



universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Charakterisierung Pfaff'scher Graphen
mittels verbotener Teilgraphen

Verfasser

Thomas Glatz

angestrebter akademischer Grad

Magister der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat.)

Wien, im September 2010

Matrikelnummer lt. Studienblatt:	0001541
Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 405
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Diplomstudium Mathematik
Betreuerin:	Ass.-Prof. Dr. Ilse Fischer

Abstract

Zusammenfassung

Das Abzählen *perfekter Matchings* ist ein sehr interessantes Problem, das seit Jahrzehnten namhafte MathematikerInnen beschäftigt. Für allgemeine (bipartite) Graphen hat Valiant schon 1979 gezeigt [18], dass die Frage nach der Anzahl perfekter Matchings eines gegebenen Graphen *Sharp-P-vollständig* ist. Das auch mit $\#P$ abgekürzte Sharp- P ist ein Abzähl-Analogon zur (Entscheidungs-) Komplexitätsklasse NP und macht wahrscheinlich, dass für allgemeine Graphen kein Algorithmus polynomieller Laufzeit existiert. *Pfaff'sche Graphen* sind genau jene, auf die man Kasteleyns Methode zum Abzählen perfekter Matchings anwenden kann, womit dieses Problem in polynomieller Zeit lösbar ist.

Diese Arbeit soll darlegen, für welche Klassen von Graphen eine einfache und schöne Charakterisierung Pfaff'scher Graphen existiert. Das Problem ergibt sich aus der unhandlichen und nur umständlich zu überprüfenden Definition. Dabei wird insbesondere die Charakterisierung mittels *verbotener Teilgraphen* im Mittelpunkt stehen. Die Idee ist, eine Liste von (möglichst wenigen) Graphen anzugeben, deren "nicht-enthalten-Sein" als sogenannter „Matching Minor“ eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür darstellt, dass es sich um einen Pfaff'schen Graphen handelt. Der *planare* Fall ist dabei der älteste und besonders schön, da sich herausstellt, dass jeder planare Graph die Eigenschaft hat, Pfaff'sch zu sein. Für *bipartite* Pfaff'sche Graphen existiert seit längerem eine Charakterisierung mittels des verbotenen Teilgraphen $K_{3,3}$ (siehe Little [7]), wobei ein relativ neuer Beweis dies besonders einfach und kurz darlegt. Im nicht-bipartiten Fall gibt es kein umfassendes Resultat mehr, hier sind die *fast-bipartiten* Pfaff'schen Graphen die größte Klasse, für die eine noch relativ einfache Charakterisierung vorliegt. Für allgemeinere Graphen stellt sich der Begriff „enthalten als Matching Minor“ gar als unbrauchbar heraus, eine endliche Liste verbotener Teilgraphen zu finden. Daher werden wir neue Operationen einführen, die die Eigenschaft, Pfaff'sch zu sein, bewahren. Mit deren Hilfe wird es uns möglich sein, einige bisher unbewiesene Vermutungen zu endlichen Listen solch verallgemeinerter Teilgraphen zu formulieren.

Summary

Counting *perfect matchings* is an interesting problem, that keeps renowned mathematicians busy since decades. For arbitrary (bipartite) graphs, it has been shown by Valiant as far back as 1974 [18], that finding the number of perfect matchings in a given graph belongs to the so-called *sharp-P-complete* problems. This sharp-P (or #-P) is a counting-analog to the (decision-) complexity class NP , what makes the existence of an efficient universal algorithm quite improbable.

Pfaffian graphs are exactly those, on which one can apply Kasteleyns method of counting perfect matchings, which implies the *polynomial-time-solvability* of our problem. This paper shall demonstrate for which classes of graphs there exists a facile characterisation of Pfaffian graphs. The difficulties here originate in the unhandy definition, whose requirements are hard to check. Thereby, the characterisation in terms of *forbidden subgraphs* will be the central issue of our studies. The idea is to state a list of (preferably few) graphs, so that for a given graph, containing one of the graphs in the list as a so-called *matching minor* is equivalent with being non-Pfaffian. Especially nice, it turns out that every *planar* graph is Pfaffian. For *bipartite* Pfaffian graphs, there exists a pleasant characterisation through the forbidden subgraph $K_{3,3}$, where a recent proof shows this in a fairly easy and short way.

In the non-bipartite case there exists no universal result yet. The largest class that is known to be characterisable in terms of forbidden matching minors, are the so-called *near-bipartite graphs*. For arbitrary graphs, we will define some new operations that generalize the term „matching minor“, so that we can state some conjectures concerning finite lists of forbidden graphs, which might characterise arbitrary pfaffian graphs.

Danksagung

Zu allererst möchte ich mich hiermit bei meiner Betreuerin Prof. Ilse Fischer bedanken, die mich von der Themenauswahl bis zum letzten Druckfehler immer mit viel Geduld, Aufmerksamkeit und Engagement unterstützt hat.

Weiters geht mein Dank an meine Eltern, Sylvia Merchiori und Dietmar Glatz, die während meiner langen Studienzeit nicht aufgehört haben, an mich zu glauben, und bis zuletzt auch finanziell eine große Stütze waren.

Ein ganz besonders herzliches Dankeschön geht an meine Freundin Simone Stockinger, deren positives Denken mir immer wieder den nötigen Motivationsschub gegeben hat, und die sich obendrein auch als hervorragende Korrekturleserin profilieren konnte.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	9
1.1	Einige Grundbegriffe	9
1.2	Abzählung perfekter Matchings durch Kasteleyns Methode	11
2	Planare Graphen	19
2.1	Definitionen	19
2.2	Planare Graphen sind Pfaff'sch	19
3	Bipartite Pfaff'sche Graphen	23
3.1	Einige Definitionen und Vorbereitungen	23
3.2	Die Ohr-Zerlegung bipartiter Matching-überdeckter Graphen	25
3.3	Eine Charakterisierung bipartiter Pfaff'scher Graphen	29
4	Nicht-bipartite Pfaff'sche Graphen	37
4.1	Die Charakterisierung fast-bipartiter Pfaff'scher Graphen	37
4.2	Minimal nicht-Pfaff'sche Graphen	38
4.2.1	Schwache Matching Minoren in Pfaff'schen Graphen	41
4.3	Zulässige Operationen in Pfaff'schen Graphen	47
4.3.1	Die Kompression	47
4.3.2	Flip und Abschluss	50
4.4	Eine unendliche Liste minimal nicht-Pfaff'scher Graphen	52
4.4.1	Der Graph $G(k, M)$	52
4.4.2	Der Graph $G(k, M)$ ist für fast alle k minimal nicht-Pfaff'sch	53
4.5	Einige Vermutungen zur Reduktion auf eine endliche Liste verbotener Teilgraphen	57
4.5.1	Weitere Kompressionen	57
4.5.2	Reduktionen mit Hilfe gültiger Regeln	61

1 Einleitung

1.1 Einige Grundbegriffe

Alle Graphen in dieser Arbeit sind endlich und einfach, haben also keine Mehrfachkanten und Schlingen, d.h. $V(G)$, beziehungsweise $E(G)$, soll die *Knoten-* respektive *die Kantenmenge* eines Graphen G bezeichnen. Ein *gerichteter Graph* D (oder kurz *Digraph*) ist ein Graph, dessen Kanten eine eindeutige Orientierung mit Anfangs- und Endknoten haben. Des weiteren wird der Einfachheit halber auch die Orientierung selbst mit D bezeichnet, falls zu einem Graphen G mehrere Orientierungen benötigt werden. Ein *perfektes Matching* eines (gerichteten) Graphen G ist eine Teilmenge $F \subseteq E(G)$, so dass jeder Knoten in G in genau einer Kante aus F liegt, d.h. mit genau einem anderen Knoten aus G „gematcht“ ist. Der Zusatz *perfekt* wird zuweilen weglassen, wenn klar ist, dass es sich um ein perfektes Matching handelt. Ist ein Matching nicht notwendigerweise perfekt, dann wird darauf im Text auch explizit hingewiesen. Der Graph G heißt *Matching-überdeckt*, falls jede Kante aus $E(G)$ in einem perfekten Matching von G enthalten ist. Die Graphen in dieser Arbeit werden, sofern nicht anders angegeben, als Matching-überdeckt angenommen. Der Grund dafür wird im Laufe des Textes noch klar werden. Ein Teilgraph H eines Graphen G mit perfektem Matching heißt *zentral*, falls $G - V(H)$ ein perfektes Matching besitzt. Ein Kreis C mit einer geraden Anzahl von Kanten in einem gerichteten Graphen D heißt *ungerade orientiert*, falls ungerade viele Kanten in Richtung des Durchlaufs zeigen (in welche Richtung der Kreis durchlaufen wird, spielt hierbei keine Rolle). Andernfalls sei der Kreis *gerade orientiert*. Man sagt auch: Der Kreis ist *ungerader*, respektive *gerader (Durchlauf-)Parität*. Analog dazu heißt ein Pfad gerader Länge *ungerade orientiert*, falls ungerade viele Kanten in eine Richtung zeigen, andernfalls heißt er *gerade orientiert*.

Bemerkung. In diesem Zusammenhang sei erwähnt, dass wir bei Teilgraphen, insbesondere aber bei Kreisen und Pfaden, den Begriff des Graphen synonym mit dem seiner Kantenmenge verwenden. Das ist deshalb keine besondere Einschränkung, da diese Teilgraphen keine isolierten Knoten haben. Ist also im Text von einem Kreis C die Rede, dann ist eigentlich seine Kantenmenge gemeint, sofern nicht anders angegeben.

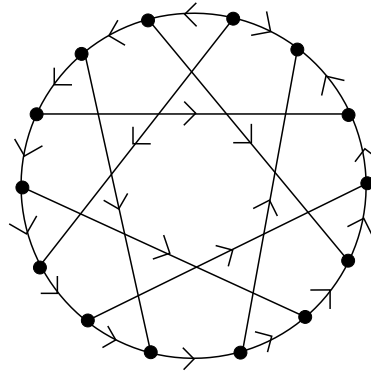


Abbildung 1.1: Der Heawood-Graph mit einer Pfaff'schen Orientierung

Dadurch werden einige Notationen wesentlich einfacher, zudem ist diese Auffassung auch in der Literatur gebräuchlich.

Eine weitere notationstechnische Schwierigkeit stellt die Vereinigung und Differenz von Graphen dar. Sei G ein Graph und H ein Teilgraph, dann bezeichnet man als $G - H$ den Graphen ohne Kanten von H und ohne deren innere Knoten. Jene Knoten, die inzident mit Kanten aus $E(G) - E(H)$ sind, bleiben erhalten. Mit dieser Interpretation macht es auch Sinn, einzelne Kanten eines Graphen durch $G - e$ (auch $G - \{e\}$) zu entfernen. Analog dazu seien G und H Graphen, so dass $G - H = P$ für einen Pfad P . Dann ist die Schreibweise $H + P = G$ gebräuchlich.

Für weitere grundlegende Begriffe aus Kombinatorik und Graphentheorie siehe [2] und [5]. Wir kommen zur vielleicht wichtigsten Definition dieser Arbeit.

Definition 1.1. Eine Orientierung D von G heißt *Pfaff'sch*, falls jeder zentrale Kreis $Z \subseteq G$ ungerade orientiert ist. Ein Graph heißt *Pfaff'scher Graph*, wenn er eine Pfaff'sche Orientierung besitzt.

Beispiel 1.2. Der Graph in Abbildung 1.1 ist der sogenannte Heawood-Graph, ein nicht-planares (denn wie wir später sehen werden, sind alle planaren Graphen Pfaff'sch) Beispiel eines Pfaff'schen Graphen. Die geduldige LeserIn kann sich davon überzeugen, dass die oben angegebene Orientierung Pfaff'sch ist. Der Heawood-Graph besitzt genau 24 perfekte Matchings - was das mit der Existenz einer Pfaff'schen Orientierung zu tun hat, wird der nächste Abschnitt illustrieren.

1.2 Abzählung perfekter Matchings durch Kasteleyns Methode

Historisch gesehen sind Pfaff'sche Graphen erstmals in der theoretischen Physik bei Kasteleyn [4] aufgetaucht, wo dieser die Anzahl perfekter Matchings auf einem Quadratgitter mit Hilfe „Pfaff'scher Formen“ bestimmt. Seine Methode lässt sich auf alle Pfaff'schen Graphen erweitern, wie in folgendem Paragraphen dargelegt wird.

Um die *Pfaff'sche Form* zu definieren, betrachten wir zunächst eine schiefsymmetrische Matrix B der Dimension $p \times p$, wobei $p = 2n$. Sei $P = \{\{i_1, j_1\}, \dots, \{i_n, j_n\}\}$ eine Partition der Menge $\{1, 2, \dots, 2n\}$ in Paare, die Menge aller dieser Partitionen (bei fixiertem, von der Matrix B abhängendem n) sei mit $\mathcal{P}$ bezeichnet. Für jedes P bilden wir

$$b_P = \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2n-1 & 2n \\ i_1 & j_1 & \dots & i_n & j_n \end{pmatrix} b_{i_1, j_1} \dots b_{i_n, j_n},$$

wobei der erste Term das Vorzeichen einer Permutation der $2n$ Elemente ist und dahinter die entsprechenden Eintragungen von B zu finden sind. Es folgt sofort aus den Eigenschaften des Vorzeichens einer Permutation, dass die Reihenfolge der Blöcke in P auf b_P keinen Einfluss hat. Ebenso irrelevant ist die Reihenfolge innerhalb eines Blocks $\{i_k, j_k\}$, was durch die Schiefsymmetrie der Matrix B bedingt ist: Eine Vertauschung führt sowohl zu einem Vorzeichenwechsel in der Permutation, als auch im entsprechenden Eintrag b_{i_k, j_k} , womit b_P tatsächlich nur von der Partition P abhängt.

