer kann auf 2 Arten erzielt werden, einmal mit dem 1. falschen Ergebnis vom falschen Zweiweg und einmal mit dem 2. falschen Ergebnis vom falschen Zweiweg. Bei einem Zehner dürfen wieder 2 Ergebnisse falsch sein. Bei den 3 Zweiwegen ist einer falsch, also liefert dieser auf 2 Arten ein falsches Ergebnis. Bei den anderen Zweiwegen muss dementsprechend ein richtiges und ein falsches Ergebnis gewählt werden und das kann auf 2 Arten geschehen. Also gibt es 4 Möglichkeiten einen Zehner zu haben.

Auf diese Weise können für alle Systeme die Gewinne ermittelt werden. (Daraus lassen sich interessante Kombinatorikaufgaben für Schüler/innen erstellen, vgl. Kapitel 4 auf Seite 69.)

Zusätzlich kann auf einem Totoschein auch an dem Spiel Joker teilgenommen werden, indem einfach Ja angekreuzt wird. Das Spiel Joker kostet 1,3 €. Auf dem Wettschein steht eine Jokernummer. Stimmt diese mit den bei der Ziehung ermittelten Jokerzahlen überein, wird der Hauptgewinn erzielt.

Zur Veranschaulichung stellt Abbildung 18 auf Seite 66 einen Totoschein dar und zeigt wie dieser ausgefüllt wird.

The image shows a digital Toto betting slip interface. At the top, it says 'Spielprogramm für die 45. Runde' and 'TOTO'. Below this, there are 12 matches listed in two columns. Each match has a grid of buttons for selecting a result: 1 (home win), 2 (draw), or X (away win). To the right of the matches, there is a 'TORWETTE' section with a grid of buttons for selecting a result. Below the matches, there is a 'JOKER' section with a number '204007' and a 'SPIELDAUER' section with a duration of '120' minutes. The total price is €9,20 and the stake is €99,294,30. There are buttons for 'Computertipp', 'Tipp löschen', 'Hilfe', and 'TIPPABGABE'.

ABBILDUNG 18. Totoschein, nach [30] (Zugriff am 3. Dezember 2010 unter <http://www.win2day.at/gaming/spielinfo>).

Die Gewinnwahrscheinlichkeiten für das Spiel Toto können, unter der Annahme von rein zufälligen Ergebnissen, einfach ermittelt werden. Es gibt für jedes Spiel 3 mögliche Spielausgänge, also gibt es insgesamt $3^{12} = 531\,441$ Möglichkeiten einen Totoschein auszufüllen:

$$P(\text{Zwölfer}) = \frac{1}{531\,441} = 0,000001882$$

Bei einem Elfer darf 1 Spiel falsch getippt werden, dafür gibt es $\binom{12}{1} = 12$ Möglichkeiten. Bei diesem Spiel gibt es 2 Möglichkeiten für den falschen Tipp, daher gibt es gesamt 24 Möglichkeiten, dass genau 11 Tipps richtig sind und einer falsch:

$$P(\text{Elfer}) = \frac{24}{531\,441} = 0,00004516$$

Mit der gleichen Überlegung (vgl. Kapitel 4 auf Seite 69) kann die Wahrscheinlichkeit für einen Zehner ermittelt werden:

$$P(\text{Zehner}) = \frac{264}{531\,441} = 0,000496758$$

Die drei höchsten Gewinne, die je erzielt wurden betrugen nach [30]: 587 557,18 € (So, 25.12.1994); 438 645,81 € (So, 11.03.2001) und 424 152,89 € (So, 05.04.1992).

Im Vergleich zum Glücksspiel Lotto „6 aus 45“ liegen die Gewinnwahrscheinlichkeiten wesentlich höher. Die Wahrscheinlichkeit beim Lotto den Haupttreffer, einen Sechser zu machen beträgt

$$\frac{1}{\binom{45}{6}} = \frac{1}{8\,145\,060} = 0,000000123 \text{ (ein Tipp kostet 1,10 €).}$$

Dafür gibt es beim Spiel Lotto „6 aus 45“ auch höhere Gewinne zu erzielen. Der höchste betrug 8 905 907,20 € (Mi, 22.12.2010).

4. AUFGABENSAMMLUNG²⁰

(1) Kombinatorikaufgabe

In der österreichischen Fußballbundesliga gibt es 10 Vereine. Wie viele Spiele gibt es, wenn jeder Verein jeweils zweimal zu einem Hin- und Rückspiel antreten muss (also viermal gegen jedes andere Team spielt)?

Lösung

Jeder Verein hat $9 \cdot 2 = 18$ Heimspiele. Daher gibt $18 \cdot 10 = 180$ Spiele.

Andere Rechenmöglichkeiten:

- Jeder Verein hat gesamt $4 \cdot 9 = 36$ Spiele. Wenn man nun die Anzahl der Spiele mit der Anzahl der Vereine multipliziert, wird jedes Spiel doppelt gezählt. Deshalb erhält man das Ergebnis durch: $\frac{36 \cdot 10}{2} = 180$
- Man rechnet $10 \cdot 10 \cdot 2 = 200$ und zieht dann die Spiele ab, bei der ein Team gegen sich selbst spielen würde und davon gibt es $2 \cdot 10 = 20$. Also gibt es insgesamt $200 - 20 = 180$ Spiele.
- Der erste Verein hat 36 Spiele. Von den 36 Spielen des 2. Verein sind 4 gegen das erste Team und es kommen daher nur noch 32 Spiele dazu. Bei den 36 Spielen des 3. Verein sind 8 gegen die ersten beiden Teams, also kommen nur 28 Spiele dazu, usw. Beim 9. Verein sind 32 Spiele gegen die ersten 8 Vereine und es kommen nur 2 neue Spiele dazu. Und beim letzten Verein sind schließlich alle 36 Spiele gegen die ersten 9 Teams. Es gibt daher $36 + 32 + 28 + 24 + 20 + 16 + 12 + 8 + 4 = 180$ Spiele.

(2) Aufgabe zur Binomialverteilung

Zwei Teams spielen Fußball. Team A erzielt mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0,6$ ein Tor und Team B mit der Wahrscheinlichkeit $q = 0,4$.

- Es fallen gesamt 4 Tore. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass 3 der 4 Tore von Team A erzielt wurden.*
- Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Team A gewinnt.*
- Berechne die Wahrscheinlichkeit für ein Unentschieden.*
- Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Team A verliert.*

²⁰In den folgenden Aufgaben wird davon ausgegangen, dass ein Spiel 90 Minuten dauert und es keine Verlängerung gibt.

