



universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Ist das Leben ein Spiel?

Spieltheorie für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe II
mit besonderer Berücksichtigung der extensiven Spielform

angestrebter akademischer Grad

Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer.nat.)

Verfasser:

Manuel Graf

Matrikel-Nummer:

0600074

Studienkennzahl lt. Studienblatt:

A 190 406 313

Studienrichtung lt. Studienblatt:

Lehramtsstudium Mathematik &
Geschichte, Sozialkunde und politische Bildung

Betreuerin:

Dr. Petra Hauer-Typelt

Wien, im Februar 2011

DANKSAGUNG

Die Fertigstellung dieser Diplomarbeit wäre, ohne der fachlichen und menschlichen Unterstützung einiger wichtiger Personen meines persönlichen Umfelds, nicht möglich gewesen. An dieser Stelle möchte ich deshalb einigen dieser Menschen meinen herzlichen Dank aussprechen.

Zunächst ist meine Diplomarbeitsbetreuerin Dr. Petra Hauer-Typelt zu nennen, die mich mit ihrer flexiblen und fachlich kompetenten Betreuung stets unterstützt und auf den richtigen Weg geführt hat.

Gedankt sei auch meiner Familie und all meinen Freunden, die immer für mich da waren und mich des Öfteren auf den Boden der Realität zurückgeholt haben. Ganz besonders sind an dieser Stelle meine Freundin und meine Mutter zu erwähnen.

Schlussendlich gilt mein größter Dank meinem Vater, Herbert Graf, der während der Verfassung dieser Arbeit auf tragische Weise verstorben ist.

Du warst mir stets ein großes Vorbild und hast in mir auch die Neugier an der Mathematik geweckt. Da Worte an dieser Stelle nicht ausreichen, um dir in angemessener Form zu danken, möchte ich dir schlicht und ergreifend diese Diplomarbeit widmen.

ANMERKUNG

Ich habe mich in meiner Arbeit bemüht bei personenbezogenen Bezeichnungen sowohl die männliche, als auch die weibliche Form anzuführen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit ist dies jedoch speziell in den theoretischen Abschnitten nicht immer möglich gewesen.

Soweit also personenbezogene Bezeichnungen nur in männlicher Form auftauchen, beziehen sich diese auf Frauen und Männer in gleicher Weise.

INHALTSVERZEICHNIS

I.	Einleitung	S. 3
1.1	Einführung und zentrale Zielsetzung der Arbeit	S. 3
1.2	Aufbau der Arbeit	S. 5
1.3	Motivation und persönlicher Bezug	S. 6
II.	Hintergründe	S. 7
2.1	Spieltheorie – Was ist das?	S. 7
2.2	Historische Entwicklung der Spieltheorie – Ein Überblick	S. 10
III.	Theoretische Grundlagen – Spiele in strategischer Form	S. 13
3.1	Gefangenendilemma einmal anders	S. 13
3.2	Kaufen oder nicht kaufen? Ein erstes Lösungskonzept	S. 16
3.3	Das Nash-Gleichgewicht als weiteres Lösungskonzept	S. 19
3.4	Wie lassen sich Gleichgewichte finden? Ein intuitiver Zugang	S. 21
3.5	Auf dem Weg zu gemischten Strategien – Schere Stein Papier	S. 25
3.6	Wieder am Schulfest - Gemischte Strategien graphisch interpretiert	S. 29
3.7	Zur Existenz von Nash-Gleichgewichten	S. 34
IV.	Spiele in extensiver Form	S. 38
4.1	Bäume die von oben wachsen – Grundlagen der extensiven Form	S. 38
4.2	Das Problem der Kleinparteien – Die extensive Spielform und Politik	S. 42
4.3	Strategische oder extensive Form – Adaption des Nash-Gleichgewichts	S. 47
4.4	Alles eine Frage der Information	S. 50
4.5	Teilspielperfektheit – Drohungen und Ankündigungen	S. 61
4.6	Refinements – Weitere Verfeinerungen des Nash-Gleichgewichts	S. 69
4.7	Echt paradox – Grenzen des Rationalisierungsprozesses	S. 74

V.	Umsetzung im Unterricht – Ein didaktischer Kommentar	S. 80
5.1	Spieltheorie und der Lehrplanbezug	S. 80
5.2	Die erforderlichen Vorkenntnisse	S. 84
5.3	Jetzt aber konkret – Warum überhaupt Spieltheorie im Unterricht?	S. 86
5.4	Einstiegsmöglichkeiten für die extensive Spielform - Geschichten modellieren	S. 87
5.5	Vom Modellieren zum Optimieren	S. 96
5.6	Die Grenzen von Spieltheorie im Unterricht	S. 99
VI.	Schlussbetrachtung	S. 102
VII.	Anhang	S. 104
7.1	Literaturverzeichnis	S. 104
7.2	Abbildungsverzeichnis	S. 109
7.3	Kurzfassung	S. 110
7.4	Abstract	S. 111
7.5	Lebenslauf	S. 112
7.6	Sacherschließungsformular	S. 113

I. Einleitung

1.1 Einführung und zentrale Zielsetzung der Arbeit

Soll ich die Hausübung machen? Wird die Aufgabe eingesammelt, oder nicht? Zahlt es sich aus ein Ticket für die U-Bahn zu kaufen? Gehe ich bei Rot über die Ampel oder nicht? Soll ich Mathematik studieren oder doch lieber Publizistik? Bestelle ich Rotwein oder den empfohlenen Cocktail? Soll ich im WM Finale den Elfmeter ins rechte oder ins linke Eck schießen?

Es vergeht kaum eine Stunde unseres menschlichen Daseins in der wir nicht irgendeine Entscheidung treffen müssen. Das Leben eines jeden Individuums lässt sich gewissermaßen als endliche Kette von Entscheidungen interpretieren. Entscheidungen, deren Konsequenzen wir in den meisten Fällen nicht mehr rückgängig machen können und somit nachhaltig unseren Weg durchs Leben bestimmen.

Jede dieser unzähligen Entscheidungen präsentiert sich in einem gewissen Rahmen: So gibt es in jeder der Situationen Regeln, die eingehalten werden müssen. Wir haben uns etwa an Naturgesetze zu halten und können nicht der Schwerkraft trotzen und über die Straße fliegen. Wir müssen ein Getränk aus der Getränkekarte auswählen und können nicht einfach Champagner bestellen, wenn es keinen gibt. Wir können auch nicht Numismatik studieren, wenn dieses Studium nicht mehr existiert. Selbst beim Elfmeterschießen sind gewisse Regeln vorgegeben: So darf beispielsweise der Schütze den Anlauf nicht verzögern und auch den Ball kann er sich nicht einfach näher zum Tor legen.

Auch sind die Konsequenzen unseres Handelns nicht immer klar ersichtlich, was ebenfalls zur Charakterisierung einer Situation beiträgt. Einerseits ist unklar, ob wir beim Kauf eines Tickets für die U-Bahn kontrolliert werden oder beim Elfmeter mit einem Schuss nach rechts tatsächlich ein Tor schießen. Andererseits kann man davon ausgehen, dass man bei Bestellung von Rotwein auch Rotwein erhält.

Es weist also jede Entscheidungssituation unseres Lebens bestimmte Merkmale auf: Wir müssen eine Wahl aus einer bestimmten Anzahl von Möglichkeiten treffen, über deren Folgen wir nicht immer vollständig informiert sind. Zudem gibt es gewisse Spielregeln, welche die jeweilige Situation begrenzen.

Soll ich mit dem Pferd den schwarzen Läufer schlagen? Soll ich die kleine Rochade machen? Oder soll ich bloß mit dem Bauern von e2 auf e4 ziehen?

Auch das Schachspiel präsentiert sich als eine Folge von unzähligen Entscheidungen. Zunächst muss sich Weiß für einen Eröffnungszug entscheiden, den Schwarz anschließend zu beantworten hat. Beide Spieler haben stets eine gewisse Anzahl an Handlungsmöglichkeiten zur Auswahl. Zudem wird auch das Schachspiel durch Spielregeln begrenzt. Es ist etwa nicht möglich mit dem König mehr als ein Feld oder mit dem Bauern rückwärts zu ziehen. Aufgrund all dieser Analogien zwischen dem Spieleklassiker Schach und den Entscheidungen des alltäglichen Lebens, ist die im Titel dieser Arbeit gestellte rhetorische Frage, *ob denn das Leben ein Spiel sei*, durchaus berechtigt.

Ziel dieser mathematischen Arbeit soll es nun aber nicht sein, eine endgültige Antwort auf diese hochgradig philosophische Fragestellung zu geben, die eher als kritischer und zugleich mahnender Leitgedanke zu verstehen ist. Interessierte Leserinnen und Leser können vielleicht, angeregt durch manches Beispiel oder Paradoxon und gestützt auf die mathematische Theorie, dennoch ihre persönliche Antwort finden.

Vielmehr soll mit dieser Arbeit die Spieltheorie – hier besonders die sogenannte extensive Spielform – vorgestellt, und für die Umsetzung im Unterricht der Sekundarstufe II aufbereitet werden. Dies wird auf zwei Ebenen geschehen:

Zum einen soll das auf den ersten Blick scheinbar komplizierte Teilgebiet der Mathematik anhand einfacher, alltagsbezogener Beispiele entwickelt werden, zum anderen wird auch in einem speziellen didaktischen Teil zur Umsetzung von Spieltheorie im Unterricht und der damit einhergehenden Problematik Stellung genommen.

Diese Arbeit will also einen realitätsnahen und selbst für interessierte Laien verständlichen Zugang zum Themenbereich der extensiven Spielformen schaffen, der es so mancher Lehrperson schmackhaft macht, die eine oder andere Idee im regulären Mathematikunterricht oder im Wahlpflichtfach Mathematik umzusetzen. Es wird sich zeigen, dass Spieltheorie eine tolle Möglichkeit darstellt, Mathematik in die unmittelbare Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler zu transferieren. Manche der anfangs erwähnten Entscheidungssituationen des täglichen Lebens lassen sich nämlich wunderbar mit spieltheoretischen Methoden modellieren und analysieren.

Ausgehend von derartigen Problemstellungen soll Schritt für Schritt der Frage nachgegangen werden, wie sich die betreffenden Akteure in den jeweiligen Situationen *vernünftigerweise* verhalten sollen. So wie sich auch beim bereits erwähnten Schachspiel stets die Frage stellt, welche Zugfolge *vernünftig* ist und in weiterer Folge zum Sieg führt. *Ist also das Leben tatsächlich ein Spiel?*

1.2 Aufbau der Arbeit

Diese Arbeit gliedert sich in insgesamt sechs aufeinander aufbauende Abschnitte und einen siebten Abschnitt (Anhang) mit diversen Verzeichnissen und Zusatzinformationen.

Im zweiten Abschnitt sollen nach diesen ersten einleitenden Worten allgemeine Hintergrundinformationen zur Spieltheorie und deren historischer Entwicklung behandelt werden. In Abschnitt drei wird anschließend anhand von unterrichtsbezogenen Beispielen die mathematische Theorie der Spiele in strategischer Form eingeführt. Die hier vorgestellten zentralen Ergebnisse und Begriffe, wie etwa (gemischte) Strategie oder Nash-Gleichgewicht, werden im folgenden Hauptteil dieser Arbeit auf die extensive Spielform ausgeweitet.

In diesem vierten Abschnitt wird zunächst mittels eines graphentheoretischen Zugangs der Begriff des Spielbaums entwickelt, bevor anschließend erste Lösungskonzepte von Spielen in extensiver Form erarbeitet werden. Dabei wird das Lösungskonzept des Nash-Gleichgewichts stufenweise erweitert und verfeinert. Über Themen wie die Information, die Teilspielperfektheit oder die Refinements gelangt man schließlich zu Fragestellungen, die sich mit den Grenzen der Spieltheorie auseinandersetzen.

Der fünfte Abschnitt kann schließlich als didaktischer Kommentar verstanden werden. Hier wird die Umsetzung von Spieltheorie im Unterricht behandelt und auf den Lehrplanbezug, erforderliche Vorkenntnisse, aber auch auf didaktische Grenzen der Spieltheorie im Unterricht eingegangen. Zudem wird anhand von konkreten Möglichkeiten für den Einstieg im Unterricht der große Bereich der Modellierung thematisiert.

Zuletzt soll der sechste Abschnitt mit einer kurzen allgemeinen Schlussbetrachtung den inhaltlichen Kreis schließen.

1.3 Motivation und persönlicher Bezug

Bereits während meiner Schulzeit war ich ein großer Anhänger diverser Gesellschaftsspiele, deren Gewinnstrategien im Wesentlichen auf logischen Schlussfolgerungen beruhen. Ich hatte (und habe immer noch) eine Vorliebe für Knobeleyen und vorausschauende Denkprozesse, die etwa so aussehen können:

Würde ich diesen Zug machen, dann hätte mein Gegenüber drei Möglichkeiten zur Auswahl. Er würde sich vernünftigerweise für die erstere entscheiden, um meiner Falle zu entgehen, womit ich wiederum mit diesem unerwarteten Zug kontern könnte ...

Neben Spieleklassikern wie Mühle, Schach oder Poker (in der Texas Hold'em Variante) erweiterte sich dieses Spektrum während meines Studiums auch auf das in einer seiner Ausprägungen auf den bekannten Spieltheoretiker John Forbes Nash zurückgehende Strategiespiel Hex [Internetquelle 6].

Nach und nach begann ich mich nun mit der Biographie John F. Nashs auseinanderzusetzen und erhielt auf diesem Weg einen ersten Einblick in den Themenbereich der Spieltheorie. Ich entdeckte, dass sich Spieltheorie im Allgemeinen keineswegs nur mit Gesellschaftsspielen auseinandersetzt, sondern in allen Bereichen des Lebens eine Rolle spielt, wo Entscheidungen zu treffen sind.

Im Rahmen eines Fachseminars zur Stochastik konnte ich meine Kenntnisse im Bereich der Spieltheorie – insbesondere im Bereich der Matrixspiele – vertiefen und einen ersten kurzen Seminarvortrag zu diesem Thema halten. Als ich mich in einem weiteren Fachseminar zur Angewandten Mathematik über den Themenkomplex der Graphentheorie dem mathematischen Begriff des (Spiel-)baums näherte, war der Weg zur extensiven Spielform nicht mehr weit.

Nachdem sich schließlich in einem Gespräch mit Frau Dr. Hauer-Typpelt herausstellte, dass das Thema der extensiven Spielform in Bezug auf den Mathematikunterricht der Sekundarstufe II noch nicht explizit behandelt wurde, stand die Wahl des Themas dieser Diplomarbeit endgültig fest.

II. Hintergründe

2.1 Spieltheorie – Was ist das?

Der Begriff der *Spieltheorie*, der in diesem Kapitel etwas genauer vorgestellt werden soll, sorgt besonders unter mathematischen Laien oft für Verwirrung und Fehlinterpretationen. Es wird nämlich immer wieder die naheliegende Annahme getätigt, dass sich Spieltheorie vor allem mit klassischen Gesellschaftsspielen auseinandersetzt. Obwohl der Ursprung dieses jungen Teilgebiets der Mathematik tatsächlich in der wissenschaftlichen Analyse von Spielen wie Schach oder Poker zu finden ist [siehe Kapitel 2.2], geht Spieltheorie weit über diesen eingeschränkten Bereich hinaus.

Gegenstand der Spieltheorie sind im Allgemeinen strategische Entscheidungssituationen, die von Individuen getroffen werden. Demnach ist Spieltheorie ein spezieller Teil der Theorie von Entscheidungen. Um nun das Wesen spieltheoretischer Entscheidungssituationen charakterisieren zu können, muss also zunächst geklärt werden, welche Merkmale Entscheidungen kennzeichnen. Riechmann [2010, S. 1] erwähnt diesbezüglich die folgenden drei Punkte:

- In einer Entscheidungssituation hat der Entscheidungsträger mindestens zwei Handlungsmöglichkeiten zur freien Auswahl.
- Nur Wahlhandlungen, die bewusst getroffen werden, gelten als Entscheidungen.
- Nur solche Ergebnisse von Wahlhandlungen, die auch tatsächlich verwirklicht werden, gelten als Entscheidungsergebnis.

Aufbauend auf diese grundlegenden, intuitiv klaren Eigenschaften von Entscheidungen lassen sich nun klassische strategische Entscheidungssituationen der Spieltheorie wie folgt charakterisieren [Holler und Illing 2003, S. 1]:

- Das Ergebnis von Entscheidungen hängt von mehreren Entscheidungsträgern ab.
- Jeder Entscheidungsträger ist sich der gegenseitigen Abhängigkeit bewusst.
- Jeder Entscheidungsträger kann davon ausgehen, dass sich auch alle anderen Entscheidungsträger der Abhängigkeit bewusst sind.
- Jeder berücksichtigt bei seiner Entscheidung die ersten drei Punkte.

Betrachtet man diese Kriterien für Situationen mit denen sich die Spieltheorie auseinandersetzt, so wird deutlich, dass sich ein beinahe unüberschaubares Betätigungsfeld ergibt. Es handelt sich dabei vor allem um Entscheidungssituationen, in denen Interessenskonflikte oder Kooperationsprobleme oft vorprogrammiert sind. Mithilfe von abstrakten Konzepten und einem streng logischen Zugang versucht die Spieltheorie die beschriebenen Probleme zu analysieren und zu untersuchen, wie sich die einzelnen Entscheidungsträger verhalten sollen, um ihre jeweiligen Ziele zu erreichen.

Meist handelt es sich bei den diversen Entscheidungssituationen um soziale Konfliktsituationen mit mindestens zwei Beteiligten, die zumindest in gewissen Bereichen unterschiedliche Interessen haben. Aus diesem Grund liegt der etwa von Güth [1999, S. 1-2] oder Rieck [2010, S. 19] gezogene Schluss nahe, dass sich Spieltheorie mit sozialer Interaktion auseinandersetzt und somit Sozialwissenschaft ist. Spieltheorie ist nach Güth somit Teilwissenschaft aller Sozialwissenschaften und nicht bloß auf wirtschaftswissenschaftliche oder auf mathematisch abstrakte Bereiche begrenzt. Dennoch spielte (und spielt noch immer) die Wirtschaftswissenschaft die prägende Rolle für die Entwicklung und Anwendung der Spieltheorie. Dies belegen auch die zahlreichen Nobelpreise für Wirtschaftswissenschaften im Bereich der Spieltheorie. So wurden beispielsweise John Forbes Nash, Reinhard Selten und John Harsanyi 1994 bzw. Robert Aumann und Thomas Schelling 2005 für ihre grundlegenden Beiträge im Bereich der Spieltheorie ausgezeichnet. Einige dieser prägenden Figuren und besonders deren wertvolle Ergebnisse werden auch im Laufe dieser Arbeit immer wieder auftauchen.

Trotz dieser unbestrittenen Dominanz der Wirtschaftswissenschaften, spielt die Spieltheorie auch in anderen Bereichen eine nicht zu unterschätzende Rolle. Hier soll zunächst die Philosophie erwähnt werden. Trotz der mathematischen bzw. ökonomischen Ursprünge ist eine der grundlegenden Fragen der Spieltheorie, nämlich

jene nach der Rationalität des Individuums, eigentlich philosophischer Natur [Güth 1999, S. 2].

Auch in der Biologie ist der Stellenwert der Spieltheorie nicht zu unterschätzen. So untersucht etwa die sogenannte evolutionäre Spieltheorie das langfristige Verhalten großer Populationen. Derartige Untersuchungen machen auch vor den Phänomenen der menschlichen Population nicht halt. So hat sich beispielsweise erst im Jahr 2010 der renommierte Wiener Mathematiker Karl Sigmund mit der Rentabilität und Stabilität von Bestrafungssystemen auseinandergesetzt und dabei spieltheoretische begründet, weshalb sich in unserer Gesellschaft eine stabile Situation eingestellt hat, in der man für eine Institution zahlt (gemeint ist hier natürlich die Polizei), die Ausbeuter des Systems bestraft. [Internetquelle 4].

Die Anwendungsbreite der Spieltheorie ist also nahezu unbegrenzt. Manche der verschiedenen Bereiche werden im Laufe dieser Arbeit auch anhand unterschiedlicher Beispiele vorgestellt. Es ist geradezu eines der wesentlichsten Merkmale der Spieltheorie, dass sie die Mathematik mit vielen anderen Wissenschaften verbindet.

Der Vollständigkeit halber soll noch erwähnt werden, dass trotz der Fokussierung auf ökonomische Entscheidungssituationen auch klassische oder moderne Gesellschaftsspiele eine nicht zu unterschätzende Rolle spielen. Dies zeigt, wie bereits erwähnt, ein Blick auf die Entstehungsgeschichte dieses relativ neuen Teilgebiets der Mathematik [siehe Kapitel 2.2]. Aufgrund besonders einfacher Spielregeln lassen sich nämlich bei Spielen, wie dem später vorzustellenden *Schere-Stein-Papier*, relativ schnell spieltheoretische Erkenntnisse entwickeln, die in weiterer Form mathematisch verallgemeinert und auf andere Anwendungsbereiche expandiert werden. Die Spieltheorie ist in diesem Sinne also tatsächlich eine Theorie über Spiele, die aber eben nicht auf klassische Spiele beschränkt ist. Bereits John von Neumann wagte die folgende Behauptung über die Theorie der Gesellschaftsspiele und ihr großes Anwendungspotential:

„Es gibt wohl kaum eine Frage des täglichen Lebens, in die dieses Problem¹ nicht hineinspielt.“ [Rieck 2010, S. 19]

¹ Gemeint ist hier die Problematik der mathematischen Theorie der Gesellschaftsspiele.

2.2 Historische Entwicklung der Spieltheorie – Ein Überblick

Spiele in all ihren Ausprägungen beschäftigen die Menschheit schon seit ihren Anfängen. Man denke beispielsweise an die lange Tradition von Brettspielen wie Schach, das etwa im 6. Jahrhundert nach Christus in Indien oder China zur heute üblichen Form gelangte. Auch diverse Sportarten können durchaus als Form des Spiels verstanden werden.

Es ist also naheliegend, dass in der Entwicklungsgeschichte der Mathematik immer wieder Untersuchungen von klassischen Gesellschaftsspielen zu finden sind. So findet sich beispielsweise schon in einem frühen Brief von Bernoulli aus dem Jahr 1713 eine kurze Abhandlung über Spiele [Schlee 2004, S. 1]. Auch die Mathematiker Emile Borel (1921), Ernst Zermelo und Hugo Steinhaus lieferten bereits Beiträge zur Spieltheorie, bevor deren Grundlagen überhaupt formuliert wurden. Erwähnenswert sind an dieser Stelle auch die wertvollen Beiträge von Ökonomen wie Cournot (1838) oder Stackelberg (1934), die schon früh auf eine mögliche Korrespondenz zwischen Mathematik und Wirtschaftswissenschaften hinweisen. Zusammen mit ersten Anwendungen von spieltheoretischen Ergebnissen, die sich etwa in frühen Formen der Kriegssimulation, den sogenannten Kriegsspielen, finden, lässt sich also noch vor Ende der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts von einem breiten Nährboden für die Spieltheorie sprechen [Kun / Nasar 2002, S. XV] [Schlee 2004, S. 1-2].

Aufbauend auf all diesen Ergebnissen veröffentlichten im Jahr 1944 der ungarische Mathematiker John von Neumann und der Ökonom Oskar Morgenstern, der unter anderem in Wien lehrte, die Arbeit *Theory of Games and Economic Behavior*, die zurecht als Gründungswerk der Spieltheorie bezeichnet wird. Diese Arbeit setzt es sich zum Ziel fundamentale Fragen der Wirtschaftswissenschaften aus einem neuen, spieltheoretischen Blickwinkel zu behandeln. Die von John von Neumann bereits 1928 entwickelte mathematische Theorie über Gesellschaftsspiele wird dadurch in das Feld der Ökonomie transferiert und um eine Vielzahl neuer Erkenntnisse erweitert. Es entsteht somit eine allgemeine Theorie, die es erlaubt strategische Konfliktsituationen mittels mathematischen Methoden zu analysieren [Neumann / Mogenstern 2002, S. 1-2].

Trotz einigen Kritikern, die vor allem aufgrund nicht zu analysierender psychologischer Effekte in der Wirtschaft Probleme in der Verbindung von Mathematik und Wirtschaftswissenschaften sehen, bringen die Autoren bereits im Vorwort ihrer Arbeit folgende treffende Bemerkung: „*It is not that there exists any fundamental reason why mathematics should not be used in economics.*“ [Neumann / Morgenstern 2002, S. 3]

Neumann und Morgenstern erkennen also bereits in dieser frühen Stunde der Spieltheorie das große wissenschaftsübergreifende Potential der Spieltheorie, das zu einem wesentlichen Merkmal dieser jungen mathematischen Disziplin werden sollte.

Während Neumann und Morgenstern mit der Entwicklung der sogenannten Minimax-Lösung noch kein ganzheitliches Konzept für die Lösung strategischer Probleme geschaffen haben, gelang dem amerikanischen Mathematiker John Forbes Nash mit dem heute nach ihm benannten Nash-Lösungskonzept die Verallgemeinerung der Errungenschaften von Neumanns und Morgensterns. Humenberger und Ableitinger liefern diesbezüglich eine aus didaktischer Sicht recht übersichtliche Gegenüberstellung der beiden Lösungskonzepte [Humenberger / Ableitinger 2010]. Neben John von Neumann ist somit sicherlich John Forbes Nash die prägende Figur in der Entwicklung der Spieltheorie. Seit 1950 ist seine Idee des Nash-Equilibriums, welche er in seiner Dissertation festhielt, *die analytische Methode schlechthin* um Konfliktsituationen zu untersuchen [Kun / Nasar 2002, S. XVff].

Aufgrund der Tatsache, dass Nash für seine fundamentalen Leistungen auf dem Bereich der Spieltheorie 1994 der Nobelpreis verliehen wurde und auch wegen seiner Erkrankung an Schizophrenie, die er erst in den späten 80ern besiegen konnte, wurde Nash spätestens Mitte der 90er auch zunehmend zu einem Popstar unter den Mathematikern stilisiert. So kam beispielsweise 2002 der Film *A beautiful Mind* in die Kinos, der mit Russel Crowe in der Hauptrolle die Lebensgeschichte von John Forbes Nash in emotionaler Art und Weise wiedergibt [Schlee 2004, S. 2].

Wie bereits erwähnt wurden neben Nash auch Reinhard Selten und John Harsanyi im selben Jahr mit dem Nobelpreis ausgezeichnet. Der 1930 in Breslau geborene Selten weitete das von Nash entwickelte Gleichgewichtskonzept als erster auf sogenannte dynamische Spiele aus. Harsanyi, 1920 in Budapest geboren, wurde besonders aufgrund seiner Arbeiten auf dem Gebiet der Spiele mit imperfekter bzw. unvollständiger Information bekannt. Vom Nobelpreiskomitee wurde die Verbindung der drei Preisträger wie folgt festgehalten:

„The three laureates constitute a natural combination: Nash provided the foundations for the analysis, while Selten developed it with respect to dynamics, and Harsanyi with respect to incomplete information.“ [Kun / Nasar 2002, S. 3]

Die historische Entwicklung der Spieltheorie ist allerdings mit den Errungenschaften von Nash, Selten und Harsanyi keinesfalls an einem Endpunkt angelangt. Vielmehr potenzierten sich in den letzten Jahren und Jahrzehnten die neuen Erkenntnisse auf dem Gebiet der Spieltheorie, was auch an der zunehmenden Anzahl an Nobelpreisträgern oder der Verankerung in den verschiedensten Studienplänen sichtbar wird. Wie bereits erwähnt, ist eine große Bandbreite neuer Anwendungsgebiete, wie die Politik, die Biologie, oder auch die Computerwissenschaft hinzugekommen [Schlee 2004, S. 2].

Mit den ersten wissenschaftlichen Beiträgen zur Umsetzung von Spieltheorie im Unterricht und dem Erkennen der Möglichkeiten, die Spieltheorie in Hinblick auf realitätsnahen und fächerübergreifenden Unterricht bietet, ist in den letzten Jahren auch die Fachdidaktik der Mathematik als weiteres Anwendungsgebiet hinzu gekommen. Hier sind besonders die Arbeiten von Hans Humenberger [1998], Petra Hauer-Typelt [2009] und Christoph Ableitinger [2009] zu erwähnen. Da es besonders in diesem jungen Bereich noch großes Entwicklungspotential gibt – speziell in Hinblick auf dynamische Spiele – soll diese Arbeit genau an dieser Stelle ansetzen.

Die Entwicklung der Spieltheorie ist somit sicherlich noch lange nicht zu Ende. Speziell im Bereich der Fachdidaktik steht sie erst in den Startlöchern.

III. Theoretische Grundlagen – Spiele in strategischer Form

Bevor wir uns in Abschnitt vier mit dem zentralen Thema dieser Arbeit, den extensiven Spielformen, beschäftigen, geht es nun darum, einen ersten einführenden Zugang zum großen Themenbereich der Matrixspiele zu liefern. Anhand verschiedenster Beispiele, die für eine Umsetzung im Schulunterricht aufbereitet sind, sollen nun wichtige Begriffe definiert und erste zentrale Sätze bewiesen werden, auf deren Aussagen wir uns im Weiteren noch des Öfteren berufen werden.

3.1 *Gefangenendilemma einmal anders*

Beinahe jedes einführende Standardwerk zum Themenbereich der Spieltheorie beginnt mit dem auch abseits von Wirtschaft und Mathematik bekannten Beispiel des Gefangenendilemmas, das in seiner ursprünglichen Form auf Merrill Flood und Melvin Dresher zurückgeht und von Albert W. Tucker, seines Zeichens Doktorvater John Nashs, im Rahmen eines Seminars an der Stanford University erweitert wurde [Straffin 1993, S. 73].

Heute wird dieses prägende Problem der Spieltheorie meist folgendermaßen formuliert [Holler / Illing 1993, S. 1-2]:

Beispiel 3.1.1 *Gefangenendilemma*

Zwei Verdächtige werden getrennt voneinander von einem Anwalt verhört. Dieser weist jeden der beiden mutmaßlichen Verbrecher darauf hin, dass er zwei Möglichkeiten habe, nämlich das Verbrechen zu gestehen oder nicht zu gestehen. Sollten beide nicht gestehen, werden sie aus Mangel an Beweisen bloß wegen einiger kleinerer Delikte angeklagt. Sollten beide gestehen, werden sie gemeinsam angeklagt, jedoch würde aufgrund des Geständnisses nicht die Höchststrafe beantragt werden. Entscheidet sich aber einer der beiden für ein Geständnis, sein Partner jedoch nicht, so wird der Geständige nach kurzer Zeit freigelassen, während der andere die Höchststrafe bekommt.

Auch hier soll nun das Gefangenendilemma zum theoretischen Einstieg in die Thematik der Spiele in strategischer Form genutzt und somit die Tradition spieltheoretischer Standardwerke fortgeführt werden. Jedoch soll bereits bei diesem einführenden Beispiel gezeigt werden, wie einfach man derartige Modelle auch mit anderen Inhalten füllen und somit in andere Lebensbereiche transferieren kann. Auch in Hinblick auf den Einsatz von derartigen Problemen im Unterricht sind somit der Kreativität von Lehrpersonen und SchülerInnen keine Grenzen gesetzt. Doch zurück zum Gefangenendilemma, welches sich nun zu einem für den Unterricht aufbereiteten *Tischfußballdilemma* entwickeln wird:

Beispiel 3.1.2 Tischfußballdilemma

Schon seit geraumer Zeit fordern die 3A und die 3B Klasse einen Tischfußballautomaten. Der Direktor der Schule ist von dieser Idee jedoch nicht besonders begeistert. Als Kenner des Gefangenendilemmas beschließt er die beiden Klassen unabhängig voneinander zu befragen. Auf den Spuren des cleveren Anwalts im Gefangenendilemma, der durch das unabhängige Verhör auf ein Geständnis der beiden mutmaßlichen Verbrecher abzielt, will der Direktor auf die gleiche Art und Weise die Anschaffung des Tischfußballautomaten verhindern.

Die 3A und die 3B Klasse werden also unabhängig voneinander befragt, ob sie dem Kauf eines Tischfußballautomaten zustimmen. Bedingung der Schuldirektion ist jedoch, dass aus den Klassenkassen etwas zum Einkauf beigesteuert wird, nämlich insgesamt 100 €. Stimmen beide dem Erwerb des Automaten zu, trägt jede Klasse die Hälfte der Kosten, also 50 €. Wenn nur eine Klasse zustimmt, trägt diese Klasse die gesamten Kosten. Natürlich könnte in diesem Fall auch die andere Klasse den Tischfußballautomaten benutzen, da er ja direkt zwischen den beiden Klassen aufgestellt werden würde. Stimmt jedoch keine der beiden Klassen einem Kauf zu, so wird der Tischfußballautomat nicht erworben. Schlussendlich nimmt man noch an, dass die Zahlungsbereitschaft der Klassen jeweils 80€ beträgt. Es stellt sich nun die Frage, wie die einzelnen Klassen reagieren sollen. Soll einem Kauf zugestimmt werden, oder nicht?

Zur besseren Veranschaulichung des Tischfußballdilemmas wollen wir den Nutzen der einzelnen Handlungen für die beiden Klassen in einer Matrix darstellen. Die Einträge dieser Bimatrix sind hierbei die Differenz zwischen Zahlungsbereitschaft und Zahlungsbeitrag der einzelnen Klassen, wobei sich die erste Zahl auf Klasse A und die zweite auf Klasse B bezieht.²

		Klasse 3B	
		Kauf zustimmen (s_{21})	Nicht zustimmen (s_{22})
Klasse 3A	Kauf zustimmen (s_{11})	(30,30)	(-20,80)
	Nicht zustimmen(s_{12})	(80,-20)	(0,0)

Aus obiger Matrix wird deutlich, dass beide Klassen jeweils zwei *Strategien* zur Auswahl haben. Sie können entweder dem Kauf *zustimmen* (s_{i1}) oder aber *nicht zustimmen* (s_{i2}), wobei hier $i = 1$ für die Klasse 3A und $i = 2$ für die Klasse 3B stehen soll. Je nachdem für welche Vorgehensweise bzw. Strategie sich die einzelnen Klassen schließlich entscheiden, ergibt sich eine gewisse Strategiekombination $s = (s_1, s_2)$ als Ergebnis dieses *Spiels*.

Je nach Strategiekombination, oder nach Ausgang des Spiels, ergibt sich sowohl für die Klasse 3A, als auch für die Klasse 3B, ein individueller Nutzen, welcher durch den linken bzw. rechten Eintrag in obiger Matrix beschrieben wird. Stimmen beispielsweise beide dem Kauf des Fußballautomaten zu, so ergibt sich für beide Klassen ein Nutzen (= Auszahlung) von 30. Stimmt die Klasse 3A einem Kauf zu, die Parallelklasse jedoch nicht, so trägt die 3A die gesamten Kosten, was einem Nutzen von -20 entspricht. Während andererseits die 3B den Tischfußballautomaten nutzen kann, aber nichts zum Kauf beisteuern musste, was wiederum einem Nutzen von 80 entspricht.

Mit den beiden Klassen (= Spieler), den vorgegebenen Spielregeln, den einzelnen Strategien und den jeweiligen Auszahlungen haben wir nun alles, um dieses und auch andere Spiele formal beschreiben zu können.

² Dies gilt jedoch nur für die Fälle, in denen der Tischfußballautomat schlussendlich tatsächlich gekauft wird. Stimmen beide Klassen dem Kauf nicht zu, so beträgt der Nutzen für beide Klassen nicht Achtzig sondern Null, da in diesem Fall gewissermaßen der Status quo beibehalten wird.

Definition 3.1.3 *Spiel in strategischer Form*

Unter einem Spiel Γ in strategischer Form oder Normalform mit Auszahlung versteht man ein Tripel $(I, (S_i), (u_i)) = (I, S, u)$ mit $i \in I = 1, \dots, n$. Dabei ist I die endliche und nichtleere Menge der Spieler, S_i bezeichnet die endliche und nichtleere Strategiemenge des Spielers i und u_i beschreibt die Nutzen- bzw. Auszahlungsfunktion des Spielers i .

$$u_i: S \rightarrow \mathbb{R}$$

Wobei hier $S = \prod_{i=1}^n S_i$ die Menge der Strategiekombinationen aller Spieler ist.