Die *Pfaff'sche Form* ist definiert als $\operatorname{pf}(B) := \sum_{P \in \mathcal{P}} b_P$. Wenn wir jetzt zu unserem gerichteten Graphen D zurückkehren, so betrachten wir zunächst die *Adjazenzmatrix* $A_s(D)$. Diese ist eine schiefsymmetrische Matrix mit Eintragungen

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i, j) \in D \\ -1 & (j, i) \in D \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In der Pfaff'schen Form $\operatorname{pf}(A_s(D))$ entspricht jeder Summand b_P genau einem perfekten Matching in D . Für ein Matching F kann somit der Ausdruck $\operatorname{sgn} b_F$ gebildet werden, der als *Vorzeichen* des Matchings F bezeichnet wird. Falls jedes Matching in einem gerichteten Graphen G das gleiche Vorzeichen besitzt, entspricht also die Pfaff'sche Form bis auf Vorzeichen genau der Anzahl der perfekten Matchings in G . Interessant wird dieses Resultat durch folgendes Lemma aus der linearen Algebra [13]:

1 Einleitung

Lemma 1.3. Sei B eine schiefsymmetrische Matrix. Dann ist

$$\det(B) = (\text{pf}(B))^2.$$

Ziel ist es also, festzustellen, wann für einen gegebenen Graphen G eine Orientierung existiert, sodass alle Matchings von G dasselbe Vorzeichen besitzen. Genau dann ist es nämlich möglich, durch das Bilden der Determinante der Adjazenzmatrix (in polynomieller Zeit berechenbar) die Anzahl der perfekten Matchings von G zu bestimmen.

Wir werden zeigen, dass dieses Problem äquivalent ist zu der Frage, wann ein Graph Pfaff'sch ist. Dazu ist der Begriff des alternierenden Kreises fundamental.

Definition 1.4. Seien A_1 und A_2 beliebige Mengen, dann wird $A_1 \triangle A_2 := (A_1 \cup A_2) - (A_1 \cap A_2)$ als *symmetrische Differenz* von A_1 und A_2 bezeichnet.

Bemerkung 1.5. Es ist leicht zu überprüfen, dass die symmetrische Differenz assoziativ und kommutativ ist, also $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ und $A \triangle B = B \triangle A$ gelten für beliebige Mengen A , B und C . Man kann somit problemlos für eine endliche Familie von Mengen $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ die *symmetrische Differenz aller Elemente von $\mathcal{A}$* durch $\triangle \mathcal{A} := A_1 \triangle A_2 \triangle \dots \triangle A_n$ definieren wobei die Reihenfolge der A_i keine Rolle spielt.

Definition 1.6. Sei G ein Graph, F ein Matching von G . Ein Kreis C heißt F -alternierend, falls ein Matching F_1 existiert, so dass $C \subseteq F \triangle F_1$ (wenn klar ist, welches Matching gemeint ist, wird zuweilen auch die Bezeichnung *alternierend* verwendet). Der Kreis C wird auch als FF_1 -alternierend bezeichnet, wenn die Eigenschaft $C \subseteq F \cup F_1$ besonders hervorgehoben werden soll.

Bemerkung. Aus der Definition geht auch unmittelbar hervor, dass für ein perfektes Matching F eines Graphen G und einen F -alternierenden Kreis C , die symmetrische Differenz $F' := F \triangle C$ ebenfalls ein perfektes Matching von G ist. Denn es gilt $F - C = F' - C$, und die Knoten von C sind alle inzident mit Kanten von F' .

Bemerkung. Die alternierenden Kreise in einem Graphen G entsprechen genau den zentralen Kreisen: In einem zentralen Kreis Z nehme man das Matching F' von $G - Z$ und erweitere zu einem Matching F von G , was leicht möglich ist, da Z gerade Kantenzahl, und damit ein perfektes Matching, hat. Dann kann F_1 in obiger Definition durch $F_1 := F \triangle Z$ gebildet werden. Umgekehrt sei C ein alternierender Kreis, dann ist $F' = F - (C \cap F)$ ein perfektes Matching von $G - C$.

Weiters werden wir folgendes Lemma benötigen [11]:

Lemma 1.7. Sei D eine beliebige Orientierung eines Graphen G , seien F_1 und F_2 zwei beliebige Matchings von G . Bezeichne k die Anzahl gerade orientierter $F_1 F_2$ -alternierender Kreise. Dann ist $\text{sgn } F_1 \cdot \text{sgn } F_2 = (-1)^k$.

Bemerkung. Das bedeutet, zwei Matchings haben genau dann das gleiche Vorzeichen, wenn es eine gerade Anzahl gerade orientierter alternierender Kreise in $F_1 \cup F_2$ gibt.

Beweis. Zunächst sei angemerkt, dass man die Kanten beliebig umorientieren darf: Die Vereinigung $F_1 \cup F_2$ besteht aus einer Menge von Kanten, die sowohl in F_1 , als auch in F_2 vorkommen, und (disjunkter) $F_1 F_2$ -alternierender Kreise (natürlich alle gerader Länge). Denn angenommen, es gäbe einen alternierenden Pfad (mit verschiedenen Endpunkten), so wären Anfangs- bzw. Endknoten in jeweils einem der beiden F_i nicht gematcht.

Ein Wechsel einer Kante in $F_1 \cap F_2$ ändert das Vorzeichen in beiden Matchings, was den linken Term im Lemma oben unberührt lässt, k bleibt ebenfalls unverändert. Ändert man die Orientierung einer Kante eines $F_1 F_2$ -alternierenden Kreises, so verändert sich das Vorzeichen genau eines Matchings, und die Anzahl der $F_1 F_2$ -alternierenden Kreise ändert sich ebenfalls um den Wert eins, am Wahrheitsgehalt der Gleichung $\text{sgn } F_1 \cdot \text{sgn } F_2 = (-1)^k$ ändert sich also nichts.

Wir dürfen also nach Belieben umorientieren, und wählen folgende Richtungen: Kanten, die sowohl in F_1 , als auch in F_2 vorkommen, oder in keinem der beiden Matchings, dürfen beliebig orientiert werden. Die Kanten in den alternierenden Kreisen werden so gewählt, dass sich eine Durchlaufrichtung ergibt (siehe Abb. 1.3 links).

Außerdem müssen zum Führen des Beweises die Knoten umbenannt werden. Dass dies problemlos möglich ist, zeigt folgende Überlegung: Einer Knotenumbenennung entspricht eine Vertauschung von Zeilen und Spalten der Adjazenzmatrix $A_s(D)$ durch eine Permutation π . In der Pfaff'schen Form wirkt diese Permutation auf jeden Summanden als eventuelle Vertauschung des Vorzeichens. Das bedeutet, dass sich entweder alle Vorzeichen ändern, oder keines, die Faktoren a_{i_k, j_k} der Pfaff'schen Form bleiben für alle k unverändert. Das Produkt $\text{sgn } F_1 \cdot \text{sgn } F_2$ bleibt somit unberührt, ebenso wie die Anzahl der gerade orientierten $F_1 F_2$ -alternierenden Kreise, was die Behauptung bestätigt.

Die Numerierung wird wie folgt gewählt (siehe Abbildung 1.3): Wir beginnen mit den Kanten aus $F_1 \cap F_2$, deren Anfangsknoten immer eine um eins kleinere Nummer bekommen als die Endknoten. Mit welcher Kante man genau beginnt, ist dabei beliebig. Bei den alternierenden Kreisen numerieren wir nach dem gleichen Prinzip die Knoten der Kanten aus F_1 , und zwar der Reihe nach in der vorhin festgelegten Durchlaufrich-

1 Einleitung

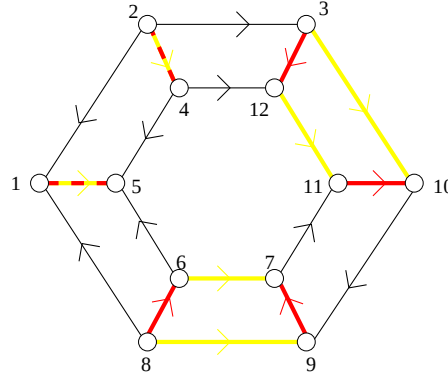


Abbildung 1.2: beliebige Orientierung und Numerierung

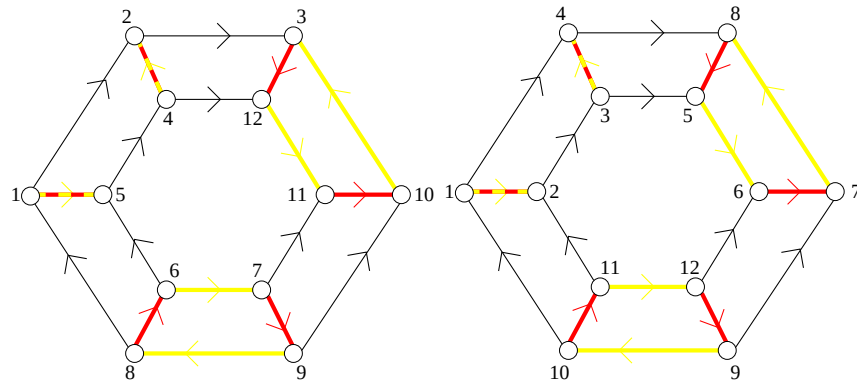


Abbildung 1.3: Umorientierung und Umnummerierung

tung. Damit haben wir ein positives Vorzeichen für das Matching F_1 konstruiert, da bei geeigneter Anordnung der Blöcke im Term b_{F_1} die Permutation die Identität und alle $a_{m,n}$ gleich $(+1)$ sind. Um den Satz zu zeigen, überlegen wir, wie das Vorzeichen von F_2 unter obiger Numerierung aussieht. Die $a_{m,n}$ können wieder alle positiv gewählt werden. Das Vorzeichen der Permutation entspricht dann $(-1)^{m_1+m_2+\dots+m_r+r}$, wobei m_i die Länge des Zyklus i und r die Anzahl der Zyklen ist (siehe [5]). In unserem Fall entspricht jedem $F_1 F_2$ -alternierenden Kreis ein Zyklus gerader Länge, der Rest der Knoten sind Fixpunkte. Daher ist $r = k$ und $\text{sgn } F_2 = (-1)^k$. $\square$

Beispiel 1.8. Betrachte den Graphen in Abbildung 1.2. Die Kanten des Matchings F_1 sind gelb, die des Matchings F_2 rot gefärbt. Man sieht schön die $F_1 F_2$ -alternierenden Kreise und die gemeinsamen Kanten aus $F_1 \cap F_2$. In der Rechnung unten wird zunächst das Produkt der Vorzeichen von F_1 und F_2 vom Graphen aus Abbildung 1.2 berechnet, dann jenes des in 1.3 links abgebildeten Graphen mit geänderter Kantenorientierung,

1.2 Abzählung perfekter Matchings durch Kasteleyns Methode

aber gleicher Knotenbezeichnung.

Zuletzt berechnen wir $\text{sgn } F_1$ bzw. $\text{sgn } F_2$ und $\text{sgn } F_1 \cdot \text{sgn } F_2$ für den Graphen rechts in Figur 1.3, also jenen mit geänderter Orientierung und geänderter Numerierung. Rechnen wir nach, dass der Ausdruck $\text{sgn } F_1 \cdot \text{sgn } F_2$ jeweils unberührt bleibt: Im ersten Graphen gibt es einen gerade orientierten, $F_1 F_2$ -alternierenden Kreis. Wir errechnen

$$\begin{aligned}\text{sgn } F_1 &= \text{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 11 & 12 & 3 & 10 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &\quad \times 1 \times 1 \times 1 \times (-1) \times 1 \times 1 \\ &= 1 \times (-1) \\ &= -1\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\text{sgn } F_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 5 & 6 & 8 & 7 & 9 & 10 & 11 & 3 & 12 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &\quad \times 1 \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times 1 \times 1 \\ &= (-1) \times (-1)^3 \\ &= 1.\end{aligned}$$

Mit dem Produkt $\text{sgn } F_1 \cdot \text{sgn } F_2$ verhält es sich wie nach dem Lemma zu erwarten:

$$\text{sgn } F_1 \cdot \text{sgn } F_2 = -1.$$

Ändert man die Orientierung entsprechend des Lemmas, so gilt:

$$\begin{aligned}\text{sgn } F_1 &= \text{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 11 & 12 & 3 & 10 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &\quad \times 1 \times 1 \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \\ &= 1 \times (-1)^4 \\ &= 1\end{aligned}$$

1 Einleitung

bzw.

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn} F_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 5 & 6 & 8 & 7 & 9 & 10 & 11 & 3 & 12 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &\quad \times 1 \times (-1) \times 1 \times (-1) \times 1 \times (-1) \\ &= 1.\end{aligned}$$

Für das Produkt ergibt sich dem Lemma entsprechend

$$\operatorname{sgn} F_1 \cdot \operatorname{sgn} F_2 = 1,$$

da sich, durch die Orientierungsänderungen, jetzt zwei gerade orientierte $F_1 F_2$ -alternierende Kreise im Graphen befinden. Ändert man nun auch noch die Numerierung der Kanten (Abb. 1.3 rechts), so ändert sich am Produkt der Vorzeichen nichts mehr:

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn} F_1 &= \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \times 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn} F_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 8 & 5 & 6 & 7 & 10 & 11 & 12 & 9 \end{pmatrix} \times 1 \\ &= (-1)^2 \\ &= 1,\end{aligned}$$

was abermals

$$\operatorname{sgn} F_1 \cdot \operatorname{sgn} F_2 = 1$$

ergibt. Wie man sieht, ist die Permutation in $\operatorname{sgn} F_1$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Identität, während im Matching F_2 pro alternierendem Kreis ein Zyklus gerader Länge erzeugt wird.

Wir sind nun in der Lage, folgenden Satz zur Charakterisierung Pfaff'scher Graphen zu zeigen:

Satz 1.9. *Sei G ein (nicht notwendigerweise Matching-überdeckter) Graph mit gerader Knotenanzahl und D eine Orientierung von G . Die folgenden Eigenschaften sind*

äquivalent:

1. Die Orientierung D ist eine Pfaff'sche Orientierung von G .
2. Die perfekten Matchings von G haben alle dasselbe Vorzeichen in der Orientierung D .
3. Falls G ein perfektes Matching hat, dann existiert ein Matching F , sodass jeder F -alternierende Kreis in D ungerade orientiert ist.