Lösung

a) Die Anzahl der Tore, die Team A in einem Spiel in dem n Tore gefallen sind erzielt hat, ist (n, p) -binomialverteilt, wobei in diesem Fall $n = 4$, $k = 3$ und $p = 0,6$ ist:

$P(\text{Team A erzielt 3 Tore} \mid \text{es fielen gesamt 4 Tore}) =$
 $= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{4}{3} \cdot 0,6^3 \cdot 0,4^1 = 0.3456 \Rightarrow$ Die Wahrscheinlichkeit, dass Team A in einem Spiel, in dem 4 Tore gefallen sind 3 davon erzielt hat, beträgt 34,56%.

b) Team A gewinnt genau dann, wenn es mehr als die Hälfte der Tore erzielt, also wenn es entweder 3 oder 4 Tore erzielt:

$P(\text{Team A gewinnt}) = P(X = 3) + P(X = 4) =$
 $= \binom{4}{3} \cdot 0,6^3 \cdot 0,4^1 + \binom{4}{4} \cdot 0,6^4 \cdot 0,4^0 = 0.3456 + 0.1296 = 0.4752 \Rightarrow$
 Team A gewinnt ein Spiel, in dem gesamt 4 Tore erzielt wurden, mit einer Wahrscheinlichkeit von 47,52%.

c) Das Spiel endet unentschieden wenn sowohl Team A, als auch Team B zwei Tore erzielen:

$P(\text{Spiel endet Unentschieden}) = \binom{4}{2} \cdot 0,6^2 \cdot 0,4^2 = 0.3456 \Rightarrow$
 Das Spiel endet mit einer Wahrscheinlichkeit von 34,56% unentschieden.

d) Unter Verwendung der vorhergehenden Ergebnisse kann die Wahrscheinlichkeit, dass Team A verliert mit Hilfe der Gegenwahrscheinlichkeit berechnet werden:

$P(\text{Team A verliert}) = 1 - P(\text{A gewinnt}) - P(\text{Unentschieden}) =$
 $= 1 - 0.4752 - 0.3456 = 0.1792 \Rightarrow$ Hat man die vorhergehenden Ergebnisse nicht, wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass Team A weniger als die Hälfte der Tore erzielt:

$P(\text{Team A verliert}) = P(X = 0) + P(X = 1) =$
 $= \binom{4}{0} \cdot 0,6^0 \cdot 0,4^4 + \binom{4}{1} \cdot 0,6^1 \cdot 0,4^3 = 0.0256 + 0.1536 = 0.1792 \Rightarrow$
 Team A verliert ein Spiel, in dem gesamt 4 Tore erzielt wurden, mit einer Wahrscheinlichkeit von 17,92%.

(3) Aufgabe zur Poissonverteilung

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Bundesligaspiel mehr als ein Tor fällt, wenn im Schnitt 3 Tore pro Spiel erzielt werden?

Lösung

Die Anzahl der Tore, die in einem Spiel erzielt werden ist $P(\lambda)$ -verteilt mit $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. Diese Aufgabe wird mit Hilfe der Gegenwahrscheinlichkeit gelöst:

$P(X > 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \frac{3^0}{0!} e^{-3} - \frac{3^1}{1!} e^{-3} =$
 $= 1 - e^{-3} - 3e^{-3} = 1 - 4e^{-3} = 0,800851727 \Rightarrow$ In ca. 80% aller Bundesligaspiele fällt mehr als ein Tor.

(Tatsächlich (Daten von [12]) endeten 32 Spiele in der Saison 2008/09 und 47 Spiele in der Saison 2009/10 mit 0 bzw. 1 Tor. Das heißt von gesamt 360 Spielen endeten 281 mit mehr als einem Tor, das entspricht etwa 78% und liegt nahe dem errechneten Ergebnis.)

(4) **Aufgabe zur Poissonverteilung**

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spiel mit dem Endstand 7:1 ausgeht, wenn im Schnitt gesamt 3 Tore pro Spiel erzielt werden?

Lösung

Jedes Team erzielt im Schnitt 1,5 Tore pro Spiel, also ist $\lambda = 1,5$. Es muss die Wahrscheinlichkeit ausgerechnet werden, dass ein Team 7 Tore, das andere 1 Tor schießt und dieses Ergebnis muss noch mit 2 multipliziert werden, da es egal ist welches der Teams 7 Tore und welches 1 Tor erzielt:

$$P(\text{Endstand } 7:1) = 2 \cdot P(X = 7) \cdot P(X = 1) = \\ = 2 \cdot \frac{1,5^7}{7!} e^{-1,5} \cdot \frac{1,5^1}{1!} e^{-1,5} = 0,000506344 \Rightarrow \text{Die Wahrscheinlichkeit, dass der Endstand } 7:1 \text{ ist, beträgt etwa } 0,05\%.$$

(Nach [12] endete in der Saison 2008/09 kein Spiel mit 7:1, in der Saison 2009/10 gewann FC Redbull Salzburg mit 7:1 gegen SK Austria Kelag Kärnten. Es endete somit 1 von 360 Spielen mit diesem Endstand und das entspricht ca. 0,28%.)

(5) **Aufgabe zur Poissonverteilung**

LASK Linz und SV Mattersburg spielen gegeneinander. LASK Linz hat in der Saison 2009/10 (36 Spiele) 59 Tore erzielt und SV Mattersburg 45 Tore (Daten von [12]).

Berechne mit Hilfe der durchschnittlichen Toranzahl pro Spiel (auf 2 Kommastellen runden) die Wahrscheinlichkeit für einen Endstand von 1:1.

Lösung

Mittlere Toranzahl von LASK Linz: $\lambda_1 = \frac{59}{36} \approx 1,64$.

Mittlere Toranzahl von SV Mattersburg: $\lambda_2 = \frac{45}{36} = 1,25$.

$$P(\text{Endstand } 1:1) = \frac{1,64^1}{1!} e^{-1,64} \frac{1,25^1}{1!} e^{-1,25} = 1,64 \cdot 1,25 \cdot e^{-2,89} = \\ = 0,113931236 \Rightarrow \text{Die Wahrscheinlichkeit für einen Endstand von } 1:1, \text{ wenn der LASK Linz mit einer mittleren Toranzahl von } 1,64 \text{ gegen SV Mattersburg mit einer mittleren Toranzahl von } 1,25 \text{ spielt, beträgt etwa } 11,39\%.$$

(Tatsächlich endete in der Saison 2009/10 keines der 4 Spiele mit einem Endstand von 1:1, vgl. [12].)

(6) **Aufgabe zur Poissonverteilung**

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein Team mit einer Torrate von $r = 1$ (die Torrate ist die Anzahl der Tore, die ein Team im Schnitt pro Stunde erzielt) nach 30 Minuten genau ein Tor erzielt hat.

Lösung

Die Anzahl der Tore ist $P(\lambda)$ -verteilt mit $\lambda = r \cdot t$.