Die Durchführung eines Spiels erfolgt folgendermaßen: Jeder Spieler i wählt, ohne die Entscheidungen seiner Mitspieler zu kennen, eine Strategie aus seiner Strategiemenge S_i . Die sich ergebende Strategiekombination hat in der Folge eine individuelle, präferenzgeordnete Auszahlung u_i zur Folge.

[siehe u.a. Schlee 2004, S. 9-10 oder Wiese 2002, S. 110]

3.2 Kaufen oder nicht kaufen – ein erstes Lösungskonzept

Nach dieser formalen Charakterisierung des eben eingeführten Tischfußballdilemmas wollen wir uns nun mit der Frage beschäftigen, wie sich die einzelnen Klassen verhalten sollen. Auf den ersten Blick scheint das beidseitige Zustimmung zum Kauf eines Tischfußballautomaten, also die Strategiekombination (s_{11}, s_{21}) , ein für beide Parteien gerechter und sehr guter Ausgang des Dilemmas zu sein. Beide Klassen hätten hier denselben Nutzen von 30. Bei genauer Betrachtung der Auszahlungsmatrix fällt dem Betrachter jedoch auf, dass sowohl die Klasse A durch einseitiges Abweichen von der Strategie, als auch die Klasse B durch dasselbe Verhalten einen höheren Nutzen erzielen könnte. Die Strategiekombinationen (s_{12}, s_{21}) und (s_{11}, s_{22}) ermöglichen im ersteren Fall für die Klasse A und im zweiten für die Klasse B eine Auszahlung von 80. Es haben also bei der zuerst angenommenen Lösung *kaufen / kaufen* beide Klassen Interesse daran, von der jeweiligen Strategie abzuweichen.

Betrachtet man nun zum besseren Verständnis das Problem nur aus Sicht der Klasse A, so zeigt sich, dass, egal wie sich die Klasse B entscheidet, die Strategie *nicht zustimmen* (s_{12}) stets den höheren Nutzen liefert. Stimmt die Klasse B einem Kauf zu (s_{21}) , so

liefert die Strategie (s_{12}), wie bereits erwähnt, eine Auszahlung von 80, während (s_{11}) mit einem Nutzen von 30 ungleich niedriger wäre. Ähnlich verhält es sich, falls die Klasse B einem Kauf *nicht zustimmen* würde (s_{22}). Die Strategie (s_{12}) hätte hier einen Nutzen von 0 zur Folge, während (s_{11}) mit der Auszahlung von -20 wiederum deutlich niedriger ausfallen würde.

Dieselben Ergebnisse liefert eine Analyse aus der Sicht der Klasse B. Man kann also an dieser Stelle festhalten, dass für beide Klassen die Strategien *nicht zustimmen* (s_{12}) und (s_{22}) die Strategien *zustimmen* (s_{11}) und (s_{21}) dominieren, was zur folgenden Definition führt:

Definition 3.2.1 Dominante (dominierende) Strategie

Eine reine Strategie s_i^* des Spielers i **dominiert** die Strategie s_i **strikt**, wenn gilt:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \quad \forall s_{-i} \text{ aus } S_{-i}.$$

Eine reine Strategie s_i^* des Spielers i **dominiert** die Strategie s_i **schwach**, wenn gilt:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}) \quad \forall s_{-i} \text{ aus } S_{-i}.$$

Wobei hier s_{-i} ein Strategietupel von Strategien aller Spieler bis auf i sei.³

[siehe u.a. Sieg 2000, S. 7]

Das Pendant zu den hier definierten dominanten Strategien sind die sogenannten *dominierten Strategien*. Im Gegensatz zu einer dominanten Strategie (aktiv) ist eine dominierte Strategie (passiv) eine Strategie, die von einer anderen Strategie dominiert wird [Internetquelle 5].

Im Tischfußballdilemma werden somit die Strategien (s_{11}) und (s_{21}) von den Strategien (s_{12}) und (s_{22}) dominiert. Aus dieser Erkenntnis lässt sich relativ einfach auf ein Lösungskonzept des Tischfußballdilemmas schließen. Sowohl für die Klasse A, als auch für die Klasse B hat nach Definition 3.2.1 die Wahl der dominanten Strategie die jeweils höchste Auszahlung zur Folge, egal für welche Strategie sich die Parallelklasse entscheidet. Die daraus resultierende Lösung dieses einführenden Spiels (s_{12}, s_{22}) ist durch die Dominanz der Entscheidungen äußerst stabil, da weder die Klasse A, noch die Klasse B durch einseitiges Abweichen der gewählten Strategie einen höheren Nutzen

³ An dieser Stelle ist zu beachten, dass sich diese Definition nur auf Strategiepaare anwenden lässt.

erzielen kann. Das so erhaltene Gleichgewicht in dominanter Strategie kann also als Lösung des Tischfußballdilemmas akzeptiert werden.

Entsprechend dieser Erkenntnisse kann das Prinzip formuliert werden, dass ein *vernünftiger* Spieler nie eine dominierte Strategie spielen sollte. (*Dominanzprinzip*). [Straffin 1993, S. 8]

Das Stichwort *vernünftig* bietet an dieser Stelle noch kurz Anlass zum Einhaken. Wie aus obiger Matrix recht schön hervorgeht, hätte die Strategiekombination zustimmen / zustimmen (s_{11}, s_{21}) für beide Klassen eine höhere Auszahlung zur Folge. Dennoch liefert der eben dargestellte, *vernünftige* Zugang über dominante Strategien die Lösung nicht zustimmen / nicht zustimmen. Der Plan der Schuldirektion geht also auf, denn die Klassen müssen tatsächlich auf den ersehnten Tischfußballautomaten verzichten und kommen über die Auszahlung von Null nicht hinaus. Diese Charakteristik eines Spiels wird auch als *pareto-ineffizient* bezeichnet [Holler / Illing 1993, S. 6-7].

Es könnte an dieser Stelle natürlich speziell im Unterricht der Einwand der SchülerInnen kommen, dass sich die Klassen ja im Vorhinein absprechen könnten. Jedoch würde die Ungewissheit, ob sich die jeweilige Parallelklasse tatsächlich an die Abmachung halten würde, wiederum zum Gleichgewicht in dominanten Strategien führen. Anders wäre dies natürlich im Falle einer bindenden Abmachung, wie etwa die beidseitige Unterzeichnung eines Vertrags. Derartige Situationen fallen jedoch in den Themenbereich der *kooperativen Spieltheorie*, während wir uns hier und im Folgenden mit der sogenannten *nicht kooperativen Spieltheorie* beschäftigen wollen.

Die auf den ersten Blick der Vernunft scheinbar widersprechende Lösung der gegebenen Spielsituation bietet natürlich im Unterricht einen großen Fundus für Diskussionen. Ableitinger und Hauer-Typelt machen in ihrem Aufsatz über Spieltheorie im Unterricht [Internetquelle 3, S. 4ff] anhand realitätsbezogener Beispiele auf moralische Werte, wie etwa das Einhalten von Absprachen und Abmachungen aufmerksam. Jedoch führt auch ein Blick auf die große Bandbreite der Anwendungsmöglichkeiten dieses einführenden Dilemmas zu weiteren Ansatzpunkten für den Unterricht. Das Tischfußballdilemma würde diesbezüglich gut in den Themenbereich der Bereitstellung von öffentlichen Gütern passen. Holler und Illing [1993, S. 8-9] bringen hier als Beispiel die Errichtung eines öffentlichen Parks, der analog zur Verweigerung des Tischfußballtisches nicht gebaut wird. Zurückzuführen sind derartige Phänomene auf die freie Nutzung öffentlicher Güter, das sogenannte *Free*

Rider Verhalten. Es bleiben wieder moralische Fragen: Ist es tatsächlich so, dass niemand etwas zur Gestaltung des öffentlichen Raums beitragen will, aber dennoch der freien Nutzung nicht abgeneigt ist? Vielleicht würden die Städte ohne spieltheoretische Überlegungen ganz anders aussehen. Wie würden sich Schüler und Schülerinnen verhalten?

3.3 *Das Nash–Gleichgewicht als weiteres Lösungskonzept*

Nachdem der Weg über die dominanten Strategien recht einfach zur Lösung des einführenden Beispiels geführt hat, soll nun untersucht werden, ob sich mittels Dominanzprinzip immer eine Lösung einer gegebenen Spielsituation finden lässt. Zu diesem Zweck bietet sich die Einführung eines weiteren Beispiels an:

Beispiel 3.3.1 *Schulfest*

Wieder rücken die 3A und die 3B Klasse ins Zentrum der Betrachtung. Während die 3A Klasse für das Schulfest den Verkauf von Pommes geplant hat, will die 3B Klasse mit dem Verkauf von Bratwürsteln die Klassenkassa etwas aufbessern. Es stellt sich nun die Frage, ob man angesichts der drohenden Konkurrenz tatsächlich ins Geschäft eintreten soll, oder doch ein Rückzieher von Vorteil wäre. Wollen wir zur besseren Veranschaulichung des Problems folgende Matrix betrachten:

		Klasse 3B	
		Bratwürstel (s_{21})	Keine Bratwürstel (s_{22})
Klasse 3A	Pommes (s_{11})	$(-30,-30)$	$(50,0)$
	Keine Pommes(s_{12})	$(0,50)$	$(0,0)$

Würden also beide Klassen ins Geschäft einsteigen, so hätte dies einen beidseitigen Verlust (30) zur Folge, da man sich gegenseitig um den Gewinn bringen würde. Tritt andererseits nur eine der beiden Klassen ins Geschäft ein, so hätte diese Klasse natürlich ein Monopol und würde deshalb auch mit einem Gewinn (50) aussteigen.

Entschließen sich jedoch beide Klassen dazu, nichts für ein gelungenes Fest beizusteuern, so sind beidseitig weder Ausgaben noch Einnahmen zu erwarten (0).

Im Gegensatz zum bereits besprochenen Gefangenens- bzw. in unserem Fall Tischfußballdilemma ist es hier auf den ersten Blick nicht mehr so einfach eine Lösung der Spielsituation zu finden. Verkauft nämlich beispielsweise die Klasse 3A Pommes (s_{11}), so ist es für die Klasse 3B besser, keine Bratwürsteln zu verkaufen (s_{22}). Verkauft andererseits die Klasse 3A keine Pommes (s_{12}), so ist man natürlich mit dem Verkauf von Bratwürsteln besser dran (s_{21}). Dasselbe Bild liefert eine Betrachtung der Situation aus Sicht der 3A Klasse: Der Verzicht auf den Verkauf von Pommes (s_{12}) ist die beste Antwort auf den Verkauf von Bratwürsteln (s_{21}), während (s_{11}) die beste Antwort auf (s_{22}) ist. Anders als beim Tischfußballdilemma gibt es also in dieser Entscheidungssituation für keine der beiden Parteien dominante Strategien.

Dennoch lassen sich auch bei unserem Beispiel 3.3.1 stabile Lösungen finden. Entscheidet sich nämlich die 3A Klasse für den Verkauf von Pommes, so hätte die Klasse 3B keinen Grund von der Strategie *keine Bratwürstel* abzusehen, wenn sie beispielsweise bereits über die Entscheidung der 3A Klasse informiert wäre. Verkauft andererseits die 3A Klasse keine Pommes, hat auch die 3B Klasse wiederum keinen Grund dazu von der Strategie *Bratwürstel* loszulassen. Dieselbe Situation zeigt sich auch bei einer umgekehrten Betrachtung der Situation. Keine der beiden Klassen kann sozusagen ihre Auszahlungen durch einseitige Abweichung von der gewählten Strategie erhöhen, solange die Parallelklasse bei der gewählten Strategie bleibt. Diese stabilen Zustände *Pommes / keine Bratwürsteln* (s_{11}, s_{22}) und *keine Pommes / Bratwürsteln* (s_{12}, s_{21}) werden, nach dem bereits in Abschnitt zwei erwähnten Mathematiker John Forbes Nash, als sogenannte Nash-Gleichgewichte bezeichnet.

Definition 3.3.2 Nash-Gleichgewicht

Eine Strategiekombination $s^ = (s_i^*, s_{-i}^*)$ heißt Nash-Gleichgewicht, wenn gilt:*

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*) \quad \forall i \in I \text{ und } \forall s_i \in S_i$$

[siehe u.a. Holler / Illing 1993, S. 60 oder Schlee 2004, S. 11]

Spielt also Spieler i , wie auch alle anderen Spieler, seine Gleichgewichtsstrategie s_i^* , so ist seine Auszahlung größer oder genau so groß, wie wenn er irgendeine andere Strategie aus seinem Strategiepools S_i wählen würde. Wie bereits anhand des vorherigen Beispiels veranschaulicht, kann im Zustand des Nash-Gleichgewichts keiner der Spieler seine Auszahlung durch einseitiges Abweichen verbessern. An dieser Stelle sei erwähnt, dass jedes mit dem im vorherigen Kapitel eingeführten Dominanzprinzip gefundene Gleichgewicht – somit auch die Lösung im Tischfußballdilemma – ein Nash-Gleichgewicht sein muss.

Nach dieser ersten Einführung des Begriffs des Nash-Gleichgewichts bleiben zweifelsohne noch einige Fragen ungeklärt, welche speziell im Schulunterricht nicht lange auf sich warten lassen werden. Im Folgenden soll also zum einen noch darauf eingegangen werden, wie sich Nash-Gleichgewichte finden lassen und zum anderen, warum Nash-Gleichgewichte überhaupt gespielt werden sollen.

3.4 *Wie lassen sich Nash-Gleichgewichte finden? Ein intuitiver Zugang*

Bei den beiden folgenden Fragestellungen ist es im Schulunterricht unumgänglich, die Schülerinnen und Schüler gewissermaßen selbst die Antworten entdecken zu lassen. Die Überhäufung mit Definitionen, Sätzen und Beweisen wäre hier, wie im gesamten Bereich der Spieltheorie, sicherlich fehl am Platz. Wollen wir unsere Suche nach einem Nash-Gleichgewicht also nicht auf starre Theorien und vorgefertigte Rezepte stützen, sondern einen eher intuitiven Zugang in den Vordergrund stellen.

Zu diesem Zweck soll das nun folgende Beispiel [3.4.2], bei dem es sich im Gegensatz zu den bisherigen Spielen um ein sogenanntes Nullsummenspiel handelt, analysiert werden.

Definition 3.4.1 Konstantsummenspiel

Ein Konstantsummenspiel ist ein Spiel mit einer Auszahlung, für die gilt:

$$\sum_{i \in I} u^i(s) = c \quad \forall s \in S \quad c \in \mathbb{R}$$

Ist $c = 0$, so spricht man von einem Nullsummenspiel. [siehe u.a. Schlee 2004, S. 27]

Beispiel 3.4.2

		Spieler 2		
Spieler 1		S ₂₁	S ₂₂	S ₂₃
	S ₁₁	(6,-6)	(2,2)	(-6,6)
	S ₁₂	(2,2)	(3,3)	(2,2)
	S ₁₃	(-6,6)	(2,2)	(6,-6)

Wie eben darauf hingewiesen, sollte im Schulunterricht der selbstentdeckende Zugang den Vorrang gegenüber formalen Annäherungen haben. Auch Hauer-Typpelt unterstreicht in ihrem Aufsatz über die Modellierung und Analyse realitätsnaher Entscheidungssituationen, wie wichtig es für die SchülerInnen ist Nash-Gleichgewichte an konkreten Beispielen zu suchen und zu analysieren. [Hauer-Typpelt 2009, S. 69-70]

Wie könnte nun ein möglicher Zugang zu Beispiel 3.5.2 aussehen? Man könnte etwa im Unterricht damit beginnen, die gegebene Entscheidungssituation paarweise durchzuspielen. Nach einigen Durchgängen sollen die SchülerInnen dann den Spielverlauf darstellen und die Wahl ihrer Strategien begründen und analysieren. Auf diese Art und Weise lassen sich sicherlich aufschlussreiche Erkenntnisse erzielen, die zu einem besseren Verständnis möglicher spieltheoretischer Lösungskonzepte führen.

Die aktive Teilnahme an gegebenen Spielsituationen stellt generell einen sehr sinnvollen Einstieg in den Themenbereich der Spieltheorie dar. Am sogenannten Guessing Game [Internetquelle 3, S. 1-2] wird deutlich, dass sich selbst für den Unterricht geeignete Spiele finden lassen, an denen eine ganze Schulklassse teilnehmen kann. In diesem Fall müssen die Spieler gleichzeitig und unabhängig voneinander eine natürliche Zahl von 2 bis 100 wählen. Als Sieger geht diejenige Person hervor, deren Zahl am nächsten bei zwei Drittel des Mittelwerts aller gewählten Zahlen liegt. Die Spieler müssen nun natürlich einschätzen, wo der Mittelwert liegen könnte, bzw. für welche Zahl sich wohl die Mitspieler entscheiden werden. Nach all diesen „taktischen“ Überlegungen soll nun die eigene Zahl möglichst geschickt gewählt werden. Derartige Spielsituationen eignen sich, kompetente Umsetzung und Aufarbeitung vorausgesetzt, recht gut für einen Einstieg in den Themenbereich der Spieltheorie. Für welche Zahl würden Sie sich entscheiden?

Doch zurück zu Beispiel 3.4.2. Neben dem paarweisen Durchspielen der gegebenen Situation, bietet sich auch eine logische Analyse der Strategiewahlen der einzelnen Mitspieler an. Beginnend bei einer unbestimmten Strategiekombination soll die weitere Verhaltensweise analysiert werden. Wir beginnen unser Beispiel mit der Kombination (s_{11}, s_{21}) . Spieler 2 steigt bei diesem Spielausgang mit der Auszahlung von -6 keinesfalls gut aus. Für ihn wäre also im nächsten Durchgang die Antwort s_{23} auf die Strategie s_{11} seines Kontrahenten die bessere Alternative. Doch auch Spieler 1 wird ahnen, dass Spieler 2 so denken könnte. Für ihn wäre deshalb s_{13} wiederum eine bessere Antwort auf die Strategie s_{23} von Spieler 2. Spielt jedoch Spieler 1 s_{13} , stünde Spieler 2 wiederum mit s_{21} besser da als sein Kontrahent. Womit wir im nächsten Schritt wieder bei der anfänglichen Strategiekombination (s_{11}, s_{21}) angekommen wären. Dieser instabile Kreislauf ließe sich nun endlos fortführen. Man wird mit diesen Überlegungen zu keinem Nash-Gleichgewicht kommen.

Startet man aber beispielsweise mit der Strategiekombination (s_{12}, s_{21}) , so würde Spieler 2 wohl im nächsten Schritt die Strategie s_{22} wählen, da dies immerhin eine Auszahlung von 3 zur Folge hätte. Geht Spieler 1 wiederum davon aus, dass Spieler 2 mit der Strategie s_{22} reagiert, so hat auch in diesem Fall die Strategie s_{12} die höchste Auszahlung zur Folge. Im nächsten Schritt besteht für keinen der beiden Spieler Interesse, einseitig von seiner Strategie abzuweichen. Die Spieler befinden sich also mit der Strategiekombination (s_{12}, s_{22}) im Nash-Gleichgewicht. Gefunden wurde diese Lösung des Beispiels 3.4.2 durch schrittweise logische Schlussfolgerung ausgehend von einer unbestimmten Strategiekombination. Schlussendlich findet sich das Nash-Gleichgewicht dadurch, dass man an einem Punkt angelangt, wo beide Kontrahenten wechselseitig jene Strategie als Antwort auf die gewählte Strategie des Gegenspielers wählen, welche die höchste Auszahlung zur Folge hat. Die beiden Spieler spielen als wechselseitig sogenannte *beste Antworten*. Dies führt uns zu einer anschaulichen äquivalenten Formulierung des Nash-Gleichgewichts.

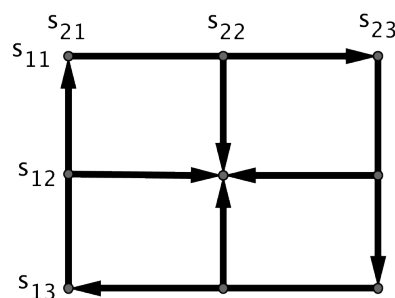


Abbildung 1: Argumentationszyklus in Beispiel 3.4.2.

Definition 3.4.3 Beste Antwort

Eine Strategie $\hat{s}_i$ des Spielers $i \in I$ heißt beste Antwort auf die Strategiekombination s_{-i} seiner Mitspieler, wenn sie von allen dem Spieler i zur Verfügung stehenden Strategien s_i die höchst mögliche Auszahlung u_i zur Folge hat.

$$u_i(\hat{s}_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}) \quad \forall i \text{ und } \forall s_i \in S_i$$

[siehe u.a. Schlee 2004, S. 20-21]

Satz 3.4.4

Eine Strategiekombination s^* aus S ist genau dann ein Nash-Gleichgewicht, wenn s^* dem wechselseitigen Spiel bester Antworten aller Spieler $i \in I$ entspricht.

Da die Aussage dieses Satzes durch die Überlegungen zum vorherigen Beispiel durchaus seine Berechtigung erhalten hat, soll an dieser Stelle auf eine exakte Führung des Beweises verzichtet werden. Eine etwas formale Version dieser äquivalenten Formulierung des Nash-Gleichgewichts mit Beweis findet sich etwa in Schlees Einführung in die Spieltheorie [Schlee 2004, S. 20-21].

Nash-Gleichgewichte lassen sich also mittels logischer Schlussfolgerung und der Suche nach wechselseitigen besten Antworten speziell in einfachen Matrixspielen meist recht schnell finden. Schwieriger wird dies, wenn es wie etwa in Beispiel 3.3.1 mehrere Nash-Gleichgewichte gibt. Bevor wir nun die Frage ins Zentrum rücken ob Nash-Gleichgewichte immer existieren müssen, sei noch darauf hingewiesen, dass es speziell im Schulunterricht keinesfalls genügt, Gleichgewichte zu finden. Je realitätsnaher die zu analysierenden Entscheidungssituationen sind, desto wichtiger wird es, sich mit der Frage auseinanderzusetzen, *was ein Nash-Gleichgewicht leisten kann* [Hauer-Typpe 2009, S. 70], bzw. welche Folgen derartige Konzepte haben. Im einführenden Tischfußballdilemma hätte der Erwerb des Tischfußballtisches für beide Klassen eine höhere Auszahlung zur Folge gehabt. Dennoch führt das Konzept des Nash-Gleichgewichts zu einer Ablehnung des Kaufs. Dieses auf den ersten Blick sonderbar anmutende Dilemma lässt sich auf viele Bereiche unserer Umwelt adaptieren. Sei es das

Wettrüsten zweier Supermächte, das Verhalten von wirtschaftlichen Konkurrenten, wie im eben eingeführten Schulfest-Beispiel, oder die Frage, ob sich Schwarzfahren mit öffentlichen Verkehrsmitteln auszahlt, wie sie von Ableitinger gestellt wird [Ableitinger 2009]. Die spieltheoretische Modellierung und mit ihr das eben betrachtete Lösungskonzept des Nash-Gleichgewichts können sehr viel leisten. Den SchülerInnen und Lehrenden sind somit in ihrer Kreativität keine Grenzen gesetzt. Es gibt sicherlich noch zahlreiche unentdeckte Verhaltensweisen und Zustände, welche auf das spieltheoretische Nash-Konzept zurückzuführen sind.

3.5 Auf dem Weg zu gemischten Strategien – Schere-Stein-Papier

Kaum ein anderes Spiel hält sich auf den Schulhöfen (und in den Publikationen zur Spieltheorie) schon so lange, wie Schere-Stein-Papier. Die Regeln zu erklären ist wohl an dieser Stelle reine Zeitverschwendung. Da besonders in unseren Breiten das bewährte Spiel immer öfters um den sogenannten Brunnen erweitert wird, wollen wir der Vollständigkeit halber zunächst *Schere-Stein-Papier-Brunnen* in einer Matrix erfassen und uns auf die Suche nach Gleichgewichten bzw. Lösungen begeben. Da es sich wiederum um ein Nullsummenspiel handelt, wird der Einfachheit halber nur die Auszahlung des Spielers 1 in die Matrix geschrieben. Das additive Inverse dieses Werts ergibt die Auszahlung für Spieler 2. In unserem Fall entspricht die Auszahlung von 1 einem Sieg für Spieler 1, die Auszahlung -1 einer Niederlage von Spieler 1 und die Auszahlung 0 einem Remis.

Beispiel 3.5.1 *Schere-Stein-Papier-Brunnen*

		Spieler 2			
		Schere	Stein	Papier	Brunnen
Spieler 1	Schere	0	-1	1	-1
	Stein	1	0	-1	-1
	Papier	-1	1	0	1
	Brunnen	1	1	-1	0

Vergleicht man bei dieser Matrixdarstellung die Strategien Brunnen und Stein, so sieht man sofort, dass Brunnen die Strategie Stein dominiert. Für beide Spieler ist es also nicht empfehlenswert, die Strategie Stein zu wählen. Streicht man deshalb die Strategie Stein aus der Matrix, erhält man eine 3x3 Matrix mit den Strategiemöglichkeiten Schere, Papier und Brunnen. Bei genauerer Betrachtung sieht man, dass diese Matrix genau der 3x3 Matrix des klassischen Schere-Stein-Papier Spiels entspricht, wenn man berücksichtigt, dass Stein durch Brunnen ersetzt wurde. Um nicht weiter unnötig Verwirrung zu stiften, soll nun aber mit der klassischen 3x3 Matrix des Schere-Stein-Papier Spiels weitergearbeitet werden:

Beispiel 3.5.2 Schere-Stein-Papier

		Spieler 2		
		Schere	Stein	Papier
Spieler 1	Schere	0	-1	1
	Stein	1	0	-1
	Papier	-1	1	0

Es stellt sich nun natürlich die Frage, welche Strategie man wählen soll, um das Spiel oder mehrere Spiele, zu gewinnen. Mit der zuvor kennengelernten Methode lässt sich kein Erfolg erzielen. Tatsächlich gibt es hier kein Gleichgewicht, in dem sich die Spieler jeweils für eine der drei Möglichkeiten entscheiden und dabei wechselseitig beste Antworten spielen. Somit scheint es auf den ersten Blick kein Nash-Gleichgewicht für diese Spielsituation zu geben.

Wie nähert man sich nun am besten diesem Problem? Jeder, der schon einmal Schere-Stein-Papier gespielt hat, weiß, dass man irgendwie zu erraten versucht, was sein Gegenüber als nächstes spielen könnte. Man versucht gewissermaßen irgendwelche Regelmäßigkeiten zu erkennen. Aber auch der Konkurrent will durchschauen, was man selbst unternimmt, bzw. ob man nach irgendeinem System agiert. Als Folge dessen ist es für das Gegenüber am schwierigsten, wenn man seine Entscheidungen möglichst zufällig wählt. Man kann sich diesbezüglich etwa mit einem Würfel abhelfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit man die einzelnen Strategien nun wählen soll, um eine

möglichst hohe Auszahlung zu erzielen, bzw. um seinem Gegenüber keinen Vorteil zu gewähren, wollen wir nun berechnen – das Ergebnis dürfte an dieser Stelle schon vorauszuahnen sein.

Nehmen wir an Spieler 1 spielt die Strategie Schere mit der Wahrscheinlichkeit von p , Stein mit der Wahrscheinlichkeit q und folglich Papier mit $1 - p - q$. Die erwarteten Auszahlungen u für Spieler 2, je nach Wahl seiner Strategie, lauten nun wie folgt:

$$\begin{aligned} u(\text{Schere}) &= p \cdot u(\text{Schere/Schere}) + q \cdot u(\text{Stein/Schere}) + (1 - p - q) \cdot u(\text{Papier/Schere}) \\ u(\text{Stein}) &= p \cdot u(\text{Schere/Stein}) + q \cdot u(\text{Stein/Stein}) + (1 - p - q) \cdot u(\text{Papier/Stein}) \\ u(\text{Papier}) &= p \cdot u(\text{Schere/Papier}) + q \cdot u(\text{Stein/Papier}) + (1 - p - q) \cdot u(\text{Papier/Papier}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(\text{Schere}) &= p \cdot 0 + q \cdot (-1) + (1 - p - q) \cdot 1 = 1 - p - 2q \\ u(\text{Stein}) &= p \cdot 1 + q \cdot 0 + (1 - p - q) \cdot (-1) = -1 + 2p + q \\ u(\text{Papier}) &= p \cdot (-1) + q \cdot 1 + (1 - p - q) \cdot 0 = -p + q \end{aligned}$$

Da Spieler 1 seinem Kontrahenten keinen Vorteil durch seine Strategiewahl gewähren will, somit die Auszahlung für Spieler 2 unabhängig von seiner Strategiewahl sein soll, setzt man nun die erwarteten Auszahlungen gleich:

$$\begin{aligned} u(\text{Schere}) &= u(\text{Stein}) = u(\text{Papier}) \\ 1 - p - 2q &= -1 + 2p + q = -p + q \end{aligned}$$

Löst man die Gleichungen nun nach den unbekannten p und q auf, so ergeben sich jeweils die Wahrscheinlichkeiten $1/3$ als Lösungen. Spielt also Spieler 1 seine Strategien zufällig mit einer Wahrscheinlichkeit von je einem Drittel, so ergibt sich für Spieler 2 immer derselbe Erwartungswert von 0 (leicht nachzuprüfen), egal mit welcher Strategie dieser agiert. Spieler 1 hat also eine sogenannte *gemischte Strategie* gefunden, die zur Folge hat, dass Spieler 2 durch keinerlei bestimmte Strategiewahl einen Vorteil erzielen kann. Analog kann die Situation vom Standpunkt des Gegenspielers betrachtet werden. Die gemischten Strategien mit den Wahrscheinlichkeiten von je einem Drittel bilden wechselseitige beste Antworten, womit wir wieder beim Begriff des Nash-Gleichgewichts angelangt wären [Fisher / Ryan 1992, S. 936-937].

Definition 3.5.3 Gemischte Strategie

Sei die endliche Strategiemenge $S_i = \{s_1^i, \dots, s_n^i\}$ eines Spielers $i \in I$ gegeben. Eine gemischte Strategie σ_i des Spielers i ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über der Strategiemenge S_i .

Da es sich bei der gemischten Strategie σ_i des Spielers i um eine Wahrscheinlichkeitsverteilung handelt, gilt für alle $s_j \in S_i$: $\sigma_i(s_j) \geq 0$ und $\sum_j \sigma_i(s_j) = 1$

Wird einem $s_k^i \in S_i$ die Wahrscheinlichkeit $\sigma_i(s_k^i) = 1$ zugeordnet, so spricht man von einer sogenannten reinen Strategie.

[siehe u.a. Wiese 2002, S. 142-143 oder Schlee 2004, S. 30]

Entsprechend der Definition 3.5.3 handelt es sich bei den Strategien, die in den Beispielen bis inklusive Kapitel 3.5 vorgekommen sind, um reine Strategien. Diese stellen, wie aus der Definition hervorgeht, jedoch nur einen Spezialfall der gemischten Strategien dar. Gemischte Strategien können in Beispiel 3.5.2 also folgendermaßen gedeutet werden:

Spieler 1 spielt jede der Strategien aus seiner Strategiemenge $S_1 = \{\text{Schere, Stein, Papier}\}$ mit den Wahrscheinlichkeiten $\sigma_1(\text{Schere}) = \sigma_1(\text{Stein}) = \sigma_1(\text{Papier}) = 1/3$

Ebenso verhält sich die Situation für Spieler 2. Wie bereits erwähnt, spielen die beiden Spieler somit wechselseitig beste Antworten. Die zuvor berechneten Wahrscheinlichkeitsverteilungen über den Strategiemengen der beiden Spieler und deren Kombination bilden also ein Nash-Gleichgewicht. Der Übersicht halber wollen wir an dieser Stelle die Definition eines Nash-Gleichgewichts für gemischte Strategien anführen, obwohl dies genau genommen nicht notwendig ist:

Definition 3.5.4 Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien

Eine Strategiekombination $\sigma^* = (\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*)$ von gemischten Strategien heißt Nash-Gleichgewicht, wenn für alle Spieler i und für alle σ_i aus dem Raum aller gemischten Strategien des Spielers i gilt:

$$u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*)$$

[siehe u.a. Sieg 2000, S. 16]

3.6 Wieder am Schulfest – Gemischte Strategien graphisch interpretiert

Mit Schere-Stein-Papier haben wir also unser erstes Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien kennengelernt. Nun wollen wir noch einmal zu unserem Beispiel 3.3.1 aufs Schulfest zurückkehren. Nachdem in dieser Entscheidungssituation bereits zwei Nash-Gleichgewichte zum Vorschein gekommen sind, stellt sich nun natürlich die Frage, ob es eventuell sogar noch weitere geben könnte.

		Klasse 3B	
Klasse 3A		Bratwürstel (s_{21})	Keine Bratwürstel (s_{22})
	Pommes (s_{11})	$(-30, -30)$	$(50, 0)$
	Keine Pommes (s_{12})	$(0, 50)$	$(0, 0)$

Trotz vieler Probleme und der ständigen Konkurrenzsituation zwischen der 3A und der 3B Klasse, kennen sich die Schüler und Schülerinnen natürlich sehr gut. Deshalb stellt man sich innerhalb der 3A Klasse die Frage, wie wahrscheinlich es überhaupt ist, dass es die 3B auf die Reihe bekommt, den Verkauf von Bratwürsteln in die Tat umzusetzen. Des Weiteren bleibt zu untersuchen, wie hoch der zu erwartende Gewinn in Abhängigkeit von der einzuschätzenden Wahrscheinlichkeit sein wird. Wie sieht der geschilderte Sachverhalt aus, wenn man davon ausgeht, dass die Klasse 3B mit der Wahrscheinlichkeit p Bratwürstel verkauft und somit mit der Gegenwahrscheinlichkeit $1 - p$ den Verkauf nicht zu Stande bringt?

Die 3A Klasse hätte je nach Wahl ihrer Strategie folgende Auszahlungen zu erwarten:

$$\text{Pommes:} \quad u_{3A}(s_{11}) = -30 \cdot p + 50 \cdot (1-p) = -80p + 50$$

$$\text{Keine Pommes:} \quad u_{3A}(s_{12}) = 0 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = 0$$

Die graphische Darstellung der beiden Auszahlungsfunktionen erlaubt weitere Interpretationen des gegebenen Sachverhalts:

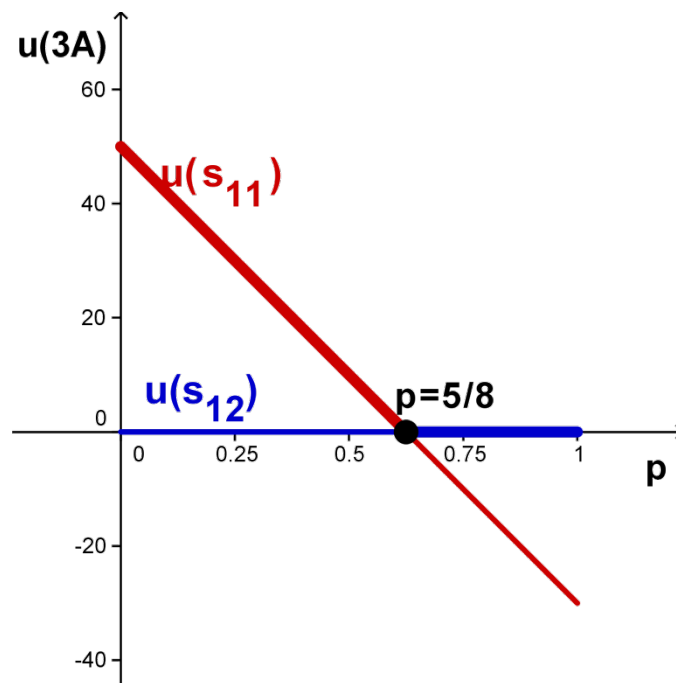


Abbildung 2: Die Auszahlungen der 3A Klasse

Wie man sieht, schneiden einander die beiden Geraden an der Stelle $p = \frac{5}{8}$. Würde also die 3B mit der Wahrscheinlichkeit von $p = \frac{5}{8}$ den Verkauf von Bratwürsteln antreten, wäre es für die Klasse 3A egal, ob sie Pommes verkaufen oder nicht. Dieser Schnittpunkt von $p = \frac{5}{8}$ ist also genau der Knackpunkt für die Einschätzung der 3B. Verkauft die 3B mit einer Wahrscheinlichkeit von $p < \frac{5}{8}$ Bratwürstel, so ist die Strategie *Pommes verkaufen* die bessere Antwort, während die Strategie *Pommes nicht verkaufen* bei einer Wahrscheinlichkeit von $p > \frac{5}{8}$ die höhere Auszahlung zur Folge hätte.