Beweis. Wir verwenden wiederholt die Aussage im Beweis von Lemma 1.7, dass sich verschiedene Matchings F_1 und F_2 von G genau um alternierende Kreise unterscheiden (Betrachte bei Bedarf Abbildung 1.2).

„1. $\Rightarrow$ 3.“: Sei F ein beliebiges Matching in G . Jeder F -alternierende Kreis C ist automatisch zentral, da $G - V(C)$ durch die verbleibenden Kanten von F perfekt gematcht ist. Per Definitionem ist in einer Pfaff'schen Orientierung jeder zentrale Kreis ungerade orientiert.

„2. $\Rightarrow$ 1.“: Sei Z ein zentraler Kreis, d.h. es gibt ein Matching F_1 von $G - V(Z)$. Wir ergänzen F_1 zu einem perfekten Matching F_2 von G . Beachte, dass Z ein F_2 -alternierender Kreis ist, womit es ein Matching $F \supseteq F_1$ gibt, mit $F \Delta F_2 = Z$. Die Matchings F und F_1 haben laut Voraussetzung gleiches Vorzeichen, und Z ist der einzige $F_1 F_2$ -alternierende Kreis. Also muss nach Lemma 1.7 der Kreis Z ungerade orientiert sein.

„3. $\Rightarrow$ 2.“: Sei F das Matching aus der Voraussetzung. Jedes von F verschiedene Matching F' bildet $F'F$ -alternierende Kreise mit F und ist ansonsten identisch. Diese Kreise sind nach Voraussetzung alle ungerade orientiert, nach Lemma 1.7 haben F und F' daher gleiches Vorzeichen. $\square$

Wir haben gezeigt, dass genau die Matchings jener Graphen mittels ihrer Pfaff'schen Form abgezählt werden können, welche eine Orientierung mit einer der obigen Eigenschaften besitzen. Die Pfaff'sche Form der Adjazenzmatrix ist auf die Berechnung ihrer Determinante zurückzuführen und daher in polynomieller Zeit (nach der Anzahl der Knoten) bestimmbar. Außerdem gibt es in jedem Pfaff'schen Graphen eine Orientierung, in der alle perfekten Matchings positives Vorzeichen haben:

Lemma 1.10. *Zu jeder Orientierung D eines Graphen G existiert eine Orientierung D' , in der das Vorzeichen aller perfekten Matchings von G vertauscht ist.*

Beweis. Sei e_1 eine beliebige Kante von G , und $\mathcal{F}_1$ die Menge aller perfekten Matchings, die e_1 enthalten. Die Kante e_2 sei aus beliebig aus $G - \mathcal{F}_1$ gewählt, und $\mathcal{F}_2$ die

1 Einleitung

Menge aller Matchings, die e_2 enthalten. Analog sei e_k aus $G - \bigcup_{i=1}^{k-1} \mathcal{F}_i$ und $\mathcal{F}_k$ die Menge aller Matchings, die e_k enthalten. Die $\mathcal{F}_k$ sind alle disjunkt, und es gibt nur endlich viele von ihnen, da G laut Voraussetzung endlich ist. Ihre Vereinigung enthält alle perfekten Matchings von G . Dreht man die Orientierung aller e_k um, so ändert sich also das Vorzeichen aller Matchings in G . $\square$

Definition 1.11. Eine Pfaff'sche Orientierung, in der jedes Matching F das Vorzeichen $\text{sgn } F = 1$ hat, nennt man *positive Pfaff'sche Orientierung*.

Korollar 1.12. Sei G ein Pfaff'scher Graph, dann existiert eine positive Pfaff'sche Orientierung von G .

Beweis. Folgt direkt aus Lemma 1.10. $\square$

2 Planare Graphen

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, wurde die in Abschnitt 1.2 beschriebene Abzählung perfekter Matchings ursprünglich auf Quadratgitter, also eine Teilmenge planarer Graphen, angewendet. Wir zeigen im kommenden Abschnitt, dass sich die Methode auf alle planaren Graphen anwenden lässt, oder (nach Satz 1.9) in anderen Worten: Alle planaren Graphen sind Pfaff'sch.

2.1 Definitionen

Ein Graph G heißt *plättbar*, oder *planar*, falls er eine Darstellung in der Ebene besitzt, mit Knoten als Punkten, und Kanten als Linien, so dass sich keine zwei Kanten schneiden. Eine solche *Einbettung* wird als *eben* bezeichnet (zu den elementaren topologischen Voraussetzungen siehe Diestel [2] S.105ff). Wir werden planare Graphen nur in dieser Einbettung betrachten. Die Ebene wird durch die Kanten in (zusammenhängende) *Flächen* partitioniert. Bei diesen Zusammenhangskomponenten unterscheiden wir die beschränkten *inneren Flächen*, und die unbeschränkte *äußere Fläche*. Eine Kante e eines Kreises C ist *im Uhrzeigersinn orientiert*, falls sie, wenn man C im Uhrzeigersinn durchläuft, in die Durchlaufrichtung zeigt. Jede Fläche wird durch einen Kreis von ihren Nachbarflächen getrennt.

2.2 Planare Graphen sind Pfaff'sch

Das nächste Lemma (mit Korollar) wird beweisen, dass man im planaren Fall nur die Orientierung jener Kreise, welche die inneren Flächen begrenzen, kennen muss. Wenn all diese Kreise eine ungerade Anzahl von Kanten haben, die in den Uhrzeigersinn zeigen, ist das hinreichend dafür, dass eine Pfaff'sche Orientierung vorliegt (Siehe [11]).

Lemma 2.1. *Sei G ein zusammenhängender, planarer Graph mit Orientierung D , so dass zu jeder inneren Fläche in G eine ungerade Anzahl von Kanten im Uhrzeigersinn orientiert sind. Dann hat in jedem Kreis C die Kardinalität der Menge von Kanten,*

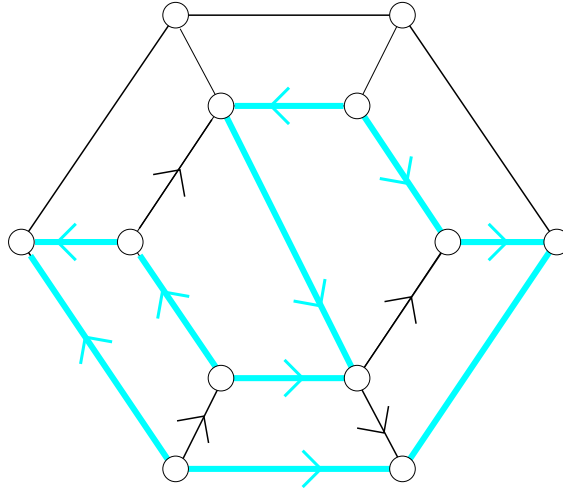


Abbildung 2.1:

welche im Uhrzeigersinn orientiert sind, umgekehrte Parität zu der Anzahl von Knoten innerhalb des Kreises (Abbildung 2.1).

Beweis. Sei C ein beliebiger Kreis in G . Angenommen, es existieren f Flächen F_i innerhalb von C und es sei c_i die Anzahl der im Uhrzeigersinn orientierten Kanten der Fläche F_i . Nach Voraussetzung ist $c_i \equiv 1 \pmod{2}$, und daher

$$f \equiv \sum_{i=1}^f c_i \pmod{2}.$$

Sei v die Anzahl der Knoten innerhalb von C , d.h. jener Knoten, die in der beschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^2 \setminus C$ liegen. Weiters sei mit e die Anzahl der Kanten innerhalb von C (d.h. jener Kanten, die zu obigen Knoten inzident sind) bezeichnet und sei k die Anzahl der Kanten von C (d.h. $k := |E(C)|$). Betrachtet man den Teilgraphen, der aus den Knoten und Kanten von C selbst (das sind jeweils k viele), sowie den Knoten und Kanten innerhalb des Kreises besteht, so gilt nach der Eulerschen Polyederformel (Satz 3.2.9 in [2])

$$(v + k) - (e + k) + (f + 1) = 2, \text{ also } e = v + f - 1.$$

Die Anzahl aller im Uhrzeigersinn gerichteter Kanten ergibt sich aus der Anzahl entsprechender Kanten auf C , die wir mit c bezeichnen, und der Anzahl aller Kanten innerhalb von C , also e . Der Grund dafür ist, dass jede Kante innerhalb von C an zwei Flächen grenzt,

wobei sie bei genau einer im Uhrzeigersinn orientiert ist. Wir können also

$$\sum_{i=1}^f c_i = c + e$$

schreiben. Alles in allem ergibt sich so

$$f \equiv \sum_{i=1}^f c_i = c + e = c + (v + f - 1) \pmod{2}$$

und daher $c + v - 1 \equiv 0 \pmod{2}$, also

$$c \equiv (v - 1) \pmod{2}.$$

□

Angewendet auf alternierende Kreise folgt daraus die Pfaff'schheit des obigen Graphen:

Korollar 2.2. *Sei G ein Graph wie in Lemma 2.1 mit zugehöriger Orientierung D . Dann ist D eine Pfaff'sche Orientierung.*

Beweis. Sei C ein F -alternierender Kreis für ein beliebiges perfektes Matching F . Die Anzahl der Knoten innerhalb von F muss gerade sein, da alle untereinander gematcht sein müssen. Nach dem Lemma ist die Anzahl der im Uhrzeigersinn orientierten Kanten ungerade, was bedeutet, dass C ungerade orientiert und damit D eine Pfaff'sche Orientierung ist. □

Wir sind nun in der Lage, auf ziemlich elementare Weise zu zeigen, dass jeder planare Graph Pfaff'sch ist (siehe wieder [11]):

Satz 2.3. *Jeder planare Graph besitzt eine Pfaff'sche Orientierung.*

Beweis. Der Beweis erfolgt durch Induktion nach der Anzahl von Kanten in G . Falls G ein Baum ist, so ist jede Orientierung Pfaff'sch. Es habe G also mindestens einen Kreis. Man wähle eine Kante e , die an die Außenfläche F_∞ grenzt. Sei F_0 die innere Fläche, die an e grenzt. Der Graph $G - e$ besitzt laut Induktionsvoraussetzung eine Orientierung, in der jede innere Fläche durch eine ungerade Anzahl im Uhrzeigersinn gerichteter Kanten begrenzt wird. Man kann e also entsprechend der Orientierung der bisherigen Kanten von F_0 hinzufügen.

Die Pfaff'sche Orientierung kann bei Start mit einem Spannbaum G_0 (siehe Abbildung 2.2) mit dieser Methode für jeden planaren Graphen gefunden werden. Um auf

2 Planare Graphen

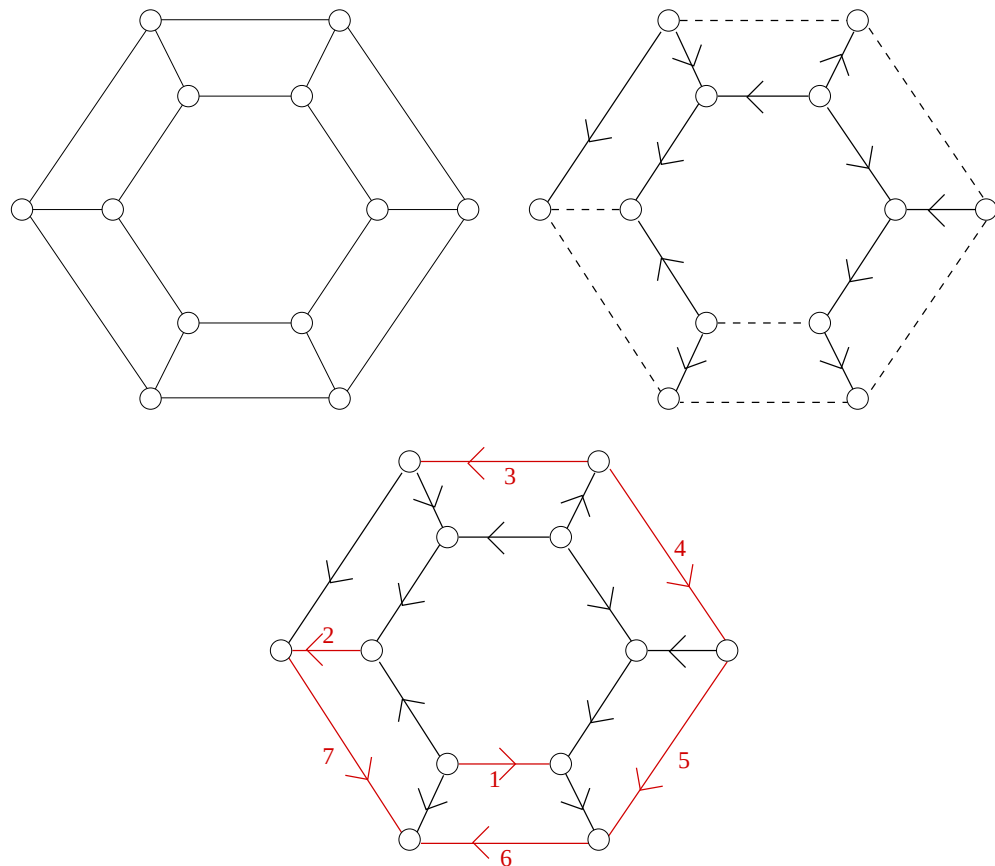


Abbildung 2.2: Algorithmus zum Finden einer Pfaff'schen Orientierung

den Graph G_1 zu kommen, wähle man eine beliebige Kante e_0 , sodass e_0 an F_∞ grenzt und mit $E(G_0)$ eine Fläche abschließt. Wähle die Orientierung wie oben im Beweis und wiederhole das Prozedere, bis alle Kanten $E(G - G_0)$ gewählt wurden. $\square$

Korollar 2.4. Eine solche Orientierung kann in polynomieller Zeit (nach der Anzahl der Kanten) gefunden werden.