$P(X = 1 \text{ nach 30 Minuten}) = \frac{(1 \cdot 0,5)^1}{1!} e^{-(1 \cdot 0,5)} = 0,5 \cdot e^{-0,5} = 0,30326533 \Rightarrow$ Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Team mit einer mittleren Torrate von $r = 1$ nach genau 30 Minuten ein Tor erzielt hat beträgt ca. 30,33%.

(7) **Aufgabe zur Poissonverteilung**

Ein Team erzielt im Schnitt 2 Tore pro Spiel. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass es nach 45 Minuten genau 2 Tore erzielt hat.

Lösung

λ kann man entweder durch die Überlegung erhalten, wenn in 90 Minuten im Schnitt 2 Tore fallen, dann fällt in 45 Minuten im Schnitt 1 Tor oder formell durch: $\lambda = r \cdot t \Rightarrow 2 = r \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow r = \frac{4}{3}$
45 Minuten = 0,75 Stunden $\Rightarrow t = \frac{3}{4} \Rightarrow \lambda = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} = 1$

$P(X = 2 \text{ nach 45 Minuten}) = \frac{1^2}{2!} e^{-1} = \frac{1}{2} e^{-1} = 0,183939721 \Rightarrow$ Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Team, das eine durchschnittliche Toranzahl von 2 pro Spiel hat, nach genau 45 Minuten 2 Tore erzielt, beträgt 18,39%.

(Nach [12] hat in der Saison 2009/10 der Meister FC Redbull Salzburg in gesamt 36 Spielen 68 Tore erzielt, das entspricht ca. 1,9 Toren pro Spiel. Bei einem Match zum Beispiel am 24.3.2010, gegen den SK Puntigamer Sturm Graz, das mit einem Endstand von 3:0 für Salzburg endete, erzielte dieses Team 2 Tore davon in der 1. Halbzeit, also nach 45 Minuten. Insgesamt erzielte Salzburg in dieser Saison 6 Mal 2 Tore in 45 Minuten nämlich noch gegen den SV Mattersburg (Endstand 6:1 für Salzburg), gegen SV Josko Ried (Endstand 2:1 für Salzburg), gegen SK Puntigamer Sturm Graz (Endstand 2:0 für Salzburg), gegen den SK Rapid Wien (Endstand 2:2), gegen LASK Linz

(Endstand 3:0 für Salzburg). Das entspricht bei gesamt 36 Spielen ca. 16,67% und liegt nahe dem errechneten Ergebnis.)

(8) **Aufgabe zur Poissonverteilung**

Sturm Graz, mit einer mittleren Toranzahl von 1,64 pro Spiel, und SV Ried, mit einer mittleren Toranzahl 1,35 pro Match, spielen gegeneinander. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Halbzeitstand 1:0 für Sturm Graz beträgt.

Lösung

$$\lambda = r \cdot t \Rightarrow r = \frac{\lambda}{1,5} \Rightarrow r_1 \approx 1,09 \text{ und } r_2 = 0,9$$

Nun muss in $P(m : n) = \frac{(r_1 t)^m (r_2 t)^n}{m! n!} e^{-(r_1 + r_2)t}$ eingesetzt werden, wobei $m = 1$, $n = 0$ und $t = 0,75$ ist:

$$P(\text{Halbzeitstand } 1:0) = \frac{(1,09 \cdot 0,75)^1 (0,9 \cdot 0,75)^0}{1! 0!} e^{-1,99 \cdot 0,75} = 0,8175 \cdot e^{-1,4925} = 0,183782116 \Rightarrow \text{Die Wahrscheinlichkeit, dass es zur Halbzeit } 1:0 \text{ für Sturm Graz gegen SV Ried steht, entspricht etwa } 18,38\%.$$

(Tatsächlich (Daten von [12]) war in der Saison 2008/09 bei einem von vier Spielen der Halbzeitstand 1:0 für Sturm Graz und in der Saison 2009/10 bei zwei von vier Spielen. Also trat das Ereignis in 3 von 8 Fällen ein, was 37,5% entspricht und deutlich höher als der errechnete Wert ist.)

(9) **Aufgabe zur Poissonverteilung**

SK Rapid Wien spielt gegen FK Austria Wien. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass SK Rapid nach spätestens 30 Minuten das erste Tor erzielt, wenn SK Rapid im Durchschnitt 2,35 Tore pro Spiel erzielt und FK Austria 1,65 (Daten von [12]).

Lösung

$$\lambda_1 = 2,35 \Rightarrow r_1 = \frac{2,35}{1,5} \Rightarrow r_1 = 1,57$$

$$\lambda_2 = 1,65 \Rightarrow r_2 = \frac{1,65}{1,5} \Rightarrow r_2 = 1,1$$

Nun muss in die Formel

$$P(\text{Team 1 erzielt in der Zeit } t \text{ das 1. Tor}) = \frac{r_1}{r_1 + r_2} (1 - e^{-(r_1 + r_2)t})$$

eingesetzt werden:

$$P(\text{Rapid erzielt nach spätestens 30 Minuten das 1. Tor}) = \frac{1,57}{1,57 + 1,1} (1 - e^{-(1,57 + 1,1)0,5}) = 0,433274032 \Rightarrow \text{Die Wahrscheinlichkeit, dass SK Rapid Wien in einem Match gegen FK Austria Wien in 30 Minuten das erste Tor erzielt, beträgt etwa } 43,32\%.$$

(In der Saison 2008/09 hat Rapid in einem von vier Spielen in 30 Minuten das erste Tor erzielt, nämlich in der 5. Minute, das Spiel endete 3:0. Ebenso ist es Rapid in einem von vier Spielen

in der Saison 2009/10 gelungen in der 5. Minute das erste Tor zu erzielen, das Spiel endete 4:1 für Rapid. Gesamt hat in 2 von 8 Spielen Rapid spätestens nach 30 Minuten das 1. Tor erzielt.)

(10) **Aufgabe zur Tordifferenz und Poissonverteilung**

SK Rapid Wien hat in der Saison 2009/10 (also in 36 Spielen) 80 Tore erzielt und 38 erhalten, SC Magna Wiener Neustadt hatte ein Torverhältnis von 54:58 (Daten von [12]). Die beiden Teams spielen ein Match gegeneinander, wobei es sich um ein Heimspiel von Rapid handelt. Der Heimvorteil in der österreichischen Bundesliga beträgt etwa 1,42, das heißt ein Team erzielt um 0,71 Tore mehr zu Hause.