Auch dies soll angeregt durch Hauer-Typpelt [2009, S. 70-72] mittels der sogenannten Beste-Antwort-Linie wieder graphisch festgehalten werden:

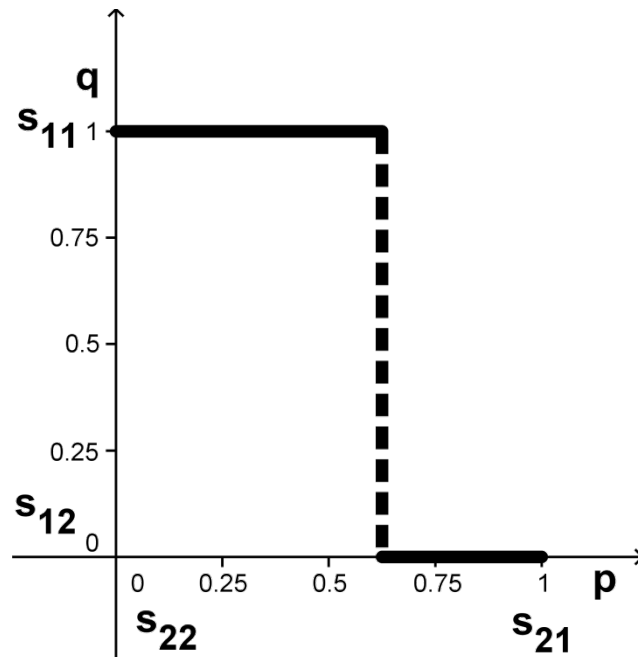


Abbildung 3: Beste-Antwort-Linie für die 3A Klasse

Bei Abbildung 3 wird auf der Ordinate die Wahrscheinlichkeit p aufgetragen, mit der sich die 3B zum Verkauf von Bratwürsteln entscheidet, während auf der Abszisse die Wahrscheinlichkeit q angegeben wird, mit der sich die 3A Klasse zum Verkauf von Pommes entschließt. Ist $p < \frac{5}{8}$, so ist der Verkauf von Pommes (s_{11}) die beste Antwort der 3A, während für $p > \frac{5}{8}$ der Entschluss, keine Pommes zu verkaufen (s_{12}) die beste Antwort ist. In $p = \frac{5}{8}$ ist es egal, für welche der beiden Strategien sich die 3A entscheidet. Dies wird durch die gestrichelte Linie in diesem Punkt deutlich.

Natürlich lässt sich die Problematik des Schulfests auch aus der Sicht der 3B Klasse analog analysieren. Entscheidet sich die 3A Klasse mit der Wahrscheinlichkeit von q für den Verkauf von Pommes (s_{11}) und mit der Wahrscheinlichkeit von $1 - q$ dafür, keine Pommes zu verkaufen (s_{12}), hätte die 3B Klasse folgende Auszahlungen zu erwarten:

$$\begin{aligned} \text{Bratwürstel:} \quad u_{3B}(s_{21}) &= -30 \cdot q + 50 \cdot (1 - q) &= -80q + 50 \\ \text{Keine Bratwürstel:} \quad u_{3B}(s_{22}) &= 0 \cdot q + 0 \cdot (1 - q) &= 0 \end{aligned}$$

Es zeigt sich, wie erwartet, dasselbe Bild wie bei der vorherigen Sichtweise. Würde die 3A Klasse mit einer Wahrscheinlichkeit von $q = \frac{5}{8}$ Pommes verkaufen, wäre die erwartete Auszahlung der 3B unabhängig von der Wahl der Strategie. Auch die jeweiligen besten Antworten verhalten sich genauso wie aus Sicht der 3A. Wir wollen deshalb die Situation am Schulfest gleich mit folgender Graphik veranschaulichen:

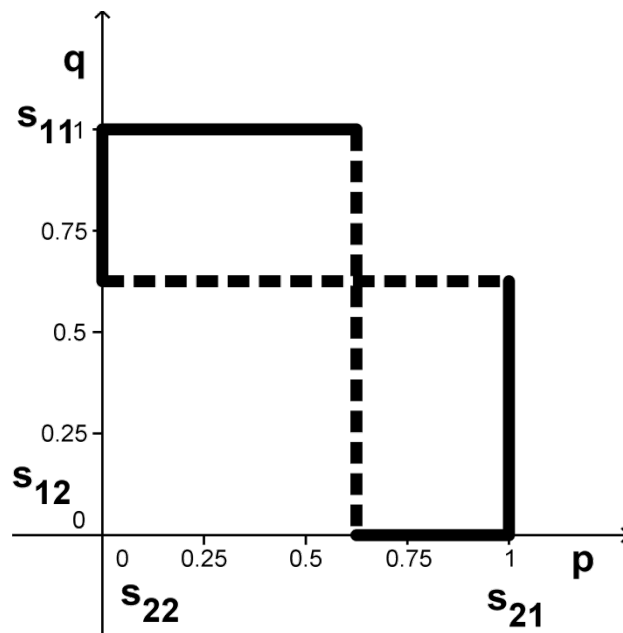


Abbildung 4: Beste-Antwort-Linien beider Klassen

Bei Betrachtung von Abbildung 4 lassen sich drei Schnittpunkte zwischen den Beste-Antwort-Linien der beiden Klassen erkennen. Der Schnittpunkte $(p,q) = (0,1)$ und $(p,q) = (1,0)$ entsprechen hierbei den Nash-Gleichgewichten in reinen Strategien *Pommes / keine Bratwürstel* (s_{11}/s_{22}) und *keine Pommes / Bratwürstel* (s_{12}/s_{21}).

Der Schnittpunkt in $(p,q) = (\frac{5}{8}, \frac{5}{8})$ entspricht hingegen einem Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien. Wie auch in einem Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien hat auch hier keine der beiden Klassen einen Anreiz, einseitig von der gewählten gemischten Strategie abzuweichen. Im Gegensatz zu einem Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien, würde sich jedoch die Auszahlung bei Änderung der Strategie einer einzelnen Klasse nicht verschlechtern, sondern gleich bleiben. Weicht beispielsweise die 3B Klasse von ihrer gemischten Strategie $p = \frac{5}{8}$ ab, so bewegt sie sich auf ihrer besten Antwort Linie, was bedeutet, dass sich die Auszahlung weder verbessern, noch verschlechtern würde.

Bereits in Kapitel 3.5 wurde diskutiert, dass sich die Klassen in diesem Fall nicht für eine bestimmte Strategie entscheiden, sondern ihre Strategien mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit, in diesem Fall $\frac{5}{8}$ spielen. Um jedoch Strategien mit Wahrscheinlichkeiten zu wählen, bedarf es irgendwelcher Zufallsmechanismen, wie Würfeln, Münzen, oder Ähnlichem. Dies bringt speziell bei der Interpretation verschiedene Schwierigkeiten mit sich. So stellen beispielsweise Holler und Illing die Frage, ob es denn überhaupt sinnvoll sei, davon auszugehen, dass rationale Spieler ihre Entscheidungen mit Hilfe von Zufallsmechanismen treffen [Holler / Illing 1993, S. 73]. Auch in Beispiel 3.3.1, bzw. in größeren wirtschaftlichen Entscheidungssituationen stellt sich dieses Problem. Kaum ein Konzern wird die Frage nach einem möglichen Markteintritt von einem Würfel abhängig machen. Dem kann natürlich nicht widersprochen werden, denn eine vom Zufall abhängige Strategie kann keinesfalls als Empfehlung für ein einmaliges Spiel gelten. Wirksam wird dieses Lösungskonzept erst bei wiederholten Spielen. Wenden nämlich die einzelnen Spieler auf Dauer ihre gemischte Strategie an, so pendelt sich die Auszahlung mit der Zeit bei dem zu erwartenden Wert ein. In den beiden Beispielen zu gemischten Strategien wäre dies jeweils die Auszahlung Null [Ableitinger 2009, S.117-120].

Die Wahl eines Lösungskonzepts, das sich auf das gemischte Nash-Gleichgewicht stützt, entspricht demnach auch einem gewissen Sicherheitsdenken. Man gibt dem oder den Kontrahenten keine Chance sich zu verbessern. Wie aus vorheriger Graphik hervorgeht und bereits erwähnt wurde, kann nämlich durch einseitiges Abweichen vom Gleichgewicht keine Erhöhung der Auszahlung erzielt werden. Das Sicherheitskonzept des Nash-Gleichgewichts wird auch im anfänglichen Beispiel des Tischfußballdilemmas [3.1.2] deutlich. Das Gleichgewicht in dominanten Strategien, das dem Nash-Gleichgewicht entspricht, ist nämlich keinesfalls der optimale Ausgang für beide Spieler. Handelt es sich also tatsächlich um ein vernünftiges Lösungskonzept?

Zusammen mit der Frage, ob man überhaupt stets von sogenannten *rationalen* Spielern ausgehen kann [Merö 2000], werden an dieser Stelle erste Grenzen der Spieltheorie deutlich. Inwiefern man diese Probleme mathematisch lösen, oder eben nicht lösen kann, bietet sicherlich auch Gesprächsstoff für spannende Diskussionen im Schulunterricht. Doch auf die Grenzen und Möglichkeiten der Spieltheorie wird im Verlauf dieser Arbeit nochmals genauer eingegangen werden. Jedenfalls ist das

Nash-Gleichgewicht unbestritten ein sehr mächtiges Werkzeug spieltheoretischer Überlegungen und wie Ken Binmore treffend meint:

„However, people don't always behave irrationally, so it isn't a waste of time to study what happens, when people put on their thinking caps.“ [Binmore 2007, S. 2]

3.7 Zur Existenz von Nash-Gleichgewichten

Bevor nun die erworbenen Kenntnisse auf die extensive Spielform angewendet werden, soll noch kurz die Frage nach der Existenz von Nash-Gleichgewichten behandelt werden.

Während etwa im gerade analysierten Beispiel 3.3.1 drei Nash-Gleichgewichte aufgetreten sind, haben wir bei Untersuchung des Schere-Stein-Papier Beispiels [3.5.2] festgestellt, dass es durchaus Spiele gibt, in denen kein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien auftreten muss. Dennoch ist auch bei Schere-Stein-Papier mittels Anwendung gemischter Strategien ein Nash-Gleichgewicht zum Vorschein gekommen. Es bleibt zu klären, ob tatsächlich jedes Spiel zumindest ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien aufweist. Die Antwort auf diese Frage geht in ihrer Komplexität zweifelsohne über die Grenzen der Spieltheorie im Mathematikunterricht hinaus, dennoch soll sie nun kurz erörtert werden.

Bereits 1951 bewies John Forbes Nash, dass in jedem Spiel mit endlich vielen Spielern und endlich vielen Strategien mindestens ein Nash-Gleichgewicht existieren muss [Sieg 2000, S. 20]. Die etwas allgemeinere Formulierung dieses Satzes lautet heute üblicherweise wie folgt:

Satz 3.7.1 Existenz eines Nash-Gleichgewichts

Sei $\Gamma(I, S, u)$ ein Spiel mit folgenden Eigenschaften:

- Die Strategiemenge $S_i \subset \mathbb{R}^m$ ist kompakt und konvex für alle Spieler $i \in I$.*
- Die Auszahlungsfunktion u_i für alle Spieler $i \in I$ sei stetig und beschränkt und für festes $s_{-i} \in S_{-i}$ sei sie quasi-konkav in $s_i \in S_i$.*

Dann existiert für dieses Spiel Γ ein Nash-Gleichgewicht. [siehe u.a. Schlee 2004, S. 33]

Bevor nun auf die Beweisführung dieses zentralen Satzes der Spieltheorie eingegangen wird, sollen die im Satz gestellten Begriffe und Bedingungen anhand des bereits analysierten Spiels Schere-Stein-Papier überprüft und veranschaulicht werden. Beginnen wir mit den Bedingungen, die an die Strategiemenge gestellt werden: Zunächst wird verlangt, dass die Menge S_i konvex sein muss. Graphisch bedeutet dies, dass für zwei beliebige Punkte der Menge auch deren Verbindungsstrecke in der Menge liegen muss [Schumacher 2002, S. 39]. Im Spiel Schere-Stein-Papier lässt sich beispielsweise die reine Strategie *Schere* entsprechend der Definition von gemischten Strategien mit dem Vektor $(1,0,0)$ identifizieren. Dies soll bedeuten, dass die Strategie *Schere* mit der Wahrscheinlichkeit 1, *Stein* und *Papier* jeweils mit Wahrscheinlichkeit 0 angenommen wird. Entsprechend dazu lässt sich *Stein* mit $(0,1,0)$ und *Papier* mit $(0,0,1)$ identifizieren. Diese drei Vektoren bilden ein Dreieck im $\mathbb{R}^3$. Da neben den reinen Strategien auch jede beliebige gemischte Strategie angenommen werden kann, besteht dieses Dreieck nicht bloß aus seinen Eckpunkten, sondern ist zur Gänze mit den Werten der gemischten Strategien gefüllt. Die Strategiemenge eines Spielers i im Spiel Schere-Stein-Papier lässt sich also mit einer dreieckigen Fläche im $\mathbb{R}^3$ identifizieren. Anschaulich ist klar, dass die Bedingung der Konvexität gegeben ist. Für je zwei beliebige Punkte im Dreieck liegt stets auch deren Verbindungsstrecke im Dreieck.

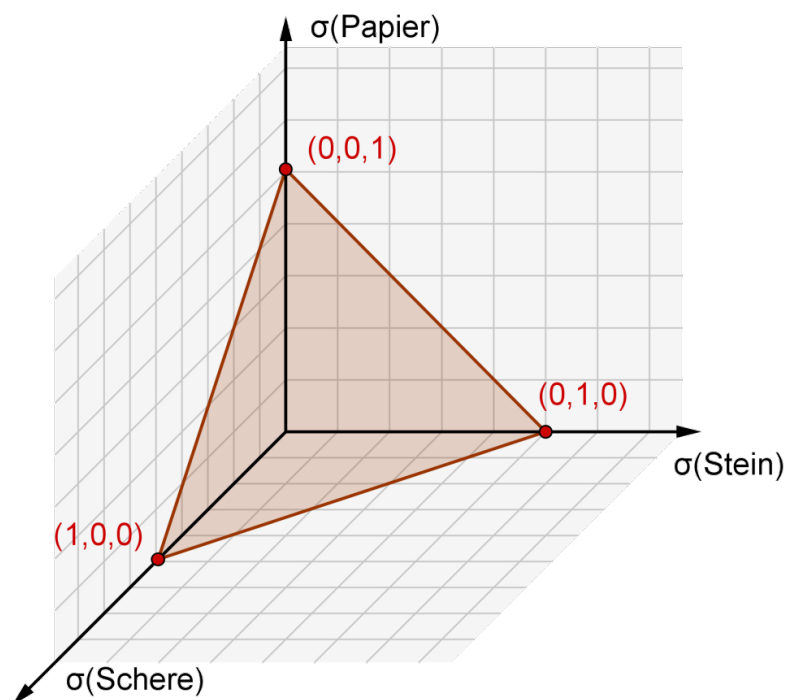


Abbildung 5: Strategiedreieck

Es ist zudem klar, dass das in Abbildung 5 dargestellte Dreieck auch kompakt sein muss. Kompakt heißt zum einen, dass das Dreieck all seine Randpunkte enthalten muss: Dies ist klar, da sich etwa auf der Hypotenuse des Dreiecks sämtliche Strategien befinden, bei denen Papier mit der Wahrscheinlichkeit Null gespielt wird, wie etwa $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ oder $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$. Da all diese Kombination mögliche gemischte Strategien darstellen, gehören also in unserem Beispiel die Randpunkte zur Strategiemenge. Zum anderen muss für die Gewährleistung der Kompaktheit eine Schranke existieren. Eine mögliche Schranke entspricht in diesem Fall genau dem Rand des Dreiecks, also jenen drei Strecken, in denen jeweils Schere, Stein oder Papier Null ist [Königsberger 2004, S. 89].

Nachdem die an die Strategiemenge gestellten Bedingungen überprüft sind wollen wir uns nun der Auszahlungsfunktion zuwenden: Diese soll zunächst einmal stetig sein. Wie man etwa an Beispiel 3.3.1 und der dazugehörigen Abbildung 2 sieht, ist hier die Auszahlungsfunktion bei Erweiterung des Strategieraums auf gemischte Strategien eine lineare Funktion und somit stetig. Auch wenn bei Schere-Stein-Papier durch das Hinzukommen einer dritten Strategie die Auszahlungsfunktion nicht mehr so einfach zu deuten ist, handelt es sich immer noch um eine stetige Funktion.

Wie auch die Strategiemenge, soll auch die Auszahlungsfunktion beschränkt sein. Dies lässt sich dadurch gewährleisten, dass einerseits die Auszahlung an den Eckpunkten die Werte 1 bzw. -1 nicht überschreitet und andererseits die Eckpunkte aufgrund der Beschränktheit der Strategiemenge nicht überschritten werden können. Wir haben also beim Spiel Schere-Stein-Papier eine stetige Auszahlungsfunktion, deren Funktionswerte 1 bzw. -1 nicht über- bzw. unterschreiten können. Auch die verlangte Quasikonkavität der Auszahlungsfunktion ist beim Spiel Schere-Stein-Papier gegeben, verlässt aber den Bereich der Anschaulichkeit. Erläuterungen zur vereinfachten Form der sogenannten strikten Quasikonkavität finden sich bei Holler und Illing [1993, S. 67-70], eine genaue Charakterisierung findet sich etwa bei Schlee [2004, S. 190-191].

Nachdem nun alle notwendigen Bedingungen zur Existenz eines Nash-Gleichgewichts erfüllt sind, muss also entsprechend der Aussage in Satz 3.7.1 das Spiel Schere-Stein-Papier ein Nash-Gleichgewicht besitzen. Dass dies tatsächlich der Fall ist, wurde bereits im vorherigen Kapitel gezeigt. Analog lässt sich zeigen, dass auch die anderen vorgestellten Spiele die notwendigen Bedingungen des Existenz-Satzes erfüllen.

Zum Beweis von Satz 3.7.1

Auf eine exakte Führung des Beweises sei an dieser Stelle verzichtet. Eine übersichtliche, vollständige Aufschlüsselung des Existenzbeweises findet sich unter anderem bei Schlee [2004, S.33ff]. Nichtsdestotrotz soll zumindest auf die Grundidee des Beweises eingegangen werden:

In Satz 3.4.4. haben wir formuliert, dass eine Strategiekombination s^* aus S genau dann ein Nash-Gleichgewicht ist, wenn s^* dem wechselseitigen Spiel bester Antworten aller Spieler I entspricht. Das Spiel der besten Antwort für einen Spieler i lässt sich als Abbildung r_i verstehen:

$$r_i: S_{-i} \rightarrow B(S_i)$$
$$r_i(s_{-i}) := \{s_i \in S_i \mid u_i(s_i, s_{-i}) = \max u_i(\hat{s}_i, s_{-i})\}$$

Folglich lässt sich die Abbildung der wechselseitigen besten Antwort für alle Spieler $i \in I$ wie folgt darstellen:

$$r: S \rightarrow \prod_{i=1}^m B(S_i)$$
$$r(s) := (r_1(s_{-1}), \dots, r_m(s_{-m}))$$

Eine Strategiekombination s^* aus S ist somit nach Satz 3.4.4. genau dann ein Nash-Gleichgewicht, wenn s^* aus $r(s^*)$ ist. Um Satz 3.7.1 zu beweisen muss man also zeigen, dass die Abbildung $r(s)$ unter den gegebenen Bedingungen einen Fixpunkt hat.

Um dies exakt zu zeigen bietet sich der Fixpunktsatz von Kakutani [Schlee 2004, S. 192] an. Dessen Beweis bedarf jedoch einer Erweiterung des Stetigkeitsbegriffs auf sogenannte halbstetige Funktionen, was wir uns an dieser Stelle ersparen wollen. Nichts desto trotz lässt sich mit diesen Mitteln der höheren Analysis die postulierte Existenz eines Nash-Gleichgewichts und somit eines der zentralen Ergebnisse der Spieltheorie beweisen.

IV. Spiele in extensiver Form

In all den bisher betrachteten Entscheidungssituationen mussten sich die jeweiligen Spieler gleichzeitig und nur einmal für eine der zur Verfügung stehenden Strategien entscheiden. Derartige Spielsituationen bilden aber im großen Spektrum der Spieltheorie eher die Ausnahme. Meist entscheiden sich die Spieler mehrmals und nacheinander. Man denke nur an die klassischen Gesellschaftsspiele wie Schach oder Mühle, wo ein Spiel erst nach einer Vielzahl von einzelnen Spielzügen endet. Eine Strategie besteht dann nicht mehr bloß aus einer einzigen Entscheidung, sondern aus der Festlegung einer bestimmten Folge von Spielzügen, wobei diese meist in Abhängigkeit zu den unmittelbar vorausgehenden Aktionen der Kontrahenten stehen. Diese derartigen Spielsituationen, in denen nun die zeitliche Struktur der einzelnen Entscheidungen eine wesentliche Rolle spielt, werden unter dem Begriff der *dynamischen Spiele* zusammengefasst [siehe u.a. Wiese 2002, S. 213 – 214].

Während sich für die bisherigen Spiele die Darstellungsform in einer Matrix als ideal herausgestellt hat, bringt sie im Bereich der dynamischen Spiele ihre Probleme mit sich. Will man die dynamische Struktur eines komplexeren Spiels vollständig erfassen, hat sich die Erfassung durch einen *Spielbaum* als günstig herausgestellt. Diese Darstellungsweise dynamischer Spiele bezeichnet man als *extensive* oder *sequentielle* Form [siehe u.a. Holler / Illing 1993, S. 13 - 14].

Im Folgenden wollen wir uns mit diesen dynamischen Spielen in extensiver Form auseinandersetzen und zunächst mit einem kurzen Exkurs ins Reich der Graphentheorie den theoretischen Unterbau festigen.

4.1 Bäume die von oben wachsen – Grundlagen der extensiven Form

Bäume sind ja bekanntlich jene vollkommenen Gebilde der Natur, die sich aus ihrer Wurzel in der Erde den Weg in den Himmel bahnen. Bäume im mathematischen Sinn nehmen hingegen meist den umgekehrten Weg, sie wachsen mehr oder weniger von oben nach unten. Im Rahmen des Mathematikunterrichts der AHS Oberstufe lernen die meisten Schüler und Schülerinnen sogenannte Baumdiagramme meist in der sechsten oder spätestens siebten Klasse im großen Themenkomplex der

Wahrscheinlichkeitstheorie erstmals kennen [Internetquelle 1]. Dabei liefert diese Darstellungsform einen recht guten Überblick über das Ziehen geordneter oder ungeordneter Stichproben mit oder ohne Zurücklegen. Das Baumdiagramm dient also meist zur übersichtlichen Darstellung mathematischer Probleme [Götz 2004, S. 249]. Auch im Bereich der Spieltheorie dient der Spielbaum zur Darstellung und strukturellen Erfassung von unterschiedlichen Problemstellungen. Hier wollen wir uns den Begrifflichkeiten jedoch zunächst etwas formaler nähern:

Definition 4.1.1 Graph

Ein Graph $G = (V, E)$ ist ein Tupel bestehend aus einer nichtleeren Knotenmenge V , einer Kantenmenge E und einer Abbildung $w: E \rightarrow V \times V$ die jedem Element aus E genau ein Knotenpaar aus V zuordnet. Die Elemente von V heißen Knoten, jene von E Kanten.⁴ [Domschke 2005, S. 65]

Graphen werden meist anschaulich mittels zweidimensionaler Diagramme dargestellt [siehe Abbildung 6a und 6b] und können unterschiedlichste Ausprägungen annehmen. So kann es durchaus vorkommen, dass der Graph gewisse Lücken aufweist und somit nicht zusammenhängend ist oder sogenannte Schleifen enthält. Wir wollen diese beiden anschaulichen Fälle nicht mathematisch exakt definieren [siehe u.a. Lovasz 2005, S. 163-166], sondern anhand der folgenden Abbildung verdeutlichen:

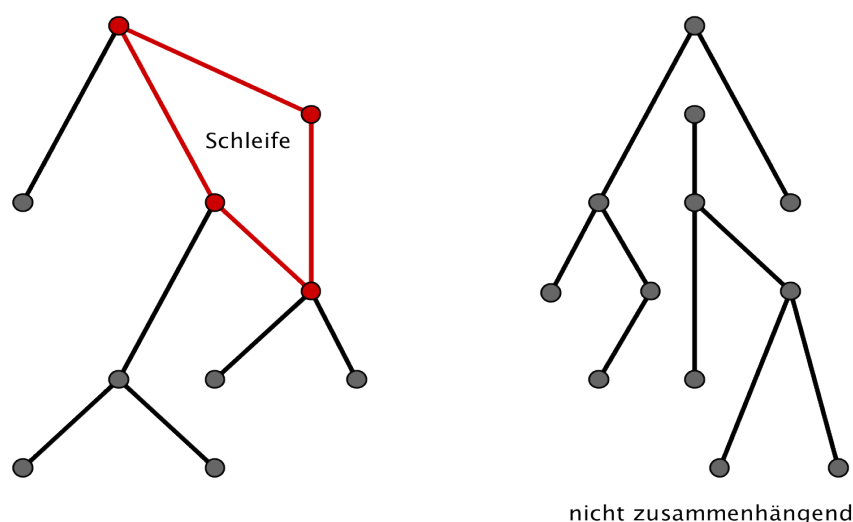


Abbildung 6a: Spezialfälle von Graphen

⁴ Es müssen jedoch nicht notwendigerweise alle Elemente von V miteinander verbunden werden.

Die beiden eben vorgestellten Spezialfälle eines Graphen führen direkt zu den grundlegenden Eigenschaften eines mathematischen Baums, die in folgender Definition festgehalten werden:

Definition 4.1.2 Baum

Ein Graph G wird als Baum bezeichnet, wenn er zusammenhängend ist und keine Schleife enthält. Der Anfangs- oder Wurzelknoten wird in der Folge mit α bezeichnet.

[Lovasz 2005, S. 177]

Diese beiden charakteristischen Eigenschaften eines Baumes wirken entgegengesetzt. Das heißt, Bäume können einerseits *nicht zu viele* und andererseits *nicht zu wenige* Kanten besitzen. Würde man also bei den ersten drei Bäumen in Abbildung 6b eine beliebige Kante entfernen, wäre der daraus resultierende Graph nicht mehr zusammenhängend und somit kein Baum mehr. Andererseits würde das Hinzufügen einer weiteren Kante zwangsweise zu einer Schleife führen, was ebenso das Ende des mathematischen Baums bedeuten würde. Der folgende Satz ist also intuitiv klar:

Satz 4.1.3 Charakteristik von Bäumen

Ein Graph G ist genau dann ein Baum, wenn er zusammenhängend ist, jedoch die Wegnahme einer beliebigen Kante zu einem unzusammenhängenden Graphen führt.

Ein Graph G ist genau dann ein Baum, wenn er keine Schleifen enthält, jedoch die Hinzufügung einer beliebigen Kante eine Schleife erzeugt.

[Lovasz 2005, S. 177]

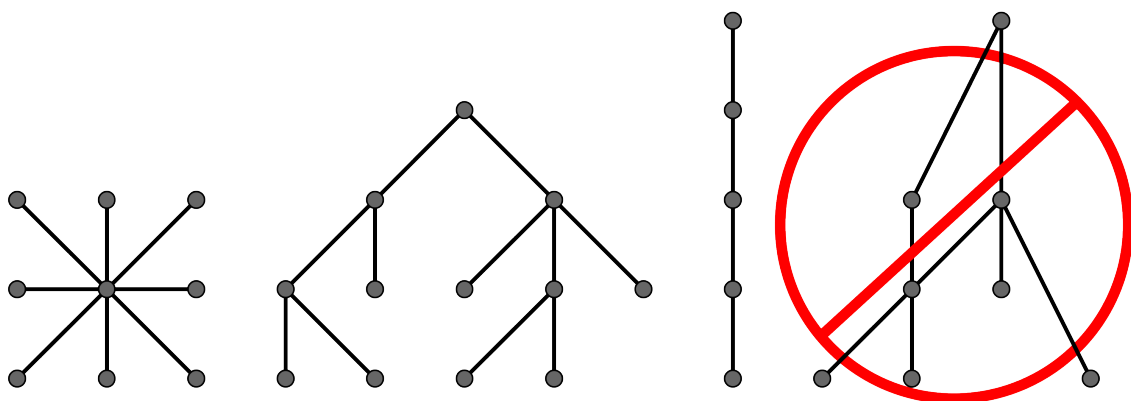


Abbildung 6b: Einige Beispiele für Bäume

Diese Annäherung an den mathematischen Begriff des Baums soll nun zum in der Spieltheorie üblichen Begriff des Spielbaums, bzw. in der Folge zur extensiven Spielform erweitert werden. Obwohl wahrscheinlich der Großteil der Leserinnen und Leser eine intuitive Vorstellung von Spielbäumen besitzt, wollen wir auf eine exakte Definition nicht verzichten, um nachfolgenden Konstruktionen derartiger Diagramme auch rechtfertigen zu können. Es hat sich hier als sinnvoll herausgestellt, den Spielbaum mittels einzelnen Folgen von Spielzügen zu beschreiben:

Definition 4.1.4 Spielbaum

Eine Menge B bestehend aus endlichen oder unendlichen Folgen (k_z) mit $k = 1, \dots, K$ und $K = 0, 1, \dots$, wo Z die Menge aller Spielzüge aus denen die Folgenglieder genommen sind bezeichnet, heißt Spielbaum, falls folgende Eigenschaften erfüllt werden:

- Die Nullfolge $n \in B$

- $(k_z)_{\text{mit } k = 1, \dots, K} \in B \Rightarrow (k_z)_{\text{mit } k = 1, \dots, L} \in B \quad \forall L \leq K$

- $(k_z)_{\text{mit } k = 1, \dots, L} \in B \Rightarrow (k_z)_{\text{mit } k = 1, \dots, L} \in B \quad \forall L \geq 0$

Ein Spielbaum wird in der etwas abstrakten Definition 4.1.4 also mittels der einzelnen Elemente der Menge B beschrieben. Diese Elemente, die als endliche oder unendliche Folgen gegeben sind, werden auch Spielstände oder Spielabläufe genannt. Jeder dieser Spielabläufe besteht wiederum aus einzelnen Spielzügen. Ist beispielsweise die Folge $a = (k_z)_{\text{mit } k = 1, \dots, K}$ ein Spielablauf, dann ist $a' = (k_z)_{\text{mit } k = 1, \dots, K+1}$ die sogenannte Verlängerung dieses Spielablaufs um einen Spielzug, die meist mit $a'' = (a, a')$ bezeichnet wird. Dementsprechend heißen für $b \in B'$ (= die Menge B ohne jene Folgen, für die keine Fortsetzung existiert) die Elemente der Menge $Z(b) = \{z: (b, z) \in B\}$ Spielzüge im Anschluss an den Spielablauf b [Schlee 2004, S. 91-92].

Die Definition des Spielbaums verlangt zudem, dass neben der Nullfolge n , also jenem Spielstand, in dem noch kein Spieler gezogen hat, auch stets der Vorgänger b^* eines beliebigen Spielstands b in B liegt. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so wäre es unmöglich, den Spielstand b überhaupt zu erreichen. Es würde sich in diesem Fall um einen nicht zusammenhängenden Baum handeln.

Wird also in einem Spiel jeder mögliche Spielablauf und jeder mögliche Spielzug angegeben, so lässt sich aus diesen Informationen ein Spielbaum konstruieren. In den folgenden Beispielen dieses vierten Abschnitts wollen wir uns dieses Sachverhalts bedienen und basierend auf Angaben über mögliche Spielabläufe und Spielzüge konkrete Spielbäume konstruieren und analysieren.

Ein Spielbaum alleine ist jedoch noch kein Spiel in extensiver Form. Um ein dynamisches Spiel mittels eines Spielbaums in extensiver Form vollständig darstellen zu können, müssen laut Sieg [2000, S. 33] folgende Elemente bekannt sein:

- *Die Menge der Spieler $i \in I$.*
- *Die Reihenfolge, in der die Spieler ihre Züge machen.*
- *Die Entscheidungsmöglichkeiten der einzelnen Spieler bei jedem Zug.*
- *Die Auszahlung in Abhängigkeit der jeweiligen Entscheidungen.*
- *Die den Spielern zur Verfügung stehenden Informationen bei jedem Zug.*
- *Mögliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen.*

An dieser Stelle wollen wir uns nicht noch tiefer auf den mathematischen Formalismus einlassen und auf eine exakte Definition der extensiven Spielform verzichten, wie sie u.a. bei Schlee [2004, S. 32-33] zu finden ist. Vielmehr soll nun, nach diesem auf den ersten Blick vielleicht etwas abschreckenden Zugang, die weitere Theorie anhand einfacher und aussagekräftiger Beispiele entwickelt und für einen Einsatz im Schulunterricht aufbereitet werden. Dabei wird auch nach und nach die Bedeutung der eben angeführten Charakteristika der extensiven Spielform herausgearbeitet.

4.2 Das Problem der Kleinparteien – Die extensive Spielform und Politik

Die erste einfache Spielsituation in extensiver Form, die hier vorgestellt wird, kommt aus der Politik, einem Bereich der auf den ersten Blick nicht wirklich viel mit Mathematik zu tun hat. Dennoch finden sich mathematische Methoden und Probleme nicht nur bei der Auszählung und Analyse von Wahlen, sondern spielen selbst in alltagspolitischen Entscheidungsprozessen eine nicht zu unterschätzende Rolle [Taylor 1995]:

Beispiel 4.2.1 Das Problem der Kleinparteien

Die Großpartei „die Gelben“ befindet sich schon seit geraumer Zeit mit der Kleinpartei „die Weißen“ in einer Koalition. Nun spekulieren „die Gelben“ schon seit längerem mit einem möglichen Umstieg auf Atomenergie. Die niedrigeren Ausgaben würden durchaus für einen derartigen Energiewechsel sprechen. „Die Weißen“ wollen jedoch dieser drohenden Entscheidung ihres Koalitionspartners im Nationalrat aus Umweltgründen keinesfalls zustimmen. Sie fürchten aber, dass „die Gelben“ mit einem Austritt aus der Koalition reagieren würde, was es wiederum für „die Weißen“ äußerst schwer machen würde, wieder einen Platz in einer kommenden, neuen Regierung zu finden. Für „die Gelben“ wäre dies, ob der Größe der Partei, wohl eher kein Problem. Es stellt sich nun die Frage wie sich die beiden Parteien verhalten sollten.

Der gegebene Sachverhalt soll nun mittels der extensiven Spielform dargestellt werden:

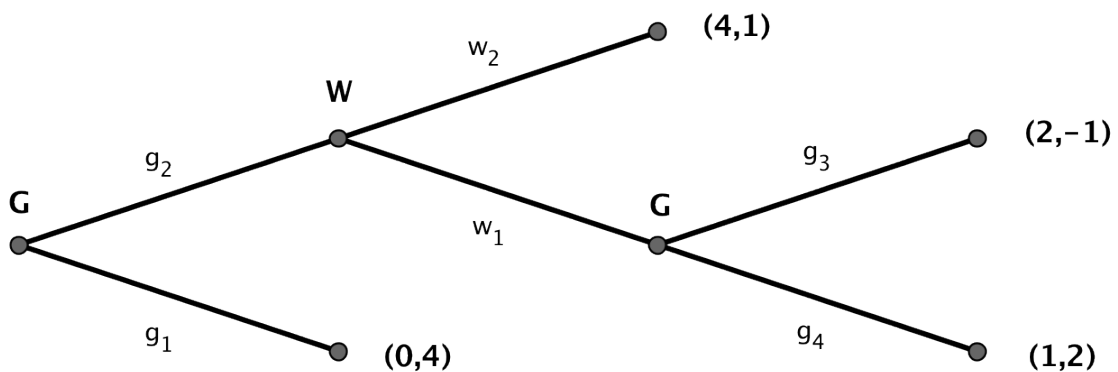


Abbildung 7: Beispiel 4.2.1 in extensiver Form

Was sagt diese Darstellung nun im Detail über das gegebene Problem aus? Die Ereigniskette beginnt mit den *Gelben*, die sich gleich zu Beginn entscheiden müssen, ob sie sich nun für einen Ausbau der Atomenergie aussprechen, was der Wahl von g_2 entsprechen würde. Bei einem Verzicht auf Atomenergie (g_1) wäre das Spiel an dieser Stelle sogleich zu Ende. Die im Spielbaum angegebene Auszahlung von $(0, 4)$ wäre hier natürlich für die kleinere Partei mit 4 ungleich höher als für die größere mit 0. Dies lässt sich damit begründen, dass die *Weißen* bei diesem Spielausgang ihr Ziel, keinen Umstieg auf Atomenergie, erreicht hätten.