3 Bipartite Pfaff'sche Graphen

Der Hauptsatz dieses Kapitels beinhaltet eine Charakterisierung bipartiter Pfaff'scher Graphen mittels eines verbotenen Teilgraphen, einer sogenannten geraden Unterteilung des $K_{3,3}$, und wurde erstmal von Little gezeigt [7]. Dabei spielen die verbotenen Teilgraphen eine in gewissem Sinne natürliche Rolle: Planare Graphen sind nach dem Satz von Kuratowski genau jene, welche keine *Unterteilung* des $K_{3,3}$ oder K_5 enthalten ([2] Satz 3.4.6).

Für bipartite Pfaff'sche Graphen wird sich zeigen, dass sie sich durch einen einzigen verbotenen „Teilgraphen“, den vollständigen bipartiten Graphen mit sechs Knoten $K_{3,3}$, charakterisieren lassen. Der Teilgraph ist hier im Sinne der Definition am Beginn dieser Arbeit nicht der $K_{3,3}$ selbst, sondern eine beliebige, so genannte *gerade Unterteilung* des Graphen (siehe Def. 3.2). Dass die so erhaltene Menge genau der Menge der bipartiten Pfaff'schen Graphen entspricht, wird in Abschnitt 3.3 gezeigt. Der dort zitierte, besonders kurze und elegante Beweis stammt aus einer Arbeit von Norine, Little und Teo [15].

Ebenfalls erwähnenswert ist ein Artikel von Robertson, Seymour und Thomas [17], in dem die Autoren einen Algorithmus präsentieren, der in polynomieller Zeit (der Laufzeit $\mathcal{O}(n^3)$, wobei n die Anzahl der Kanten ist) entscheidet, ob ein gegebener bipartiter Graph Pfaff'sch ist.

3.1 Einige Definitionen und Vorbereitungen

Ein Graph G ist *bipartit*, wenn seine Knotenmenge $V(G)$ in zwei Teilmengen V_1 und V_2 partitioniert werden kann, sodass keine Kanten zwischen beliebigen Knoten innerhalb eines V_i existieren. Falls P ein Pfad in G ist, der die Knoten a und b enthält, so sei $P[a, b]$ der *Teilpfad* von P mit Enden in a und b . Ein Teilgraph H eines Graphen mit Matching F ist *F-überdeckt*, falls $F \cap E(H)$ ein perfektes Matching von H ist. Ein Pfad P ist *F-überdeckt*, wenn er als Teilgraph aufgefasst die Eigenschaft hat, *F-überdeckt* zu sein. Ein Teilgraph heißt *F-Matching-überdeckt*, wenn er zugleich *F-überdeckt* und *Matching-überdeckt* ist.

3 Bipartite Pfaff'sche Graphen

Lemma 3.1. *Es sei H ein zentraler Teilgraph eines Pfaff'schen Graphen G . Dann besitzt H ebenfalls eine Pfaff'sche Orientierung.*

Beweis. Seien F_1 und F_2 zwei verschiedene Matchings von H . Zu zeigen ist: F_1 und F_2 haben das gleiche Vorzeichen. Sei F_3 ein perfektes Matching von $G - H$ (existiert lt. Voraussetzung). Durch F_3 können F_1 und F_2 zu Matchings von G ergänzt werden. Diese haben das gleiche Vorzeichen, und sie unterscheiden sich nur um $F_1 F_2$ -alternierende Kreise, die alle in H liegen. Nach Lemma 1.7 haben daher die Matchings F_1 und F_2 in H ebenfalls gleiches Vorzeichen. $\square$

Definition 3.2. Seien im folgenden G und H Graphen. Die Operation, in der eine Kante $e \in G$ durch einen Pfad P ersetzt wird, sei als *Kanten-Unterteilung* bezeichnet. Hat dieser Pfad ungerade Länge (und ist somit $|P| - |e|$ gerade), dann spricht man von einer *geraden Kanten-Unterteilung*. Der Graph H ist eine *Unterteilung* von G , wenn dieser durch eine Abfolge von Kanten-Unterteilungen aus G entsteht. Sind diese Kanten-Unterteilungen alle gerade, dann heißt H *gerade Unterteilung* von G .

Bemerkung 3.3. Dabei spielt die Reihenfolge, in der die Kanten-Unterteilungen gebildet werden, keine Rolle. Im Falle der geraden Kantenunterteilung werden gerade orientierte Kreise in gerade orientierte Kreise übergeführt, zentrale Kreise in zentrale Kreise. Denn entsteht G' durch gerade Kanten-Unterteilung aus G (die Kante e wird durch den Pfad P ersetzt), und sei C' ein Kreis in G' , dann existiert genau ein Kreis C in G , sodass $C = e + (C' - P)$, womit $G - C = G' - C'$ gilt, und C genau dann zentral ist, wenn dies für C' gilt. Das Argument lässt sich vortsetzen, weshalb die (zentralen) Kreise einer geraden Unterteilung bijektiv auf die (zentralen) Kreise des Grundgraphen abgebildet werden können.

Lemma 3.4. *Es sei H eine gerade Unterteilung eines Graphen G . Dann ist H Pfaff'sch orientierbar genau dann, wenn G es ist.*

Beweis. Angenommen, H sei Pfaff'sch und sei D eine Pfaff'sche Orientierung von H . In den durch Kanten-Unterteilungen hinzugefügten Pfaden P_i , die jeweils $e_i := \{v_i, w_i\}$ ersetzen, sind jeweils ungerade viele Kanten in die eine Richtung (o.B.d.A. Richtung w_i), und eine gerade Anzahl in die andere Richtung orientiert. Richtet man e_i dann jeweils dementsprechend von v_i nach w_i , so sind alle zentralen Kreise in G ungerade orientiert.

Umgekehrt orientiert man einfach ungerade viele Kanten von P_i gleich wie e_i , um aus einer Pfaff'schen Orientierung von G eine von H zu erzeugen. $\square$

3.2 Die Ohr-Zerlegung bipartiter Matching-überdeckter Graphen

Ein wichtiges Hilfsmittel, um die Struktur Matching-überdeckter (bipartiter) Graphen zu verstehen, ist die sogenannte Ohr-Zerlegung. Sie wird in der Literatur (siehe [11]) unter anderem dazu verwendet, die maximale Kantenzahl eines minimalen aufspannenden Matching-überdeckten Teilgraphen zu bestimmen.

In diesem Kapitel wird die Tatsache, dass so eine Ohr-Zerlegung immer existiert, die Charakterisierung der bipartiten Pfaff'schen Graphen möglich machen.

Definition 3.5. Es sei P ein Pfad in G mit den Kanten $b_1, b_2, \dots, b_n$. Es sei F ein Matching von G , sodass

$$b_{i+1} \in F \Leftrightarrow b_i \notin F$$

für $1 \leq i \leq n-1$.

- Falls b_1 und b_n nicht in F liegen, so heißt der Pfad F -*alternierend*.
- Falls b_1 in F liegt, so ist P ein F -*beginnender* Pfad.
- Falls sowohl b_1 , als auch b_n in F liegen, so heißt der Pfad F -*endend*.

Bemerkung. Die zahlreichen Zeichnungen, die in diesem Kapitel vorkommen, sollen die Leserin und den Leser beim Verständnis der Beweise unterstützen. Man beachte: Dünne Linien sind je nach Situation entweder nicht gematchte Kanten, oder alternierende Pfade. Dicke Kanten stellen sowohl Matching-Kanten, als auch F -endende Pfade dar, eine dünne Kante mit einem dicken Anfang symbolisiert einen F -beginnenden, ein zusätzlich dickes Ende einen F -endenden Pfad (wobei „Anfang“ und „Ende“ natürlich auch vertauscht sein können). Die zwei Farben der Knoten symbolisieren die Bipartitionsklassen.

Definition 3.6. Seien H_1 und H_2 Teilgraphen von G . Für jedes Matching F von G ist ein F -alternierender Pfad mit verschiedenen Enden u und v , ein $H_1\overline{H_2}$ -*Bogen*, falls $P \subseteq E(H_1)$, $V(P) \cap V(H_2) = \{u, v\}$ und $P \cap E(H_2) = \emptyset$. Ein $G\overline{H_2}$ -Bogen wird auch als $\overline{H_2}$ -*Bogen* bezeichnet (siehe Abbildung 3.1).

Definition 3.7. Eine Ohr-Zerlegung eines bipartiten Graphen G mit perfektem Matching F ist eine Folge $G_0, G_1, \dots, G_t$ von F -Matching-überdeckten Teilgraphen, so dass $|E(G_0)| = 1$, $G_t = G$ und für jedes $i > 0$ erhalte man G_{i+1} durch Anfügen eines eindeutigen $A_i\overline{G_i}$ -Bogens („Ohr“) an G_i , wobei A_i ein F -alternierender Kreis in G ist.

3 Bipartite Pfaff'sche Graphen

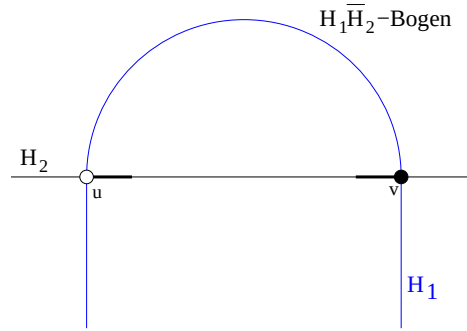


Abbildung 3.1: Ein $H_1\overline{H}_2$ -Bogen

Lovasz und Plummer haben in [11] gezeigt, dass für Matching-überdeckte Graphen immer eine solche Ohr-Zerlegung existiert, von Little und Rendl [9] existiert ein recht elementarer Beweis, der sich für bipartite Graphen noch einmal um Einiges vereinfachen lässt. Zunächst wird noch ein Lemma von Naddef und Pulleyblank [14] benötigt, dessen Resultat für bipartite Graphen etwas geschärft werden kann.

Definition 3.8. Ein Schnitt $\nabla(S)$ ist die Menge aller Kanten in $E(G)$, die eine Knotenmenge S und ihre Komplementärmenge $V(G) - S$ verbindet. Das bedeutet

$$\nabla(S) := \{(u, v) | u \in S, v \in V(G) - S\}.$$

Lemma 3.9. Sei v ein beliebiger Knoten eines Matching-überdeckten Graphen G , und F ein perfektes Matching in diesem Graphen. Dann kann jeder von v verschiedene Knoten w durch einen F -beginnenden Pfad P erreicht werden. Ist G zusätzlich bipartit und w aus der anderen Bipartitionsklasse, so ist P auch F -endend.

Beweis. Sei S die Menge der Knoten, die man von v aus durch einen F -beginnenden Pfad erreichen kann (siehe Abbildung 3.2). Falls $S = V(G)$, dann sind wir fertig. Falls $S \neq V(G)$, dann kann der Schnitt $\nabla(S)$ nicht leer sein, da ein Knoten $\bar{v} \in V(G) - S$ existiert und der Graph zusammenhängend ist. Weiters muss $\nabla(S) \cap F$ leer sein, denn sei $st \in \nabla(S) \cap F$, und ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $s \in S$, dann gibt es nach Voraussetzung einen F -beginnenden Pfad nach s , also auch nach t , was einen Widerspruch zu $t \notin S$ bedeutet. Nun sei e eine beliebige Kante aus $\nabla(S)$. Da der Graph Matching-überdeckt ist, gibt es ein Matching F' , welches e enthält. Nach dem Beweis von Lemma 1.7 gibt es einen $F'F$ -alternierenden Kreis A mit $e \in A$. Da es einen Knoten in $A \cap S$ geben muss, gibt es auch einen F -beginnenden Pfad P dorthin. Über den Kreis

3.2 Die Ohr-Zerlegung bipartiter Matching-überdeckter Graphen

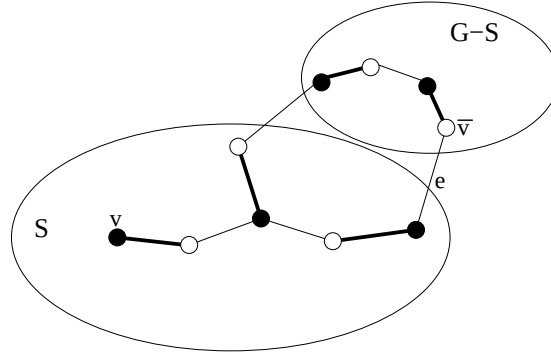


Abbildung 3.2: Die Konstruktion eines F -beginnenden Pfades von v nach $\bar{v}$ aus Lemma 3.9

A kann P zu einem F -beginnenden Pfad P' nach $\bar{v}$ verlängert werden.

Ist w aus der anderen Bipartitionsklasse, so ist der F -beginnende Pfad ungerade, muss also mit einer Kante aus F enden. $\square$

Korollar 3.10. Sei G ein Matching-überdeckter, bipartiter Graph mit den Bipartitionsklassen G_1 und G_2 , und sei F ein Matching von G . Dann gibt es zwischen je zwei Knoten $v \in G_1$ und $w \in G_2$ einen F -alternierenden Pfad.

Beweis. Sei $b_1 := v'v$ die Matchingkante, die mit v inzident ist. Nach Lemma 3.9 muss es einen F -beginnenden Pfad P' von v' nach w geben, dessen erste Kante b_1 ist, und dessen letzte Kante nicht in F liegen kann, da v' und w beide aus G_1 sind. Der Pfad $P' - b_1$ ist also ein F -alternierender Pfad von v nach w . $\square$

Satz 3.11. Sei F ein perfektes Matching in einem Matching-überdeckten, bipartiten Graphen G . Sei H ein F -Matching-überdeckter echter Teilgraph von G mit $E(H) \neq \emptyset$. Dann enthält G einen F -alternierenden Kreis A , in dem genau ein $A\bar{H}$ -Bogen B liegt.

Beweis. Da der Fall, dass G nur eine Kante hat, trivial ist, kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass jede Kante von G zu einem F -alternierenden Kreis gehört. Sei A ein solcher Kreis, der eine Kante aus $e \in E(G) - E(H)$ enthält, welche mit einem Knoten aus H inzident sei. Die Kante e ist Teil eines $A\bar{H}$ -Bogens, da Pfade auf A , deren Kanten nicht in H liegen, F -alternierend sein müssen. Andernfalls wäre $F \cap E(H)$ kein perfektes Matching von H . Wir bezeichnen diesen Bogen als B_1 . Außerdem sei A minimal bezüglich der Anzahl weiterer $A\bar{H}$ -Bögen gewählt. Falls B_1 der einzige $A\bar{H}$ -Bogen ist, so sind wir fertig.