- a) *Berechne die zu erwartende Tordifferenz für SK Rapid Wien unter Berücksichtigung des Heimvorteils.*
- b) *Berechne die zu erwartende Toranzahl bei diesem Spiel (das ist die durchschnittliche Summe der erzielten und erhaltenen Tore, weniger der durchschnittlichen Toranzahl von 3,1 pro Spiel.)*
- c) *Berechne mit Hilfe der Ergebnisse von a) und b) die zu erwartende Toranzahl für jedes Team.*
- d) *Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass das Spiel 3:0 für SK Rapid Wien endet.*
- e) *Gib eine Formel zur Berechnung für einen Gewinn von SK Rapid Wien, für ein Unentschieden und für einen Gewinn von SC Magna Wiener Neustadt an.*

Lösung

- a) Rapid hat einer Tordifferenz von 42, also eine durchschnittliche Tordifferenz von $\frac{42}{36} = \frac{7}{6} \approx 1,17$ pro Spiel. SC Magna Wiener Neustadt hat eine Tordifferenz von -4, somit ergibt sich eine mittlere Tordifferenz von $\frac{-4}{36} = -\frac{1}{9} \approx -0,11$. Die zu erwartende Tordifferenz ergibt sich aus $1,17 + 0,71 - (-0,11) = 1,99$ zum Vorteil für Rapid.
- b) Die zu erwartende Toranzahl ergibt sich aus $\frac{80+38+54+58}{36} - 3,1 = \frac{230}{36} - 3,1 \approx 3,29$.
- c) λ_1 beschreibt die mittlere Toranzahl von Rapid Wien und λ_2 die mittlere Toranzahl von Wiener Neustadt. Aufgabe a) liefert die Gleichung $\lambda_1 - \lambda_2 = 1,99$ und Aufgabe b) $\lambda_1 + \lambda_2 = 3,29$. Einsetzen von $\lambda_1 = 1,99 + \lambda_2$ in die 2. Gleichung ergibt: $1,99 + 2\lambda_2 = 3,29 \Rightarrow \lambda_2 = 0,65$ und $\lambda_1 = 2,64 \Rightarrow$ Rapid Wien hat eine zu erwartende Toranzahl von 2,64 und Wiener Neustadt von 0,65.

d) Die Wahrscheinlichkeit wird durch einsetzen in

$P(n : m) = \frac{\lambda_1^n \lambda_2^m}{n! m!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}$ berechnet, wobei $\lambda_1 = 2,64$ und $\lambda_2 = 0,65$:

$P(3:0) = \frac{2,64^3 1,06^0}{3! 0!} e^{-3,29} = 0,114243549 \Rightarrow$ Die Wahrscheinlichkeit, dass SK Rapid Wien gegen SC Magna Wiener Neustadt 3:0 gewinnt beträgt etwa 11,42%, wenn es sich um ein Heimspiel von Rapid handelt.

(SK Rapid Wien hat, Daten von [12], eines von 2 Heimspielen in der Saison 2009/10 gegen SC Magna Wiener Neustadt mit 3:0 gewonnen und eines mit 3:1.)

e) Wenn Rapid gewinnen soll bedeutet das, es muss zumindest ein Tor mehr als Wiener Neustadt erzielen:

$$P(\text{Rapid gewinnt}) = e^{-3,29} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2,64^k}{k!} \sum_{r=0}^{k-1} \frac{0,65^r}{r!} = 0.797232074.$$

Wenn das Spiel unentschieden enden soll, müssen beide Teams gleich viele Tore erzielen, also:

$$P(\text{Unentschieden}) = e^{-3,29} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2,64^k}{k!} \frac{0,65^k}{k!} = 0.134436628.$$

Wiener Neustadt gewinnt, wenn es mindestens ein Tor mehr als Rapid erzielt bzw. ist es einfacher die Aufgabe mittels der Gegenwahrscheinlichkeit zu lösen: $P(\text{Wr. Neustadt gewinnt}) = 1 - P(\text{Rapid gewinnt}) - P(\text{Unentschieden}) = 1 - 0.797232074 - 0.134436628 = 0,068331298$.

Das bedeutet bei einem Heimspiel von SK Rapid Wien gegen SC Magna Wiener Neustadt gewinnt das Heimteam mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 79,72%, das Auswärtsteam zu ca. 6,83% und das Spiel endet zu 13,44% unentschieden.

(11) Kombinatorikaufgabe zum Spiel Toto

Beim Spiel Toto müssen bei einem Tipp 12 Spielausgänge vorhergesagt werden. Für jedes Spiel gibt es die Möglichkeit 1 (Heimteam gewinnt), 2 (Auswärtsteam gewinnt) oder X (Spiel endet unentschieden) anzukreuzen. Ein Gewinn wird erzielt, wenn man mindestens 10 Spiele richtig tippt.

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei dem Spiel Toto einen Zehner zu erzielen, wenn rein zufällig getippt wird?

Lösung

Es gibt $3^{12} = 531\,441$ Möglichkeiten einen Totoschein auszufüllen. Bei einem Zehner dürfen 2 Spiele falsch getippt werden, wobei es jeweils 2 Möglichkeiten für einen falschen Tipp gibt. Es gibt also $\binom{12}{2} = 66$ Möglichkeiten 2 Spiele falsch zu tippen

und $66 \cdot 2^2 = 264$ Möglichkeiten auf einem Totoschein 10 Spiele richtig und 2 Spiele falsch anzukreuzen. Daher beträgt die Wahrscheinlichkeit für einen Zehner:

$P(\text{Zehner}) = \frac{264}{531441} = 0,000496763 \Rightarrow$ Die Wahrscheinlichkeit beim Spiel Toto einen Zehner zu erzielen beträgt ca. 0,04968% bzw. 49,68 Promille.

(12) **Aufgabe zum Erwartungswert beim Spiel Toto**

In einer Totorunde wurden 146 845 Tipps abgegeben. Ein Tipp kostet 0,60 €. Die Gesamtgewinnssumme beträgt 50% des Wetteinsatzes, davon entfallen 50% auf den Zwölfer, 25% auf den Elfer und 25% auf den Zehner. Wie hoch ist der Erwartungswert des Gewinns?

Lösung

Die gesamte Gewinnssumme beträgt $\frac{146\,845 \cdot 0,60}{2} = 44053,5$. Für den Zwölfer stehen 50% dieser Summe zu Verfügung, also 22 026,75 €, für den Elfer und Zehner stehen je 25% zu Verfügung, also 11 013,375 € Die Wahrscheinlichkeiten für einen Gewinn betragen:

$$P(\text{Zwölfer}) = \frac{1}{3^{12}} = \frac{1}{531441}$$

$$P(\text{Elfer}) = \frac{24}{3^{12}} = \frac{24}{531441}$$

$$P(\text{Zehner}) = \frac{264}{3^{12}} = \frac{264}{531441}$$

$$E(\text{Gewinn}) = P(\text{Zwölfer}) \cdot 22026,75 + P(\text{Elfer}) \cdot 11013,375 + P(\text{Zehner}) \cdot 11013,375 - 0,60 =$$

$$= \frac{1}{531441} 22026,75 + \frac{24}{531441} 11013,375 + \frac{264}{531441} 11013,375 - 0,60 =$$

$= 6,009846342 - 0,60 = 5,409846342$. Dabei muss allerdings beachtet werden, dass die Rangsummen noch durch die Anzahl der Gewinner dividiert werden. Nimmt man zum Beispiel an, dass es 5 Zwölfer, 52 Elfer und 638 Zehner gibt, dann ist $E(\text{Gewinn}) = \frac{1}{531441} \frac{22026,75}{5} + \frac{24}{531441} \frac{11013,375}{52} + \frac{264}{531441} \frac{11013,375}{638} - 0,60 = 0,026429472 - 0,60 = -0,573570528$. Das bedeutet auf lange Sicht gesehen gewinnen die österreichischen Lotterien.