Wählen die *Gelben* aber den Weg in die Atomenergie, so müssen sich die *Weiß*en nun zwischen einer Zustimmung (w_2) oder einer Ablehnung (w_1) entscheiden. Bei ersterer Entscheidung wäre das Spiel wiederum zu einem Ende gekommen. Die *Gelben* hätten ihr Ziel erreicht und mit einer Auszahlung von 4 weitaus besser abgeschnitten als die *Weiß*en mit einer Auszahlung von 1. Die *Weiß*en könnten sich damit trösten, vielleicht beim nächsten Mal eigene Präferenzen durchsetzen zu können.

Bei einer Ablehnung der Atomenergie müssten sich in weiterer Folge die *Gelben* entscheiden, ob sie nun die Koalition auflösen wollen, was der Strategie (g_2, g_3) entsprechen würde, oder ob sie dennoch dem kleineren Koalitionspartner die Treue halten (g_2, g_4). In diesem Fall würde alles beim Alten bleiben. Neben der einen oder anderen Streiterei würden aber die *Weiß*en besser dastehen als die *Gelben*, die ja ihr Ziel nicht erreicht hätten. Hingegen wäre ein Austritt aus der Koalition seitens der *Gelben* für die *Weiß*en ganz schlecht. Man müsste wohl oder übel die Macht an andere, zukünftig regierende Parteien abgeben. Außerdem würden die *Gelben* eventuell mit einem anderen Koalitionspartner das angestrebte Ziel erreichen. Für die Großpartei wäre aus den eben angesprochenen Gründen dieser Spielausgang jedoch nicht so bedauernswert.

Wie man sieht lassen, sich derartige Problemstellungen recht übersichtlich mit Hilfe der extensiven Darstellungsform illustrieren. Alle Elemente, die eine vollständigen Spieldarstellung in extensiver Form voraussetzt, sind gegeben [siehe Kapitel 4.1]. Das betrachtete Spiel besitzt vier mögliche Spielverläufe (= *Partien*). D.h. ausgehend vom Wurzelknoten α kann das Spiel vier verschiedenen Wege bis zu seinen Endknoten, also jenen Knoten, in denen keine weiteren Entscheidungen mehr zu treffen sind, einschlagen. Jede Partie entspricht dementsprechend einem Endpunkt und umgekehrt. Aus den Knoten und Endknoten eines Spielbaums lässt sich folgende Definition ableiten [Güth 1999, S. 36-37]:

Definition 4.2.2 Entscheidungsknoten

Sei $K(B)$ die Menge der Knoten des Spielbaums B und $E(B) \subset K(B)$ die Menge seiner Endpunkte. Dann heißen die Elemente $D(B) = \{k \in K(B): k \notin E(B)\}$ Entscheidungsknoten von B .

Beispiel 4.2.1 besitzt also 3 Entscheidungsknoten. In jedem dieser Knoten ist genau bestimmt, welcher der Spieler sich zu entscheiden hat. Dies legt wiederum die sogenannte *Spielerzerlegung* Z des Spiels eindeutig fest.

Z ist eine Zerlegung $Z_1 + \dots + Z_n = D(B)$ der Menge der Entscheidungsknoten in n disjunkte Teilmengen Z_i mit $i \in I$. Liegt nun ein Knoten $k \in D(B)$ in Z_i , so ist der Spieler i in diesem Entscheidungsknoten am Zug [Güth 1999, S. 36-37].

Bezeichnen wir die *Gelben* als Spieler 1 und die *Weißten* als Spieler 2, so ergibt sich für Beispiel 4.2.1 die Spielerzerlegung $Z_1 + Z_2 = D(B)$. Der erste und der dritte Entscheidungsknoten liegen nun in Z_1 , da hier die *Gelben* am Zug sind. Der zweite Knoten, in dem die *Weißten* ihre Wahl treffen, ist hingegen Teil der Menge Z_2 .

Nach dieser formalen Erfassung unseres Parteienspiels stellt sich nun natürlich die Frage, wie sich die beiden Parteien entscheiden sollen. Welche Strategien sollen sie verfolgen? An dieser Stelle muss unterstrichen werden, dass sich Strategien in extensiven Spielformen im Allgemeinen von Strategien, wie sie bisher aufgetreten sind, dahingehend unterscheiden, dass sich die einzelnen Spieler mehrmals entscheiden müssen. In jedem Entscheidungsknoten des Spielbaums muss sich ein Spieler aus einer Auswahl zur Verfügung stehender Optionen entscheiden. Eine Strategie bei dynamischen Spielen beschreibt demnach einen genauen Handlungsplan für das gesamte Spiel und nicht bloß für einen einzigen Knoten [Sieg 2000, S. 33].

Definition 4.2.3 Strategie in einem extensiven Spiel

*Eine Strategie $s_i \in S_i$ eines Spielers $i \in I$ in einem extensiven Spiel ist ein vollständiger Handlungsplan des Spielers i . Dies ist in dem Sinn zu verstehen, dass s_i in jedem Entscheidungsknoten genau einen Zug vorschreibt.*⁵ [Güth 1999, S. 51]

In Beispiel 4.2.1 könnte sich die Großpartei nun für die folgenden Strategien entscheiden: Man beachte, dass in den ersten beiden Fällen der Auflistung das Spiel nach der ersten Entscheidung bereits zu Ende wäre. Die mathematische Definition verlangt jedoch einen Handlungsplan für jeden Entscheidungsknoten. Auch dann, wenn gewisse Geschehnisse unmöglich eintreten können.

⁵ Bei Spielen mit sogenannter imperfekter Information [siehe Kapitel 4.4] wird nicht in jedem Entscheidungsknoten, sondern in jedem Informationsbezirk genau ein Zug vorgeschrieben.

- Man will keinen Ausbau der Atomenergie und ist für ein Ende der Koalition (g_1, g_4).
- Man will keinen Ausbau der Atomenergie und ist für kein Ende der Koalition (g_1, g_3).
- Man will einen Ausbau der Atomenergie und ist für ein Ende der Koalition (g_2, g_4).
- Man will einen Ausbau der Atomenergie und ist für kein Ende der Koalition (g_2, g_3).

Die kleinere Partei hat nur die folgenden beiden Strategien zur Auswahl:

- Man stimmt dem Ausbau der Atomenergie nicht zu (w_1)
- Man stimmt dem Ausbau der Atomenergie zu (w_2)

Die *Gelben* müssen sich also zunächst entscheiden, ob sie einen Ausbau der Atomenergie wollen, oder doch einen Rückzieher machen. Nachdem jedoch mit der Wahl von Strategie g_1 die Auszahlung für die *Gelben* mit Null am Niedrigsten und mit Vier für die *Weißten* am Höchsten wäre, wird die Großpartei für einen Ausbau der Atomenergie eintreten. Die Strategien (g_2, g_4) und (g_2, g_3) dominieren also die Strategie g_1 . Da (g_2, g_3) auch (g_2, g_4) dominiert, werden sich die *Gelben* für einen Ausbau und im Fall der Fälle für ein Ende der Koalition aussprechen. Da den beiden Parteien alle möglichen Auszahlungen und Entscheidungen des Koalitionspartners bekannt sind, wird auch die Kleinpartei auf die eben ausgeführten Schlussfolgerungen der *Gelben* spekulieren und ihrerseits die Strategie w_2 wählen. Wir haben also mit der Strategiekombination (g_2, g_3, w_2) ein Gleichgewicht und somit eine Lösung des Beispiels gefunden. Demnach werden die *Weißten* wohl oder übel klein begeben müssen. Dem Ausbau der Atomenergie steht somit aus spieltheoretischer Sicht nichts mehr im Wege.

Obwohl das Spiel nach Wahl der Strategie w_2 seitens der *Weißten* eigentlich bereits zu Ende ist, muss im Sinne eines vollständigen Handlungsplans an dieser Stelle auch die Strategie g_3 angegeben werden. Es ist geradezu entscheidend, dass diese Strategie angegeben wird, da sich die *Weißten* erst aufgrund der Dominanz des drohenden Koalitionsendes (g_3) für die Strategie w_2 entscheiden.

4.3 Strategische oder extensive Form – Adaption des Nash-Gleichgewichts

In Beispiel 4.2.1 ließ sich das Gleichgewicht mittels Elimination dominierter Strategien finden. Das Dominanzprinzip lässt sich dementsprechend relativ einfach auf Spiele in extensiver Form übertragen. Es wird sich zeigen, dass auch das in Abschnitt III erarbeitete Konzept des Nash-Gleichgewichts auf die extensive Spielform übertragen werden kann. Dazu wollen wir zunächst das eben analysierte Beispiel 4.2.1 in strategischer Form darstellen:

		<i>Die Gelben</i>			
		g₁,g₃	g₁,g₄	g₂,g₃	g₂,g₄
<i>Die Weißen</i>	w₁	(0,4)	(0,4)	(2,-1)	(1,2)
	w₂	(0,4)	(0,4)	(4,1)	(4,1)

Wie man sieht, lässt sich Beispiel 4.2.1 auch in strategischer Form darstellen, wenngleich durch die vielen gleichen Auszahlungseinträge das ganze Spiel nicht so einfach zu erfassen ist, wie in extensiver Form. Dennoch lässt sich also dieses dynamische Spiel gewissermaßen in ein vereinfachtes strategisches Spiel umformen, in dem zwei Spieler ihre Strategien, also ihre vollständigen Handlungspläne für das gesamte Spiel, gleichzeitig wählen. In diesem Fall ist dies noch einfach möglich, man denke aber beispielsweise an dynamische Spiele der Kategorie Schach, wo eine strategische Erfassung schier unmöglich scheint. Bereits der erste Spieler hat hier die Möglichkeit aus 20 verschiedenen Zügen auszuwählen. Der Konkurrent hat wiederum für jeden dieser 20 Züge 20 verschiedene Antworten zur Auswahl. Man stelle sich den so entstehenden Spielbaum und die dazugehörige Matrix vor [Dixit 1995, S. 43-45].

Dennoch ist es so, dass sich jedes Spiel in extensiver Form in ein vereinfachtes Spiel in strategischer Form umwandeln lässt [Fudenberg / Tirole 1991, S. 85.87]. Dies lässt sich wie folgt begründen:

Jede Strategiekombination aller Spieler liefert einen Spielablauf, der eine eindeutige Auszahlung an jeden Spieler liefert. Reduziert man die extensive Darstellung eines Spiels auf die Parameter (I, S, U), erhält man für jedes Spiel eine eindeutige Darstellung in strategischer Form. Natürlich gehen bei dieser Reduktion wertvolle Informationen verloren. So ist beispielsweise in obiger Matrix nicht mehr erkennbar, welcher Spieler wann am Zug ist. Der speziell für Drohungen und Ankündigungen sehr wichtige Faktor Zeit geht gänzlich verloren. Nichts desto trotz bringt diese kanonische Transformation eines extensiven Spiels auf ein Spiel in Normalform seine Vorteile mit sich. Ein Nash-Gleichgewicht in der extensiven Darstellungsform geht etwa auch bei Übertragung in die strategische Darstellung und umgekehrt nicht verloren. Aus diesem Grund lassen sich die bereits erarbeitete Definition eines Nash-Gleichgewichts, sowie auch die äquivalente Beste-Antwort-Formulierung, auf extensive Spielformen übertragen [Schlee 2004, S.96].

Definition 4.3.1 *Nash-Gleichgewicht für Spiele in extensiver Form*

Eine Strategiekombination s^ heißt Nash-Gleichgewicht, wenn gilt:*

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*) \quad \forall i \text{ und } \forall s_i \in S_i$$

Wie bereits angesprochen, gehen bei der Transformation eines extensiven Spiels in ein Spiel in Normalform wichtige Komponenten verloren. Aus diesem Grund ist der umgekehrte Weg, also der Schritt von der strategischen auf die extensive Form nicht eindeutig [Schlee 2004, S. 96]. Dennoch können selbst gewisse klassische strategische Probleme, bei denen Entscheidungen gleichzeitig getroffen werden müssen, in extensive Form übertragen werden. Wollen wir anhand des bekannten Tischfußballdilemmas [Beispiel 3.1.2] diesen Sachverhalt unterstreichen:

Klasse 3B

Klasse 3A		Kauf zustimmen (s_{21})	Nicht zustimmen (s_{22})
	Kauf zustimmen (s_{11})	(30,30)	(-20,80)
	Nicht zustimmen(s_{12})	(80,-20)	(0,0)

Will man die eben angeführte Matrix des Tischfußballdilemmas in eine extensive Darstellungsform bringen, so besteht die essentielle Schwierigkeit darin, die Gleichzeitigkeit der Entscheidung darzustellen. Dieses Problem löst man, indem man etwa zuerst die 3A Klasse ihre Wahl treffen lässt und erst dann die 3B Klasse. Entscheidend ist hierbei, dass die 3B Klasse den Entschluss der 3A Klasse nicht erfährt. Gleichzeitiges Treffen von Entscheidungen bzw. Ziehen entspricht also dem Ziehen hintereinander, ohne Information über den vorherigen Zug [Sieg 2000, S. 33-34]. Wie Riech [2010, S. 130] formuliert, ist somit *Gleichzeitigkeit nur ein bildlicher Ausdruck für „nicht wissen, was der andere macht.“* Das Tischfußballdilemma lässt sich also mittels folgendem Spielbaum darstellen:

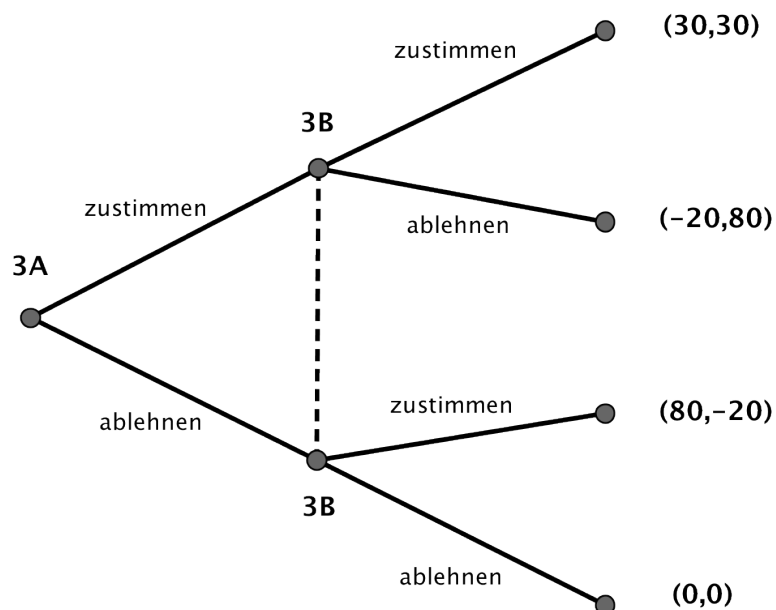


Abbildung 8: Tischfußballdilemma in extensiver Form

Zunächst beginnt die 3A Klasse damit, sich entweder für oder gegen einen Kauf des Tisches zu entscheiden. Anschließend ist die 3B Klasse am Zug. Sie befindet sich zu diesem Zeitpunkt in einem der beiden durch eine gestrichelte Linie verbundenen Knoten des Spielbaums. Hierbei ist es entscheidend, dass die 3B Klasse nicht weiß, in welchem der beiden Entscheidungsknoten sie sich befindet. Es ist der 3B also nicht bekannt, ob die Parallelklasse einem Kauf zugestimmt hat oder nicht. Die gleichzeitige Entscheidung wurde somit in zwei aufeinanderfolgende Entscheidungen mit sogenannter imperfekter Information [siehe Kapitel 4.4] transferiert. Die extensive Darstellung des Tischfußballdilemmas ließe sich andererseits auch mit einer

Entscheidung der 3B Klasse im ersten Knoten beginnen. Wie bereits erwähnt handelt es sich also bei Abbildung 8 um keine eindeutige Transformation der strategischen in eine extensive Darstellungsform.

4.4 *Alles eine Frage der Information*

Um ein dynamisches Spiel vollständig erfassen zu können muss auch, wie bereits in Kapitel 4.1 erwähnt, die den einzelnen Spielern bei jedem Zug zur Verfügung stehende Information erläutert werden. Das den einzelnen Spielern zur Verfügung stehende Wissen verleiht gewissen spieltheoretischen Modellen zusätzliche Brisanz und ist oftmals die entscheidende Komponente, die über die Realitätsnähe des mathematischen Modells entscheidet. Man denke beispielsweise an das klassische Pokerspiel. Jeder der Spieler hat gewisse Informationen, nämlich die Kenntnis der eigenen Karten, die nur ihm zur Verfügung stehen. Zudem kommt auch noch das Wissen um gewisse Charakteristika der Mitspieler hinzu, wie etwa die Aggressivität des Spielers A, die Passivität von Spieler B, bzw. der Hang zum Bluff von Spieler C. All diese Informationsebenen müssen bei einer mathematischen Modellierung derartiger Spielsituationen berücksichtigt werden. Information ist also oftmals die entscheidende Essenz spieltheoretischer Situationen. Als Folge dessen wollen wir uns in diesem Kapitel etwas näher mit dem Thema der Information auseinandersetzen.

Wie Holler und Illing [1993, S. 45] unterstreichen, ist es zunächst einmal unumgänglich, das sogenannte gemeinsame Wissen (*Common Knowledge*), also jenes Wissen, das allen beteiligten Spielern gleichsam bekannt ist, zu definieren. Hierzu zählen etwa die Spielregeln, oder etwa das rationale Verhalten der einzelnen Spieler und auch das Wissen über das rationale Verhalten der Mitspieler. Zählen auch die Strategiemengen und Auszahlungsfunktionen sämtlicher Spieler zum gemeinsamen Wissen und verfügt keiner der Spieler über bestimmte individuelle Eigenschaften oder geheimes Wissen, so spricht man von einem Spiel mit *vollständiger Information*. Es handelt sich also bei den bisher analysierten Spielen in extensiver Form um Spiele mit vollständiger Information. Sowohl die beiden Parteien in Beispiel 4.2.1, als auch die beiden Klassen in Beispiel 3.2.1 kennen sämtliche Strategien und mögliche Auszahlungen des Spiels.

Anders als bei Beispiel 4.2.1, in dem jede Partei zu jedem Zeitpunkt des Spiels weiß, in welchem Entscheidungsknoten sie sich befindet, bzw. welche Entscheidungen zuvor getroffen wurden, weiß die Klasse 3B im Tischfußballdilemma nicht, wie sich die Klasse 3A entschieden hat. In diesem Fall handelt es sich um ein Spiel mit vollständiger, aber *imperfekter Information*. Wie man in Abbildung 8 erkennen kann, werden im Falle imperfekter Information jene Knoten zwischen denen der jeweilige Spieler nicht unterscheiden kann mittels einer gestrichelten Linie verbunden.

Diese verbundenen bzw. manchmal auch umrahmten Entscheidungspunkte bilden einen sogenannten *Informationsbezirk*, der durch die beiden folgenden Eigenschaften charakterisiert ist:

- *Der Spieler i besitzt an jedem seiner Entscheidungsknoten im Informationsbezirk I_i gleich viele Handlungsmöglichkeiten.*
- *Befindet sich ein Spieler i in einem Knoten $k \in I_i$, so weiß er, dass er sich in I_i befindet, aber nicht in welchem Knoten in I_i .*

[Güth 1999, S. 37-38]

Während die zweite Eigenschaft keiner weiteren Erläuterung bedarf, ist auch die erste schnell erklärt: Hätte etwa die Klasse 3B in einem der beiden ununterscheidbaren Knoten eine andere Anzahl von Handlungsmöglichkeiten zur Auswahl, würde sie diesen Knoten vom anderen unterscheiden können.

Erinnern wir uns an die in Kapitel 4.2 vorgestellte Spielzerlegung Z , die für jeden Entscheidungsknoten festlegt, welcher Spieler $i \in I$ am Zug ist, so ist die eben vorgestellte Informationszerlegung I eine Verfeinerung der Spielzerlegung Z . Der Informationsbezirk I_i eines Spielers i ist somit eine Teilmenge von Z_i . Bezeichnet M_i die Anzahl der Informationsbezirke des Spielers i , so lässt sich die Zerlegung formal wie folgt festhalten:

$$Z_i = \sum_{k=1}^{M_i} I_i^k = I_i^1 + \dots + I_i^{M_i}$$

Sind im Gegensatz zum Tischfußballdilemma in einem Spiel alle Informationsbezirke einelementig, so spricht man von einem *Spiel mit perfekter Information*. In diesem Fall

weiß jeder Spieler zu jedem Zeitpunkt des Spiels, in welchem seiner Entscheidungsknoten er sich befindet.

Weist ein Spiel jedoch gewisse verborgene Kenntnisse auf, so wollen die einzelnen Kontrahenten natürlich Informationsvorteile zu ihren eigenen Gunsten ausnutzen. Anhand des folgenden Markteintrittsspiels soll die dabei entstehende Problematik von Spielen mit imperfekter Information verdeutlicht werden. Markteintrittsspiele zählen zu gewissen Standardproblemen der spieltheoretischen Literatur und finden sich demnach in fast allen einschlägigen Werken wieder [siehe u.a. Holler / Illing 1993, S. 17].

Beispiel 4.4.1 Markteintrittsspiel mit imperfekter Information

Die Computerfirma Makrosoft besitzt schon seit Jahren ein unangefochtenes Monopol in der Notebook-Branche. Es kursieren allerdings Gerüchte, dass möglicherweise die auf Mobiltelefone spezialisierte Firma Lemon Software für Notebooks auf den Markt bringen möchte. In Anbetracht der drohenden Konkurrenz bzw. möglichen Zusammenarbeit – die neue Software von Lemon könnte zum Erfolg des Notebooks beitragen – stellt sich für Makrosoft nun die Frage, ob sie in die Entwicklung und Produktion ihres neuesten Highspeed-Notebooks investieren sollen (s_{21}) oder nicht (s_{22}). Doch auch für Lemon ist es noch nicht klar, ob sie in den Notebook-Markt einsteigen wollen (s_{11}), oder doch besser in der Mobiltelefon-Branche bleiben sollen (s_{12}).

Die gegebene Problemstellung lässt sich am besten mittels folgender extensiver Darstellung widerspiegeln:

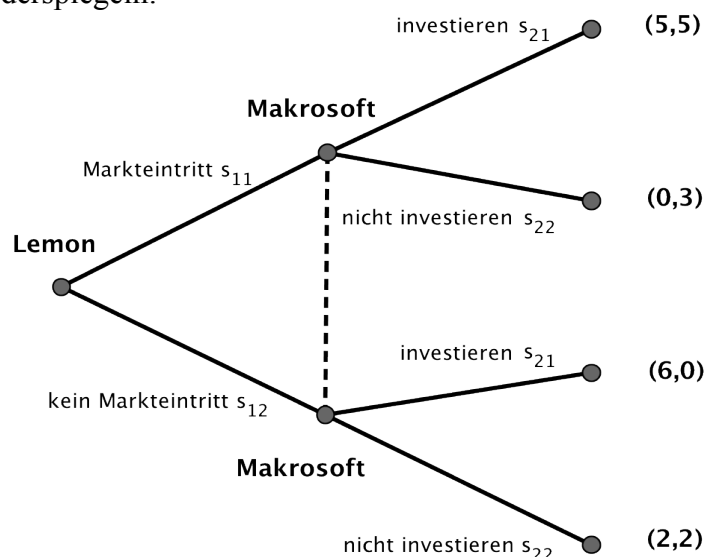


Abbildung 9: Markteintrittsspiel mit imperfekter Information

Da Makrosoft zum Zeitpunkt ihrer Entscheidung noch nicht weiß, ob sich Lemon für oder gegen einen Markteintritt ausgesprochen hat, befinden sich die beiden Entscheidungsknoten von Makrosoft im selben Informationsbezirk und sind durch eine gestrichelte Linie verbunden. Die gegebenen Auszahlungen ($u(\text{Lemon})$, $u(\text{Makrosoft})$) lassen sich nun wie folgt begründen:

Entscheidet sich sowohl Lemon für einen Markteintritt, als auch Makrosoft für die Produktion des neuen Notebooks (s_{11}, s_{21}), bringt dies für beide Beteiligten einen Vorteil mit sich, da sich das neue Notebook mit den neuen Möglichkeiten, welche die Software von Lemon bietet, sehr gut verkaufen lässt. Beide Firmen könnten ihren Gewinn folglich auf 5 Mrd. Euro erhöhen.

Entschließen sich hingegen beide Unternehmen dazu dem Markt fern zu bleiben (s_{12}, s_{22}), so würde sich der Gewinn weiterhin auf rund 2 Mrd. belaufen. Entschließt sich Lemon dazu in den Markt einzusteigen, Makrosoft hingegen dazu die Produktion des neuen Notebooks nicht zu starten (s_{11}, s_{22}), so müsste Lemon mit Gewinneinbußen rechnen, da ohne neuem Notebook auch die Software bei den Kunden nicht so beliebt ist, während Makrosoft ob der Schwäche des Konkurrenten seinen Gewinn auf 3 Mrd. Euro erhöhen könnte.

Steigt jedoch Lemon nicht in den Markt ein, während Makrosoft in die Produktion des neuen Notebooks investiert, so wäre dies für Makrosoft ein Desaster, da sich die Investition ohne der neuen Software von Lemon nicht rentieren würde. Andererseits könnte Lemon seinen Gewinn auf 6 Mrd. Euro erhöhen, da einerseits die Ausgaben für die neue Software wegfielen und andererseits auch der Konkurrent sichtlich geschwächt wäre. Wie immer stellt sich an dieser Stelle die Frage, wie sich die beiden beteiligten Firmen nun entscheiden sollen.

In Abbildung 9 sieht man sofort, dass die Strategie s_{12} die Strategie s_{11} dominiert. Folglich wird sich Lemon dazu entscheiden, nicht in den Markt einzutreten. Da es sich um ein Spiel mit vollständiger Information handelt, kennt Makrosoft alle Strategien und Auszahlungen. Zudem kann sie davon ausgehen, dass sich Lemon rational entscheiden wird und folglich keine dominierte Strategie spielen wird. Obwohl also Makrosoft nicht weiß, in welchem Entscheidungsknoten sie sich befindet, kann sie von der Wahl der Strategie s_{12} ausgehen und folglich mit s_{22} antworten. Die Strategiekombination (s_{12}, s_{22}) liefert also ein pareto-ineffizientes Nash-Gleichgewicht dieser Spielsituation mit imperfekter Information, da die Strategiekombination (s_{11}, s_{21}) für beide Firmen die höhere Auszahlung zur Folge hätte.

Wollen wir nun die gegebene Situation insofern ändern, dass die Firma Makrosoft zum Zeitpunkt ihrer Entscheidung darüber informiert ist, wie sich Lemon entschieden hat. Andererseits weiß auch Lemon, dass Makrosoft zum Zeitpunkt der Entscheidung über die Strategiewahl von Lemon informiert ist. Aus dem Spiel mit imperfekter Information soll also ein Spiel mit perfekter Information entstehen. Man stelle sich beispielsweise mit krimineller Fantasie vor, dass Makrosoft mittels Wirtschaftsspionage zu diesen wertvollen Informationen gekommen ist, Lemon aber seinerseits von dieser Spionage weiß.

Beispiel 4.4.2 Markteintrittsspiel mit perfekter Information

Dieses Spiel entspricht bis auf den Informationsgehalt genau dem Spiel in Beispiel 4.4.1. Dementsprechend sieht die Spielbaumdarstellung wie folgt aus:

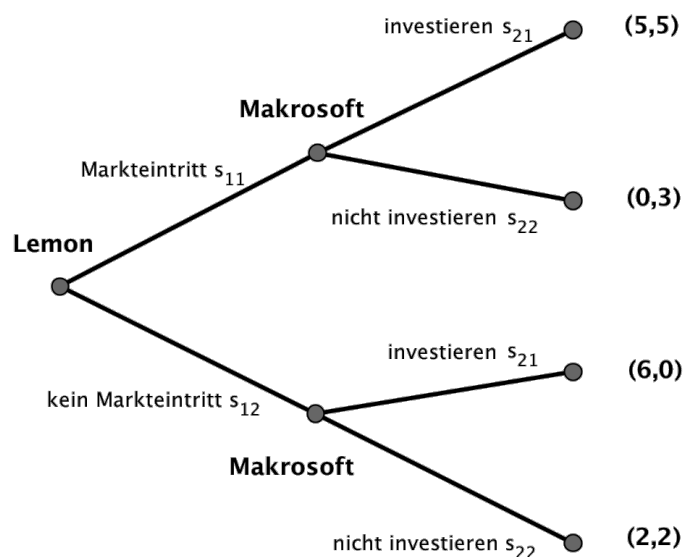


Abbildung 10: Markteintrittsspiel mit perfekter Information

Die Firma Makrosoft weiß also in diesem Fall genau, in welchem der beiden zur Auswahl stehenden Entscheidungsknoten sie sich befindet. Dieses Wissen besitzt auch das Unternehmen Lemon. Entscheidet sich also Lemon beispielsweise für s_{12} , so kann davon ausgegangen werden, dass Makrosoft mit s_{22} reagiert. Wählt Lemon hingegen die Strategie s_{11} , so wird sich Makrosoft für s_{21} entscheiden, da dies eine höhere Auszahlung als s_{22} bedeuten würde. Es zeigt sich also, dass im Falle von Beispiel 4.4.2 für beide beteiligten Firmen eine höhere Auszahlung realisierbar ist, als in Beispiel 4.4.1. Der scheinbare Vorteil der Firma Lemon, ihre Entscheidungen geheim halten zu

können, hat sich für beide Firmen als Nachteil entpuppt. Für derartige Situationen, in denen man das eigene Handeln zum eigenen Vorteil geheim halten will, der erhoffte Vorteil jedoch ausbleibt, wird oftmals der treffende Begriff *Moral Hazard* verwendet [Holler / Illing 1993, S. 46 – 47].

Die beiden gegenübergestellten Beispiele 4.4.1 und 4.4.2 zeigen also, dass es in manchen Situationen besser ist, im übertragenen Sinn die Karten offen auf den Tisch zu legen. Dies trifft nicht nur auf derartige Markteintrittssituationen oder andere wirtschaftliche Problemstellungen zu. Auch in der Natur lassen sich entsprechende Verhaltensweisen feststellen. So weist Sigmund [1995 S. 253ff] beispielsweise auf das Verhalten von Damhirschen hin, wenn es darum geht Rivalen abzudrängen. Die Hirsche halten ihre Handlungsabsichten keinesfalls geheim. Durch das Röhren, den Parallelgang und das Geweihchieben präsentieren sie ihre Eigenschaften und Absichten. Potentielle Gegner sollen so von der eigenen Stärke überzeugt werden und wenn möglich ohne gefährlichen Kampf, der bloß die letzte Option darstellt, vertrieben werden.

Da im Laufe dieses Kapitels bereits eine Vielzahl unterschiedlicher Informationsbegriffe vorgekommen ist, wollen wir der Übersicht halber an dieser Stelle in Anlehnung an Rieck [2010, S. 150-151] eine Tabelle zur Klassifizierung der verschiedenen Informationsständen liefern:

Informationsannahme	Beschreibung	Gegensatz
Gemeinsames Vorwissen	Wissen über das Spiel, Spielregeln, rationales Verhalten der Spieler und wissen über das rationale Verhalten der einzelnen Spieler.	Eingeschränktes Vorwissen
Vollständige Information	Jeder Spieler kennt die Strategie-möglichkeiten, die Informationsstände und die einzelnen Auszahlungen der Mitspieler.	Unvollständige Information
Perfekte Information	Alle Informationsbezirke sind einelementig. Jeder Spieler kann die Handlungen der Mitspieler beobachten.	Imperfekte Information
Private Information	Informationen die nur einem bestimmten Spieler zugänglich sind.	Öffentliche Information

Wie bereits erwähnt, handelt es sich bei allen bisher vorgestellten Spielen, auch beim eben analysierten Markteintrittspiel, um Spiele mit vollständiger Information. Derartige Spielsituationen stellen aber im großen Spektrum spieltheoretischer Anwendungen eher die Ausnahme dar. So gibt es in der Wirtschaft oftmals Situationen, in denen die einzelnen Strategiemöglichkeiten private Informationen darstellen. Das heißt, dass nur die Firma selbst weiß, welche Möglichkeiten sie zur Auswahl hat. Auch die zu erwartenden Auszahlungen sind im Allgemeinen keine öffentlichen Informationen, die der Konkurrenz zugänglich sind. Spiele mit *unvollständiger Information* sind dementsprechend weit verbreitet. Es wird sich jedoch gleich zeigen, dass eine Ausweitung der bisher vorgestellten Theorie nicht unbedingt notwendig ist.

Wie bereits deutlich geworden ist, erlauben es Spiele mit vollständiger Information den einzelnen Spielern, die rationale Strategiewahl des Kontrahenten vorherzusagen. Dies ist selbst dann der Fall, wenn es sich, wie in Beispiel 4.4.1, um ein Spiel mit imperfekter Information handelt. Sind hingegen Komponenten, wie die zu erwartenden Auszahlungen, oder die Strategiemenge nicht öffentlich bekannt, so ist es für die einzelnen Spieler nicht mehr so einfach möglich, sich in die Situation der Konkurrenten hineinzusetzen. Ein auf Harsanyi und Selten zurückgehender Kunstgriff, die sogenannte Harsanyi-Transformation, erlaubt es jedoch, ein Spiel mit unvollständiger Information als Spiel mit vollständiger, allerdings imperfekter Information zu behandeln [Holler / Illing 2003, S. 46-50].

Anhand des folgenden Spiels soll die Grundidee der Harsanyi-Transformation deutlich gemacht werden:

Beispiel 4.4.3 *Markteintrittsspiel mit unvollständiger Information*

Wie bereits in den beiden vorangegangenen Beispielen rücken wieder die beiden Firmen Makrosoft und Lemon ins Zentrum der Betrachtung. Die Ausgangslage ist mit jener in Beispiel 4.4.2 ident. Es handelt sich also zunächst um ein Spiel mit perfekter Information, in dem sich zunächst die Firma Lemon entscheiden muss, ob sie in den Markt eintritt oder nicht.