3 Bipartite Pfaff'sche Graphen

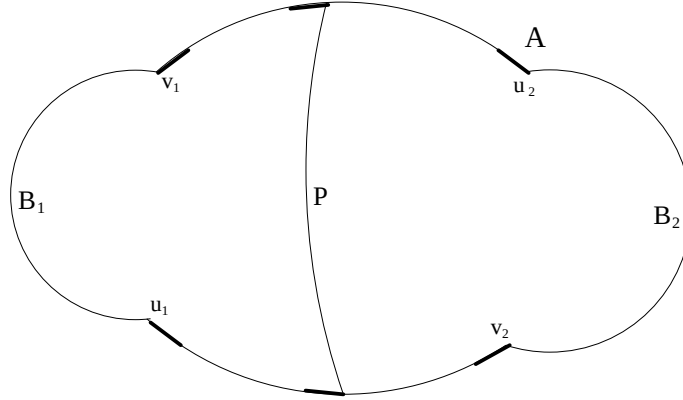


Abbildung 3.3: Ein alternierender Kreis A mit zwei $A\bar{H}$ -Bögen

Angenommen, es gäbe noch einen zweiten solchen Bogen B_2 (siehe Abbildung 3.3). Wir bezeichnen mit u_i und v_i den Anfangs-, respektive Endpunkt des Bogens B_i . Es sei bemerkt, dass diese Knoten jeweils inzident zu einer Kante aus $E(H) \cap A$ sind, die Bögen B_i also jeweils disjunkt sind, und ihre Vereinigung somit kein Pfad ist. Mit $\bar{B}_i$ bezeichne man jeweils $A - B_i$. Da H Matching-überdeckt ist, gibt es einen F -alternierenden Pfad P in H von einem Knoten p_1 aus $V(\bar{B}_1[v_1, u_2])$ zu einem Knoten p_2 aus $V(\bar{B}_2[v_2, u_1])$. Diese Knoten müssen wegen der ungeraden Länge von P in unterschiedlichen Bipartitionsklassen liegen. Also ist der F -beginnende Pfad $P' \subseteq A$ von p_1 nach p_2 auch F -endend. Damit ist $A_1 = P \cup P'$ ein F -alternierender Kreis, der o.B.d.A. den Bogen B_1 enthält. Da B_2 nicht enthalten ist, liegt in A_1 ein $\bar{H}$ -Bogen weniger als in A , was der Minimalität von A widerspricht. $\square$

Korollar 3.12. Sei G ein bipartiter, Matching-überdeckter Graph. Dann existiert eine Ohr-Zerlegung $G_0, G_1, \dots, G_t = G$ wie in Definition 3.7 beschrieben.

Beweis. G_0 besteht aus einer (beliebigen) Kante und ist trivialerweise Matching-überdeckt. Sei G_i also der i -te Graph in der Ohr-Zerlegung und F_i ein perfektes Matching von G_i , das zu einem perfekten Matching F von G erweitert werden kann. Nach Satz 3.11 gibt es einen F -alternierenden Kreis A_i , der genau einen $A\bar{G}_i$ -Bogen P enthält. Wir setzen

$$G_{i+1} := G_i + P.$$

Das Matching F kann auf ein perfektes Matching F_{i+1} von G_{i+1} eingeschränkt werden. Es bleibt zu zeigen, dass G_{i+1} wieder Matching-überdeckt ist: Dies ist der Fall, da ein Matching F'_{i+1} existiert, für das $F_{i+1} \triangle F'_{i+1} = A$ gilt, weil A ein F_{i+1} -alternierender Kreis ist. Somit ist jede Kante aus $G_{i+1} - G_i$ in einem Matching enthalten. $\square$

3.3 Eine Charakterisierung bipartiter Pfaff'scher Graphen

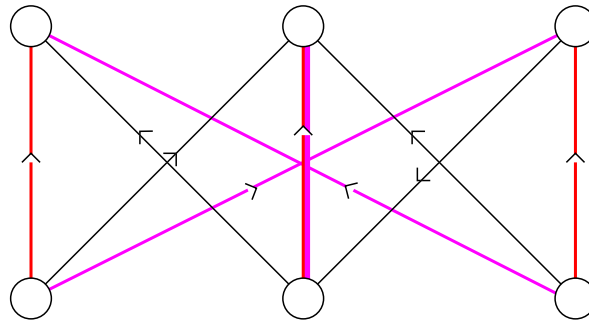


Abbildung 3.4: Der $K_{3,3}$ und zwei perfekte Matchings mit verschiedenen Vorzeichen

Bemerkung. Wie ebenfalls erstmals von Lovasz und Plummer [11] gezeigt wurde existiert auch für nicht-bipartite, Matching-überdeckte Graphen immer eine Ohr-Zerlegung. Dazu muss allerdings zugelassen werden, dass in jedem Schritt bis zu zwei Ohren hinzugefügt werden. Ein Algorithmus von Little und Rendl (siehe [9]) zum Finden einer Ohr-Zerlegung im allgemeinen Fall hat eine Laufzeit, die mit $O(|V(G)| \cdot |E(G)|)$ abgeschätzt werden kann.

3.3 Eine Charakterisierung bipartiter Pfaff'scher Graphen

Leicht zu sehen, aber von fundamentaler Wichtigkeit für die Charakterisierung bipartiter Pfaff'scher Graphen ist die Tatsache, dass der vollständige bipartite Graph mit sechs Knoten, der $K_{3,3}$, keine Pfaff'sche Orientierung besitzt.

Lemma 3.13. *Der $K_{3,3}$ ist kein Pfaff'scher Graph.*

Beweis. Seien U und V die Bipartitionsklassen des Graphen, und u_i bzw. v_i die Knoten von U und V für $i = \{1, 2, 3\}$. Wir zeigen zuerst folgende Behauptung: Jede Kante liegt in genau zwei perfekten Matchings. Um das zu sehen, fixieren wir eine Kante e von u_i nach v_j , ohne Beschränkung der Allgemeinheit von u_1 nach v_1 . Für die restlichen vier Knoten gibt es zwei mögliche Paarungen: $\{u_2, v_2\}$ und $\{u_3, v_3\}$, oder $\{u_2, v_3\}$ und $\{u_3, v_2\}$.

Daraus folgt, dass die Vertauschung der Orientierung einer Kante immer das Vorzeichen in genau zwei Matchings umdreht, die Parität der Anzahl ungerader Matchings somit immer gleich bleibt. Es genügt also zu zeigen, dass für eine konkrete Orientierung zwei Matchings mit verschiedenen Vorzeichen existieren. So eine Orientierung ist in Abbildung 3.4 gegeben: Nach Lemma 1.7 genügt es, sich den einzigen F_1F_2 -alternierenden Kreis anzusehen. Da dieser gerade orientiert ist, ist das Produkt der

3 Bipartite Pfaff'sche Graphen

Vorzeichen $\text{sgn } F_1 \cdot \text{sgn } F_2 = -1$ und wir haben zwei Matchings mit verschiedenen Vorzeichen gefunden. $\square$

Korollar 3.14. *Sei G ein Graph, der eine gerade Unterteilung des $K_{3,3}$ enthält. Dann ist G nicht Pfaff'sch.*

Beweis. Das Resultat folgt unmittelbar aus Lemma 3.4 und Lemma 3.13. $\square$

Wir sind nun in der Lage, das Hauptresultat dieses Kapitels zu formulieren, dessen leichtere Richtung wir bereits im Korollar 3.14 gezeigt haben.

Satz 3.15. *Ein bipartiter Graph G besitzt genau dann eine Pfaff'sche Orientierung, wenn kein zentraler Teilgraph H existiert, so dass H eine gerade Unterteilung des Graphen $K_{3,3}$ ist.*

Beweis. Sei B ein nicht-Pfaff'scher, bipartiter Graph, der minimal bezüglich Löschung von Kanten und gerader Unterteilungen ist. Es ist B Matching-überdeckt, da Kanten, die in keinem Matching vorkommen, gelöscht werden können, ohne, dass der resultierende Graph Pfaff'sch wäre. Sei $\{B_1, B_2\}$ die Bipartition von B .

Der Graph B erfüllt alle Voraussetzungen für die Ohr-Zerlegung aus Abschnitt 3.2. Daraus folgt, dass man B als Vereinigung $R_0 \cup R_1 \cup \dots \cup R_k$ schreiben kann, wobei $A_0 = R_0$ isomorph zu K_2 ist, und für jedes $i > 0$ die R_i Ohren mit Enden in $A_{i-1} = R_0 \cup R_1 \cup \dots \cup R_{i-1}$, und sonst disjunkt dazu, sind. Weiters sind die A_i alle F -Matching-überdeckt, wobei F ein perfektes Matching von B ist. Es existiert eine Kante $e \in B$, so dass $R_k = e$, da B sonst nicht minimal bezüglich gerader Unterteilungen wäre. Also besitzt $A_{k-1} = B - e$, auf Grund der Minimalität von B , eine Pfaff'sche Orientierung. Man nehme diese Orientierung und erweitere sie auf B , indem man e beliebig orientiert. Weil B Matching-überdeckt ist, existiert ein Matching F , das e nicht enthält und somit auch Matching von A_{k-1} ist. Die Kante e mit den Enden x und y gehört (da B minimal nicht-Pfaff'sch ist) zwei verschieden orientierten F -alternierenden Kreisen an. Löscht man e aus den Kreisen, so erhält man zwei verschiedene F -überdeckte Pfade P und Q , die x und y verbinden. Solche Pfade werden im Folgenden auch als *zulässig* bezeichnet. Seien P_1 und P_3 die Pfade der Komponenten von $P \cap Q$, die x bzw. y enthalten, und u_1 bzw. u_3 die anderen Enden dieser Pfade. Des weiteren seien P und Q so gewählt, dass $|P_1| + |P_3|$ maximiert wird. Sei $H = P \cup Q$. Wir benötigen zwei Lemmas, um den Beweis zu beenden:

Lemma 3.16. *Falls X und Y Kreise gerader Länge in einem orientierten Graphen sind, und $X \cap Y$ ein Pfad ungerader Länge, dann ist die symmetrische Differenz $Z = X \triangle Y$*

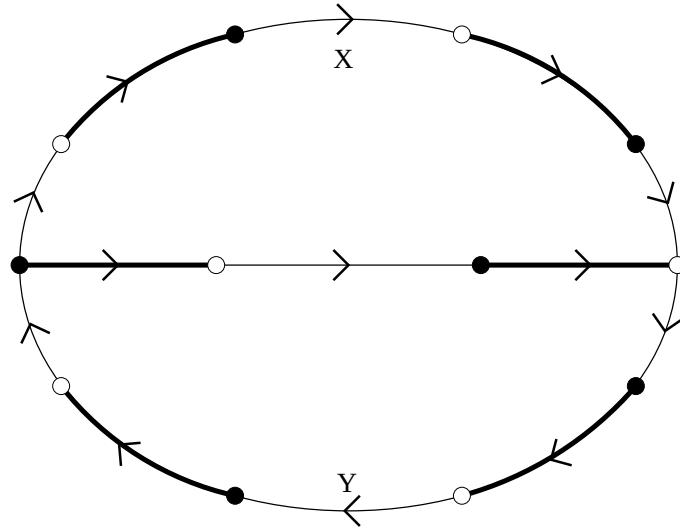


Abbildung 3.5: Zwei Kreise wie in Lemma 3.16

von X und Y ein Kreis gerader Länge, und die Anzahl gerade orientierter Kreise in der Menge $\{X, Y, Z\}$ ist gerade.

Beweis. Die Kreise können so in die Ebene eingebettet werden, dass die Kanten von X , die im Uhrzeigersinn orientiert sind, für Y gegen den Uhrzeigersinn zeigen (siehe Abbildung 3.5). Sind jetzt X und Y beide gerade orientiert, so zeigen für X , ohne Beschränkung der Allgemeinheit, gerade viele Kanten von $X \cap Y$ im Uhrzeigersinn, für Y folglich ungerade viele. Deswegen müssen auch insgesamt ungerade viele Kanten von Z im Uhrzeigersinn orientiert sein. In Abbildung 3.5 beispielsweise sind in Kreis X fünf Kanten im Uhrzeigersinn orientiert, in Y sind es acht. Die symmetrische Differenz der beiden Kreise enthält jeweils zehn Kanten im Uhrzeigersinn. Für andere Orientierungen von X und Y kann die gleiche Überlegung angewendet werden. $\square$

Bemerkung 3.17. Falls $X \cap Y$ im Lemma oben ein Pfad gerader Länge ist, so kann man mit dem gleichen Argument sehen, dass die Anzahl *ungerade* orientierter Kreise in $\{X, Y, Z\}$ gerade sein muss.

Lemma 3.18. Sei $P_2 = P - (P_1 \cup P_3)$ und $Q_2 = Q - (P_1 \cup P_3)$. Dann sind P_2 und Q_2 F -alternierende Pfade, sodass gilt:

1. $P_2 \cup Q_2$ ist ein gerade orientierter Kreis.
2. Kein F -alternierender $\overline{H}$ -Bogen verbindet einen inneren Knoten von P_2 mit einem inneren Knoten von Q_2 .

3 Bipartite Pfaff'sche Graphen

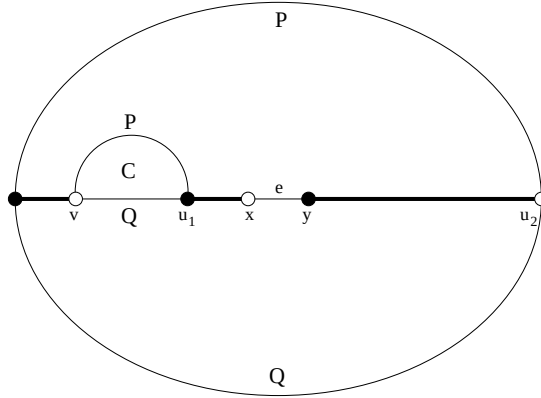


Abbildung 3.6: Angenommen, $P_2 \cup Q_2$ wäre kein Kreis

3. Falls es einen F -alternierenden $\overline{H}$ -Bogen S gibt, der zwei Knoten u und v aus $V(P_2)$ verbindet, sodass $|P_2[u, v]| < |P_2|$, dann ist $S \cup P_2[u, v]$ ein Kreis ungerader Parität.