(13) **Kombinatorikaufgabe zum Spiel Toto**

Beim Spiel Toto kann ein Systemtipp abgegeben werden. Dabei wird zwischen Bank (es kann nur ein möglicher Spielausgang - 1, 0 oder X - angekreuzt werden), Zweiweg (es können zwei Spielausgänge - 1 und 2 oder 1 und X oder 2 und X - angekreuzt werden) oder Dreiweg (es werden alle drei Spielausgänge angekreuzt). Es wird das System 9-2-1 gespielt. Das bedeutet, es wird bei 9 Spielen ein Spielausgang angekreuzt (Bankzahlen), bei 2

Spiele werden zwei Spielausgänge angekreuzt (Zweiweg) und bei 1 Spiel werden alle drei Spielausgänge angekreuzt.

Welche Gewinne (Zwölfer, Elfer, Zehner) ergeben sich

- a) wenn alle Tipps richtig sind,*
- b) wenn ein Zweiweg falsch ist,*
- c) wenn eine Bankzahl falsch ist?*

Lösung

a) Wenn alle Tipps richtig sind, ist der Gewinn ein Zwölfer wenn bei dem Zwei- und Dreiweg jeweils die richtigen Ergebnisse genommen werden. Zusätzlich zum Zwölfer werden aber auch Elfer und Zehner gewonnen, je nach dem welche Ergebnisse bei den Zwei- und Dreiwegen gewählt werden:

Elfer: bei einem Elfer darf 1 Zahl falsch sein. Bei 2 Zweiwegen gibt es 2 Möglichkeiten eine falsche Zahl zu wählen, bei einem Dreiweg gibt es ebenfalls 2 Möglichkeiten eine falsche Zahl zu wählen. Also gibt es insgesamt 4 Möglichkeiten einen Elfer zu erzielen.

Zehner: bei einem Zehner dürfen 2 Ergebnisse falsch sein. Es kann also bei beiden Zweiwegen ein falsches Ergebnis gewählt werden (1 Möglichkeit), bei einem Zweiweg und der Dreiweg (2 Möglichkeiten) oder bei dem anderen Zweiweg und dem Dreiweg (2 Möglichkeiten). Es gibt also $1 + 2 + 2 = 5$ Arten einen Zehner zu haben, wenn alle Tipps richtig sind.

b) Wenn ein Zweiweg falsch ist kann der höchste Gewinn ein Elfer sein. Ein Elfer kann mit allen richtigen Ergebnissen und einem falschen Ergebnis vom Zweiweg oder aus allen richtigen Ergebnissen und dem anderen falschen Ergebnis vom Zweiweg gebildet werden, also auf 2 Arten.

Da bei einem Zehner zwei Ergebnisse falsch sein dürfen (eines davon muss der falsche Zweiweg sein!) kann bei beiden Zweiwegen ein falsches Ergebnis gewählt werden - allerdings gibt es da diesmal 2 Möglichkeiten, da bei einem Zweiweg ja beide Ergebnisse falsch sind - oder bei dem falschen Zweiweg und dem Dreiweg (4 Möglichkeiten, da es zwei falsche Ergebnisse beim Zweiweg und zwei falsche Ergebnisse beim Dreiweg gibt). Es gibt also gesamt $2 + 4 = 6$ Möglichkeiten für einen Zehner.

c) Wenn eine Bankzahl falsch ist bedeutet das wie bei Beispiel b) dass der höchste Gewinn ein Elfer ist. Dieser kann nur auf eine Möglichkeit zusammengesetzt werden, da eine falsche Bankzahl bedeutet alle anderen Ergebnisse müssen stimmen.

Bei einem Zehner kann zusätzlich zur falschen Bankzahl entweder das falsche Ergebnis vom ersten Zweiweg gewählt werden, oder das vom zweiten Zweiweg oder eines der beiden falschen Ergebnisse vom Dreiweg. Es gibt also 4 Möglichkeiten den Zehner zusammenzusetzen.

Wird das Toto System 9-2-1 gespielt ergeben sich

- a) wenn alle Tipps richtig sind 1 Zwölfer, 4 Elfer und 5 Zehner,
- b) wenn ein Zweiweg falsch ist 2 Elfer und 6 Zehner und
- c) wenn eine Bankzahl falsch ist 1 Elfer und 4 Zehner.

(14) **Statistikaufgabe**

Die untenstehende Tabelle zeigt die Punktetabelle der Heim- und Auswärtsspiele der Saison 2009/10 (Daten von [12]). Berechne den Mittelwert der Punkte für die Heim- und Auswärtstabelle, sowie die Standardabweichung. Interpretiere das Ergebnis (betrachte das Intervall $[m-s, m+s]$ und runde sinnvoll).

Platzierung	Verein	Punkte
1.	SK Rapid Wien	47
2.	FK Austria Wien	45
3.	FC Red Bull Salzburg	43
4.	SC Magna Wr. Neustadt	34
5.	SK Puntigamer Sturm Graz	30
6.	SV Mattersburg	30
7.	LASK Linz	29
8.	SV Josko Ried	27
9.	KSV Superfund	23
10.	SK Austria Kelag Kärnten	12

TABELLE 9. Heimtabelle der österreichischen Bundesliga: Saison 2009/10 Heimspiele, nach [12].

Platzierung	Verein	Punkte
1.	FC Red Bull Salzburg	33
2.	FK Austria Wien	30
3.	SK Puntigamer Sturm Graz	28
4.	SK Rapid Wien	26
5.	SC Magna Wr. Neustadt	13
6.	SV Josko Ried	11
7.	LASK Linz	11
8.	SV Mattersburg	11
9.	KSV Superfund	10
10.	SK Austria Kelag Kärnten	3

TABELLE 10. Auswärtstabelle der österreichischen Bundesliga: Saison 2009/10, nach [12].