Da jedoch möglicherweise ein weiteres Computerunternehmen namens Nashtech in die Notebook-Branche einsteigt, ändert sich die Situation wie folgt. Lemon würde aufgrund einer möglichen Kooperation mit dem neuen Unternehmen sofort von deren Markteintritt erfahren. Makrosoft weiß andererseits nicht, wie sich Nashtech

entscheiden wird. Es entsteht somit im Falle eines Markteintritts von Nashtech, neben dem bereits aus Beispiel 4.4.2 bekannten Spielbaum, folgende weitere Darstellung:

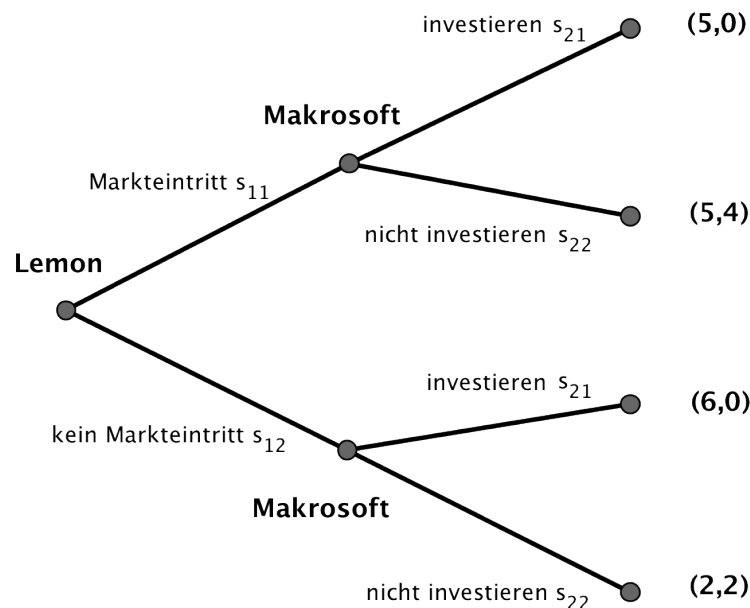


Abbildung 11: Spielbaum nach Markteintritt von Nashtech

Makrosoft weiß also im Gegensatz zu Lemon zum Zeitpunkt ihrer Entscheidung nicht, ob sie sich im Spielbaum aus Beispiel 4.4.2 oder in jenem aus Abbildung 11 befindet. Aufgrund dieser Tatsache kennt Makrosoft auch die zu erwartenden Auszahlungen nicht. Es handelt sich bei Beispiel 4.4.3 also um ein Spiel mit unvollständiger Information. Die Harsanyi-Transformation dieses Spiels in ein Spiel mit vollständiger, aber imperfekter Information sieht nun folgendermaßen aus:

Die Unsicherheit betreffend den Markteinstieg der Firma Nashtech wird durch das Hinzufügen eines weiteren Spielers, man spricht in diesem Fall meist von der *Natur*, behoben [Holler / Illing, 2003, S. 47]. Dieser Spieler, der im Falle dieses Beispiels auch mit der Firma Nashtech identifiziert werden kann, wählt zu Beginn des Spiels eine der beiden zur Auswahl stehenden Strategien *Markteintritt* oder *kein Markteintritt*. Da diese Entscheidung für die Firma Makrosoft nicht einsehbar ist, kann sie diesen weiteren Spielertyp als Zufallsvariable auffassen. Aus der Sicht von Makrosoft entscheidet sich also die Natur bzw. Nashtech mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit für die Strategie *Markteintritt* und mit der entsprechenden Gegenwahrscheinlichkeit für ein Fernbleiben vom Markt. Diese Wahrscheinlichkeit kann sich in diesem Fall beispielsweise aus privaten Informationen Makrosofts ergeben. Nehmen wir in diesem Fall an, dass sich

Nashtech aus der Sicht Makrossofts mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0,75$ für einen Markteintritt entscheidet und somit mit $1 - p = 0,25$ dem Markt fern bleibt. Es lässt sich nun aus den beiden Spielbäumen in Abbildung 10 und Abbildung 11 ein weiterer Spielbaum erstellen, der Beispiel 4.4.3 vollständig erfasst:

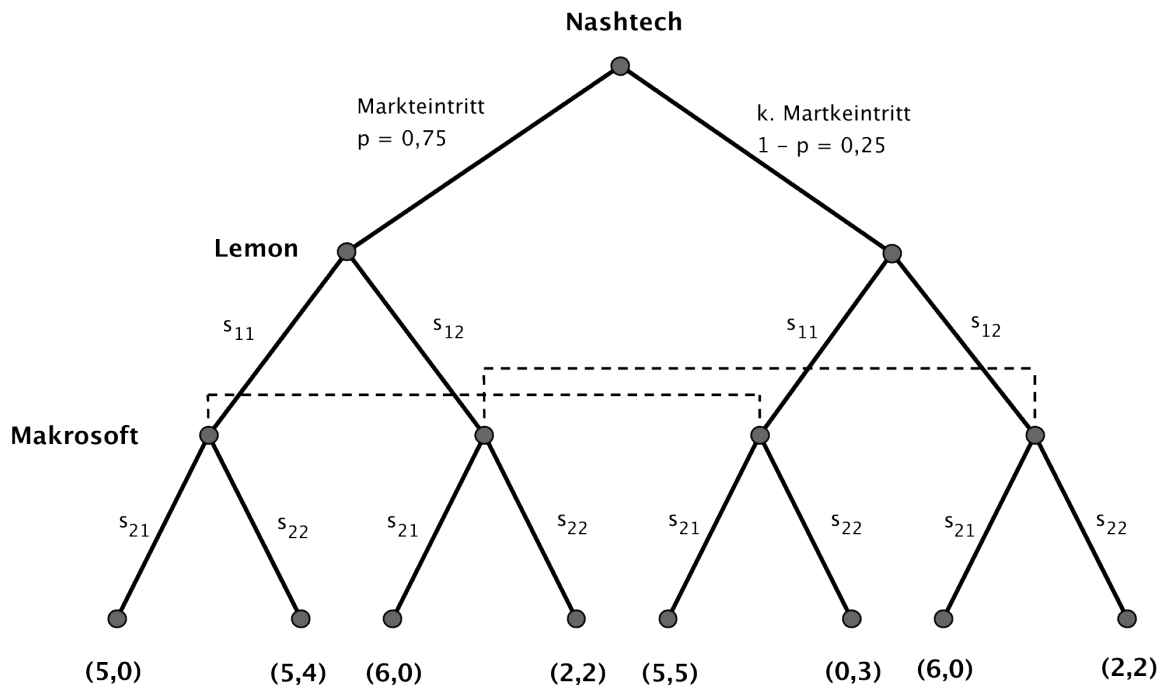


Abbildung 12: Spielbaum von Beispiel 4.4.3

Wie aus den beiden Paaren von Knoten, die durch eine gestrichelte Linie verbunden sind deutlich wird, handelt es sich in der nun entstandenen Spielbaumdarstellung in Abbildung 12 um ein Spiel mit vollständiger, aber imperfekter Information. Makrosoft kann zwar die Entscheidung von Lemon einsehen, nicht aber zwischen den verbundenen Entscheidungsknoten unterscheiden. Jedoch sind Makrosoft die Wahrscheinlichkeiten, mit denen sich Nashtech für oder gegen einen Markteintritt entscheidet, bekannt. Wollen wir nun aus der Darstellung in Abbildung 12 auf mögliche Strategieüberlegungen der beiden Firmen Lemon und Makrosoft schließen: Da die Firma Lemon darüber informiert ist wie sich Nashtech entscheidet, ergibt sich für Lemon eine auf den ersten Blick einfachere Situation als für Makrosoft. Deshalb wollen wir unsere Strategieüberlegungen aus der Sicht von Lemon beginnen und daraus auf die Lösung des Spiels schließen.

Entscheidet sich Nashtech für einen Markteintritt, so wird sich Lemon ebenfalls für einen Einstieg (s_{11}) entscheiden, da in diesem Fall eine Auszahlung von 5 das Ergebnis wäre. Würde Lemon dem Markt fern bleiben, wäre bei Produktionseinstieg von Makrosoft (s_{21}) zwar eine Auszahlung von 6 die Folge, Makrosoft würde sich jedoch bei einem Nicht-Einstieg Lemons für die Strategie s_{22} entscheiden, egal ob wiederum Nashtech in die Branche einsteigt oder nicht. Denn obwohl Makrosoft in diesem Fall nicht zwischen den beiden Knoten entscheiden könnte, ist dies nicht weiter von Belangen, da in beiden Knoten dieselben Auszahlungen zu erwarten sind. Da nun Makrosoft bei der Wahl von Strategie s_{22} eine Auszahlung von 2 zu erwarten hätte, während bei Festlegung auf s_{21} eine Auszahlung von 0 die Folge wäre, ist s_{22} die beste Antwort auf s_{12} . Steigt also Nashtech in die Notebook-Branche ein, würde sich die rational agierende Firma Lemon ebenfalls für einen Einstieg entscheiden.

Bleibt hingegen Nashtech dem Markt fern, so würde sich wohl Lemon dafür entscheiden, nicht in die Notebook-Branche zu investieren (s_{12}). Dies lässt sich wie folgt begründen: Zum einen ist man in diesem Fall mit der Mindestauszahlung von 2, die aufgrund der im vorherigen Absatz angeführten Überlegungen auch das zu erwartende Ergebnis wäre, auf der sicheren Seite. Zum anderen würde sich wohl Makrosoft bei einem Einstieg in die Branche seitens Lemon (s_{11}) nicht zur Produktion des neuen Notebooks verleiten lassen (s_{21}). Dies ergibt sich aus folgender Überlegung: Entscheidet sich Makrosoft für die Strategie s_{22} , so beträgt die Auszahlung zumindest 3. Makrosoft könnte zwar bei einem gleichzeitigen Fernbleiben seitens Nashtech mit der Strategie s_{21} eine Auszahlung von 5 erreichen. Aufgrund der imperfekten Information ist dies jedoch mit dem Risiko der drohenden Auszahlung 0 verbunden. Dies wiegt umso stärker, wenn man die Wahrscheinlichkeit des Markteintritts von Nashtech mit $p = 0,75$ berücksichtigt. Somit ist es viel *wahrscheinlicher*, dass Makrosoft mit der Wahl von Strategie s_{21} bloß eine Auszahlung von 0 erreichen würde. Man kann also davon ausgehen, dass sich Lemon bei Nicht-Einstieg Nashtechs für ein Fernbleiben entscheidet, was der Strategie s_{12} entspricht.

Aus all diesen Überlegungen ergeben sich folgende Gleichgewichte als Lösung des Markteintrittspiels mit unvollständiger Information. Weder Makrosoft noch Lemon können durch einseitiges Abweichen von ihrer Strategie eine höhere Auszahlung erzielen:

- Markteintritt Nashtechs: (s_{11}, s_{22})

- Kein Markteintritt Nashtechs: (s_{12}, s_{22})

Im Allgemeinen lassen sich Gleichgewichte in Spielen, die aus der Harsanyi-Transformation hervorgehen nicht so einfach finden. Da es aufgrund der Hinzunahme eines zusätzlichen Spielers zu mehreren Informationsmengen kommen kann, muss eine Strategie folglich eine bestimmte Aktion für jede dieser Mengen vorschreiben. Dies führt in der Regel oftmals zu Situationen, in denen Gleichgewichte nur noch über den Ausweg der bedingten Wahrscheinlichkeiten, somit über den Satz von Bayes⁶, gefunden werden können. Ein unserem Beispiel 4.4.3 ähnliches, wenn auch komplexeres Spiel, findet sich etwa Riechmann [2010, S. 70-79]. Dabei wird auf den eben angesprochenen Satz von Bayes und dessen Bedeutung für die Suche nach Nash-Gleichgewichten eingegangen und die gegebene Spielsituation detailliert ausgearbeitet.

In den bisherigen Spielen in extensiver Form haben wir die jeweiligen Nash-Gleichgewichte mittels Elimination dominierter Strategien und logischer Ausschlussverfahren gefunden. Ohne einem großen theoretischen Unterbau und ohne kochrezeptartiger Lösungskonzepte ist es gelungen, plausible Lösungen der gegebenen Spielsituationen zu finden. Dies ist speziell im Hinblick auf den Schulunterricht zu betonen. Durch Analysieren der Situation a la „*wenn Spieler A das macht, dann soll Spieler B das machen...*“ trainieren die Schülerinnen eine logische, mathematische Herangehensweise an Problemstellungen [siehe Abschnitt V].

Nichts desto trotz wollen wir in den folgenden Kapiteln dieses vierten Abschnitts die theoretischen Hintergründe von Spielen in extensiver Form ausweiten und vor allem den zentralen Begriff des Nash-Gleichgewichts weiter entwickeln und verfeinern.

⁶ Thomas Bayes (1702-1761): Britischer Mathematiker und Geistlicher. Sein bekanntestes Ergebnis, der Satz von Bayes, liefert wichtige Zusammenhänge bezüglich bedingter Wahrscheinlichkeiten.

4.5 Teilspielperfektheit – Drohungen und Ankündigungen

Beispiel 4.5.1 Terminkonflikt

Die Maturaklasse B einer Schule sieht sich mit folgendem Problem konfrontiert: Der Termin für den diesjährigen Maturaball wurde bereits fixiert und auf den diversen Plakaten und Einladungen angekündigt. Die Maturaklasse A einer benachbarten Schule spielt jedoch seit kurzem auch mit dem Gedanken den Ball am selben Tag zu veranstalten, da ansonsten kaum mehr geeignete Termine in Frage kämen. Die Ausrichtung beider Bälle am selben Tag, wäre natürlich für beide Klassen nicht die beste Lösung, da man sich gegenseitig um die potentiellen Gäste bringen würde. Für die beiden Klassen A und B bleiben also nur noch die folgenden Optionen:

Die Maturaklasse A kann den Ball veranstalten (s_{11}) oder die Veranstaltung ausfallen lassen (s_{12}). Die Maturaklasse B kann hingegen der Klasse A bei Veranstaltung des Balls am selben Tag mit einem harten Vernichtungskampf drohen (s_{21}), oder aber eine gemeinsame Ballorganisation anbieten (s_{22}). [siehe Holler / Illing 2003, S. 15-16]

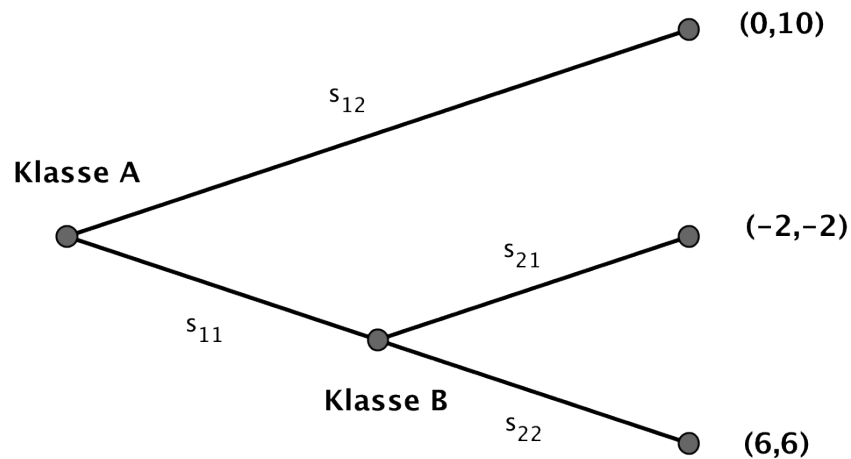


Abbildung 13: Spielbaumdarstellung von Beispiel 4.5.1

Die in Abbildung 13 angegebenen Auszahlungen ergeben sich aus folgenden Überlegungen:

Entscheidet sich die Klasse A dazu den Ball nicht zu veranstalten (s_{12}), so ist die Maturaklasse B der einzige Veranstalter und kann einen hohen Gewinn von ca. 10 000 € erwarten, während die Klasse A leer ausgeht. Veranstaltet hingegen die Klasse A den Ball am selben Tag, so würde ein harter Konkurrenzkampf (s_{21}) die Klasse B zwar schwächen, aber auch der Klasse A sehr teuer kommen. Gemeinsam mit der Tatsache, dass man sich gegenseitig die Gäste wegnimmt, ergibt dies zu erwartende Einbußen von 2000 € für jede der beiden Klassen. Bei Einigung auf eine gemeinsame Ballorganisation (s_{22}) könnten beide Klassen von einem Gewinn von etwa 6000 € ausgehen.

Interessanterweise existieren in Beispiel 4.5.1 zwei Nash-Gleichgewichte. Neben dem auf den ersten Blick offensichtlicheren Gleichgewicht (s_{11}, s_{22}), stellt auch die Strategiekombination (s_{12}, s_{21}) eine stabile Situation dar, wie sich noch zeigen wird.

Wie bereits in Beispiel 4.2.1 drängt sich aber auch hier zunächst die Frage auf, warum man bei der Strategiekombination (s_{12}, s_{21}) die Strategie s_{21} überhaupt angeben muss. Entscheidet sich nämlich die Klasse A für die Strategie s_{12} , so ist das Spiel klarerweise bereits entschieden, und die Klasse B kommt überhaupt nicht mehr zum Zug.

Im Sinne von Definition 4.2.3 ist jedoch eine Strategie für ein Spiel in extensiver Form ein vollständiger Handlungsplan, der für jeden Entscheidungsknoten genau einen Zug vorschreibt. Dies gilt auch für diejenigen Knoten, die überhaupt nicht erreicht werden. Eine Spiellösung, also eine Kombination von Handlungsplänen der beiden Spieler, kann demnach auch Entscheidungen vorschreiben, die schlussendlich überhaupt nicht zu treffen sind. In diesem Fall ist es geradezu entscheidend, dass die Strategie s_{21} angegeben wird. Würde nämlich die Klasse B nicht mit einem Vernichtungskampf (s_{21}) drohen, käme die Klasse A sicher nicht in die Versuchung die Veranstaltung ausfallen zu lassen (s_{12}).

Nun aber zur Frage, warum es sich bei der Strategiekombination (s_{12}, s_{21}) tatsächlich um ein Nash-Gleichgewicht handelt. Bereits in Kapitel 3.3 haben wir festgehalten, dass im Zustand des Nash-Gleichgewichts keiner der Spieler seine Auszahlung durch alleiniges Abweichen von der gewählten Strategie erhöhen kann. Würde nun beispielsweise die Klasse A von ihrer Strategie s_{12} abweichen und s_{11} wählen, so würde sich mit -2 die Auszahlung bedeutend verschlechtern. Auch die Klasse B könnte durch einseitiges Abweichen von s_{21} ihre Auszahlung nicht erhöhen. Somit handelt es sich bei der Strategiekombination (s_{12}, s_{21}) tatsächlich um ein Nash-Gleichgewicht.

Bei genauerer Betrachtung stellt sich dieses jedoch als eher unplausibel heraus. Falls sich nämlich die Klasse A für die Strategie s_{12} entscheiden würde, wäre seitens der Klasse B die Strategie s_{22} die bedeutend bessere Antwort. Mit anderen Worten wird sich die Klasse A vom drohenden harten Konkurrenzkampf kaum abschrecken lassen. Es handelt sich schlicht und ergreifend um eine leere Drohung. Beim Nash-Gleichgewicht in (s_{12}, s_{21}) handelt es sich um ein irrationales, sogenanntes *nicht teilspielperfektes Nash-Gleichgewicht*. Um dieses Konzept formal zu erfassen, muss man sich zunächst, mittels den folgenden Definitionen, dem Begriff des *Teilspiels* nähern:

Definition 4.5.2 Teilgraph, Teilbaum

Der Graph $G' = (V', E')$ heißt Teilgraph oder Untergraph des Graphen $G = (V, E)$, wenn gilt: $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ [siehe u.a. Lovasz 2005, S. 163-164]

Ein zusammenhängender Teilgraph B' eines zum Spielbaum B gehörigen Spiels in extensiver Form T besitzt einen Knoten k , der als erster Entscheidungsknoten von B' im Verlauf jeder Partie erreicht wird, die B' schneidet. Enthält nun B' alle Knoten, die auf Partien durch k auf k folgen, so heißt B' Teilbaum von B . [Güth 1999, S. 80]

Definition 4.5.3 Teilspiel

Umfassen alle Informationsbezirke I , die Entscheidungsknoten des Teilbaums B' enthalten, nur Entscheidungsknoten von B' , so entspricht dem Teilbaum B' von B ein Teilspiel T' von T . [siehe u.a. Güth 1999, S. 80]

Bei einem Teilspiel handelt es sich also um einen Teil eines extensiven Spiels, der für sich allein genommen wiederum ein vollständiges Spiel darstellt. Anschaulich weist Rieck [2010, S. 229] darauf hin, dass beim Abtrennen eines Teilspiels kein Informationsbezirk durchschnitten werden darf.

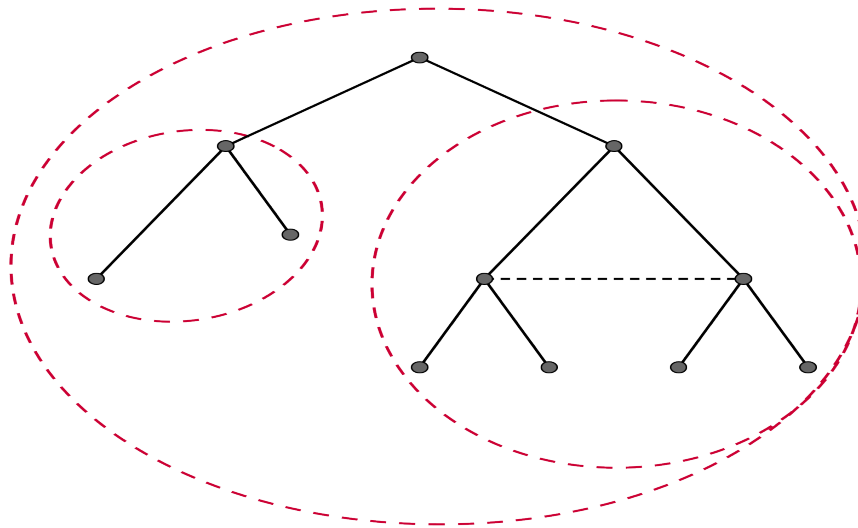


Abbildung 14: Spielbaum mit drei Teilspielen

Das in Abbildung 14 dargestellte Spiel in extensiver Form besitzt also drei Teilspiele, die allesamt Rot umrahmt sind. Wie man sieht, ist insbesondere auch das Spiel selbst ein Teilspiel. Wollen wir nun den Begriff des teilspielperfekten Nash-Gleichgewichts einführen:

Definition 4.5.4 *Teilspielperfektes Nash-Gleichgewicht*

Eine Strategiekombination s^ heißt teilspielperfektes Nash-Gleichgewicht eines Spiels Γ wenn für jedes Teilspiel T von Γ der für dieses Teilspiel relevante Teil von s^* ein Nash-Gleichgewicht von T ist.⁷ [Sieg 2000, S. 37]*

Wie Holler und Illing [2003, S. 111] feststellen, gilt im Sinne der Teilspielperfektheit eine Strategiekombination nur dann als Lösung, wenn keiner der Spieler in einem beliebigen Teilspiel einen Anreiz hat, von seiner vorgesehenen Strategie abzuweichen. Aus diesem Grund handelt es sich bei der Strategiekombination (s_{12}, s_{21}) in Beispiel 4.5.1 um kein teilspielperfektes Gleichgewicht. Die Maturaklasse B hat nämlich im Teilspiel, das im Entscheidungsknoten von B beginnt, sehr wohl einen Grund, von der Strategie abzuweichen. Die Strategiekombination (s_{11}, s_{22}) erfüllt hingegen die Kriterien der Teilspielperfektheit.

⁷ s^* ist also insbesondere ein Nash-Gleichgewicht des gesamten Spiels

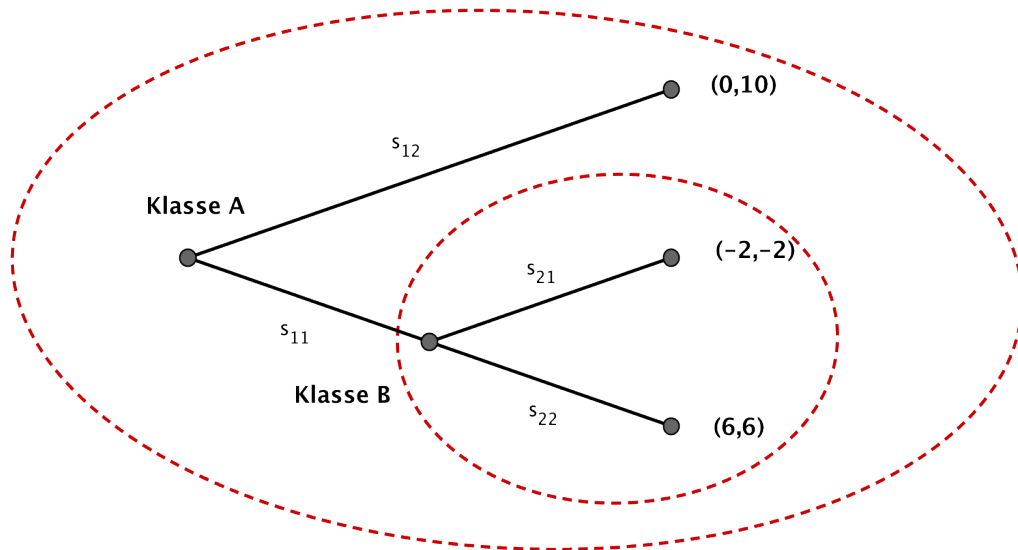


Abbildung 15: Teilspiele in Beispiel 4.5.1

In Beispiel 4.5.1 ist es nicht schwer gefallen das teilspielperfekte Gleichgewicht ausfindig zu machen. Es stellt sich nun die Frage, ob und wie es in komplexeren Spielsituationen möglich ist, diese verfeinerten Nash-Gleichgewichte zu finden. Als besonders hilfreich hat sich in diesem Zusammenhang ein auf den Mathematiker Zermelo⁸ zurückgehender Algorithmus erwiesen. Es handelt sich dabei um eine Variante der sogenannten *Rückwärtsinduktion*, die im Laufe dieser Arbeit schon das eine oder andere Mal unbewusst verwendet wurden.

Bei der sogenannten Rückwärtsinduktion beginnt man die Situation ausgehend von demjenigen Spieler zu analysieren, der als letzter an der Reihe ist. Man analysiert also all jene Situationen, mit denen der letzte Spieler konfrontiert werden kann und sucht die jeweiligen besten Antworten. Aufbauend auf diese Erkenntnis geht man im Spielbaum eine Ebene zurück und optimiert die Strategie des Spielers, der als vorletzter seine Entscheidung treffen muss. Schrittweise bewegt man sich somit zurück zum eigentlichen Ausgangspunkt des Spiels [Fudenberg / Tirole 1991, S. 68 – 69].

⁸ Ernst Zermelo (1871 – 1953): Deutscher Mathematiker, der neben seinen Ergebnissen in der Spieltheorie vor allem als Mitbegründer der Zermelo-Fraenkel Mengenlehre bekannt geworden ist.

Das Prinzip der Rückwärtsinduktion lässt sich etwa auf das einführende Beispiel 4.2.1 des Abschnitts IV, *das Problem der Kleinparteien*, wie folgt anwenden:

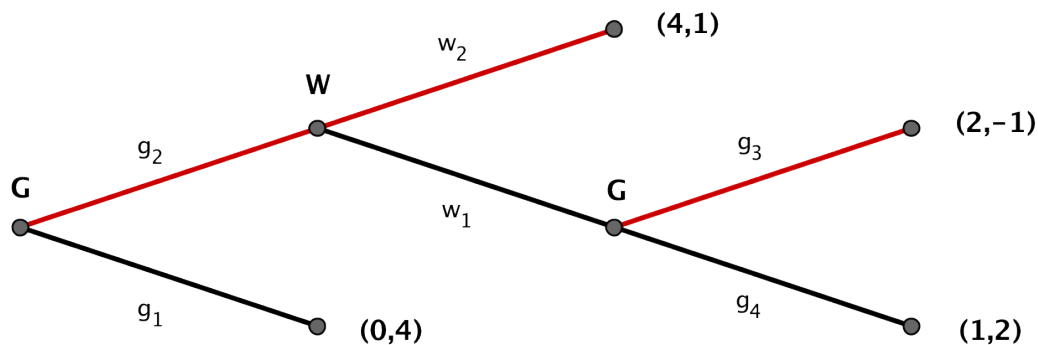


Abbildung 16: Beispiel 4.2.1 mittels Rückwärtsinduktion

Der letzte Entscheidungsknoten des Spiels betrifft die *Gelben*. Die in diesem Fall dominante Handlung ist die Auflösung der Koalition (g_3), welche einen Nutzen von 2 für die *Gelben* bzw. einen von -1 für die *Weißen* zur Folge hätte. Basierend auf diesem Wissen geht man eine Ebene zurück und befindet sich nun im Entscheidungsknoten der *Weißen*. Diese können folglich im letzten Entscheidungsknoten die Wahl von g_3 erwarten. Durch die damit einhergehende drohende Auszahlung von -1 ist nun die Zustimmung im Parlament (w_2) die beste Strategie, was mit einem Nutzen von 4 für die *Gelben* bzw. 1 für die *Weißen* verbunden wäre. Wieder einen Schritt zurück befindet man sich nun im ersten Entscheidungsknoten des Spiels. Durch die zu erwartende Auszahlung von 4 ist nun klarerweise die Zuwendung zur Atomenergie (g_2) die beste Maßnahme für die *Gelben*. Ausgehend vom letzten Entscheidungsknoten ist es somit gelungen, das Nash-Gleichgewicht (g_2, g_3, w_2) in Beispiel 4.2.1 zu finden, oder in Anlehnung an vorherige Erkenntnisse zu bestätigen.

Nun soll die Methode der Rückwärtsinduktion mittels *Zermelos Algorithmus* auf das Auffinden teilspielperfekter Nash-Gleichgewichte sensibilisiert werden. Zu diesem Zweck wird, wie von Riechmann [2010, S. 51-52] beschrieben, zunächst in jedem Teilspiel jene Aktion markiert, welche dem betreffenden Spieler die höchste Auszahlung liefert. Jene Aktionen, die nicht markiert werden, kann man sich als eliminiert vorstellen. Begonnen wird in Anlehnung an die eben vorgestellten Rückwärtsinduktion beim kleinsten Teilspiel. Wollen wir uns diese Vorgehensweise an folgendem abstrakten Beispiel verdeutlichen:

Beispiel 4.5.5 Zermelos Algorithmus

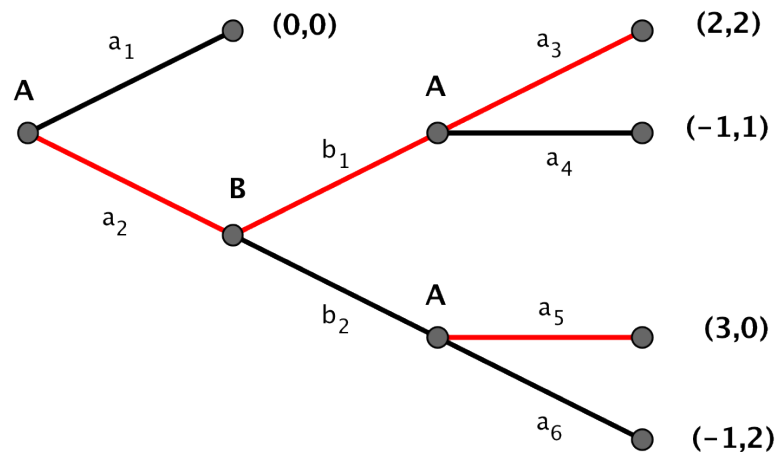


Abbildung 17: Beispiel 4.5.5 Zermelos Algorithmus

Entsprechend dem eben beschriebenen Algorithmus beginnt man die Suche nach einem teilspielperfekten Gleichgewicht in Beispiel 4.5.5 in den beiden kleinsten Teilspielen, in denen Spieler A jeweils zum zweiten Mal zum Zug kommt. Es werden die Aktionen, die Spieler A die höchsten Auszahlungen bringen, also a_5 und a_3 markiert. Die beiden anderen Aktionen, nämlich a_4 und a_6 , können gestrichen werden.

Im nächstgrößeren Teilspiel, also in jenem, das im Entscheidungsknoten von Spieler B beginnt, wird die Strategie b_1 markiert. Diese Wahl hat, unter Berücksichtigung der markierten bzw. gestrichenen Aktionen in den folgenden beiden Knoten, die höchste Auszahlung zur Folge.

Schlussendlich wird noch das letzte Teilspiel, welches dem gesamten Spiel entspricht, betrachtet. Berücksichtigt man auch an dieser Stelle die bereits markierten Aktionen, so kann im ersten Entscheidungsknoten gewissermaßen zwischen den Aktionen a_1 mit Auszahlung 0 und a_2 mit Auszahlung 2 gewählt werden. Es wird also logischerweise abschließend die Aktion a_2 markiert. Durch Zermelos Algorithmus ist somit ein zusammenhängender, markierter Pfad entstanden [siehe Abbildung 17]. Dieser Pfad weist den Weg zum teilspielperfekten Nash-Gleichgewicht (a_2, a_3, a_5, b_1) .

Bei nochmaliger Betrachtung von Abbildung 16 wird nun deutlich, dass es sich auch hier um ein teilspielperfektes Nash-Gleichgewicht handelt, da die zuvor untersuchten Ebenen des Spiels jeweils einem Teilspiel entsprechen. Wenden wir hingegen Zermelos Algorithmus auf die Spielbaumdarstellung von Beispiel 4.5.1 an, so zeigt sich, dass tatsächlich nur der Weg zum teilspielperfekten Nash-Gleichgewicht (s_{11}, s_{22})

durchgängig markiert wird, während das ineffiziente Nash-Gleichgewicht in (s_{12}, s_{21}) gewissermaßen links liegen gelassen wird.

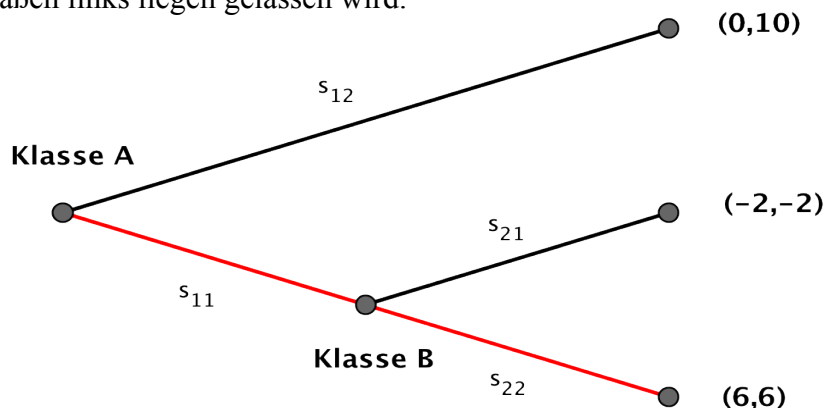


Abbildung 18: Beispiel 4.5.1 Zermelos Algorithmus

An dieser Stelle kann man sich vielleicht fragen, ob die Unterscheidung zwischen Rückwärtsinduktion und Zermelos Algorithmus überhaupt notwendig ist. Tatsächlich handelt es sich bei Zermelos Algorithmus um eine Variante der Rückwärtsinduktion, die zwar auf mehrere Spieler ausgeweitet werden kann, jedoch auf die Anwendung in Teilspielen beschränkt ist [Fudenberg 1991, S. 91]. Der Unterschied wird deutlich, wenn man komplexere Spielsituationen mit imperfekter Information betrachtet. Da sich Zermelos Algorithmus nur auf Teilspiele anwenden lässt, müssen in größeren Teilspielen, die bei Spielen mit imperfekter Information oftmals auftreten, zunächst mittels Rückwärtsinduktion die Gleichgewichte ausfindig gemacht werden. Erst dann lässt sich Zermelos Algorithmus, wie eben vorgestellt, auf das gesamte Spiel anwenden. Ein Beispiel für die beschriebene Vorgehensweise bei Spielen mit imperfekter Information findet sich etwa bei Riechmann [2010, S. 66-68].

Wir wollen an dieser Stelle nicht weiter auf diesen formalen Spitzfindigkeiten herumreiten, sondern nochmals festhalten, dass wir mit den beiden anhand mehrerer Beispiele vorgestellten und erprobten Methoden einen Weg gefunden haben, teilspielperfekte Gleichgewichte ausfindig zu machen. Mit dem Konzept der Teilspielperfektheit ist es somit gelungen, gewisse *irrationale* Gleichgewichte auszuschließen und den Begriff des Nash-Gleichgewichts zu verfeinern. Dennoch bringt auch das Konzept der Teilspielperfektheit Probleme mit sich. Man denke beispielsweise an ein Spiel mit imperfekter Information, das bloß aus einem einzigen Teilspiel besteht. Derartige Situationen rufen regelrecht nach einer weiteren Sensibilisierung des Begriffs des Nash-Gleichgewichts. Einige dieser Verfeinerungen (*Refinements*) sollen im nächsten Kapitel vorgestellt werden.

4.6 Refinements – Weitere Verfeinerungen des Nash-Gleichgewichts

Mit dem im vorhergehenden Kapitel ausführlich behandeltem Konzept der Teilspielperfektheit ist bereits eine erste Möglichkeit zur Rationalisierung von Nash-Gleichgewichten vorgestellt worden. In Hinblick auf den Schulunterricht soll hier kurz die Frage thematisiert werden, warum es überhaupt wichtig ist, Gleichgewichte zu rationalisieren, bzw. was damit überhaupt gemeint ist. Wie etwa anhand des Beispiels 4.5.1 deutlich geworden ist, eignet sich das Lösungskonzept des Nash-Gleichgewichts nicht für alle Spiele. Es kann durchaus zu Situationen kommen, in denen sich scheinbar stabile Strategiekombinationen als instabil herausstellen. Würde die Klasse im eben erwähnten Beispiel tatsächlich die Drohung in die Tat umsetzen, würde sie sich letztlich selbst schaden. Es ist also klar, dass derartige Gleichgewichte nicht als rationale Lösungen akzeptiert werden können.