Bemerkung. Der folgende Beweis basiert im Wesentlichen auf der Matching-Überdecktheit von B und der Wahl der Pfade P und Q . Die indirekte Beweisführung läuft jeweils auf eine Konstruktion von zulässigen Pfaden P' und Q' mit $|P'_1| + |P'_3| > |P_1| + |P_3|$, also auf einen Widerspruch zur Wahl der ursprünglichen Pfade P und Q , hinaus.

Beweis. „1.“: Falls $P_2 \cup Q_2$ kein Kreis ist, so ist $P_2 \cap Q_2 \neq \emptyset$. Wir wählen v aus $(V(Q_2) - u_1) \cap V(P_2)$ so, dass $|Q_2[u_1, v]|$ minimal ist. Dann ist $Q_2[u_1, v] \cup P_2[u_1, v]$ ein Kreis C (siehe Abbildung 3.6). Sei $R = P \triangle C$. Falls C gerade orientiert ist, dann sei $P' = P$ und $Q' = R$. Sonst sei $P' = R$ und $Q' = Q$. Nach Lemma 3.16 sind in beiden Fällen $P' + e$ und $Q' + e$ zulässige, F -alternierende Kreise verschiedener Orientierung, da $P' \triangle Q' = C$ im ersten Fall und $P' \triangle P = C$ im zweiten. Das ergibt einen Widerspruch zur Wahl von P und Q , da $v \notin \{u_1, u_2\}$.

„2.“: Für einen Widerspruch zur Wahl der Pfade P und Q genügt es nach „1“, zwei zulässige Pfade P' und Q' zu finden, die $|P' \cap Q'| > |P \cap Q|$ erfüllen. Angenommen, es gäbe einen F -alternierenden $\overline{H}$ -Bogen R , der die Knoten $v \in V(P_2) - \{u_1, u_2\}$ und $w \in V(Q_2) - \{u_1, u_2\}$ verbindet (Abb. 3.7). Da R per Definitionem F -alternierend ist, liegen v und w in verschiedenen Bipartitionsklassen. Sei o.B.d.A. $x \in B_1$, dann ist $y \in B_2$, $v \in B_2$ und $w \in B_1$. Wir betrachten die beiden Kreise $C = P_2[u_1, v] \cup R \cup Q_2[w, u_1]$ und $D = P_2[v, u_2] \cup Q_2[u_2, w] \cup R$. Da $C \triangle D = P_2 \cup Q_2$ gerade orientiert ist, müssen C und D verschieden orientiert sein (hier geht Lemma 3.16 ein). Sei, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, D der ungerade orientierte Kreis. Dann sind (wieder Lemma 3.16)

3.3 Eine Charakterisierung bipartiter Pfaff'scher Graphen

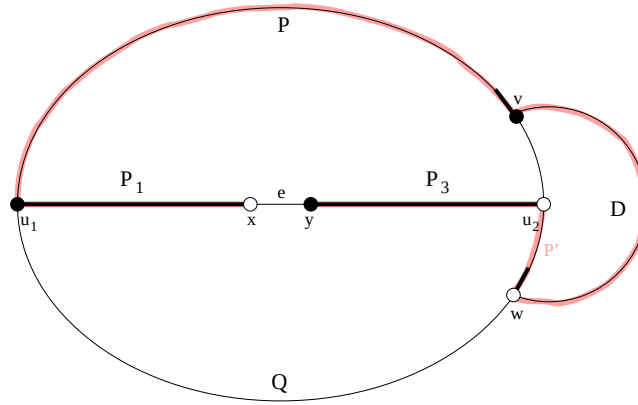


Abbildung 3.7: Ein $\overline{H}$ -Bogen zwischen Knoten in P_2 und Q_2

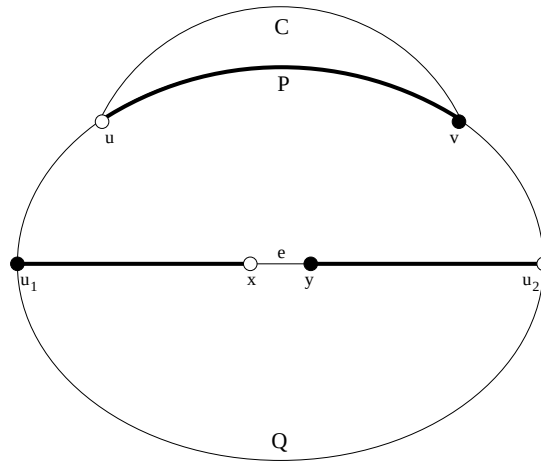


Abbildung 3.8: Ein $\overline{H}$ -Bogen zwischen zwei Knoten in P_2

$P' := P \triangle D$ und $Q' = Q$ die zulässigen F -überdeckten Pfade, die der Wahl von P und Q , und der Maximalität von $|P \cap Q|$ widersprechen.

„3.“: Angenommen, der Kreis $C = S \cup P_2[u, v]$ wäre gerade orientiert. Dann kann er nicht F -alternierend sein (da ja $B - e$ Pfaff'sch ist). Daher sind $P' := P$ und $Q' := P \triangle C$ zwei zulässige F -überdeckte Pfade, und $|P \cap (P \triangle C)| > |P \cap Q|$, da ja laut Voraussetzung $|P_2[u, v]| < |P_2|$. Wegen Lemma 3.16 ergibt das einen Widerspruch zur Wahl von P und Q . Also sieht $H \cup S$ aus wie in Abbildung 3.8. $\square$

Betrachten wir wieder den Graphen $G = B - e$. Da dieser Matching-überdeckt ist, gibt es nach Korollar 3.10 einen F -alternierenden Pfad von einem beliebigen Knoten in B_1 zu einem ebenfalls beliebigen Knoten in B_2 . Demzufolge muss (mindestens) ein Pfad von jedem Knoten in $V(P_1) \cap B_1$ zu einem beliebigen Knoten in $V(P_3) \cap B_2$ existieren.

3 Bipartite Pfaff'sche Graphen

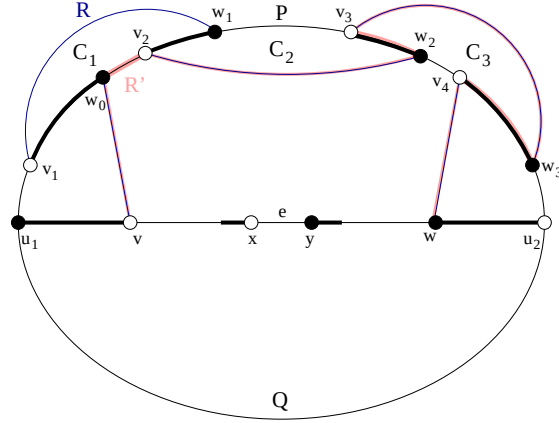


Abbildung 3.9: So sähe $H \cup G[R] \cup \{e\}$ im Fall $i > 1$ aus.

Dieser Pfad muss einen F -alternierenden Pfad R enthalten, sagen wir von $v \in V(P_1) \cap B_1$ nach $w \in V(P_3) \cap B_2$, der sonst keine Knoten mit $P_1 \cup P_3$ gemeinsam hat, also $R \cap (V(P_1) \cup V(P_3)) = \{v, w\}$. Zusätzlich muss $v \neq u_1$ und $w \neq u_2$ gelten, da diese Knoten sich jeweils in verschiedenen Bipartitionsklassen befinden. Es kann o.B.d.A. angenommen werden, dass $F - (P_1 \cup P_3)$, P_2 , Q_2 und R so gewählt wurden, dass $|P_2 \cup Q_2 \cup R|$ minimal ist.

Sehen wir uns den Pfad R genauer an. Nach Punkt „2.“ in Lemma 3.18 gibt es keine $R\overline{H}$ -Bögen von P_2 nach Q_2 . Ist also $R \cap P_2 \neq \emptyset$, dann teilt R keine Knoten mit Q_2 und umgekehrt. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $R \cap Q_2 = \emptyset$ ist. Eventuelle $R\overline{H}$ -Bögen haben ihre Enden also in $(V(P_2) - \{u_1, u_2\}) \cup \{v, w\}$. Angenommen, ein $R\overline{H}$ -Bogen S verbindet Knoten z_1 und z_2 in P_2 . Sei $C = P_2[z_1, z_2] \cup S$. Dann ist C nach Punkt „3.“ in Lemma 3.18 F -alternierend: Andernfalls wäre mit $P'_2 = P_2 \triangle S$ der Minimalität von $|P_2 \cup Q_2 \cup R|$ widersprochen, da zumindest die Endkanten von $P[z_1, z_2]$ nicht in $P'_2 \cup Q_2 \cup R$ lägen (siehe Abb. 3.8).

Wir benennen mit $R_0 := R[v_0, w_0]$, $R_1 := R[v_1, w_1]$, $\dots$ $R_n := R[v_n, w_n]$ die eventuell existierenden $R\overline{H}$ -Bögen, die wir in der Reihenfolge des Durchlaufens von v nach w benennen. Das bedeutet, es ist $v_0 = v$, $v_i \in V(R[w_{i-1}, w_i])$ für alle $i > 0$ und $w_i \in V(R[v_i, v_{i+1}])$ für alle $i < n$, woraus auch $w_n = w$ folgt. Für $0 < i < n$ bildet der $R\overline{H}$ -Bogen R_i mit dem entsprechenden Abschnitt $P_2[v_i, w_i]$ einen F -alternierenden Kreis $C_i := R_i \cup P_2[v_i, w_i]$, wie wir uns weiter oben schon überlegt haben. Da $v = v_0$ in B_1 liegt, muss w_0 in B_2 liegen. Analog liegt v_n in B_1 , weil $w_n \in B_2$. Für $0 < i < n$ sind die $v_i \in B_1$ und die $w_i \in B_2$, weil die C_i alternierend sind und somit $P[w_i, v_i + 1]$ ein F -endender Pfad sein muss (wieder Abbildung 3.9). Aus dem selben Grund liegen für

3.3 Eine Charakterisierung bipartiter Pfaff'scher Graphen

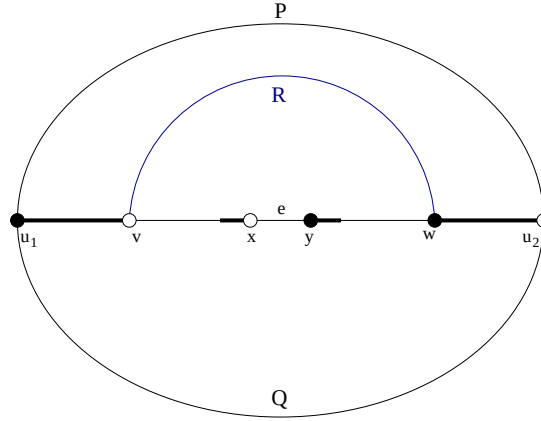


Abbildung 3.10: In Wirklichkeit ist $G[R] \cap P_2 \neq \emptyset$

alle $i < n$ die v_{i+1} in $V(P_2[u_1, w_i])$ und für $i < n - 1$ gilt $w_{i+1} \in V(P_2[w_i, u_2])$. Daraus folgt auch für $0 < i < n$, dass $v_{i+1} \in V(P_2[w_{i-1}, w_i])$, weil R ein Pfad ist.

Wenn nun $n = 1$ wäre, so müsste nach obigen Überlegungen der Graph $H \cup G[R] \cup \{e\}$, ein Teilgraph von B , so aussehen wie in Abbildung 3.11. Die Pfade zwischen den sechs Knoten mit Grad 3 hätten alle ungerade Länge, könnten also im Sinne der geraden Unterteilung kontrahiert werden. Im resultierenden Graph sind alle Knoten unterschiedlicher Bipartitionsklassen adjazent, er wäre also isomorph zu $K_{3,3}$, und $H \cup G[R] \cup \{e\}$ die gesuchte gerade Unterteilung. Wir zeigen zunächst, dass überhaupt mehr als ein $R\bar{H}$ -Bogen existieren kann, dass also n größer als 0 ist (Die Existenz des Pfades ist ja bereits gesichert).

Angenommen $n = 0$. Dann gäbe es F -alternierende Kreise $R \cup P[v, w]$ und $R \cup Q[v, w]$, die wegen der Minimalität des Graphen B ungerade orientiert sein müssten. Der Überlegung in Lemma 3.16 zufolge müsste $P_2 \cup Q_2$ ebenfalls ungerade orientiert sein, was einen Widerspruch zu Lemma 3.18, „1.“ darstellt (Abbildung 3.10).

Angenommen, $n > 1$. Sei $F' = F \triangle C_1$, $P' = P \triangle C_1$ und $R' = R \triangle C_1$. Sowohl P' , als auch R' , sind F' -alternierende Pfade. Da der Kreis C_1 bezüglich des Matchings F alternierend, und zudem ungerade orientiert ist, und $P_2 \cup Q_2$ gerade Parität hat, muss $(P_2 \cup Q_2) \triangle C_1 = (P_2 \triangle C_1) \cup Q_2$ ebenfalls gerade orientiert sein. Also stellt P' eine zulässige Wahl als Ersatz für P dar, und es gilt $|P' \cup Q \cup R'| < |P \cup Q \cup R|$, weil zumindest die Endkanten von $P[v_1, w_1]$ nicht in $P' \cup Q \cup R'$ enthalten sind (Abb. 3.9). Also ist $n = 1$, was zu zeigen war.