Lösung

Den Mittelwert erhält man durch einsetzen in die Formel

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i:$$

Heimtabelle:

$$\bar{x}_H = \frac{1}{10}(47 + 45 + 43 + 34 + 2 \cdot 30 + 29 + 27 + 23 + 12) = \frac{320}{10} = 32$$

Auswärtstabelle:

$$\bar{x}_A = \frac{1}{10}(33 + 30 + 28 + 26 + 13 + 3 \cdot 11 + 10 + 3) = \frac{176}{10} = 17,6$$

Die Standardabweichung erhält man durch einsetzen in die For-

$$\text{mel } s = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2:$$

Heimtabelle:

$$\begin{aligned} s_H^2 &= \frac{1}{9}((47 - 32)^2 + (45 - 32)^2 + (43 - 32)^2 + (34 - 32)^2 + \\ &+ 2 \cdot (30 - 32)^2 + (29 - 32)^2 + (27 - 32)^2 + (23 - 32)^2 + (12 - 32)^2 = \\ &= \frac{1}{9}(15^2 + 13^2 + 11^2 + 2^2 + 2 \cdot (-2)^2 + (-3)^2 + (-5)^2 + (-9)^2 + \\ &+ (-20)^2) = \frac{1042}{9} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$s_H = 10,76000826$$

Auswärtstabelle:

$$\begin{aligned} s_A^2 &= \frac{1}{9}((33 - 17,6)^2 + (30 - 17,6)^2 + (28 - 17,6)^2 + (26 - 17,6)^2 + \\ &+ (13 - 17,6)^2 + 3 \cdot (11 - 17,6)^2 + (10 - 17,6)^2 + (3 - 17,6)^2 = \\ &= \frac{1}{9}(15,4^2 + 12,4^2 + 10,4^2 + 8,4^2 + (-4,6)^2 + 3 \cdot (-6,6)^2 + \\ &+ (-7,6)^2 + (-14,6)^2) = \frac{992,4}{9} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$s_A = 10,50079362$$

Der Mittelwert der Heimtabelle beträgt 32 Punkte und die Standardabweichung etwa 10,76. Der Mittelwert der Auswärtstabelle beträgt 17,6 Punkte und die Standardabweichung ca. 10,50. Bei der Heimtabelle ergibt sich das Intervall [21,24 ; 42,76], also gerundet [22 ; 42]. Die Punktezahlen der Teams SK Rapid Wien, FK Austria Wien und FC Redbull Salzburg liegen über dem Wert 42 und zwischen dem 3. Platz mit 43 Punkte und dem 4. Platz mit 34 Punkte (SC Magna Wiener Neustadt) ist ein deutlicher Unterschied von 9 Punkten. Diese Teams heben sich also deutlich von den anderen ab, das heißt sie scheinen deutlich besser zu sein. Es gibt nur ein Team, nämlich Austria Kelag Kärnten, das mit nur 12 Punkten deutlich unter dem Wert 22 liegt und somit schwächer ist als die anderen Teams. Die restlichen Teams bilden ein Mittelfeld, das im Streubereich um den Mittelwert liegt.

Bei der Auswärtstabelle ergibt sich das Intervall [7,1 ; 28,1], gerundet also [8 ; 28]. Zwei Teams, nämlich FC Red Bull Salzburg mit 33 Punkten und FK Austria Wien mit 30 Punkten liegen über der oberen Intervallgrenze. Sie heben sich allerdings nicht

so deutlich ab vom 3. Platz mit 28 Punkten ab. Der Verein Austria Kelag Kärnten fällt wie bei der Heimtabelle mit nur 3 Punkten deutlich aus dem Intervall heraus und zeichnet sich als das schwächste Team ab. Die anderen Punktezahlen liegen im Streubereich, wobei ein großer Sprung zwischen 4. und 5. Platz von 13 Punkten ist.

Generell lässt sich an Hand der Punktezahlen der Heimvorteil erkennen, da der Mittelwert der Heimtabelle 32 beträgt und jener der Auswärtstabelle 17,6, also ist das Verhältnis von Heim- zu Auswärtspunkten etwa durchschnittlich 1,8 : 1. Es gibt Vereine wie Sturm Graz bei denen es kaum einen Unterschied zwischen Heim- (30 Punkte) und Auswärtspunkten (28 Punkte) gibt und Teams, wie SC Magna Wiener Neustadt (Heimtabelle: 34 Punkte und Auswärtstabelle: 13 Punkte) oder Austria Kelag Kärnten (Heimtabelle: 12 Punkte und Auswärtstabelle: 4 Punkte), bei denen der Unterschied sehr stark ist.

5. RESÜMEE

In der Arbeit wurde gezeigt, wie mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik das Spiel Fußball analysiert werden kann. Grund dafür ist, dass der Zufall eine gewisse Rolle spielt und somit Wahrscheinlichkeitstheoretische Berechnungen zulässt. Natürlich darf dabei nicht vergessen werden, es handelt sich bei den Ergebnissen um Wahrscheinlichkeiten. Der Spielausgang kann letztendlich nicht vorhergesagt werden, da eine bestimmte Wahrscheinlichkeit für ein Tor keine Sicherheit für ein tatsächliches Tor ist. Aber genau diese Unvorhersagbarkeit von Spielergebnissen macht das Fußballspiel so interessant. Die Zufallskomponente trägt dazu bei, dass nicht immer das vermeintlich bessere Team gewinnt. Es kann also mit Hilfe der Mathematik eine mögliche Ursache angegeben werden, warum Fußball bei uns so populär ist. Die Mischung aus Können und Zufall sorgt immer für Spannung und macht letztendlich das Spiel unberechenbar, was aber nicht heißt, dass es Wahrscheinlichkeitstheoretisch nicht analysierbar wäre, wie in der Arbeit gezeigt wurde.

Abgesehen davon war es wichtig einen Schulbezug herzustellen. Die Aufgabensammlung soll zeigen, dass sich gute und praxisnahe Aufgaben zu diesem Thema entwickeln lassen. Es können mit relativ einfachen Wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden mögliche Spielausgänge simuliert werden. So kann mit der Binomialverteilung berechnet werden wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist k Tore in einem Spiel, in dem n Tore gefallen sind, zu erzielen oder es kann mit der Poissonverteilung die Wahrscheinlichkeit für einen gewissen Endstand eines Spiels berechnet werden. Die Fußballtabellen eignen sich sehr gut für statistische Analysen. Es kann der Mittelwert und die Standardabweichung der Punktetabelle am Ende einer Saison berechnet werden und den Schüler/innen so sehr anschaulich die Bedeutung dieser statistischen Größen erklärt werden. Außerdem eignet sich das Thema Fußball auch für kombinatorische Aufgaben. Für mich liegt der Vorteil Aufgaben mit der Thematik Fußball zu erstellen darin, dass sich viele Schüler/innen mit der Sportart befassen und Interesse daran haben. Durch den Praxisbezug der Aufgaben, kann die Aufmerksamkeit der Schüler/innen geweckt werden, vor allem wenn die errechneten Ergebnisse mit tatsächlichen Werten verglichen werden. Ich denke es ist sehr wichtig im Mathematikunterricht einen Praxisbezug herzustellen, da oft von Schüler/innen die Frage kommt wofür sie das alles überhaupt können müssen bzw. brauchen. Direkt die Anwendung zu sehen, ist bestimmt motivierend. In Folge dessen könnten auch fächerübergreifend die Themen Sportwetten und Glücksspiel erarbeitet werden. Vor allem