Da in der Spieltheorie stets der Anspruch der Rationalität an die Spieler gestellt wird, sollen auch die Lösungen gegebener Situationen diesem Anspruch genügen. Will man realitätsnahe Situationen oder Prozesse modellieren und spieltheoretisch analysieren, soll auch das Lösungskonzept realitätsnah sein. Ansonsten würde die Spieltheorie einen großen Teil ihrer Effektivität verlieren. Es ist also durchaus nachvollziehbar, dass ein Hauptaugenmerk auf die Plausibilität der verschiedenen Lösungskonzepte gelegt werden muss. Besonders im Schulunterricht muss dies verdeutlicht werden. Dies bedarf nicht zwangsläufig der gesamten theoretischen Erweiterungen des Nash-Gleichgewichts. Es genügt oft zu besprechen und kritisch zu hinterfragen, warum eine gewisse Lösung plausibel ist und warum eine andere nur schwer akzeptiert werden kann. Wie auch in anderen Teilgebieten der Mathematik – man denke etwa an die oftmals unplausiblen zweiten Lösungen bei Optimierungsaufgaben – muss man speziell in der Spieltheorie mit Lösungen und Lösungskonzepten vorsichtig umgehen. Schafft man es als Lehrperson, die Schüler und Schülerinnen für derartige Probleme zu sensibilisieren, wird sich der Lerneffekt potenzieren und auch auf andere Lebensbereiche ausweiten.

In diesem Kapitel soll also die Suche nach dem *perfekten* Nash-Gleichgewicht, anhand von Beispielen, noch ein wenig weiter getragen werden. Abschließend soll in Kapitel 4.7 anhand einiger Paradoxa gezeigt werden, dass der Prozess der Rationalisierung auch seine Grenzen hat. Besonders derart einfache, aber doch schon fast philosophische

Probleme führen sicher auch im Schulunterricht zu ertragreicheren Diskussionen, als eine zusätzliche Komplexifizierung theoretischer Hintergründe.

Wie bereits erwähnt stößt, das Konzept des teilspielperfekten Nash-Gleichgewichts etwa bei Spielsituationen an seine Grenzen, in denen Informationsbezirke mehrere Entscheidungsknoten umfassen. Derartige Spiele führen oft dazu, dass jedes Nash-Gleichgewicht zugleich ein teilspielperfektes Nash-Gleichgewicht ist. Dies ist insbesondere der Fall, wenn das gesamte Spiel nur aus einem einzigen Teilspiel, nämlich dem Spiel selbst, besteht. Will man derartige Nash-Gleichgewichte weiter verfeinern, so kommt man im Allgemeinen wiederum nicht an bedingten Wahrscheinlichkeiten vorbei. Die Spieler müssen, wie etwa in Beispiel 4.4.3, ihre Situation einschätzen und Wahrscheinlichkeiten wählen, mit denen sie sich in einem bestimmten Knoten befinden. Basierend auf diesem erweiterten Wahrscheinlichkeitsbegriff, lässt sich das Konzept des sogenannten sequentiellen Gleichgewichts erstellen. Eine genaue Charakterisierung dieses erst 1982 entwickelten Refinements findet sich etwa bei Holler und Illing [2003, S. 113-121].

Auch wenn Hauer-Typpelt [Internetquelle 2] zurecht unterstreicht, dass der seit 2004 gültige neue Lehrplan im Unterrichtsfach Mathematik die Auseinandersetzung mit bedingter Wahrscheinlichkeit fordert und dieser Themenbereich eine Möglichkeit darstellt, lebendigen Mathematikunterricht zu gestalten, soll an dieser Stelle erneut auf das Arbeiten mit bedingten Wahrscheinlichkeiten verzichtet werden. Dies soll aber keineswegs heißen, dass die Behandlung bedingter Wahrscheinlichkeiten in Verbindung mit Spieltheorie im Unterricht ausgeschlossen ist. Um nicht den Blick für das Ganze zu verlieren ist es einfach notwendig, Abstriche zu machen.

Wir wollen aber anhand der folgenden auf Holler und Illing [2003, S.114-115] zurückgehenden Erweiterung des Beispiels *Terminkonflikt* [Beispiel 4.5.1] das eben geschilderte Problem des Konzepts der Teilspielperfektheit verdeutlichen:

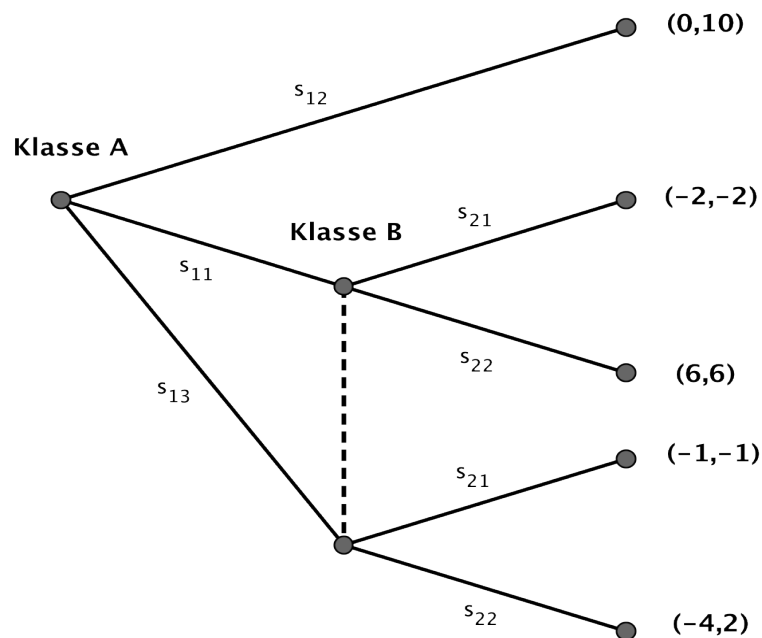


Abbildung 19: Erweiterung von Beispiel 4.5.1

In der in Abbildung 19 dargestellten Situation gibt es wie schon in Beispiel 4.5.1 zwei Nash-Gleichgewichte, nämlich die beiden Strategiekombinationen (s_{12}, s_{21}) und (s_{11}, s_{22}) . Wie schon in Beispiel 4.5.1 lässt sich ersteres rational nicht wirklich begründen, steckt doch bloß eine leere Drohung dahinter. Das Kriterium der Teilspielperfektheit hat in Beispiel 4.5.1 schließlich zum Ausschluss dieses unplausiblen Gleichgewichts geführt. In der nun dargestellten Erweiterung erweist sich dieses Konzept jedoch als sinnlos. Da das gesamte Spiel bloß aus einem Teilspiel, nämlich dem Spiel selbst, besteht, sind folglich beide Gleichgewichte teilspielperfekt. Das angesprochene Refinement des sequentiellen Gleichgewichts schließt nun derartige unplausible, aber teilspielperfekte Gleichgewichte aus.

Ein weiteres Kriterium zum Ausschluss unplausibler Gleichgewichte geht in seiner ursprünglichen Form auf Reinhard Selten zurück und ist unter dem treffenden Begriff der *trembling-Hand* bekannt [Holler / Illing 2003, S. 103-105]. Im Wesentlichen verlangt diese Art der Perfektheit den jeweiligen Gleichgewichten eine gewisse Stabilität bei Fehlern der Gegenspieler ab, wie aus folgender Definition hervorgeht:

Definition 4.6.1 Trembling-Hand-Perfektion

Eine Strategiekombination s^ ist ein trembling-hand-perfektes Nash-Gleichgewicht, wenn für jeden beteiligten Spieler seine zu diesem Nash-Gleichgewicht gehörige Strategie auch dann noch die beste Antwort auf die Strategiewahl der anderen Spieler ist, wenn es eine „geringe“ Wahrscheinlichkeit gibt, dass ein Gegner von seiner Gleichgewichtsstrategie abweicht. [Riechmann 2010, S. 53]*

Diese Definition – speziell die Verwendung des Wortes „gering“ - entspricht gewiss nicht den Ansprüchen höchster mathematischer Exaktheit, dennoch genügt sie in diesem Fall unseren Ansprüchen. Ziel dieses Konzepts ist es also, ein Nash-Gleichgewicht zu finden, das gegen gewisse irrationale Fehlritte einzelner Mitspieler immun ist. Wie noch zu zeigen sein wird, kann diese Erweiterung des Nash-Gleichgewichts ebenso zur weiteren Verfeinerung des teilspielperfekten Nash-Gleichgewichts verwendet werden. Zunächst soll aber anhand eines Beispiels in strategischer Form die Grundidee der Trembling-Hand-Perfektion vermittelt werden:

Beispiel 4.6.2 Wem kann man trauen?

Zwei Spieler A und B sehen sich mit folgender abstrakter Spielsituation konfrontiert, in die sich natürlich wieder die eine oder andere nette Geschichte hineininterpretieren ließe:

	b_1	b_2
a_1	(5,5)	(0,5)
a_2	(5,0)	(2,2)

Wie schnell zu erkennen ist, besitzt Beispiel 4.6.2 zwei Nash-Gleichgewichte, nämlich in (a_1, b_1) und (a_2, b_2) . Es stellt sich nun die Frage, ob es sich bei ersterem der beiden Gleichgewichte, also jenem mit den höheren Auszahlungen auch um ein trembling-hand-perfektes Gleichgewicht handelt. Zu diesem Zweck soll in Anlehnung an Rieck [2010, S. 247-248] das Spiel wie folgt untersucht werden:

Man nehme an, dass Spieler B nicht notwendigerweise zu trauen ist. D.h. es ist für Spieler A nicht unbedingt sicher, dass sich Spieler B tatsächlich für die Strategie b_1 entscheidet. Es gibt also ein kleines Restrisiko, dass sich B zu Ungunsten von A unerwarteterweise für die Strategie b_2 entscheidet. B spielt gewissermaßen die Strategie b_2 mit einer sehr geringen Wahrscheinlichkeit $\varepsilon > 0$ und dementsprechend die Strategie b_1 mit der Wahrscheinlichkeit von $1 - \varepsilon$. Wollen wir, basierend auf dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung, die erwarteten Auszahlungen für Spieler A berechnen, um zu sehen, ob es sich in Anbetracht der Umstände für Spieler A lohnt, die Strategie a_1 zu wählen:

$$u(a_1) = (1 - \varepsilon) \cdot 5 \geq u(a_2) = (1 - \varepsilon) \cdot 5 + \varepsilon \cdot 2$$

Da die obige Ungleichung für $\varepsilon > 0$ niemals erfüllt werden kann, ist es für Spieler A *sicherer* die Strategie a_2 zu wählen. Existiert also eine geringe Wahrscheinlichkeit, dass Spieler B von seiner Strategie b_1 absieht, hält das Konzept des Nash-Gleichgewichts diesem Strategiewechsel nicht stand. Somit handelt es sich bei der Kombination (a_1, b_1) um kein trembling-hand-perfektes Nash-Gleichgewicht. Bei Übertragung dieses Konzepts auf die extensive Spielform ergibt sich wiederum eine Verfeinerungsmöglichkeit teilspielperfekter Nash-Gleichgewichte, wie folgendes einfaches Beispiel [Riechmann 2010, S.53] zeigt:

Beispiel 4.6.3 Trembling-Hand-Perfektion in extensiver Form

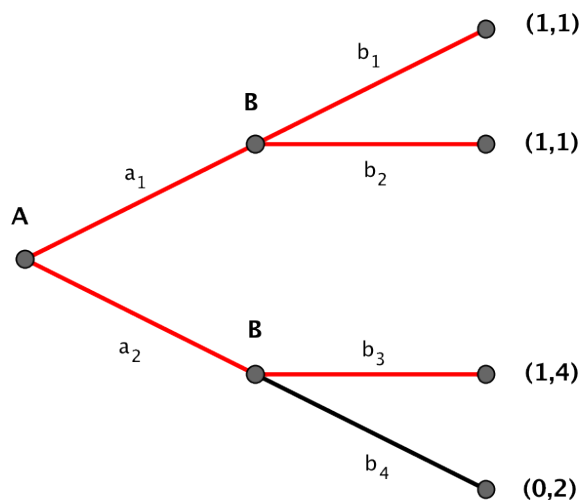


Abbildung 20: Trembling-Hand-Perfektion in extensiver Form

Wendet man Zermelos Algorithmus auf die in Beispiel 4.6.3 gegebene Situation an, so stellt sich heraus, dass in diesem Spiel vier teilspielperfekte Gleichgewichte existieren. Nämlich in (a_1, b_1, b_3) , (a_1, b_2, b_3) , (a_2, b_1, b_3) und in (a_2, b_2, b_3) . Bestehen jedoch auch nur geringste Zweifel betreffend der Rationalität von Spieler B, so wird sich Spieler A niemals für die Strategie a_2 entscheiden, da hier mit der Strategie b_4 eine Auszahlung von 0 droht. Folglich sind die beiden Gleichgewichte, bei denen Spieler A die Strategie a_2 spielt, nicht trembling-hand-perfekt. Das Konzept der Trembling-Hand-Perfektion schließt also auch jene Gleichgewichte aus, die durch unnötiges Risiko gekennzeichnet sind. Warum sollte Spieler A die riskantere Option a_2 ziehen, wenn ohnehin keine höhere Auszahlung als mit der Sicherheitsvariante a_1 möglich ist? Es gibt keinen rationalen Grund dafür.

Neben den bisher vorgestellten Refinements gibt es noch eine Vielzahl an anderen. Einen guten Überblick liefern hier beispielsweise Holler und Illing [2003, S. 110-134] oder auch Fudenberg und Tirole [1991, S. 321-364]. Wie bereits angekündigt sollen im nun folgenden Kapitel noch etwas die Grenzen ausgelotet werden, die dem Rationalisierungsprozess des Nash-Gleichgewichts definitiv gesetzt sind.

4.7 *Echt paradox – Grenzen des Rationalisierungsprozesses*

Zunächst soll das sogenannte Chain-Store-Paradoxon vorgestellt und diskutiert werden, das in seiner ursprünglichen Form auf den bereits mehrfach erwähnten Spieltheoretiker Reinhard Selten zurückgeht [Rieck 2010, S.235]. In einer abgeänderten Form wird diese Spielsituation auch oft als Tausendfüßlerspiel bezeichnet [Binmore 2007, S. 52-56].

Beispiel 4.7.1 Chain-Store-Paradoxon

Das bereits in mehreren Beispielen aufgetretene Unternehmen Makrosoft ist zweifelsohne ein globales Unternehmen und besitzt in nicht weniger als 100 Ländern eine Monopolstellung. Jedoch ist jede dieser 100 Niederlassungen einem konkurrierenden, lokalen Mitbewerber ausgesetzt. Aufgrund des großen finanziellen Potentials von Makrosoft kann aber jedes dieser Konkurrenzunternehmen mit einer

teuren Werbekampagne, besser gesagt mit einer regelrechten Abwehrschlacht, vom Nicht-Einstieg überzeugt werden. Bei einer Anzahl von 100 Niederlassungen fällt dies natürlich finanziell gehörig ins Gewicht. Somit besteht auch die Möglichkeit die Werbekampagne in gewissen Ländern sein zu lassen und sich mit der betreffenden konkurrierenden Firma den Markt zu teilen. Wie soll sich Makrosoft nun verhalten?

Die in Beispiel 4.7.1 dargestellte Situation soll nun aus zwei verschiedenen Blickwinkeln betrachtet werden: Zunächst kann man davon ausgehen, dass Makrosoft jeden potentiellen Mitbewerber abwehren wird. Der Abwehrkampf stellt zwar eine kurzzeitige finanzielle Belastung dar, ist aber dennoch die rationalere Strategie als die Teilung des Markts, da jeder Konkurrent wissen würde, wie gnadenlos Makrosoft reagiert und somit kaum in Versuchung gelangen würde, tatsächlich in den Markt einzutreten. Dieser erste Zugang beruht also darauf, dass Makrosoft die Monopolstellung um jeden Preis halten will. Derartige Vorgehensweisen stehen auch in realen Situationen oftmals an der Tagesordnung wirtschaftlicher Praxis. Von Rieck [2010, S. 235] wird dies (fraglicherweise) sogar als *gesunder Menschenverstand* bezeichnet.

Betrachtet man jedoch die Situation von einem anderen Standpunkt, so ergibt sich folgender interessanter Ausgang: Man stelle sich zunächst die Situation als zusammenhängende Ereigniskette vor (*Abbildung 21*), die Makrosoft schrittweise durchqueren muss. Es ist also zunächst im ersten Land die Entscheidung zu fällen, ob man die Werbekampagne startet oder sich den Markt teilt, dann im zweiten Land und so weiter. Die letzte Entscheidung wird schließlich im hundertsten Land getroffen.

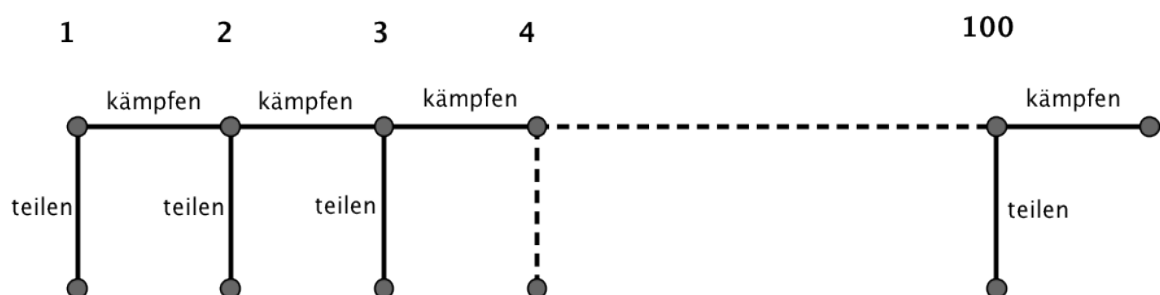


Abbildung 21: Chain-Store-Paradoxon

Wie aus Abbildung 21 hervorgeht, hat Makrosoft in jedem der insgesamt hundert Entscheidungsknoten die Wahl zwischen den Aktionen *kämpfen* und *teilen*. Ein vollständiger Handlungsplan Makrosofts muss also für jeden dieser Entscheidungsknoten eine der beiden Aktionen vorschreiben. Je nach Handlungsplan hat dies eine bestimmte Auszahlung zur Folge, auf die hier aus Gründen der Übersichtlichkeit getrost verzichtet werden kann. Wichtig ist bloß, dass die Strategie *kämpfen* immer eine lokal niedrigere Auszahlung, als die Strategie *teilen* ergibt. Betrachtet man die dargestellte Chain-Store-Situation nun ausgehend vom hundertsten Knoten mittels der bereits vorgestellten Methode der Rückwärtsinduktion, so ergibt sich folgendes Bild:

Makrosoft würde im letzten Entscheidungsknoten aufgrund der rational niedrigeren Auszahlung wohl kaum die Aktion *kämpfen* wählen, sondern sich den Markt mit dem potentiellen Konkurrenten teilen. Noch dazu hätte die Aktion *kämpfen* in diesem Fall auch keine abschreckende Wirkung mehr. Mit diesem Wissen über die Vorgehensweise im letzten Knoten, das natürlich auch die regionalen Konkurrenten besitzen, wird nun gewissermaßen der vorletzte Entscheidungsknoten zum letzten. Es hat schließlich wenig Sinn den letzten Konkurrenten abzuschrecken, wenn dieser ohnehin davon ausgehen kann, dass sich Makrosoft im letzten Land den Markt teilt. Somit wird sich Makrosoft auch im vorletzten Land den Markt teilen. Diese Argumentation lässt sich nun schrittweise fortsetzen. Schließlich gelangt man zum ersten Knoten, wo sich der Monopolist Makrosoft ebenfalls für eine Marktteilung aussprechen wird. Die Strategie, die in jedem Entscheidungsknoten die Aktion *teilen* vorschreibt, ist somit eine Gleichgewichtsstrategie. Denkt man an Zermelos Algorithmus, so ist ersichtlich, dass es sich sogar um ein teilspielperfektes Gleichgewicht handelt. In Anbetracht des ersten ebenfalls plausibel erscheinenden Zugangs muss die Frage gestellt werden, ob hier das Konzept der Teilspielperfektheit überhaupt angebracht ist. Wird sich ein *rationaler* Monopolist in einer derartigen Situation tatsächlich den Markt in jedem der hundert Länder teilen? Diese Frage lässt sich wohl schwer mit *ja* beantworten.

Tatsächlich beruht das Problem im vorherigen Beispiel auf dem teilweise problematischen Konzept der Rückwärtsinduktion, wie Rieck [2010, S. 239-241] bemerkt. Im Unterschied zum mathematischen Beweisverfahren der vollständigen Induktion arbeitet die Rückwärtsinduktion von hinten nach vorne. Dies bringt das Problem mit sich, dass sich der Induktionsanfang der Rückwärtsinduktion am eigentlichen Spielende befindet. Um dieses Spielende überhaupt zu erreichen wird

vorausgesetzt, dass im vorhergehenden Entscheidungsknoten eine Entscheidung getroffen wurde, die das Erreichen des Spielendes gewährleistet. Dieser Prozess lässt sich bis zum Spielanfang fortsetzen. Es kann also durchaus passieren, dass der Induktionsanfang der Rückwärtsinduktion aufgrund der vorgeschriebenen Rationalität nicht zwingend erreicht werden muss. Dementsprechend sind paradoxe Situationen vorprogrammiert. Einen Ausweg, wenn auch keine Lösung, derartiger Probleme bietet die etwa bei Holler und Illing vorgestellte Agenten-Normalform [Holler / Illing 2003, S. 123-124]. Eine andere Möglichkeit derartig paradoxe Situationen aus dem Weg zu räumen zeigt das folgende, auf Rieck [2010, S. 240] zurückgehende, amüsante Beispiel:

Beispiel 4.7.2 Schulfest Paradoxon

Die Veranstalter des Schulfests sehen sich Jahr für Jahr mit dem Problem des Aufräumens am Ende des Festes konfrontiert. Da jeder Gast weiß, dass die letzten verbleibenden Festbesucher höchstwahrscheinlich zum Zusammenräumen eingeteilt werden, will keiner bis zum angekündigten Schluss um 12:00 Uhr bleiben. Jeder will der unangenehmen Situation aus dem Weg gehen und geht ein wenig vor Ende des Schulfests.

Da es sich bei den Gästen um lauter Kenner spieltheoretischer Methoden handelt, weiß natürlich jeder dass alle Gäste früher gehen wollen. Jeder Festteilnehmer will also noch etwas früher gehen. Spielt man diesen Gedanken mittels Rückwärtsinduktion weiter, gelangt man schlussendlich an den Beginn des Schulfestes, das dann leider ohne Gäste stattfinden muss.

Dieses Problem lässt sich allerdings mit einem klugen Schachzug der Festveranstalter ein für alle Mal aus dem Weg räumen. Es wird einfach kein festes Ende der Schlussfeier vorgegeben. Somit weiß auch keiner der Gäste, wann mit dem Aufräumen begonnen wird. Einem tollen Schulfest mit vielen Gästen steht somit nichts mehr im Weg.

Schlussendlich soll noch ein letztes paradoxes Beispiel vorgestellt werden, das sich ebenfalls immer wieder in unterschiedlichen Ausführungen präsentiert. In seiner ursprünglichen Form ist es etwa bei Sieg [2000, S. 28-29] zu finden. Diese Spielsituation eignet sich aufgrund ihrer Einfachheit zudem recht gut um spieltheoretische Lösungskonzepte mit dem Verhalten realer Menschen zu vergleichen, wenngleich die dabei erzielten Ergebnisse nicht als direkte Auskunft über die

Plausibilität des gegebenen Lösungskonzepts verstanden werden dürfen. Zusätzliche Erkenntnisse liefern derartige empirische Untersuchungen jedoch allemal.

Beispiel 4.7.3 Das Ebay Problem

Die Internetplattform Ebay hat immer wieder tolle Schnäppchen zu bieten. Wir wollen anhand einer drastisch vereinfachten Situation erkunden, warum es oft zu derart günstigen Preisen kommen kann.

Zwei Anbieter A und B stellen unabhängig voneinander eine uralte Briefmarke aus dem Zeitalter der österreichisch-ungarischen Monarchie zum Verkauf bereit. Blöderweise handelt es sich mehr oder weniger um ein und dieselbe Marke. Da es für derartige Marken nur einen potentiellen Kunden gibt, stellt sich nun für beide die Frage um welchen Betrag sie die Marke anbieten sollen. Es ist natürlich klar, dass derjenige Anbieter, der den niedrigeren Betrag wählt, seine Marke verkaufen wird, während der andere leer ausgeht. Der potentielle Kunde gibt in seiner Kundenbeschreibung zusätzlich an, dass er bei einem Preis, der sich „im realistischen Rahmen“ bewege, durchaus dazu bereit sei beide Marken zu kaufen.

Anzumerken ist noch, dass der Preisrahmen für Marken zwischen 10 und 200 € festgelegt ist. Welchen Betrag sollen die beiden Anbieter A und B nun verlangen?

Auf den ersten Blick erscheint es durchaus plausibel, dass beide Anbieter 200 € verlangen. Hier würde nämlich die Möglichkeit bestehen, dass der Kunde beide Marken kauft. Jedoch stellt sich die Frage, ob die 200 € nicht doch eher zu viel sind. Was ist schon ein *realistischer Rahmen*? Dementsprechend würde es etwa für Anbieter A besser sein nur 199,99 € zu verlangen. Jedoch lassen sich dieselben Überlegungen auch auf Anbieter B übertragen. Dieser würde folglich 199,98 € verlangen. Führt man diese Überlegung entsprechend oft durch, gelangt man schließlich zu dem Punkt, an dem sowohl Spieler A, als auch Spieler B 10 € verlangen. Hier kann schon eher von einem *realistischen Preis* gesprochen werden, da es sich schließlich um die Untergrenze im vorgegebenen Preisrahmen handelt. Die beiden Anbieter können also bei Wahl dieser Strategie von einem Gewinn von 10 € ausgehen. Zwei rational agierende Anbieter würden es also nicht wagen, mehr als 10 € zu verlangen. Der Kunde bekommt somit in der gegebenen Situation zwei Marken zum Preis von 20 €. Vielleicht hätte er sogar 400€ bezahlt? Das ganze Spiel hängt hier vom Begriff des *realistischen Rahmens* ab,

der vom potentiellen Kunden geschickt eingesetzt wurde. Hätte er nämlich einen fixen Betrag von beispielsweise 50 € pro Marke angegeben, so würden die zuvor angestellten Überlegungen beim Preis von jeweils 50 € enden.

Wie sieht nun die statistische Untersuchung derartiger empirisch untersuchter Spielsituationen aus? Von Rieck [2010, S. 241-244] wurde ein ähnliches Spiel mit mehreren Probanden durchgeführt. Tatsächlich wählen die Testpersonen entgegen den spieltheoretischen Konzepten in der Mehrheit eher hohe Beträge. Überträgt man die Ergebnisse auf das hier angeführte *Ebay Problem*, so würden sich also scheinbar nur die wenigsten Versuchspersonen für einen Betrag von 10 € entscheiden.

Es kann jedoch aus diesen Ergebnissen nicht gefolgert werden, dass sich die Spieltheorie mit irrationalen und unrealistischen Phänomenen beschäftigt. Es ist ganz einfach so, dass in der Alltagswelt die durch *Common Knowledge* und *(im)perfekte Information* gegebenen Voraussetzungen nicht immer zu hundert Prozent erfüllt sind. Wie anhand der Trembling-Hand-Perfektion gezeigt wurde, können geringste Zweifel der einzelnen Spieler zu Problemen des gesamten Lösungskonzepts führen. Die Welt und damit das Verhalten der Menschen lässt sich nicht durch gänzlich rationale Spiele darstellen [Merö 2000, 233ff]. Auch dann nicht, wenn man das Konzept des Nash-Gleichgewichts immer weiter verfeinert. Jede weitere Verfeinerung bringt nämlich auch Probleme mit sich, wie anhand der Beispiele in diesem Kapitel deutlich geworden ist.

Dennoch ermöglicht es die Spieltheorie, über den Weg der Rationalität auch scheinbar irrationale Handlungsweisen zu beschreiben und zu verstehen. Das Leben ist also vielleicht kein (rationales) Spiel, es lässt sich aber innerhalb gewisser Grenzen über den Umweg rationaler Spiele besser verstehen. Somit stellt Spieltheorie eine nicht zu unterschätzende Möglichkeit dar, das folgende in den Bildungs- und Lehraufgaben des AHS Lehrplans für Mathematik festgehaltene Anliegen umzusetzen:

„Die mathematische Beschreibung von Strukturen und Prozessen der uns umgebenden Welt, die daraus resultierende vertiefte Einsicht in Zusammenhänge und das Lösen von Problemen durch mathematische Verfahren und Techniken sind zentrale Anliegen des Mathematikunterrichts.“ [Internetquelle 1, S. 1]

V. Umsetzung im Unterricht – Ein didaktischer Kommentar

Wie bereits im ersten Abschnitt erwähnt wurde, versteht sich diese Arbeit keinesfalls als Plädoyer für die Aufnahme *aller* bisher erwähnten Aspekte in den Mathematikunterricht der AHS Oberstufe. Vielmehr sollen sorgfältig *ausgewählte* Ideen und Inhalte eine Bereicherung für den regulären Mathematikunterricht oder für den Wahlpflichtgegenstand Mathematik in der Sekundarstufe II darstellen. Auch die Fachbereichsarbeit, als mögliche Herangehensweise, soll hier nicht unerwähnt bleiben. Vielleicht ist es an dieser Stelle sogar schon gelungen, die eine oder andere Lehrperson von den Vorzügen spieltheoretischer Ideen zu überzeugen. Bevor nun in Kapitel 5.3 eine konkrete Liste mit Gründen, die für eine Umsetzung von Spieltheorie im Unterricht sprechen, angeführt wird, soll zunächst noch auf benötigte Voraussetzungen und den Bezug zum aktuellen Lehrplan für Mathematik in der AHS Oberstufe [Internetquelle 1] eingegangen werden.

5.1 Spieltheorie und der Lehrplanbezug

Bereits am Ende des vorherigen vierten Abschnitts wurde ein Aspekt aus den Bildungs- und Lehraufgaben des AHS Oberstufen Lehrplans für Mathematik zitiert. Demnach ist unter anderem *das mathematische Beschreiben von Strukturen und Prozessen der uns umgebenden Welt und die daraus resultierende Einsicht in Zusammenhänge*, eines der zentralen Anliegen des Mathematikunterrichts. Genau dies wird durch die Umsetzung von Spieltheorie im Unterricht erreicht.

Ausgehend von einem realen Problem, meist einer Entscheidungssituation mit zwei oder mehreren Beteiligten, wird ein mathematisches Modell konstruiert, das den realen Sachverhalt möglichst vollständig erfasst. Dieses Modell wird wiederum mittels einfacher mathematischer Verfahren – man denke etwa an Zermelos Algorithmus – analysiert. Die Einsichten bezüglich des mathematischen Modells führen schließlich, die realen Problemsituationen betreffend, zu neuen Erkenntnissen.

In weiterer Folge müssen die Ergebnisse beurteilt bzw. eingeschätzt werden, was unter Umständen wieder eine neue, bessere Modellbildung erfordern kann. Es entsteht somit ein für viele Bereiche der Angewandten Mathematik typischer Modellierungszirkel [siehe Kapitel 5.4]. Spieltheorie stellt also eine nicht zu unterschätzende Möglichkeit dar, den erkenntnistheoretischen Aspekt des Lehrplans zu erfüllen:

„Mathematik ist eine spezielle Form der Erfassung unserer Erfahrungswelt; sie ist eine spezifische Art, die Erscheinungen der Welt wahrzunehmen und durch Abstraktion zu verstehen; Mathematisierung eines realen Phänomens kann die Alltagserfahrung wesentlich vertiefen.“ [Internetquelle 1, S. 1]

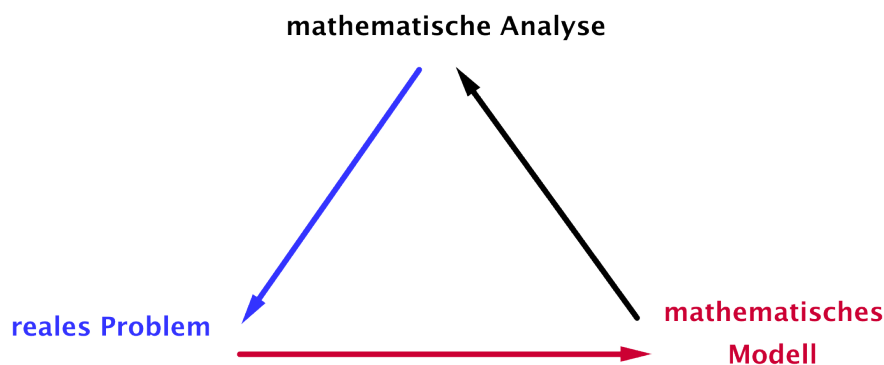


Abbildung 22: Modellierungszirkel

Neben diesen allgemeinen Aspekten des Mathematikunterrichts spiegelt sich die Bedeutung der Spieltheorie auch in den ebenfalls im Lehrplan festgehaltenen mathematischen Kompetenzen wieder. So heißt es beispielsweise zur darstellenden und interpretierenden Kompetenz:

„Darstellend-interpretierendes Arbeiten umfasst alle Aktivitäten, die mit der Übersetzung von Situationen, Zuständen und Prozessen aus der Alltagssprache in die Sprache der Mathematik und zurück zu tun haben.“ [Internetquelle 1, S. 1]

Ein Blick auf Abbildung 22 genügt, um zu erkennen, dass der geschilderte Sachverhalt genau dem für die Spieltheorie so typischen Modellierungszirkel entspricht. Auch andere mathematische Kompetenzen berühren natürlich den Bereich der Spieltheorie. Erwähnt seien hier etwa noch die formal-operative Kompetenz und vor allem das kritisch-argumentative Arbeiten. Zumeist sind die hier vorgestellten Lösungsmethoden

durch schrittweise Argumentation gekennzeichnet. So wird beispielsweise bei der Rückwärtsinduktion (oder bei Zermelos Algorithmus) eine dominierte Strategie nach der anderen ausgeschlossen und schrittweise der Weg für die Gleichgewichtsstrategie gebahnt. Kritisch-argumentatives Arbeiten findet sich jedoch bereits bei der Modellbildung und schließlich auch bei der Übertragung der Ergebnisse auf das reale Problem. Handelt es sich hier tatsächlich um ein realistisches Modell? Entsprechen die Auszahlungen in etwa den tatsächlichen Gegebenheiten? Handelt es sich bei dieser Lösung wirklich um ein rationales Vorgehen? All jene Fragen stehen ständig im Zentrum der Auseinandersetzung mit spieltheoretischen Beispielen. Man denke auch an die vielen Verfeinerungen des Nash-Gleichgewichts, die im Laufe dieser Arbeit aufgetreten sind. Hier spielt etwa die Frage nach der Plausibilität der Lösungen eine gravierende Rolle. Dort wo Spieltheorie ist, muss folglich auch stets kritisches Denken bzw. Arbeiten seinen Platz haben.

Bevor nun auf konkrete Verbindungen zum Lehrstoff der einzelnen Oberstufenklassen eingegangen wird, sollen auch die didaktischen Grundsätze des Mathematikunterrichts nicht unerwähnt bleiben:

„Im Mathematikunterricht soll verständnisvolles Lernen als individueller, aktiver und konstruktiver Prozess im Vordergrund stehen. Die Schülerinnen und Schüler sollen durch eigene Tätigkeiten Einsichten gewinnen und so mathematische Begriffe und Methoden in ihr Wissenssystem einbauen.“ [Internetquelle 1, S. 2]

Dieses Zitat charakterisiert die im Lehrplan festgehaltenen didaktischen Grundsätze. Dieses Ziel soll etwa durch Lernen im anwendungsorientierten Kontexten erreicht werden. Nun wurde im Verlauf dieses Kapitels bzw. dieser Arbeit auf das große anwendungsorientierte Potential eingegangen. Tatsächlich ermöglicht es Spieltheorie, je nach Interesse der SchülerInnen und Lehrpersonen Mathematik in jeden Lebensbereich zu transferieren. Für Spiele in strategischer Form zeigt beispielsweise Hauer-Typpelt [2009, S. 73-79], dass den Fantasien der Lehrenden nahezu keine Grenzen gesetzt sind. Neben der Analyse einer politischen Koalition und des speziell im Kalten Krieg an der Tagesordnung stehenden Wettrüstens, findet sich etwa auch ein Beispiel über die *Angst des Tormanns vorm Elfmeter*. Es bedarf keiner weiteren Argumentation, dass derartige

Spielsituationen aus der Lebenswelt der SchülerInnen ein überaus großes Motivationspotential aufweisen.