□

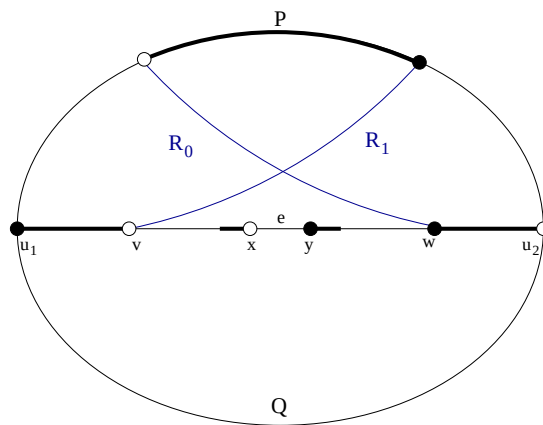


Abbildung 3.11: Der Graph $H \cup G[R] \cup \{e\}$ ist eine gerade Unterteilung des $K_{3,3}$

4 Nicht-bipartite Pfaff'sche Graphen

Im letzten Kapitel haben wir eine sehr schöne und kurze Charakterisierung bipartiter Pfaff'scher Graphen mittels des verbotenen Teilgraphen $K_{3,3}$ gefunden. Die Frage ist nun, ob allgemein eine ähnliche Charakterisierung durch eine Liste endlich vieler verbotener Graphen möglich ist, bzw. ob für nicht-bipartite ein (möglicherweise schwächeres) Analogon zu Satz 3.15 existiert. Fischer und Little [3] haben die Klasse der auf diese Weise charakterisierbaren Graphen auf sogenannte fast-bipartite Graphen erweitert.

4.1 Die Charakterisierung fast-bipartiter Pfaff'scher Graphen

Definition 4.1. Ein Matching-überdeckter, nicht-bipartiter Graph G heißt *fast-bipartit*, falls es zwei Kanten $e, f \in E(G)$ gibt, so dass $G - e - f$ bipartit und Matching-überdeckt ist.

Der Graph in Abbildung 4.1 heißt *Twinplex*. Er entsteht, indem man im Petersen-Graph zwei Kanten (in der Abbildung sind das $\{1, 8\}$ und $\{3, 11\}$) wählt, deren induzierter Graph auf den Endknoten genau aus diesen zwei Kanten besteht, und diese unterteilt. Die zwei neuen Knoten werden durch eine Kante verbunden.

Den *Cubeplex* (Abbildung 4.2) erhält man, indem man im Graphen des Würfelskeletts drei Kanten eines perfekten Matchings unterteilt, und die neuen Knoten (in der Abbildung sind das die Knoten mit den Nummern 5, 7 und 12) mit einem ebenfalls neu hinzugefügten Knoten (Nummer 6) verbindet.

Entfernt man jeweils die beiden roten Kanten in den Zeichnungen, so wird der Graph bipartit. Die Numerierung ist so gewählt, dass man beim Durchlauf von 1 bis 12 einen Hamilton-Kreis erhält. Die Darstellung der Graphen in Kreisform ist in der Literatur eigentlich die gebräuchlichere, für uns wird die in den Abbildungen jeweils letzte Einbettung allerdings sehr hilfreich sein.

Es ergibt sich folgendes Resultat [3]:

Satz 4.2. Ein fast-bipartiter Graph G ist genau dann Pfaff'sch, wenn er keinen zentralen Teilgraph H enthält, der eine gerade Unterteilung von $K_{3,3}$, Cubeplex oder Twinplex ist.

4 Nicht-bipartite Pfaff'sche Graphen

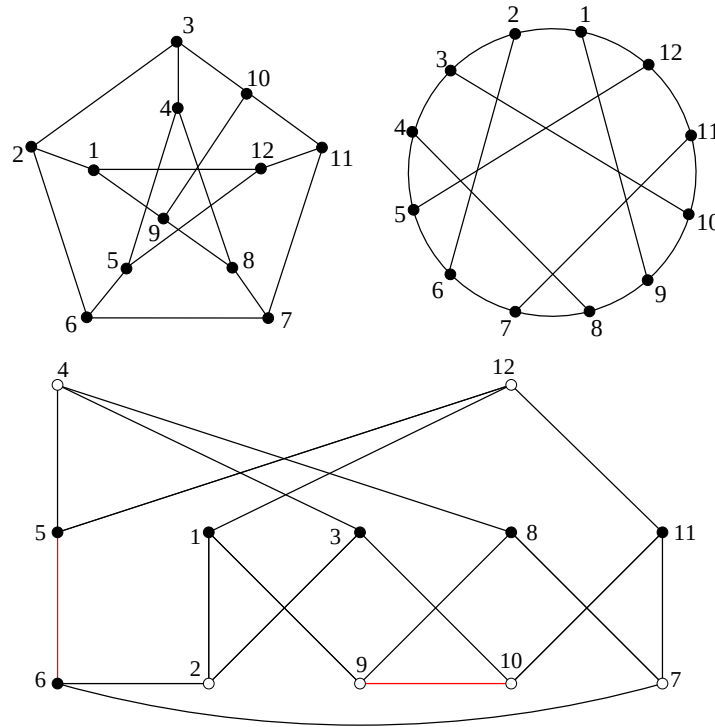


Abbildung 4.1: Der Twinplex

Bemerkung. Aufbauend auf dem Algorithmus von Robertson et. al. für bipartite Graphen [17] präsentieren Miranda und Lucchesi [12] einen Algorithmus, der für jeden fast-bipartiten Graphen in polynomieller Zeit entscheidet, ob dieser eine Pfaff'sche Orientierung besitzt.

4.2 Minimal nicht-Pfaff'sche Graphen

Wir benötigen noch eine kleine Verallgemeinerung des Begriffes der geraden Unterteilung:

Definition 4.3. Sei $v \in H$ ein Knoten von Grad 2, und seien v_1 und v_2 die adjazenten Knoten. Ein Graph G entsteht durch *Kantenbikontraktion* aus H mittels Kontraktion der mit v inzidenten Kanten e_1 und e_2 , der übriggebliebene Knoten sei wieder mit v bezeichnet. Eventuell entstehende Schleifen und Mehrfachkanten werden ebenfalls gelöscht. Seien G und K gegeben. Dann ist K ein *Matching Minor* von G , falls ein zentraler Teilgraph $H \subseteq G$ existiert, sodass H durch wiederholte Kantenbikontraktionen in K übergeführt werden kann.

Bemerkung. Ein Matching Minor spielt eine ähnliche Rolle, wie der $K_{3,3}$ in Satz 3.15. Zu

4.2 Minimal nicht-Pfaff'sche Graphen

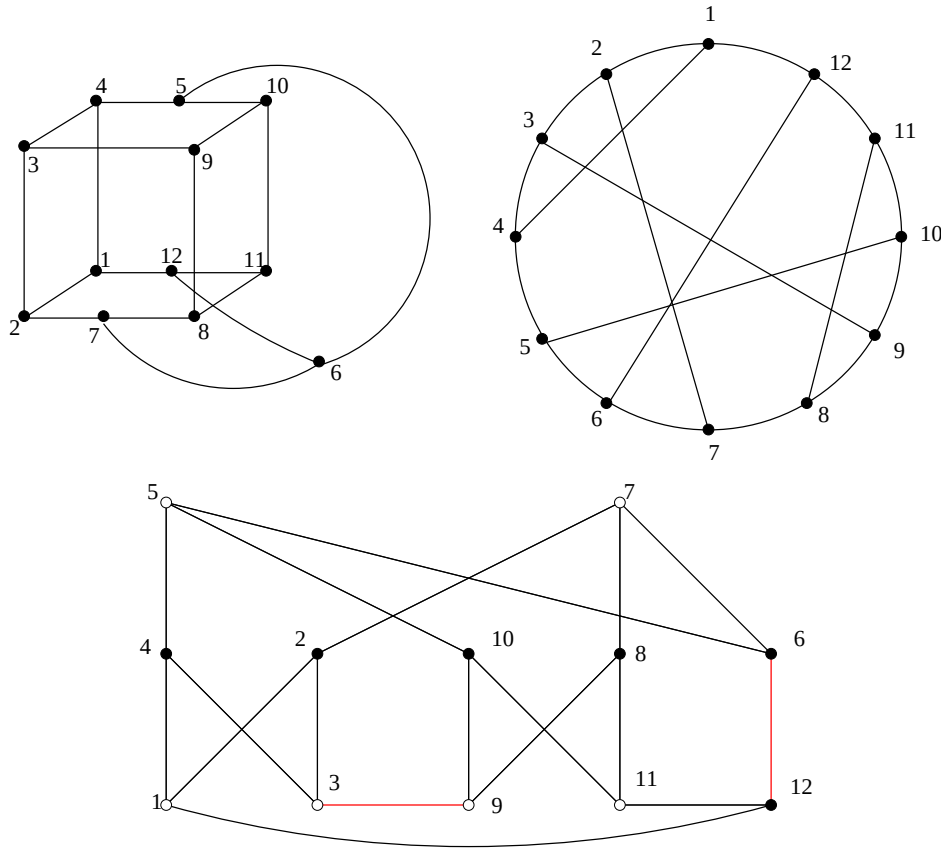


Abbildung 4.2: Der Cubeplex

beiden existiert ein Graph, der als zentraler Teilgraph in G enthalten ist. Die Definition des Matching Minors ist allerdings etwas allgemeiner gefasst: Während eine gerade Kanten-Unterteilung immer noch eine Folge von Bikontraktionen rückgängig gemacht werden kann, ist es unmöglich, eine Bikontraktion zweier Knoten von Grad größer 2 durch eine (oder mehrere) gerade Kanten-Unterteilung(en) zu reversieren.

Wie auch im Fall der geraden Unterteilungen gilt hier, dass der Matching Minor eines Pfaff'schen Graphen Pfaff'sch ist. Der Beweis benötigt allerdings einige Vorbereitungen. Zunächst ein Lemma von S. Norine und R. Thomas [16]:

Lemma 4.4. *Sei G ein zusammenhängender, Pfaff'scher Graph, und sei T ein Spannbaum von G . Dann gilt:*

1. *Jede Orientierung von T lässt sich zu einer Pfaff'schen Orientierung von G erweitern.*

4 Nicht-bipartite Pfaff'sche Graphen

2. Falls $e \in E(G)$ zwei Knoten mit geradem Abstand in T verbindet, dann kann jede Orientierung von $T + e$ zu einer Pfaff'schen Orientierung von G erweitert werden.

Beweis. Für ein Matching F kann ein F -alternierender Kreis C immer nur gerade viele Kanten eines Schnittes enthalten. Dreht man also in einer Pfaff'schen Orientierung alle Kanten eines Schnittes in die andere Richtung, so bleibt sie Pfaff'sch.

Für jede Kante t_i im Baum T gibt es einen Schnitt S_i , der t_i und eine Menge von Kanten $X_i \subseteq G - T$ enthält. Deshalb kann man in einer Pfaff'schen Orientierung alle Kanten $t_i \in T$ umorientieren, und bei entsprechender Umorientierung einiger Kanten aus $G - T$ (nämlich der restlichen Kanten aus X_i) die Pfaff'schheit der Orientierung erhalten. Das entspricht der ersten Behauptung.

Für die zweite Behauptung starten wir mit einer beliebigen Pfaff'schen Orientierung. Nach „1.“ wissen wir bereits, dass die Orientierung jeder Kante von t_i beliebig gewählt werden kann, es genügt also zu zeigen, dass man die Orientierung von e ändern kann, ohne die Richtung einer Kante aus T wechseln zu müssen.

Dazu drehen wir zunächst die Ausrichtung aller Kanten in G um, wodurch die Pfaff'schheit natürlich invariant gelassen wird. Wir färben die Knoten des Spannbaums T mit zwei Farben. Die Kante $e := \{v_1, v_2\}$ verbindet zwei gleich gefärbte Knoten aus T , da v_1 und v_2 in T geraden Abstand haben. Wir bilden den Schnitt, der die Knoten unterschiedlicher Farbe trennt, der also alle Kanten von T enthält, die Kante e jedoch nicht. Wie wir im Beweis zu „1.“ gesehen haben, darf man die Orientierung aller Kanten eines Schnittes ändern, ohne die Pfaff'sche Eigenschaft zu zerstören. Tun wir dies, so zeigen die Kanten des Baumes nun in die gleiche Richtung wie zu Beginn, die Kante e aber hat ihre Orientierung gewechselt. $\square$

Lemma 4.5. *Ein Matching Minor eines Pfaff'schen Graphen ist ebenfalls Pfaff'sch.*

Beweis. Da G Pfaff'sch ist, gilt dies nach Lemma 3.1 auch für jeden zentralen Teilgraphen. Es genügt also, zu zeigen, dass die Kanten-Bikontraktion die Pfaff'sche Eigenschaft bewahrt. Sei H ein Pfaff'scher Graph, H' ein Graph, der durch eine Kanten-Bikontraktion (wie in Definition 4.3 beschrieben, mit dortiger Notation) aus H entstanden ist. Betrachte einen Spannbaum von H' (als Kantenmenge), der v enthält. Durch Hinzufügen der Kanten e_1 und e_2 erhält man einen Spannbaum von H . Nach Lemma 4.4, „1.“ kann eine beliebige Orientierung dieses Spannbaums zu einer Pfaff'schen Orientierung von H erweitert werden. Wir orientieren also die Kanten e_1 und e_2 in die gleiche Richtung, zum Beispiel als v_1v und vv_2 .

Zu jedem alternierenden Kreis C' in H' existiert genau ein Gegenstück C in H , dass entweder $e_1 + e_2$ enthält, oder keine der beiden Kanten. Durch die Konstruktion der

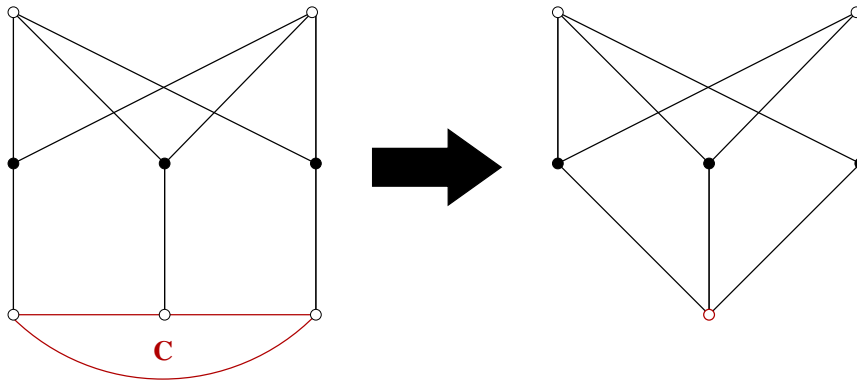


Abbildung 4.3: Beispiel eines (nicht-Pfaff'schen) schwachen Matching Minors: Durch Kontraktion des ungeraden Kreises C im linken Graphen (welcher in Abschnitt 4.4 unter dem Namen $G(1, \emptyset)$ in Erscheinung tritt) erhält man den $K_{3,3}$ (rechts).