aber könnte das Thema fächerübergreifend mit den Fächern Bewegung und Sport und Physik erarbeitet werden. Während in Bewegung und Sport die Regeln und das praktische Können erlernt werden, könnte es mit Hilfe der Mathematik wahrscheinlichkeitstheoretisch betrachtet werden und noch zusätzlich die Mechanik des Fußballspiels im Physikunterricht analysiert werden (zum Beispiel welche Kräfte wirken, wie die Flugbahn des Balles aussieht, wie der Magnus Effekt zu Stande kommt, etc.). Es kann also das Fußballspiel in Theorie und Praxis untersucht werden, was aufgrund der Themenwahl bestimmt das Interesse der Schüler/innen weckt. Oder es könnte in einem Projekt versucht werden den Ausgang der österreichischen Fußball Bundesliga zu simulieren.

Wie man sieht, kann aus dem Thema Wahrscheinlichkeitstheorie und Fußball sehr viel herausgeholt werden und Anwendung im Unterricht finden.

LITERATUR

- [1] Ben-Naim, E. & Vazquez, F. & Redner, S. (2007). *What is the most competitive sport?* [Elektronische Version]. Journal of the Korean Physical Society 50, 124-126. Zugriff am 13. Oktober 2010 unter <http://arxiv.org/abs/physics/0512143v1>.
- [2] Bwin Interactive Entertainment AG. (2010, 12. Dezember). *Factsheet bwin Lebenszyklus einer Quote*. Zugriff am 12. Dezember 2010 unter [https://media.itsfogo.com/media/sccwupload/Files/Presspack/2009_12/DE/Factsheet bwin Lebenszyklus einer Quote_DE 15 09 09.pdf](https://media.itsfogo.com/media/sccwupload/Files/Presspack/2009_12/DE/Factsheet%20bwin%20Lebenszyklus%20einer%20Quote_DE%2015%2009%2009.pdf).
- [3] Blumenschein, S. (2010). *Die Magie des ersten Tors*. Kurier am 13.11.2010, S. 33.
- [4] Büchter, A. & Henn, H.-W. (2005). *Elementare Stochastik. Eine Einführung in die Mathematik der Daten und des Zufalls*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
- [5] Bosch, K. (2000). *Elementare Einführung in die angewandte Statistik* (7., verbesserte und erweiterte Auflage). Braunschweig/Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH.
- [6] Dambeck, H. (2010). *Ist Fußball ein Glücksspiel?* [Elektronische Version]. Spektrum der Wissenschaft, 10 (6), 68-70. Zugriff am 13. Oktober 2010 unter www.wissenschaft-online.de/artikel/1031900
- [7] Georgii, H.O. (2007). *Stochastik. Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik* (3. überarbeitete und erweiterte Auflage). Berlin: Walter de Gruyter GmbH & Co. KG.
- [8] Heuer, A. & Müller, C. & Rubner, O. (2010). *Soccer: Is scoring goals a predictable Poissonian process?* [Elektronische Version]. Europhysics Letters 89 (3), 38007. Zugriff am 7. Oktober 2010 unter http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1002/1002.0797v2.pdf.
- [9] Heuer, A. & Rubner, O. (2009). *Fitness, chance, and myths: an objective view on soccer results* [Elektronische Version]. The European Physical Journal 67 (3), 445-458. Zugriff am 7. Oktober 2010 unter http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0803/0803.0614v4.pdf.
- [10] Heuser, H. (1989). *Gewöhnliche Differentialgleichungen. Einführung in Lehre und Gebrauch*. Stuttgart: Teubner.
- [11] Keuntje, M. (2008). „Tore schießen ist wie ein radioaktiver Zerfall“ [elektronische Version]. Physik Journal 7 (6). Zugriff am 7. Oktober 2010 unter http://www.uni-muenster.de/imperia/md/content/physikalische_chemie/heuer/dpg_soccer.pdf.
- [12] Kircher, Ch. (2010, 4. Oktober). *Österreichische Fußballbundesliga*. Zugriff am 4.10.2010 unter <http://www.bundesliga.at>.
- [13] Kleine Zeitung. (2011, 28. Jänner). *ÖFB-Team 2010 mit Zuschauerschnitt von 19.450*. Zugriff am 28. Jänner 2011 unter <http://www.kleinezeitung.at/sport/fussball/oefb/2659017/oefb-team-2010-zuschauerschnitt-19-450.story>.
- [14] Krattenthaler, Ch. (2005). *Diskrete Mathematik*. Vorlesungsskriptum, Universität Wien.
- [15] Krengel, U. (1991). *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik* (3., erweiterte Auflage). Braunschweig/Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH.