Auch der im Lehrplan festgehaltene fächerübergreifende Aspekt bzw. das Lernen unter vielfältigen Aspekten sind charakteristische Elemente von Spieltheorie im Unterricht. So wurden beispielsweise bereits Anwendungen aus der Politik, der Wirtschaft und sogar aus der Biologie erwähnt, bzw. anhand konkreter Beispiele analysiert. Auch eine Verbindung zur Informatik ist in vielen Bereichen möglich, womit wir beim Lernen mit technologischer bzw. medialer Unterstützung wären. Speziell wenn es um statistische Elemente geht, kann die Verwendung von Tabellenkalkulationsprogrammen durchaus sinnvoll sein, wie etwa Ableitinger [2009, S. 118ff] bei der Untersuchung von relativen Häufigkeiten im sogenannten *Schwarzfahrerspiel* unterstreicht.

Auch das Lernen in unterschiedlichen Sozialformen stellt einen wesentlichen didaktischen Grundsatz des aktuellen Lehrplans dar. Immer wieder ist in diesem Zusammenhang von der sogenannten *Methodenvielfalt* die Rede, die leider nur in den seltensten Fällen auch in die Tat umgesetzt wird. Timo Leuders [2001, S. 148] meint etwa, *dass erfolgreiches Lernen erst durch eine Vielfalt von Unterrichtsmethoden, bei denen sowohl selbsttätige als auch gelenkte Lernprozesse flexibel und situationsabhängig eingesetzt werden, möglich wird.*

Speziell die Spieltheorie bietet hier einige Möglichkeiten, aus dem klassischen lehrerzentrierten Mathematikunterricht auszubrechen, der oft an Monotonie nicht zu übertreffen ist. Neben der selbständigen, kreativen Modellbildung, auf die noch einzugehen sein wird, kann hier auch das konkrete Durchspielen bzw. die Simulation einzelner Probleme erwähnt werden. Im Sinne des eben behandelten fächerübergreifenden Aspekts, sind durchaus auch Projekte gemeinsam mit anderen Lehrpersonen vorstellbar. Wie immer spielt hier das jeweilige Engagement der Lehrenden eine entscheidende Rolle.

Als weitere Methode sei zuletzt noch die Diskussion mathematischer Themen erwähnt, die oft viel zu kurz kommt. Speziell in Hinblick auf die Realitätsnähe von diversen Modellen, oder auch bezüglich der Frage nach dem rationalen Verhalten der einzelnen Spieler, können sicherlich ertragreiche Streitgespräche entstehen. Man denke etwa an eine lebhafte Diskussion über die Frage, für welche Ecke sich der Tormann beim Elfmeter entscheiden soll, oder an eine Podiumsdiskussion zum Tischfußballdilemma. Derartige Erlebnisse bleiben den SchülerInnen zweifelsohne länger in Erinnerung, als

ein langweiliger und einseitiger Lehrervortrag über die Bedeutung des Nash-Gleichgewichts.

Es besteht also an dieser Stelle wohl kein Zweifel mehr darüber, dass der Themenbereich der Spieltheorie den Anforderungen des aktuellen Mathematiklehrplans der AHS Oberstufe mehr als gerecht wird. Jedoch könnten kritische Stimmen anmerken, dass es im konkreten Lehrstoff des Lehrplans [Internetquelle 1, S. 3-6] keinen direkten Bezug zur Spieltheorie gibt.⁹ Derartigen Behauptungen kann etwa über die unübersehbare Verbindung von Spieltheorie und Optimierung begegnet werden. Im Lehrstoff der siebten Klasse sind Optimierungsaufgaben fester Bestandteil von angewandter Differentialrechnung. Humenberger [1998, S. 101-108] weist jedoch in seinem Aufsatz *Optimieren im Mathematikunterricht* zurecht darauf hin, dass die fundamentale Idee des Optimierens weit mehr sei, als das Nullsetzen der ersten Ableitung. Es gibt ungleich mehr Möglichkeiten sich Optimierungsproblemen zu nähern.

Eine davon ist ohne Zweifel die Spieltheorie. In sämtlichen bisher vorgestellten Beispielen ging es darum, *optimale* Strategien zu finden. Strategien, in denen die einzelnen Spieler wechselseitige beste Antworten spielen, können meist zurecht als *optimal* bezeichnet werden. Wenngleich die Pareto-Ineffizienz mancher Strategiekombinationen – man denke an das Tischfußballdilemma – den Begriff des Optimums ins Schwanken bringen. Dennoch stellt die Spieltheorie sicherlich eine sinnvolle Möglichkeit dar, Optimierungsprobleme in ein anderes Licht zu rücken und einer gewissen Monotonie vorzubeugen.

5.2 Die erforderlichen Vorkenntnisse

Einer der großen Vorteile von Spieltheorie besteht sicherlich darin, dass es keinerlei großer mathematischer Vorkenntnisse bedarf. Dies gilt sowohl für Schülerinnen und Schüler, als auch für die Lehrpersonen.

Für die Behandlung von gemischten Strategien sollten die SchülerInnen lediglich Erfahrungen im Lösen und Interpretieren von Gleichungssystemen haben. Da dies jedoch laut AHS Lehrplan [Internetquelle 1, S. 4] bereits in der fünften Klasse

⁹ Im Lehrplan des Wahlpflichtgegenstands Mathematik wird Spieltheorie sehr wohl explizit erwähnt! [Internetquelle 8]

vorgesehen ist, steht der Umsetzung von Spieltheorie in der gesamten AHS Oberstufe nichts im Weg. Selbst Begriffe wie *Wahrscheinlichkeit* oder *Erwartungswert*, die erst im Lehrstoff der sechsten Klasse erstmals auftreten, sind keine Voraussetzung. Hauer-Typelt und Ableitinger weisen etwa darauf hin, dass sich die Spieltheorie auch dazu eignet, diese Begriffe einzuführen [Internetquelle 3, S. 10]. Eventuell kann auch der (Um)Weg über relative Häufigkeiten gewählt werden. Ableitinger [2009] gewährleistet beispielsweise mit seinem *Schwarzfahrerspiel* nicht nur einen Einblick in die Grundzüge der Spieltheorie, sondern verdeutlicht auch den Zusammenhang zwischen relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeit. Spieltheorie stellt also auch eine Möglichkeit dar vom traditionellen Weg abzuweichen und den zentralen Begriff der Wahrscheinlichkeit auf eine andere Art und Weise zu motivieren.

Auch der Bereich der extensiven Spielformen bedarf keiner weiteren Vorkenntnisse. Im Gegensatz zu Spielen in strategischer Form treten jedoch hier Spielbäume auf, die wohl ansonsten erst in Zusammenhang mit dem Ziehen von geordneten und ungeordneten Stichproben in der sechsten oder spätestens siebten Klasse auftreten. Da es sich beim graphentheoretischen Begriff des Baums um ein Instrumentarium handelt, das nicht bloß im Bereich der Wahrscheinlichkeitstheorie eine übersichtliche Erfassung diverser Gegebenheiten ermöglicht, spricht jedoch nichts gegen eine Einführung von Spielbäumen unabhängig vom Themenkomplex der Stochastik. Denn wie bereits mehrfach erwähnt wurde, stellt *das mathematische Beschreiben von Strukturen und Prozessen der uns umgebenden Welt* eines der zentralen Anliegen des Lehrplans dar. Baumdiagramme bieten eine tolle Möglichkeit diesen Anforderungen gerecht zu werden. Wie vielfältig dabei die Anwendungen sein können wurde in Abschnitt IV mehr als deutlich.

Zusammenfassend spricht also, bei Wahl geeigneter, altersgemäßer Beispiele, nichts dagegen, Spieltheorie und insbesondere Spiele in extensiver Spielform bereits in einer fünften Klasse AHS einzuführen. Auch Hauer-Typelt und Ableitinger [Internetquelle 3, S. 10] bestätigen, basierend auf eigenen Unterrichtserfahrungen mit fünften Klassen, dass es zumindest bezüglich des mathematischen Rüstzeugs keinerlei Gründe gäbe, bis zur siebten oder achten Klasse mit dem Einstieg ins Thema zu warten. Vielleicht hat das eine oder andere Beispiel sogar schon dazu beigetragen, sich einen möglichen Unterrichtseinstieg zu überlegen. In den folgenden Kapiteln wird jedenfalls noch die eine oder andere Idee bezüglich der Umsetzung von extensiven Spielformen im Unterricht vorgestellt.

5.3 Jetzt aber konkret – Warum überhaupt Spieltheorie im Unterricht?

- Die SchülerInnen können Strukturen und Prozesse der Alltagswelt mittels geeigneter Darstellungsformen (Spielbaum, Matrix) erfassen und modellieren.
- Die SchülerInnen können (Modelle von) Entscheidungssituationen mit mathematischen Werkzeugen analysieren und die neuen Erkenntnisse auf realitätsnahe Phänomene transferieren.
- Die SchülerInnen erlangen ein tieferes mathematisches Verständnis von der sie umgebenden Welt.
- Die SchülerInnen verbessern ihre formal-operative Kompetenz und lernen neue Methoden kennen (Rückwärtsinduktion, Zermelos Algorithmus).
- Die SchülerInnen können Lösungen und Lösungskonzepte kritisch hinterfragen und reflektieren.
- Die SchülerInnen setzen sich mit dem philosophischen Begriff der Rationalität auseinander und lernen die Grenzen der Mathematik kennen.
- Die SchülerInnen können die neuen Inhalte anhand von Beispielen aus ihrer eigenen Erlebniswelt kennenlernen und erfahren dadurch, dass sich Mathematik in fast jeden Lebensbereich transferieren lässt.
- Die SchülerInnen können die neuen Inhalte unter Berücksichtigung des fächerübergreifenden Aspekts kennenlernen (Biologie, Informatik, ...).
- Die SchülerInnen können die neuen Inhalte unter Berücksichtigung des Aspekts der Methodenvielfalt kennenlernen (Spiele, Diskussion, Projekte, ...).
- Die SchülerInnen lernen neben dem Nullsetzen der ersten Ableitung eine weitere Form von Optimierungsaufgaben kennen.
- Die SchülerInnen lernen einen alternativen Zugang zu gewissen Begrifflichkeiten der Mathematik kennen (Wahrscheinlichkeit, Erwartungswert, Optimierung, usw.).

5.4 *Einstiegsmöglichkeiten für die extensive Spielform – Geschichten modellieren*

Mittlerweile ist vielfach erwähnt worden, dass sich Spieltheorie, und insbesondere die extensive Spielform, sehr gut dazu eignen Prozesse der Alltagswelt zu analysieren. Dixit und Nalebuff [1995, S. 11-33] liefern etwa mit ihren *zehn Geschichten über Spieltheorie* einen recht amüsanten und spannenden Zugang zu verschiedensten Teilgebieten der Spieltheorie. Dabei gelingt es den Autoren ein abwechslungsreiches Anwendungsspektrum spieltheoretischer Problemstellungen in spannende Kurzgeschichten zu verpacken, die für eine anregende Lektüre sorgen.

Ein ähnlicher Zugang lässt sich sicherlich auch in den Unterricht transferieren. Die Schüler und Schülerinnen können ohne jegliche Vorkenntnis und selbst ohne Kenntnis des bevorstehenden Themas einfach mit einer kurzen Geschichte überfallen werden, anhand der sie zum ersten Mal mit Spieltheorie konfrontiert werden. Diese Geschichte sollte unter Berücksichtigung der extensiven Spielform am besten aus zwei oder mehreren aufeinanderfolgenden Entscheidungen für die Hauptakteure der Geschichte bestehen. Ansonsten soll die Erzählung bloß spannend sein und die Lebenswelt der Schüler und Schülerinnen berühren. Das eine oder andere bisher vorgestellte Beispiel kann ohne weiteres als Anregung verstanden werden. Aber auch kurze Kriminalgeschichten oder sogar Märchen bzw. Mythologie stecken voller Spieltheorie, wie die folgende, durch Mehlmann [2007, S. 70-71] motivierte, Geschichte zeigen soll:

Beispiel 5.4.1 *Es war einmal...*

Es war einmal vor langer Zeit die wunderschöne Alkmene, die in ihren tapferen Gatten Amphitryon unsterblich verliebt war. Der große Feldherr Amphitryon befand sich jedoch immer wieder außer Landes um seine schier unbesiegbare Armee anzuführen.

Der allmächtige Göttervater Zeus will dies mit einem hinterhältigen Plan ausnutzen: Eines Abends wolle er Alkmene in der Gestalt ihres Mannes überraschen und verführen. Alkmene, deren Treue zu Amphitryon auf dem Spiel steht, erfährt jedoch aus sicherer Quelle von den Absichten des Göttervaters. Sie will sich dessen Vorgehen nicht gefallen lassen und meint, dass ein falscher Amphitryon eine falsche Alkmene verdient habe. Sie spielt deshalb mit dem Gedanken dem falschen Amphitryon ihr Double zu

schicken. Es könne nun aber durchaus sein, dass auch der echte Amphitryon früher nach Hause käme. Sie kann also nicht wissen, ob Zeus oder doch ihr Gatte vor ihr stehen. Und wie steht es um Zeus? Auch ihm ist nicht entgangen, dass er eventuell Bekanntschaft mit Alkmenes Double machen würde. Soll er sich schlussendlich zu erkennen geben und die ganze Maskerade auflösen?

Man stelle sich nun vor, dass die SchülerInnen mit dieser oder einer anderen kurzen, aber durchaus komplexen, Geschichte konfrontiert werden. Dies geschieht üblicherweise in schriftlicher Form, aber selbst die aus dem Fremdsprachenunterricht bekannte Form der *Listening-Comprehension*, bzw. des *Hörspiels*, kann für einfachere Geschichten durchaus in Betracht gezogen werden. Die SchülerInnen erhalten nun zunächst bloß die Aufgabe, den geschilderten Sachverhalt zu abstrahieren und graphisch zu erfassen. Den Fantasien sind an dieser Stelle noch keine weiteren Grenzen gesetzt. Sollte sich der gegebene Sachverhalt als zu komplex herausstellen, kann die Frage, ob sich Zeus zu erkennen geben soll, durchaus weggelassen werden.

Durch geschickte Hinweise seitens der Lehrperson kann gemeinsam mit den SchülerInnen sicherlich der Versuch gewagt werden einen Spielbaum dieser mythologischen Geschichte zu erarbeiten. Bei dieser speziellen, moralisch etwas anrühenden Gegebenheit, müssen sich die Lehrenden aufgrund der Inhalte zwar eventuell mit Gelächter und pubertären Meldungen auseinandersetzen, was aber auch dazu beiträgt, dass sich die SchülerInnen später an solche Stunden erinnern. Alles in allem soll in dieser ersten Phase der Modellbildung ein Diagramm entstehen, das im weitesten Sinne dem nun folgenden entspricht.

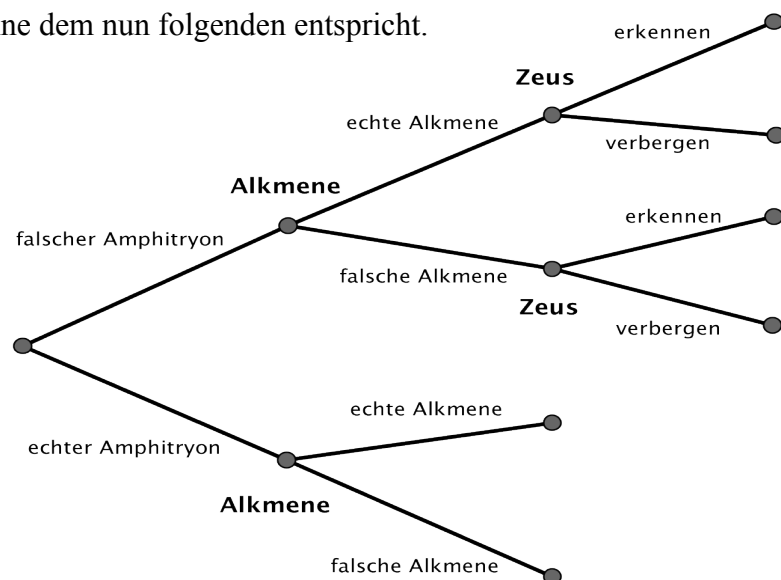


Abbildung 23: Modell 1 von Beispiel 5.4.1

Das in Abbildung 23 dargestellte Diagramm erfasst nun zunächst die grobe Struktur der gegebenen Geschichte. Es handelt sich dabei aber noch keinesfalls um einen vollständigen Spielbaum. Es fehlen neben den Auszahlungen, die erst am Ende in Angriff genommen werden, etwa auch die Angaben des jeweiligen Informationsstands. Alkmene kann nämlich in ihren Entscheidungsknoten nicht unterscheiden, ob es sich um den echten oder den unechten Amphitryon handelt. Ebenso kann Zeus in seinen beiden Entscheidungsknoten die echte Alkmene nicht von ihrem Double unterscheiden. Die Situation der beiden Akteure ist also durchaus vergleichbar. An dieser Stelle kann bereits die gestrichelte Linie als Charakterisierung von Informationsbezirken eingeführt werden. Die SchülerInnen müssen also bloß wissen, dass zwei Knoten, welche die jeweiligen Spieler nicht unterscheiden können, durch eine gestrichelte Linie erfasst werden.

Des Weiteren muss der erste Knoten im obigen Diagramm noch genauer beschrieben werden. Es hängt nämlich lediglich vom *Zufall* ab, ob der echte Amphitryon erscheint oder nicht. Da die intuitive Bedeutung von Zufall aufgrund einer großen subjektiven Spanne eher problematisch behaftet ist, muss an dieser Stelle der Wahrscheinlichkeitsbegriff bereits bekannt sein. Der echte Amphitryon kommt folglich mit einer Wahrscheinlichkeit von p und der falsche mit der Gegenwahrscheinlichkeit von $1 - p$ nach Hause.

Somit entsteht ein verfeinertes Modell der Geschichte in Beispiel 5.4.1, in dem nur noch die jeweiligen Auszahlungen fehlen.

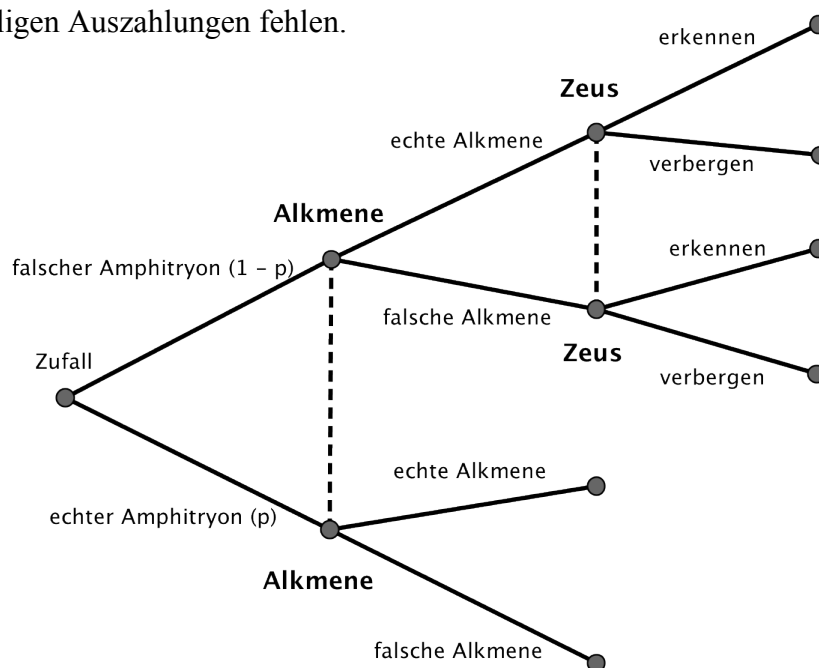


Abbildung 24: Modell 2 von Beispiel 5.4.1

Nun müssen also noch die jeweiligen Auszahlungen für Alkmene und Zeus im Baumdiagramm festgehalten werden. Die SchülerInnen kennen den Begriff der Auszahlung an dieser Stelle noch nicht. Man kann sich der Thematik etwa in heuristischer Form nähern und den Schülerinnen und Schülern folgende Fragen stellen: *In der gegebenen Geschichte gibt es sechs mögliche Ausgänge. Welche (Spiel)Ausgänge sind damit gemeint? Wie würdest du die jeweiligen Ausgänge aus der Sicht von Alkmene bzw. Zeus beurteilen? Welcher Spielausgang ist für welchen der beiden Hauptakteure „gut“ bzw. „weniger gut“ und warum?*

Die SchülerInnen setzen sich also nun mit dem Thema des Spielausgangs und der jeweiligen Auszahlung auseinander. Sie erfahren, dass ein Spielausgang eine festgelegte Kette von Entscheidungen ist. Im Folgenden sollen sie jede dieser Entscheidungsketten aus der Sicht von Zeus und Alkmene bewerten. Die SchülerInnen können bei ihrer Bewertung beispielsweise auf die beliebte Skala bestehend aus *gut*, *mittel*, *schlecht*, oder aber auf das altbewährte (umgekehrte) *Schulnotensystem* zurückgreifen. Es handelt sich bei den einzelnen Bewertungen natürlich um rein subjektive Einschätzungen der einzelnen SchülerInnen, die schlussendlich in der Gruppe und gemeinsam mit der Lehrperson zu einem gemeinsamen Modell zusammengefasst werden können. Somit haben die SchülerInnen gemeinsam mit der Lehrperson die gegebene Geschichte strukturell erfasst und mittels eines Spielbaums modelliert. Die Ausgangssituation der eigentlichen spieltheoretischen Überlegungen im Sinne der Suche nach Gleichgewichten wurde also nicht vorgegeben, sondern von den Schülerinnen und Schülern erarbeitet. Dies bringt natürlich die Schwierigkeit mit sich, dass das Ergebnis derartiger offener Aufgaben für die Lehrperson nicht bis ins Detail vorhersehbar ist. Dennoch sollte man diesem Problem nicht aus dem Weg gehen. So wird beispielsweise in Leuders [2003, S. 149] unterstrichen, *dass die SchülerInnen und Schüler Anwendungen nicht nur in Textaufgaben mit vorgegebenen Modellen kennenlernen sollen, sondern auch selbst den Modellbildungsprozess durchführen sollen.*

Im Sinne des bereits erwähnten Modellierungszirkels¹⁰ haben wir nun bereits den ersten wesentlichen Schritt gemacht. Ausgehend von einer mythologischen Geschichte ist ein

¹⁰ Weitere Verfeinerungen des Modellierungszirkels finden sich etwa bei Leuders [2003, S. 157] oder bei Ortlieb [2009, S. 5]

Spielbaum, also ein mathematisches Modell entstanden. Die SchülerInnen wissen also bereits, was ein Spielbaum ist und haben auch eine grobe Vorstellung bezüglich des Begriffs der Auszahlung, als Bewertung des subjektiven Nutzens für jeden möglichen Spielausgang und jeden der beteiligten Spieler. Bevor nun im nächsten Kapitel mittels mathematischer Analyse Lösungskonzepte erarbeitet werden, wollen wir uns kurz vergegenwärtigen, wie der vollständige Spielbaum von Beispiel 5.4.1 mit den jeweiligen Bewertungen in der Gestalt (*Alkmene*, *Zeus*) in etwa aussehen könnte:

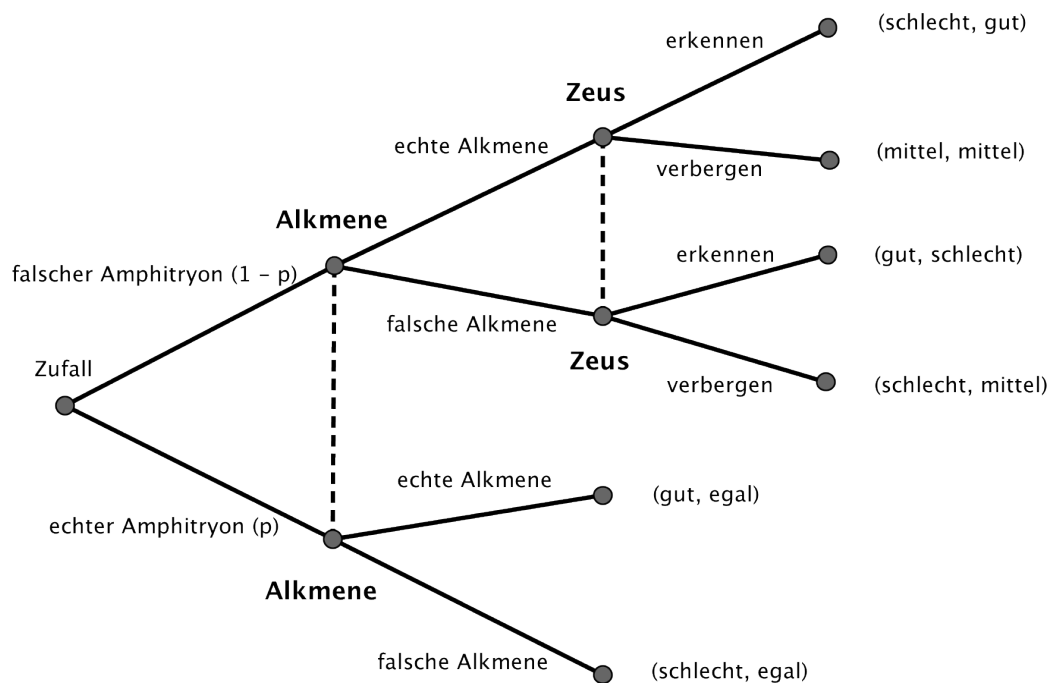


Abbildung 25: Vollständiger Spielbaum von Beispiel 5.4.1

Die einzelnen Auszahlungen in Abbildung 25 könnten etwa auf folgenden Überlegungen beruhen: Trifft ein echter Amphitryon auf die falsche Alkmene, so würde dies ohne Zweifel die Ehe zwischen den beiden gefährden. Für Alkmene wäre diese Kombination also schlecht, während Zeus dies ziemlich egal sein kann, da er ja nicht beteiligt ist. Trifft hingegen Amphitryon auf seine wahre Gattin, wäre dies natürlich gut für Alkmene, während es für Zeus wiederum egal ist.

Trifft andererseits Zeus in der Gestalt des Amphitryon ein, so resultieren die folgenden Auszahlungen daraus: Begegnet dem falschen Amphitryon die echte Alkmene und gibt sich anschließend Zeus zu erkennen, so wäre dies natürlich ein voller Erfolg für Zeus (gut), während Alkmene ihre ehelichen Versprechen verletzt hätte und auch darüber Bescheid wüsste (schlecht). Gibt sich Zeus bei der Konfrontation mit der echten

Alkmene nicht zu erkennen, hätte Alkmene zwar auch ihre ehelichen Versprechen verletzt, würde davon aber nicht erfahren (mittel). Zeus hingegen müsste auf die Genugtuung der Bloßstellung verzichten (mittel). Begegnet Zeus der falschen Alkmene und gibt sich anschließend zu erkennen, wäre dies bestimmt eine Genugtuung für die wahre Alkmene, hätte sie doch den großen Zeus an der Nase herumgeführt (gut). Andererseits wäre dies für Zeus eine schwere Niederlage (schlecht). Würde sich jedoch Zeus in diesem Fall nicht zu erkennen geben, so wäre dies für Alkmene schlecht, da sie ja nicht weiß, ob ihr Double vielleicht doch dem echten Amphitryon begegnet ist. Für Zeus wäre dieser Ausgang wiederum mittelmäßig (mittel).

In diesem Kapitel wurde gezeigt, dass es durchaus möglich ist extensive Spielformen ohne große Vorkenntnisse im Unterricht einzuführen. Dies ist in diesem Fall über die Modellierung einer mythologischen Geschichte geschehen, anhand der die Schülerinnen und Schüler zunächst die einzelnen Bestandteile eines Spielbaums kennengelernt haben. Wie bereits erwähnt, würden sich zu diesem Zweck auch andere der bisher vorgestellten Beispiele eignen. Man denke etwa an *das Problem der Kleinparteien (4.2.1)*. Auch hier könnten die Schülerinnen und Schüler, basierend auf einer Geschichte, ein mathematisches Modell formen. Sollte das Problem auftreten, dass sich eine Geschichte bzw. gegebene Entscheidungsketten als zu komplex herausstellen, kann den SchülerInnen auch der *nackte* Spielbaum präsentiert werden, in den sie basierend auf eigenen Überlegungen nur noch die Auszahlungen für die einzelnen Spielausgänge eintragen müssen.

Ein weiterer interessanter Zugang, der den umgekehrten Weg einschlägt, soll auch nicht unerwähnt bleiben und anhand der folgenden Aufgabe vorgestellt werden:

Beispiel 5.4.2 Der umgekehrte Weg

Betrachte das in Abbildung 26 dargestellte Diagramm, welches die Handlungsmöglichkeiten zweier Personen A und B beschreibt. Überlege dir eine kurze, möglichst kreative Geschichte, die zu diesem Diagramm passen könnte.

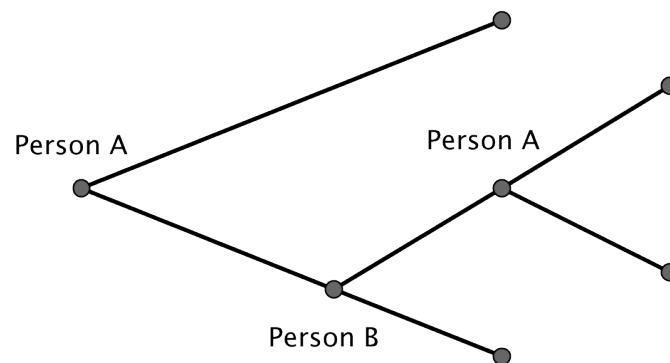


Abbildung 26: Beispiel 5.4.2

Das Diagramm in Abbildung 26 entspricht genau dem Sachverhalt in Beispiel 4.2.1. Es gibt jedoch noch eine Unmenge an anderen Geschichten, die in diesen Rahmen passen könnten. Eine derartige Aufgabenstellung erfordert genaue Überlegungen, welche Entscheidungssituationen sich überhaupt durch Spielbäume, insbesondere durch jenen Spielbaum in Abbildung 26, darstellen lassen. Sollte den SchülerInnen diese Aufgabe anfangs schwer fallen, kann ihnen als Anregung noch die eine oder andere Lösungsmöglichkeit präsentiert werden. Es sollen nun exemplarisch zwei mögliche Lösungen präsentiert werden:

Lösung 1: *Die Verfolgungsjagd*

Der üble Schurke Goldfinger ist seinem Gegenspieler James Bond auf den Fersen. Die Situation für 007 spitzt sich immer mehr zu, es gibt kaum einen Ausweg für den Agenten im Geheimdienst ihrer Majestät. Soll sich James Bond nun ergeben, oder doch noch versuchen, die Flucht zu ergreifen? Ergibt sich der Agent, so ist für Goldfinger alles nach Plan verlaufen. Flieht hingegen sein Gegenspieler, so stellt sich für den Schurken die Frage, ob er seinerseits die aufwändige Jagd fortsetzen soll. Entschließt er sich dazu, Bond weiter auf der Spur zu bleiben, so muss der Geheimagent nochmals überlegen, ob er weiter auf der Flucht bleiben soll oder nicht. Stellt er sich, so kann er zumindest gröbere Verletzungen vermeiden. Wagt er es, die Flucht fortzusetzen, so riskiert er üble Schussverletzungen.

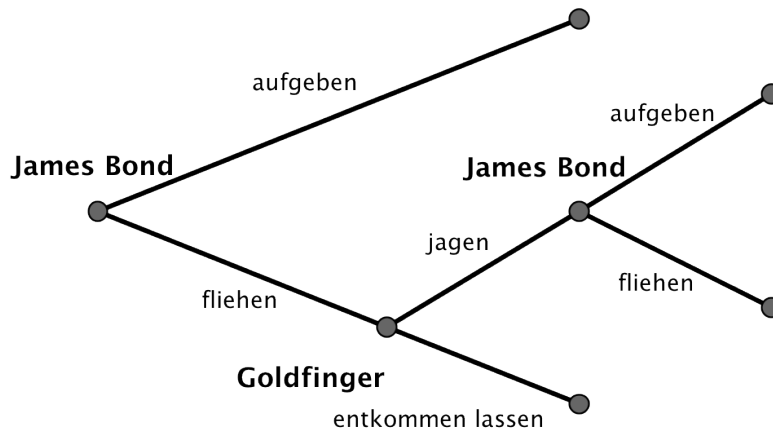


Abbildung 27: Die Verfolgungsjagd

Lösung 2: Rotkäppchen und Großmutter

Es war einmal vor langer Zeit ein kleines Mädchen, das wegen ihrer roten Kopfbedeckung von allen Rotkäppchen genannt wurde. Rotkäppchen besuchte für gewöhnlich jeden Sonntag ihre Großmutter. Doch an diesem Sonntag war das Wetter ganz besonders schlecht, so war sich Rotkäppchen nicht sicher, ob sie die beschwerliche Reise auf sich nehmen sollte oder nicht. Großmutter bereitete für ihre kleine Enkelin meistens ein leckeres Stück Kuchen vor. Doch an diesem verregneten Tag, spielte sie bereits mit dem Gedanken, dass Rotkäppchen wohl nicht kommen würde. Aus diesem Grund hatte sie bloß noch Kuchen von der Vorwoche, der nicht mehr wirklich genießbar war. Sollte sie im Fall der Fälle Rotkäppchen einen Kuchen anbieten?

Würde Rotkäppchen auch wieder kommen, wenn sie keinen Kuchen bekäme? Andererseits würde diese Gefahr auch bestehen, wenn sie ihr schlechten Kuchen anbieten würde. Aber immerhin könnte sich dann Rotkäppchen auch noch gegen den Kuchen entscheiden. Ein echtes Dilemma für die Großmutter...

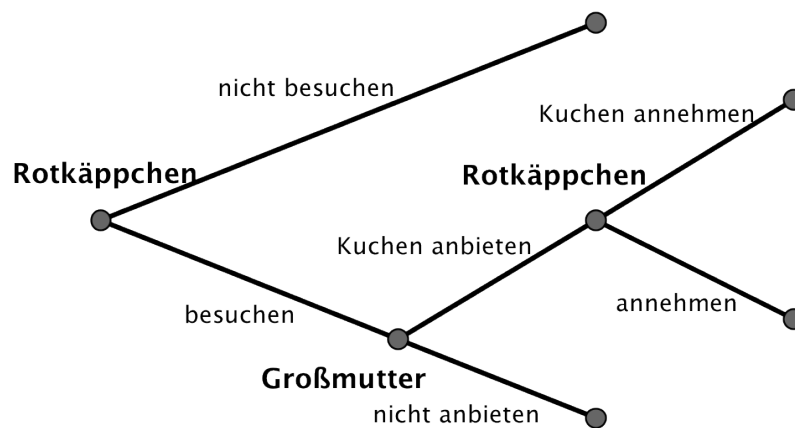


Abbildung 28: Rotkäppchen und Großmutter

Der anhand von Beispiel 5.4.2 dargestellte Weg soll zeigen, dass sich mathematische Modelle in verschiedenste, teilweise banale, Lebensbereiche transferieren lassen. Es muss sich dabei nicht ständig um hochgradig ernste ökonomische Anwendungen handeln. Auch Kreativität und Humor dürfen und sollen eine Rolle spielen, wenngleich dennoch realitätsnahe Entscheidungssituationen überwiegen sollen.

In diesem Kapitel wurde der Themenbereich der Modellierung von zwei unterschiedlichen Blickwinkeln beleuchtet. Zum einen ist, ausgehend von einer Geschichte, mittels Abstrahierung, Idealisierung und Strukturierung ein Modell geformt worden. Andererseits wurde eine schlichte Struktur, ein leeres Modell, in eine Geschichte verpackt, was eben genau dem umgekehrten Weg entspricht.

Was hingegen in Bezug auf den Mathematikunterricht noch nicht explizit besprochen wurde ist der Schritt, in dem das mathematische Modell analysiert bzw. deduziert und eine mathematische Lösung erarbeitet wird. Dieser entscheidende Übergang von der Modellierung zur Optimierung und vor allem die Frage nach der Umsetzung im Unterricht soll im folgenden Kapitel genauer betrachtet werden.

5.5 Vom Modellieren zum Optimieren

Die Ausgangssituation der hier zu diskutierenden Thematik lässt sich wie folgt charakterisieren: Es ist ein mathematisches Modell, also ein Spielbaum, einer Entscheidungssituation gegeben, das die SchülerInnen im besten Fall selbst erarbeitet haben. Nun geht es darum, derartige Situationen *zu lösen*.

Dazu muss zunächst einmal unweigerlich der Begriff der Strategie eingeführt werden. Hier bietet sich etwa der Zugang über die strategische Form an, wie er auch in Abschnitt III dieser Arbeit gewählt wurde. Hauer-Typpelt [2009] oder Ableitinger [2009] liefern etwa einen detaillierten Zugang bezüglich der Umsetzung von strategischen Spielformen im Unterricht der Sekundarstufe II. Dabei wird der Begriff der *Strategie*, als den einzelnen Spielern zur Verfügung stehende Handlungsmöglichkeit, eingeführt. Sowohl Hauer-Typpelt, als auch Ableitinger entwickeln zentrale Begriffe anhand von Beispielen und wählen einen Zugang, der den Formalismus in angemessener Form reduziert. Sie meinen, *dass sich die Notwendigkeit der Formalisierung durch erweiterte Problemstellungen ohnehin von selbst einstelle und in diesem Zuge besser von den Lernenden aufgenommen werde* [Internetquelle 3, S. 10].

Auch betreffend der extensiven Spielformen soll dieser Weg weiter verfolgt werden. Es stellt sich nun die Frage, wie die Begriffe Strategie, Dominanz oder Nash-Gleichgewicht am besten eingeführt werden, ohne sich im Vorhinein mit der strategischen Spielform auseinandergesetzt zu haben.¹¹ Wollen wir uns zu diesem Zweck nochmals den Zugang anhand des Beispiels *das Problem der Kleinparteien* (4.2.1) aus Abschnitt IV vergegenwärtigen:

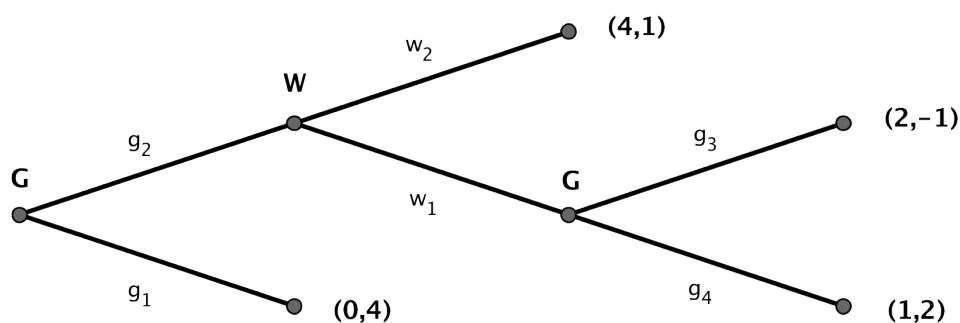


Abbildung 29: Das Problem der Kleinparteien

¹¹ Es spricht natürlich nichts gegen einen Zugang über die strategische Spielform. Es soll jedoch hier speziell auf die Umsetzung der extensiven Spielform eingegangen werden.

Ähnlich wie bei der strategischen Form lassen sich auch hier Strategien als den beiden Parteien zur Verfügung stehende Handlungsmöglichkeiten einführen. Der Unterschied zur strategischen Form besteht jedoch darin, dass es sich nicht um eine einzelne Entscheidung, sondern um eine ganze Kette handelt. Dementsprechend ist eine Strategie ein gesamter Handlungsplan. Eine Strategie für *die Gelben* wäre also beispielsweise der Handlungsplan (g_2, g_4) oder (g_2, g_3) . Aber selbst (g_1, g_4) oder (g_1, g_3) sind Strategien für die Großpartei. Dies ist bemerkenswert, da nach Wahl von g_1 , das Spiel bereits zu Ende wäre. Wir wollen hier nicht nochmal den bereits vorgestellten theoretischen Zugang wiederholen. Es ist jedoch sehr wichtig, dass den SchülerInnen klar gemacht wird, dass eine Strategie ein Handlungsplan für *das gesamte Spiel* ist und somit für jeden Entscheidungsknoten eine Handlung vorschreibt. Dies gilt eben auch für Entscheidungsknoten, die eventuell überhaupt nicht mehr erreicht werden. Da dieser Fall aufgrund seiner Abweichung vom intuitiven Verständnis des Strategiebegriffs Schwierigkeiten machen könnte, ist er besonders hervorzuheben.

Im nächsten Schritt geht es bereits um das Untersuchen der Spielsituation und das Auffinden von Lösungen. Die SchülerInnen können hier zunächst mit folgender Frage allein gelassen werden:

Du bist von den beiden Parteien als politischer Berater engagiert worden. Welche Strategie würdest du der Großpartei (die Gelben) und welche der Kleinpartei (die Weißen) empfehlen? Begründe deine Wahl!

Es wird den meisten SchülerInnen an dieser Stelle sicherlich nicht schwer fallen, gewisse Strategien auszuschließen. So werden wohl kaum die beiden Strategien (g_1, g_4) und (g_1, g_3) empfohlen werden, steigen doch die Gelben bei Wahl von g_1 in jedem Fall schlechter aus, als mit den beiden anderen Strategien. Es kann also bei einfachen Beispielen durchaus davon ausgegangen werden, dass die SchülerInnen gewisse Lösungsmethoden, in diesem Fall den Ausschluss dominierter Strategien, selbst entdecken. Ein derartiger Zugang ist ohne Zweifel effektiver, als den SchülerInnen die Aufgabe zu stellen, alle dominierten Strategien zu streichen. Im Prozess des Entdeckens besteht die Aufgabe der Lehrenden auch darin, den SchülerInnen einen gewissen Freiraum zu lassen. Unterschiedliche, kreative Ansätze sind durchaus wünschenswert und Fehler sollen zunächst zugelassen werden [Leuders 2003, S. 268-269].

Nach Beendigung dieser Unterrichtsphase sollten jedoch die verschiedenen Lösungen der Schülerinnen und Schüler besprochen und vereint werden. Es soll schlussendlich für jeden in der Klasse klar sein, warum die Strategien (g_2, g_3) bzw. (w_2) als Empfehlungen für die beiden Parteien akzeptiert werden können und somit ein Gleichgewicht in (g_2, g_3, w_2) existiert.

Anhand des Spielausgangs (g_2, g_3, w_2) kann nun in Analogie zur strategischen Form der Begriff des Nash-Gleichgewichts eingeführt werden. [Definition 4.3.1] Auch hier ist wieder zu unterstreichen, dass der Idee des Lösungskonzepts unbedingt Vorrang gegenüber dem Formalismus zu geben ist. Die SchülerInnen sollen etwa hier erkennen, dass keine der beiden Parteien, durch alleiniges Abweichen von der gewählten Strategie eine höhere Auszahlung erreichen kann. Die in der Definition des Nash-Gleichgewichts festgehaltene Aussage soll also wiederum anhand konkreter Beispiele und Entscheidungsfindungen erfasst werden. Ähnlich wie in strategischen Spielen lassen sich viele Beispiele finden, in denen die SchülerInnen das Konzept des Nash-Gleichgewichts erproben können. Im Laufe der Arbeit wurden schon zahlreiche Anregungen geliefert. Da es sich, wie Hauer-Typpelt [2009, S. 70] feststellt, beim Führen derartiger Denkprozesse *um eine Denkschulung von besonderem Wert* handelt, sollte auf das Auffinden von Nash-Gleichgewichten in verschiedensten Beispielen ein Hauptaugenmerk gelegt werden.

Anhand dieser Beispiele kann, je nach Zielsetzung der Lehrperson, die Aufgabenstellung nach und nach komplexifiziert werden. So können je nach Schwerpunktsetzung Themen, wie die Teilspielperfektheit und weitere Refinements der Lösungskonzepte, oder diverse Paradoxa in Angriff genommen werden. Es ist sogar möglich, gewisse extensive Beispiele in die strategische Form zu transferieren und auf diesem Weg den SchülerInnen einen Einblick in diese Thematik zu ermöglichen. Es muss also nicht immer der konventionelle Weg von der strategischen zur extensiven Form sein. Auch der umgekehrte Weg ist durchaus möglich.

In Anlehnung an Leuders [2003, S. 265ff] soll die *Schulmathematik als dynamischer Prozess des Mathematiktreibens* verstanden werden und nicht als organisiertes System und Aneinanderreihung von fachlichen Inhalten. Dieser Prozess umfasst eine Vielzahl von zentralen Aktivitäten, wie das Modellieren, das Entdecken, das Problemlösen oder das Argumentieren, die auch im Bereich der Spieltheorie ihren Platz haben sollen. Ein prozessorientierter Unterricht im Bereich der Spieltheorie soll demnach sein

Hauptaugenmerk weniger auf die stetige Umsetzung des Stoffs, als auf die verschiedenen mathematischen Prozesse legen.

Unter Berücksichtigung dieses Grundsatzes sind den Lehrenden in inhaltlicher Hinsicht große Freiheiten gelassen. Spieltheorie und insbesondere die extensive Spielform soll und kann nicht als fertiges Produkt bereitgestellt werden. Ähnlich wie auf inhaltlicher Ebene lässt sich dieses mathematische Teilgebiet auch auf didaktischer Ebene nur als dynamischer Prozess verstehen, der eben nicht gänzlich vorgegeben werden kann.

Nachdem in den letzten beiden Kapiteln einige konkrete Ideen geliefert wurden, soll aus diesem Grund auf weitere Vorschläge bezüglich der Umsetzung und Vertiefung von Spieltheorie im Unterricht verzichtet werden. Speziell in Abschnitt IV dieser Arbeit wurden jedoch einige weitere Anregungen geliefert, wie man anhand von konkreten Beispielen die Theorie von extensiven Spielformen im Unterricht weiterentwickeln kann.

5.6 Die Grenzen von Spieltheorie im Unterricht

Nachdem bisher sehr viele Argumente *für* die Umsetzung von Spieltheorie im Unterricht angeführt wurden und stets die vielen Chancen und Möglichkeiten dieses Themenbereichs in den Vordergrund gestellt wurden, sollen abschließend auch noch die Grenzen angesprochen werden, denn nur eine genaue Kenntnis der Grenzen und potentieller Probleme ermöglicht eine ertragreiche und zielführende Umsetzung im Unterricht.

Aus fachlicher Sicht wurden bereits am Ende des vierten Abschnitts anhand einiger Paradoxa und grenzwertiger Beispiele Grenzen des Rationalisierungsprozesses und somit auch Grenzen der Lösungskonzepte der Spieltheorie aufgezeigt. Es hat sich herausgestellt, dass das Leben wohl doch nicht zur Gänze als Spiel zu erfassen ist. Bemerkenswert ist hierbei jedoch, dass viele der vorgestellten Beispiele und Paradoxa, die zum Teil Gegenstand aktueller Forschung sind, ohne größerer Vorkenntnisse auch in den Unterricht transferiert werden können. Spieltheorie ist demnach eines der wenigen Teilgebiete der Mathematik, wo selbst das eine oder andere aktuelle Grundprobleme ohne weiteres den Schülerinnen und Schülern vorgestellt werden kann. Dieser Umstand macht die fachlichen Grenzen aus didaktischer Sicht durchaus

interessant. Den SchülerInnen kann vermittelt werden, mit welchen, auf den ersten Blick einfachen Fragen, die sich dann als sehr philosophisch und tiefgehend herausstellen, sich die Mathematik auseinandersetzt. *Warum führen zwei unterschiedliche, jedoch vernünftige Zugänge zu zwei verschiedenen Lösungen desselben Problems? [siehe Beispiel 4.7.1]*

Spieltheorie und insbesondere die extensive Spielform haben aber auch aus didaktischer Sicht ihre Grenzen. Die größte Einschränkung liefert, zusammen mit anderen organisatorischen Rahmenbedingungen, wie der Stundenzahl oder Vorschriften bezüglich der Leistungsbewertung, der in Kapitel 5.1 vorgestellte Lehrplan [Internetquelle 1]. Jede Lehrperson ist dazu verpflichtet, den vorgeschriebenen Stoff im Unterricht umzusetzen. Spieltheorie spielt jedoch – zumindest im wörtlichen Sinn – im aktuellen Lehrplan keine Rolle. Deshalb sind die Prioritäten zunächst so zu wählen, dass der im Lehrplan explizit erfasste Stoff den Vorzug genießt.

Natürlich wurde im Laufe dieser Arbeit bereits mehrmals angesprochen, dass Spieltheorie einen alternativen Zugang zu Themen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung oder aus der Optimierung liefern kann. Hier ist jedoch Vorsicht geboten. Alternative Zugänge sollen nämlich nur dann gewählt werden, wenn sie zu einem besseren Verständnis der SchülerInnen beitragen. Ist dies nicht der Fall, so macht es keinen Sinn, gewisse Begriffe über den Themenkomplex der Spieltheorie in den Unterricht einzuführen. Die Lehrperson darf also keinesfalls aus persönlichem Interesse Spieltheorie im Unterricht einführen. Es soll sich stets um einen schülerzentrierten, zielgerichteten Lehr- und Lernprozess handeln. Dieser Prozess erfordert eine ständige Selbstreflexion seitens der Lehrenden, im Zuge derer man sich etwa mit folgenden Fragen konfrontieren muss: *Was lernen die SchülerInnen durch die Einführung von Spieltheorie? Ist dieser Zugang tatsächlich besser, als der traditionelle? Warum ist Spieltheorie für den gesamten Lernprozess der SchülerInnen wertvoll?*

Diesen und vielen anderen Fragen darf man keineswegs aus dem Weg gehen. Antworten sollte man stets parat haben und sie wurden auch zur Genüge geliefert. Es ist nämlich auch durchaus denkbar, dass derartige Fragen von den SchülerInnen oder auch von den Eltern kommen. In diesem fünften Abschnitt finden sich aber viele Argumente, die es für jede Lehrperson leicht machen sollten, geeignete Antworten zu geben.

Dennoch muss im Endeffekt jeder seine eigenen Antworten finden, da Mathematikunterricht, wie bereits angesprochen, kein fertiges Produkt ist.

Ein andere Schwierigkeit betrifft die Frage der Vollständigkeit. In dieser Arbeit wurde ein stufenweiser Zugang, ausgehend von den Grundlagen der strategischen Spielform gewählt, ohne jedoch einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben. Auch bezüglich der Umsetzung im Unterricht sollte man diesen Anspruch keinesfalls wagen. Spieltheorie bietet sich vielmehr dazu an, anhand kurzer zielgerichteter Beispiele im Unterricht integriert zu werden. Zwar ist es unbedingt notwendig, diese kurzen Sequenzen *vollständig* abzuschließen, es muss sich dabei aber keinesfalls um einen wochenlang andauernden Prozess handeln. Es spricht aufgrund der geringen Vorkenntnisse und der vielfältigen Anwendungsbereiche auch nichts dagegen, spieltheoretische Probleme unabhängig vom Regelunterricht immer mal wieder einzustreuen. Es kann also durchaus die traditionelle, stetig-kontinuierliche Form des Mathematikunterrichts im Sinne der bereits erwähnten Prozessorientierung aufgebrochen werden.

Schlussendlich soll nochmals auf die Problematik des Formalismus hingewiesen werden. Basierend auf den Erkenntnissen von Hauer-Typpelt und Ableitinger [Internetquelle 3, S. 10] wurde bereits erwähnt, dass stets ein beispielorientierter Zugang zu empfehlen ist. Dies heißt, dass die verschiedenen Ergebnisse anhand von Beispielen entdeckt werden sollen und nicht umgekehrt. In diesem Sinne darf den SchülerInnen im Bereich der Spieltheorie auch nicht zu viel an grauer Theorie geboten werden, da sich ansonsten oft die fachliche Schwierigkeit potenziert und zur Frustration führt. Man denke etwa an das Kapitel über die *Existenz des Nash-Gleichgewichts* [Kapitel 3.7] und den umfassenden theoretischen Unterbau, der zur Beweisführung notwendig ist.

Spieltheorie im Unterricht soll demnach stets das Intuitive und Heuristische in den Vordergrund stellen und nicht den streng formalen Zugang. Dies heißt aber keineswegs, dass alle anderen Aspekte des Mathematikunterrichts keine Rolle spielen dürfen. Es geht hier eher um eine sinnvolle und zielführende Schwerpunktsetzung. Demnach soll Spieltheorie im Unterricht mehr (Bei)spiel als Theorie sein.

VI. Schlussbetrachtung

Ist das Leben ein Spiel? Diese rhetorische Leitfrage, die bereits im Titel und in der Einleitung gestellt wurde, soll abschließend nochmals aufgegriffen werden. Wie bereits am Ende von Kapitel 4.7 und auch in Kapitel 5.6 erwähnt wurde, hat die Spieltheorie und mit ihr die gesamte Mathematik ihre Grenzen. Obwohl die Verbindung zwischen Gesellschaftsspielen und Entscheidungssituationen des täglichen Lebens durchaus angebracht ist, lassen sich das menschliche Dasein und vor allem die Entscheidung einzelner Individuen nicht vollständig erfassen.

Es hat sich zwar anhand diverser Beispiele gezeigt, dass die Spieltheorie mächtige Werkzeuge liefert, die es ermöglichen, rationales menschliches Verhalten in den verschiedensten Situationen zu beschreiben und zu analysieren. Trotz aller Verfeinerungen des Lösungskonzepts des Nash-Gleichgewichts gibt es aber keine allmächtige mathematische Methode, die es ermöglicht, menschliche Entscheidungen in ihrer gesamten Komplexität zu erfassen. Menschliche Individuen entscheiden nämlich nicht bloß aus Gründen der Rationalität. Eine Unzahl von anderen Faktoren, wie Emotionen, persönlicher sozialer Bezug, Ängste und auch eine gewisse unvorhersehbare Spontanität spielen eine Rolle. All diese Parameter sind gemeinsam mit einer gewissen Rationalität ausschlaggebend für eine menschliche Entscheidung. In diesem Sinne sind der Vorhersage und Analyse von Entscheidungen Grenzen gesetzt. Das mathematische Modell des Spiels erfasst gemeinsam mit dem Konzept der Rationalität das menschliche Dasein nicht vollständig. Somit gibt es im übertragenen Sinn keine Formel für das menschliche Verhalten, wie es der bedeutende Schriftsteller Fjodor M. Dostojewski treffend auf den Punkt bringt:

Wenn die Formel für menschliches Verhalten entdeckt würde, würde gerade dies die Menschen dazu bewegen von dieser Formel abzuweichen [Internetquelle 9].

Das Leben ist also, wie bereits in Kapitel 4.7 erwähnt, kein Spiel im mathematischen Sinn, sondern bei weitem komplexer. Die Errungenschaften der Spieltheorie haben aber in den letzten Jahrzehnten dazu beigetragen, dass sich das menschliche Verhalten – nämlich sowohl jenes des einzelnen Individuums, wie das auch der gesamten Population – besser verstehen lässt.

Diese so lebendigen und vielfältigen Ergebnisse und Anwendungsmöglichkeiten sollen auch im Unterricht nicht zu kurz kommen. Mit dieser Arbeit wurden vielerlei Gründe geliefert, warum dies sowohl aus didaktischer, als auch aus fachlicher Hinsicht sinnvoll ist. Zudem haben die unterschiedlichen Beispiele aus Bereichen wie der Politik, der Wirtschaft oder ganz einfach aus der Umwelt der Schülerinnen und Schüler gezeigt, dass Spieltheorie nicht zwangsläufig mehr Theorie als (Bei)spiel sein muss. Es ist durchaus möglich, komplexe mathematische Theorien anhand von einfachen Beispielen zu entwickeln und auf diesem Weg interessante Ideen und Konzepte zu vermitteln.

Schlussendlich muss aber an das Engagement der Lehrpersonen erinnert werden. Eine Arbeit über die Spieltheorie im Mathematikunterricht zu lesen genügt noch keinesfalls, um dieses Thema auch im Unterricht umsetzen zu können. Es sind Motivation und Eigeninitiative gefragt. Jede Lehrperson kennt ihre Schülerinnen und Schüler am besten und weiß, welche Beispiele und Themenbereiche zielführend bzw. sinnvoll sind. Die hier angeführten Beispiele müssen und sollen also nicht eins zu eins im Unterricht übernommen werden. Eigene Ideen und insbesondere eigene Beispiele kann man sicherlich am besten im Unterricht umsetzen.

Es ist also schlussendlich an die Lehrpersonen, Leserinnen und Leser zu appellieren: Erweitern Sie die hier vorgestellten Ideen und Anregungen in Ihrem Sinne¹² und entdecken Sie gemeinsam mit Ihren Schülerinnen und Schülern den interessanten Themenbereich der Spieltheorie und insbesondere der Spiele in extensiver Form. Denn es wurde festgestellt, dass Spieltheorie überall dort ist, wo Menschen sind und Entscheidungen treffen. Soll Spieltheorie deshalb nicht auch in der Schule ihren Platz finden?

¹²Empfehlenswert ist hierzu auch ein Blick in das Literaturverzeichnis in Abschnitt VII.

VII. Anhang

7.1 Literaturverzeichnis

Monographien:

[Amann 1999]: Erwin *Amann*, Evolutionäre Spieltheorie. Grundlagen und neue Ansätze (Heidelberg 1999).

[Binmore 2007]: Ken *Binmore*, Game Theory. A very short introduction (New York 2007).

[Büchter / Leuders 2005]: Andreas *Büchter*, Timo *Leuders*, Mathematikaufgaben selbst entwickelt. Lernen fördern – Leistungen überprüfen (Berlin 2005).

[Dixit 1995]: Avinash K. *Dixit*, Barry J *Nalebuff*, Spieltheorie für Einsteiger. Strategisches Know-how für Gewinner (Stuttgart 1995).

[Domschke 2005]: Wolfgang *Domschke*, Andreas *Drexl*, Einführung in die Operations Research (Berlin Heidelberg New York 2005).

[Fudenberg / Tirole 1991]: Drew *Fudenberg*, Jean *Tirole*, Game Theory (Massachusetts Institute of Technology 1991).

[Götz 2004]: *Götz, Reichel, Müller, Hanisch* (Hg.), Lehrbuch der Mathematik. 7. Klasse. (Wien 2004).

[Güth 1999]: Werner *Güth*, Spieltheorie und ökonomische (Bei)Spiele (Berlin Heidelberg 1999).

[Holler / Illing 1993]: Manfred J. *Holler*, Gerhard *Illing*, Einführung in die Spieltheorie (Berlin / Heidelberg 1993²).

[Holler / Illing 2003]: Manfred J. *Holler*, Gerhard *Illing*, Einführung in die Spieltheorie (Berlin / Heidelberg 2003⁵).

[Kaiser 1998]: Hans *Kaiser*, Wilfried *Nöbauer*, Geschichte der Mathematik (Wien 1998).

[Königsberger 2004]: Konrad *Königsberger*, Analysis 1 (Berlin Heidelberg New York 2004).

[Kuhn / Nasar 2002]: Harold W. *Kuhn*, Sylvia *Nasar*, The Essential John Nash (Princeton 2002).

[Leuders 2001]: Timo *Leuders*, Qualität im Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I und II (Berlin 2001).

[Leuders 2003]: Timo *Leuders* (Hg.), Mathematik Didaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II (Berlin 2003).

[Lovasz 2005]: Laszlo *Lovasz*, Josef *Pelikan*, Katalin *Vesztergombi*, Diskrete Mathematik (Berlin, Heidelberg 2005).

[Mehlmann 2007]: Alexander *Mehlmann*, Strategische Spiele für Einsteiger (Wiesbaden 2007).

[Merö 2000]: Laszlo *Merö*, Die Logik der Unvernunft. Spieltheorie und die Psychologie des Handelns (Hamburg 2000).

[Neumann / Morgenstern 2004]: John von *Neumann*, Oskar *Morgenstern*, Theory of Games and Economic Behavior (2004 Princeton).

[Ortlieb 2009]: Claus Peter *Ortlieb*, Caroline *Dresky*, Ingenuin *Gasser*, Silke *Günzel*, Mathematische Modellierung. Eine Einführung in zwölf Fallstudien (Wiesbaden 2009).

[Riechmann 2010]: Thomas *Riechmann*, Spieltheorie (München 2010).

[Rieck 2010]: Christian *Rieck*, Spieltheorie. Eine Einführung (Eschborn 2010).

[Schlee 2004]: Walter *Schlee*, Einführung in die Spieltheorie (Wiesbaden 2004).

[Schumacher 2002]: Remmert *Schumacher*, Funktionentheorie 1 (Berlin Heidelberg New York 2002).

[Sieg 2000]: Gernot *Sieg*, Spieltheorie (München 2000).

[Straffin 1993]: Philipp D. *Straffin*, Game Theory and Strategy (Washington 1993).

[Taylor 1995]: Alan D. *Taylor*, Mathematics and Politics. Strategy, Voting, Power and Proof (New York 1995).

[Wiese 2002]: Harald *Wiese*, Entscheidungs- und Spieltheorie (Berlin / Heidelberg 2002).

Aufsätze und Zeitschriftenartikel:

[Ableitinger 2009]: Christoph Ableitinger, So erhält ein Nash-Gleichgewicht gleich Gewicht. In: Hans-Stefan *Silber*, Jürgen *Maaß* (Hg.) Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 13 (2009). 110 – 124.

[Ableitinger / Humenberger 2010]: Christoph *Ableitinger*, Hans *Humenberger*, Nash-Gleichgewicht und Minimax-Lösung – Gegenüberstellung zweier Konzepte der Spieltheorie. In: *Mathematica Didactica* 33 (2010) 58 – 78.

[Fisher / Ryan 1992]: David C. *Fisher*, Jennifer *Ryan*, Optimal Strategies for a Generalized „Scissors, Paper, and Stone“ Game. In: *American Mathematical Monthly* 99 (1992) 936 – 942.

[Hauer-Typpelt 2008]: Petra *Hauer-Typpelt*, Das Nash-Gleichgewicht – ein zentrales Lösungskonzept der Spieltheorie. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht* (Münster 2008) 137 – 140.

[Hauer Typpelt 2009]: Petra *Hauer-Typpelt*, Realitätsnahe Entscheidungssituationen modellieren und analysieren. In: Astrid *Brinkmann*, Reinhard *Oldenburg* (Hg.) Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 14 (2009). 67 – 82.

[Humenberger 1998]: Hans *Humenberger*, Optimieren im Mathematikunterricht. In: *Praxis der Mathematik*, Heft 3 (1998) 101 – 108.

[Humenberger 2008] Hans *Humenberger*, Nash-Gleichgewicht und Minimax-Konzept – eine Gegenüberstellung. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht* (Münster 2008) 141 – 144.

Internetquellen:

- 1) Lehrplan Mathematik AHS Oberstufe. Bmukk:
http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf
(letzter Zugriff: 25.9.2010)
- 2) Petra *Hauer-Typelt*, Unbedingt Bedingte Wahrscheinlichkeit? Der Satz von Bayes im Schulunterricht. In: In: Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Höheren Schulen der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, Heft 39 (2006).
<http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2006%20Band%2039/VortragHauerTypelt.pdf> (letzter Zugriff: 15.11.2010)
- 3) Christoph *Ableitinger*, Petra *Hauer-Typelt*, Spieltheorie im Unterricht. Kann es das Spielen? In: Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Höheren Schulen der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, Heft 40 (2007).
<http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2007%20Band%2040/VortragAbleitingerHauerTypelt.pdf> (letzter Zugriff: 15.11.2010)
- 4) Keine Kohle für Kops, Der Standard (14.6.2010):
<http://derstandard.at/1277338131582/Pool-PunishmentPeer-Punishment-Keine-Kohle-fuer-Kops> (letzter Zugriff: 25.11.2010)
- 5) Christian *Rieck*, Professor Rieck's Spieltheorie Seite. (2008):
http://www.spieltheorie.de/Spieltheorie_Grundlagen/dominante-strategie.htm
(letzter Zugriff: 14.12.2010)
- 6) Thomas *Maarup*, Hex. Everything you wanted always to know about Hex but were afraid to ask (2005). <http://maarup.net/thomas/hex/hex3.pdf>
(letzter Zugriff: 14.12.2010)
- 7) Maria *Koth*, Spieltheorie: Mathematische Modelle des Wettbewerbs. In: Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Höheren Schulen der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft 20 (1992)
<http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/1992%20Band%2020/Koth1992.pdf>
(letzter Zugriff: 14.12.2010)
- 8) Lehrplan Wahlpflichtgegenstand Mathematik AHS Oberstufe. Bmukk:
http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11884/lp_neu_ahs_29.pdf
(letzter Zugriff: 14.12.2010)
- 9) Vorlesungsmitschrift LMU München:
www.mathematik.uni-muenchen.de/~spielth/lektionen/lektion13.pdf
(letzter Zugriff: 20.12.2010)

7.2 *Abbildungsverzeichnis*

Sämtliche Graphiken und Abbildungen in dieser Arbeit wurden von mir selbst mittels der kostenlosen dynamischen Geometrieanwendung GeoGebra erstellt [<http://www.geogebra.org>]. Natürlich lässt es sich dennoch nicht immer vermeiden, dass gewisse Graphiken in ähnlicher Form in der einschlägigen Literatur auftreten. Sollte also in irgendeiner Form eine Urheberrechtsverletzung bekannt werden, ersuche ich um Meldung bei mir.

Abbildung 1:	Argumentationszyklus in Beispiel 3.5.2.	S. 23
Abbildung 2:	Die Auszahlungen der 3A Klasse	S. 30
Abbildung 3:	Beste-Antwort-Linie	S. 31
Abbildung 4:	Beste-Antwort-Linien beider Klassen	S. 32
Abbildung 5:	Strategiedreieck	S. 35
Abbildung 6a:	Spezialfälle von Graphen	S. 39
Abbildung 6b:	Beispiele für Bäume	S. 40
Abbildung 7:	Beispiel 4.2.1 in extensiver Form	S. 43
Abbildung 8:	Tischfußballdilemma in extensiver Form	S. 49
Abbildung 9:	Markteintrittsspiel mit imperfekter Information	S. 52
Abbildung 10:	Markteintrittsspiel mit perfekter Information	S. 54
Abbildung 11:	Spielbaum nach Markteintritt von Nashtech	S. 57
Abbildung 12:	Spielbaum von Beispiel 4.4.3	S. 58
Abbildung 13:	Spielbaumdarstellung von Beispiel 4.5.1	S. 61
Abbildung 14:	Spielbaum mit drei Teilspielen	S. 64
Abbildung 15:	Teilspiele in Beispiel 4.5.1	S. 65
Abbildung 16:	Beispiel 4.2.1 mittels Rückwärtsinduktion	S. 66
Abbildung 17:	Beispiel 4.5.5 Zermelos Algorithmus	S. 67
Abbildung 18:	Beispiel 4.5.1 Zermelos Algorithmus	S. 68
Abbildung 19:	Erweiterung von Beispiel 4.5.1	S. 71
Abbildung 20:	Trembling-Hand-Perfektion in extensiver Form	S. 73
Abbildung 21:	Chain-Store-Paradoxon	S. 75
Abbildung 22:	Modellierungszirkel	S. 81
Abbildung 23:	Modell 1 von Beispiel 5.4.1	S. 88
Abbildung 24:	Modell 2 von Beispiel 5.4.1	S. 89
Abbildung 25:	Vollständiger Spielbaum von Beispiel 5.4.1	S. 91
Abbildung 26:	Beispiel 5.4.2	S. 93
Abbildung 27:	Die Verfolgungsjagd	S. 94
Abbildung 28:	Rotkäppchen und Großmutter	S. 95
Abbildung 29:	Das Problem der Kleinparteien	S. 96

7.3 *Kurzfassung*

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit Spieltheorie und deren Umsetzung im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II. Aufbauend auf grundlegende Erkenntnisse aus dem Bereich der Matrixspiele, wird der Fokus besonders auf die sogenannte extensive Spielform gelegt, die speziell bei dynamischen, mehrstufigen Spielen ihre Anwendung findet.

Die mathematische Theorie wird dabei anhand von aussagekräftigen Beispielen entwickelt, welche aus verschiedensten alltagsbezogenen Anwendungsbereichen kommen. Nebst Beispielen aus der Ökonomie oder der Politik, finden sich auch einige Aufgaben aus der unmittelbaren Umgebung der Schülerinnen und Schüler. Dies soll gewährleisten, dass komplexe mathematische Ergebnisse, wie das Nash-Gleichgewicht, die Teilspielperfektheit oder andere Refinements, nicht zu sehr in starrem Formalismus verkommen, sondern sich attraktiv für eine mögliche Umsetzung im Unterricht präsentieren und den Anforderungen des Lehrplans gerecht werden.

Es zeigt sich dabei, dass Spieltheorie – insbesondere die extensive Spielform – eine ausgezeichnete Möglichkeit darstellt, mathematisches Lernen in die Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler zu transferieren. Unter Berücksichtigung wesentlicher Aspekte des Mathematikunterrichts werden dabei Strukturen und Prozesse des alltäglichen Lebens analysiert und sogar die Grenzen der Spieltheorie ausgelotet, wie an der rhetorischen Leitfrage deutlich wird: *Ist das Leben ein Spiel?*

7.4 *Abstract*

This diploma thesis examines game theory and its implementation in mathematic lessons on secondary level II. By building on fundamental findings, its focus is particularly on the so called extensive-form game, which is used in dynamic, multilevel games.

The paper describes the mathematic theory by giving meaningful examples which are derived from application in everyday life. These comprise a wide range including examples from the fields of economy, politics as well as problems concerned with the immediate experience of students. This ensures that complex mathematical conclusions such as Nash equilibrium, subgame perfectness or other refinements are not only presented in theory, but are made attractive for possible implementation within the requirements of the curriculum.

I will show that game theory, especially extensive-form game, is an excellent way to link mathematical learning with the experiences of students. Furthermore, structures and processes of everyday life can be analyzed while teaching crucial aspects of mathematics. It even becomes possible to explore the limits of game theory as can be shown by the central question “Life is a game, isn’t it?!”

7.5 Lebenslauf

Persönliche Daten:	Name:	Manuel Graf
	Geboren:	8.9.1986 in Linz
	Staatsbürgerschaft:	Österreich
	Wohnort:	Hilkering 23, 4081 Hartkirchen
	Mail:	grafmanuel@gmx.at
Ausbildung:	1993 – 1997	Volksschule Hilkering
	1997 – 2005	Stiftsgymnasium Wilhering
	seit WS 2006	Universität Wien: LA Mathematik und Geschichte
Beruflicher Werdegang:	2002 – 2006	Urlaubsvertretung Melchart GmbH
	2005 – 2006	Zivildienst Volkshilfe Wels
	2009 – 2010	Urlaubsvertretung österr. Post AG
	2009	Ferienturnusbetreuer Kinderfreunde
	seit 2005	diverse Nachhilfetätigkeiten: Mathematik, Physik, Englisch
	seit 2010	Skilehrer beim Skiclub Hartkirchen
Zusätzliche Ausbildungen:	2003	Peer Education Ausbildung (Aids Prävention)
	2010	USI Sportkletterlehrer (Modul 1 + 2)
	2010	USI Skilehrer- und Wintersportwochenbegleitlehrer (Qualifikation A3)

Sonstige Interessen und Aktivitäten:

Sport: aktives Mitglied im Fußball-, Tennis- und Skiverein Hartkirchen,
Klettern, Bergsteigen, Snooker.

Musik: Akkordeon, Gitarre, Mitveranstalter des Benefizkonzerts „Rock against Aids“.

Fotographie, Reisen, Literatur und vieles mehr!

SACHERSCHLIESSUNG
der
Fachbereichsbibliothek Mathematik, Statistik, Informatik der Universität Wien

Klassifikation

Aufstellungsort: ☐ HoA ☒ HoD

MSC2000: 00A35 – 91A05 – 91A18 – 91A25

BK: 31.04

Schlagwortketten nach RSWK

Mathematisches Spiel – Zweipersonenspiel – Spiel in extensiver Form – Nash-
Gleichgewicht – Schulmathematik (31245 41235)

Kontrollvermerk der Fachbibliothek:

08. Feb. 2011

.....
Datum


.....
Unterschrift