- [16] Lames, M. (1999). *Fussball - ein Chaosspiel* [elektronische Version]. In J.-P. Janssen, A. Wilhelm & M. Wegner (Hrsg.), *Empirische Forschung im Sportspiel Methodologie, Fakten und Reflektionen* (S. 141-156). Kiel: Christian-Albrechts-Universität zu Kiel. Zugriff am 9. November 2010 unter http://www.sport.uni-augsburg.de/mitarbeiter/05lames/veroeffentlichungen/1996/Lames_M___1999___Fu_ball_-_Ein_Chaosspiel.pdf.
- [17] Lames, M. (2006). *Glücksspiel Fußball?* [elektronische Version]. Zugriff am 9. November 2010 unter <http://www.uni-protokolle.de/nachrichten/id/118362/>.
- [18] ÖFB. (2011, 28. Jänner). *Die Geschichte des Öfb. Fußball ist Volkssport und Freizeitvergnügen*. Zugriff am 28. Jänner 2011 unter http://www.oefb.at/show_berichtdetail.php?ber_id=1964
- [19] Quitzau, J. & Vöpel H. (2009). *Der Faktor Zufall im Fußball. Eine empirische Untersuchung für die Saison 2007/08* [elektronische Version]. HWWI Research Paper, 1-22, Hamburg. Zugriff am 12. November 2010 unter http://www.hwwi.org/uploads/tx_wilpubdb/HWWI_Research_Paper_1-22.pdf.
- [20] Raith, P. Mitteilung des Autors.
- [21] Schultz D. & Landsmann M. & Österreichische Lotterien Gesellschaft m.b.H.(2009). *Ein Gewinn für jeden. Geschäftsbericht 2009 der Österreichischen Lotterien* [elektronische Version]. Zugriff am 1. Dezember 2010 unter <http://www.lotterien.at/olg/index.html>.
- [22] Tolan, M.(2010). *So werden wir Weltmeister. Die Physik des Fußballspiels*. München: Piper Verlag GmbH.
- [23] Österreichische Lotterien Gesellschaft m.b.H. (2010, 1. Dezember). Zugriff am 1. Dezember 2010 unter <http://www.lotterien.at/olg/index.html>.
- [24] Weiß, O. (1999). *Einführung in die Sportsoziologie*. Wien: WUV-Universitätsverlag.
- [25] Wesson, J. (2006). *Fußball - Wissenschaft mit Kick. Von der Physik fliegender Bälle und der Statistik des Spielausgangs*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- [26] Wettstern.com (2010, 22. April). *Gewinnspannen verstehen*. Zugriff am 12. Dezember 2010 unter <http://www.wettstern.com/wettanbieter-know-how/gewinnspannen>.
- [27] Wikipedia Foundation Inc. (2010, 1. Oktober). *Fußball*. Zugriff am 3. Oktober 2010 unter <http://de.wikipedia.org/wiki/Fußball>
- [28] Wikipedia Foundation Inc. (2010, 30. September). *Fußball-Bundesliga Österreich*. Zugriff am 4. Oktober 2010 unter [http://de.wikipedia.org/wiki/Fußball-Bundesliga\(Österreich\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Fußball-Bundesliga(Österreich)).
- [29] Wikipedia Foundation Inc.(2010, 28. Oktober). *Sportwette*. Zugriff am 12. Dezember 2010 unter <http://de.wikipedia.org/wiki/Sportwette>.
- [30] <http://www.win2day.at> (2010, 3. Dezember). *Toto Spielanleitung*. Zugriff am 3. Dezember 2010 unter http://www.win2day.at/gaming/spielinfo_W2D_toto.jsp?sessionID=98388da0-1401-583d52-138a-ca96c2b24a5f.

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

1	Aufbau und Maße eines Fußballfeldes nach [22, S. 32].	10
2	Gewinnwahrscheinlichkeit des schwächeren Teams bei ungerader Toranzahl, modifiziert nach [25, S. 86].	14
3	Gewinnwahrscheinlichkeit des schwächeren Teams bei gerader Toranzahl, modifiziert nach [25, S. 87].	15
4	Gewinnwahrscheinlichkeit des schwächeren Teams bei ungerader Toranzahl und unterschiedlichen Werten für p und q , modifiziert nach [22, S. 50].	16
5	Gewinnwahrscheinlichkeit des schwächeren Teams bei gerader Toranzahl und unterschiedlichen Werten für p und q , modifiziert nach [22, S. 50].	16
6	Wahrscheinlichkeit für ein Unentschieden mit unterschiedlichen Werten für p und q , modifiziert nach [22, S. 50].	16
7	Ergebnisse der österreichischen Bundesliga Saison 2008/09 modifiziert nach [12].	25
8	Ergebnisse der österreichischen Bundesliga Saison 2009/10 modifiziert nach [12].	25
9	Torverteilung der österreichischen Bundesliga.	28
10	Vergleich der tatsächlichen und errechneten Anzahl der Unentschieden mit Endstand $k : k$, modifiziert nach [22, S. 89].	37
11	Wahrscheinlichkeit für k Tore in Abhängigkeit von der Spielzeit t , bei einer Torrate des Teams von $r = 1$, modifiziert nach [25, S. 100].	40
12	Wahrscheinlichkeit eines Teams das erste Tor spätestens nach der Zeit t zu erzielen mit $r = 1$ für beide Teams, modifiziert nach [25, S. 108].	41
13	Wahrscheinlichkeit eines Teams das erste Tor spätestens nach der Zeit t zu erzielen mit unterschiedlichen Torraten, modifiziert nach [25, S. 107].	42
14	Wahrscheinlichkeit für den Spielausgang mit Tordifferenz r , am Beispiel FC Redbull Salzburg gegen SK Puntigamer Sturm Graz, modifiziert nach [8].	51
15	Wahrscheinlichkeit für den Spielausgang mit Tordifferenz r unter Berücksichtigung des Heimvorteils, am Beispiel FC Redbull Salzburg gegen SK Puntigamer Sturm Graz, modifiziert nach [8].	52

16	Wahrscheinlichkeit für den Spielausgang mit Tordifferenz r für das Heimteam, modifiziert nach [8].	53
17	Verteilung der Punktezahlen im Vergleich, modifiziert nach [25, S. 216].	59
18	Totoschein, nach [30] (Zugriff am 3. Dezember 2010 unter http://www.win2day.at/gaming/spielinfo).	66

TABELLENVERZEICHNIS

1	Einteilung nach der gesamt pro Spiel erzielten Toranzahl.	26
2	Berechnete Torverteilung für $\lambda = 3, 1$.	27
3	Vergleich errechneter und tatsächlicher Werte für die Spiele mit Toranzahl k .	28
4	Tabelle für den χ^2 Anpassungstest.	32
5	Wahrscheinlichkeiten für ein Unentschieden mit Endstand $k : k$.	36
6	Spielausgang nach einer 1:0 Führung.	44
7	Punktetabelle der österreichischen Bundesliga: Saison 2008/09, nach [12].	58
8	Punktetabelle der österreichischen Bundesliga: Saison 2009/10, nach [12].	58
9	Heimtablette der österreichischen Bundesliga: Saison 2009/10 Heimspiele, nach [12].	78
10	Auswärtstabelle der österreichischen Bundesliga: Saison 2009/10, nach [12].	78

LEBENS LAUF

Angaben zur Person

<i>Name</i>	Lisa Posch
<i>Adresse</i>	Görgengasse 23/11/7, 1190 Wien
<i>Mobiltelefon</i>	06991 000 67 25
<i>Email</i>	lischen_p@gmx.at
<i>Staatsangehörigkeit</i>	Österreich
<i>Geburtsdatum</i>	02.04.1985
<i>Familienstand</i>	ledig, keine Kinder

Schul- und Berufsbildung

<i>1991 - 1995</i>	Volksschule Flotowgasse 25, 1190 Wien
<i>1995 - 2003</i>	Wirtschaftskundliches Bundesrealgymnasium Billrothstraße 26-30, 1190 Wien Matura mit Auszeichnung abgeschlossen
<i>2004 - 2011</i>	Lehramtsstudium Mathematik & Bewegung und Sport
<i>seit 2004</i>	Diplomstudium Mathematik
<i>SS 2010</i>	Tutorin für Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik bei ao. Univ.-Prof. Dr. Peter Raith
<i>WS 2010/11</i>	Tutorin für angewandte Mathematik bei ao. Univ.-Prof. Dr. Peter Raith