Orientierung von H ist gewährleistet, dass in beiden Fällen C' die Umlaufparität von C übernimmt, und somit ungerade orientiert ist. $\square$

Bemerkung. Der Beweis oben zeigt sogar, dass die Kantenbikontraktion die Pfaff'sche Eigenschaft invariant lässt, d.h. es gilt H' ist **genau** dann Pfaff'sch, wenn H es ist. Die Umkehrung von Lemma 4.5 gilt natürlich dennoch nicht, da aus der Pfaff'schheit eines zentralen Teilgraphen, diesbezüglich keine Aussage über den ganzen Graphen gemacht werden kann.

4.2.1 Schwache Matching Minoren in Pfaff'schen Graphen

Als nächsten Schritt erweitern wir den Begriff des Matching Minors:

Definition 4.6. Ein Graph K heißt *schwacher Matching Minor* eines Graphen G , falls K von einem Matching Minor K' von G erhalten werden kann, indem man eine Folge von ungeraden Kreisen in K' zu Knoten kontrahiert und entstehende Schleifen und Mehrfachkanten löscht (für ein Beispiel siehe Abbildung 4.3).

Folgendes Lemma (siehe [11]) wird uns beim Beweis behilflich sein, dass die Existenz eines nicht-Pfaff'schen schwachen Matching Minors immer zur Folge hat, dass der Grundgraph nicht Pfaff'sch ist. Zur einfacheren Notation führen wir noch folgende Funktion ein: Sei F ein perfektes Matching in einem orientierten Graphen. Dann sei die Abbildung $l(F)$ mit Werten in $\{0, 1\}$ implizit durch $\text{sgn } F = (-1)^{l(F)}$ definiert.

4 Nicht-bipartite Pfaff'sche Graphen

Lemma 4.7. Sei G ein Graph mit n Knoten und D eine Orientierung von G . Zusätzlich sei jeder Kante $e \in E(G)$ eine Variable x_e zugeordnet, die Anzahl aller perfekten Matchings in G sei gleich n . Dann sind folgende vier Punkte äquivalent:

1. Der Graph G hat eine Pfaff'sche Orientierung.
2. Es existiert eine Menge $S \subseteq E(G)$, so dass für jedes Matching F gilt: $|S \cap F| \equiv l(F) \pmod{2}$.
3. Das lineare Gleichungssystem bestehend aus Gleichungen der Form $\sum_{e \in F_i} x_e = l(F_i)$ für jedes Matching F_i von G , $1 \leq i \leq m$, hat eine Lösung über dem endlichen Körper F_2 .
4. Es existiert keine Menge perfekter Matchings $F_1, F_2, \dots, F_k$ von G mit $F_1 \triangle F_2 \triangle \dots \triangle F_k = \emptyset$ und $\sum_{j=1}^k l(F_j) \equiv 1 \pmod{2}$.
5. Es existiert in G keine Familie $\mathcal{R}$ von F -alternierenden Kreisen $C_1, C_2, \dots, C_l$, mit $C_1 \triangle C_2 \triangle \dots \triangle C_l = \emptyset$, für ein fixiertes Matching F , so dass eine ungerade Anzahl der Kreise gerade Orientierung in D hat.

Beweis. Sei D' eine weitere Orientierung von G , und bezeichnen wir mit $\text{sgn}_{D'} F$ das Vorzeichen eines Matchings F unter der Orientierung D' . Sei S die Menge der Kanten, die umorientiert werden müssen, um D' aus D zu erhalten. Dann ist

$$\text{sgn}_{D'} F = (\text{sgn}_D F)(-1)^{|S \cap F|} = (-1)^{l(F) + |S \cap F|}.$$

Das bedeutet, dass genau dann eine Pfaff'sche Orientierung D' (nach Lemma 1.10 können wir o.B.d.A. die Vorzeichen der Matchings als positiv annehmen) existiert, wenn es eine Kantenmenge S gibt mit $l(F) \equiv |S \cap F| \pmod{2}$ für alle F , womit die Äquivalenz der ersten beiden Punkte gezeigt wäre.

Die Eigenschaft in Punkt „3.“ ist nur eine Umformung von Punkt „2.“, indem man den Vektor x als Inzidenzvektor zur Menge S betrachtet.

Die Bedingung in „4.“ ist äquivalent zur Aussage, dass nicht für jede Wahl von $x := (x_e)_{e \in E(G)}$, sowohl $\sum_{j=1}^k \sum_{e \in F_j} x_e \equiv 0 \pmod{2}$, als auch $\sum_{j=1}^k l(F_j) \equiv 1 \pmod{2}$ gelten dürfen. Die linke Gleichung ist nämlich genau dann für jedes x erfüllt, wenn jede Kante in einer geraden Anzahl von Matchings vorkommt, also die symmetrische Differenz der Matchings die leere Menge ist.

Die Äquivalenz der Aussagen „3.“ und „4.“ folgt somit aus dem *Rang-Satz* über die Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme (siehe z.B. [1]).

Um zu zeigen, dass „5.“ aus „4.“ folgt, nehmen wir zunächst indirekt an, es gäbe so eine geforderte Familie $\mathcal{R}$ von Kreisen mit obigen Eigenschaften. Aus der ersten Bedingung in Punkt „5.“ folgt, dass jede Kante aus $\bigcup C_i$ in einer geraden Anzahl von Kreisen aus $\mathcal{R}$ enthalten sein muss. Konstruieren wir daraus Matchings $F_j := F \triangle C_j$ für alle $1 \leq j \leq l$. Das Vorzeichen $\text{sgn } F$ sei o.B.d.A. positiv, da es laut Annahme einen gerade orientierten F -alternierenden Kreis C_k und somit (nach Lemma 1.7) ein Matching F_k mit verschiedenem Vorzeichen geben muss, wobei die Kreise C_i genau die F_k -alternierenden Kreise sind (man kann also ggf. F durch F_k ersetzen). Jetzt ist

$$\triangle_{i=1}^l F_i = F_1 \triangle F_2 \triangle \dots \triangle F_l = (F \triangle C_1) \triangle (F \triangle C_2) \triangle \dots \triangle (F \triangle C_l) \in \{\emptyset, F\}$$

wegen der Kommutativität und Assoziativität der symmetrischen Differenz, je nachdem, ob der Index l gerade oder ungerade ist. Da $l(F) = 0$ und $l(F_j) = 1$ für eine ungerade Anzahl F_j , gilt

$$\sum_{j=1}^l l(F_j) = \sum_{j=1}^l l(F_j) + l(F) \equiv 1 \pmod{2}.$$

Ist also $\triangle F_i = \emptyset$, so ist $\{F_i | 1 \leq i \leq l\}$ bereits die gesuchte Menge, andernfalls fügt man einfach das Matching F hinzu.

Umgekehrt sei $F_1, F_2, \dots, F_k$ eine Menge von Matchings, wie sie in „4.“ angegeben ist. Für das Matching F aus „5.“ kann wieder (siehe oben) $\text{sgn } F = 1$ angenommen werden. Sei R_i die Menge der $F_i F$ -alternierenden Kreise (also der Kreise in $F \triangle F_i$), die Familie aller solcher Kreise sei mit $\mathcal{R} := \bigsqcup_{i=1}^k R_i$ bezeichnet. Sei c_i die Anzahl der gerade orientierten $F_i F$ -alternierenden Kreise. Dann ist nach Lemma 1.7

$$\text{sgn } F_i = (-1)^{c_i} \text{sgn } F = (-1)^{c_i}$$

und somit ist $c_i \equiv l(F_i) \pmod{2}$. Daraus folgt

$$\sum_{i=1}^k c_i \equiv \sum_{j=1}^k l(F_j) \equiv 1 \pmod{2}$$

und somit ist die Anzahl der gerade orientierten Kreise in $\mathcal{R}$ ungerade. Bleibt zu zeigen, dass die symmetrische Differenz $\triangle \mathcal{R}$ all dieser Kreise leer ist: Falls eine Kante e nicht in F liegt, so entspricht die Anzahl der Kreise in $\mathcal{R}$, die e enthalten, der Anzahl der Matchings aus $F_1, F_2, \dots, F_k$, die diese Kante beinhalten, und diese ist gerade. Daher ist $\triangle \mathcal{R} \subseteq F$. Nun muss aber für je zwei Kreise die symmetrische Differenz wieder eine (möglicherweise leere) Menge von Kreisen sein, und somit ist (F enthält keine Kreise)

4 Nicht-bipartite Pfaff'sche Graphen

$$\triangle \mathcal{R} = \emptyset.$$

□

Bemerkung. Betrachtet man nur bipartite Graphen (siehe [11]), so sind genau jene Graphen Pfaff'sch, die keine ungerade Anzahl F -alternierender Kreise enthalten, deren symmetrische Differenz leer ist. Die Orientierung der Kreise spielt in diesem Fall also keine Rolle, und die Aussage ersetzt „5.“ im Satz oben.

Definition 4.8. Eine Familie zentraler Kreise $\mathcal{C}$ wie in Lemma 4.7, in der also jede Kante in einer geraden Anzahl von Kreisen aus $\mathcal{C}$ enthalten ist (also $\triangle \mathcal{C} = \emptyset$ gilt), und ungerade viele Kreise gerader Umlaufparität sind, nennt man *unfügbar* (englisch *intractable*). Diese Definition ist unabhängig von der Orientierung, da die Richtungsänderung jeder Kante sich wegen der ersten Bedingung jeweils auf gerade viele Kreise aus $\mathcal{C}$ auswirkt.

Das nächste Resultat folgt im Wesentlichen aus Lemma 2.1 in [10]:

Satz 4.9. *Wenn ein Graph G Pfaff'sch ist, dann auch jeder schwache Matching Minor H .*

Beweis. Es bleibt (wegen Lemma 4.5) zu zeigen, dass das Kontrahieren eines Kreises C ungerader Länge die Pfaff'sche Eigenschaft unberührt lässt.

Sei H ein nicht-Pfaff'scher Matching Minor von G . Dann existiert nach Lemma 4.7 eine unfügbare Familie $\mathcal{R}$ von zentralen Kreisen $A_1, A_2, \dots, A_k$ und ein Matching F , sodass diese Kreise F -alternierend sind. Wenn wir daraus eine unfügbare Familie $\mathcal{R}'$ aus Kreisen $A'_1, A'_2, \dots, A'_k$ in G erzeugen können, haben wir einen Widerspruch herbeigeführt.

Sei C der kontrahierte ungerade Kreis und v der entsprechende Knoten in H mit den inzidenten Kanten e_0 bis e_n . Falls $v \notin A_i$, dann setzen wir $A'_i := A_i$. Sei also $v \in A_j$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit enthalte F die Kante e_0 , wobei $\{e_0, e_m\}$ in A_j sei. Im Graphen G sind die Kanten e_0 und e_m mit zwei Knoten x und y aus $V(C)$ inzident. Falls $x = y$, dann setze $A'_j = A_j$. Sei also $x \neq y$ und F' das eindeutige Matching von G , sodass $F' - F \subseteq C$.

Sei c die zu y inzidente Matchingkante (diese muss in C liegen). Der Pfad $P \subseteq A_j$, der c enthält, hat gerade Länge, und $A'_j := A_j \cup P$ ist F' -alternierend in G . Da laut Voraussetzung eine gerade Anzahl Kreise aus $\mathcal{R}$ die Kante e_m enthalten, liegt der Pfad P in einer geraden Anzahl Kreise aus $\mathcal{R}'$. Orientiert man C im Uhrzeigersinn, so sieht man, dass die Parität der Orientierung von A'_i jener von A_i entspricht für $1 \leq i \leq n$ und somit $\mathcal{R}'$ eine unfügbare Familie ist. □

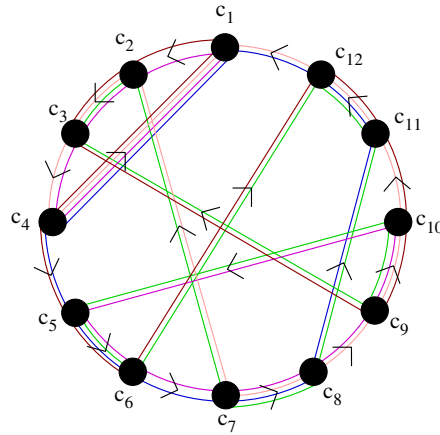


Abbildung 4.4: Eine unfügsame Menge alternierender Kreise des Cubeplex...

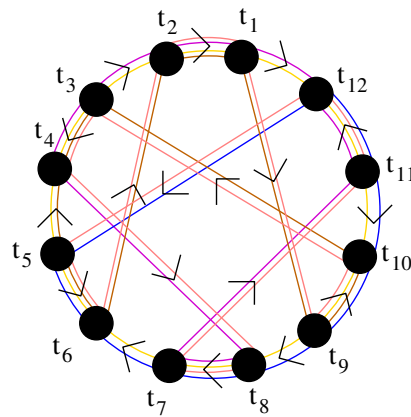


Abbildung 4.5: ...des Twinplex...

Definition 4.10. Ein nicht-Pfaff'scher Graph heißt *minimal nicht-Pfaff'sch*, falls jeder echte schwache Matching Minor eine Pfaff'sche Orientierung besitzt.

Cubeplex, Twinplex und auch $K_{3,3}$ sind nach Satz 3.15 und Satz 4.2 Beispiele solcher minimal nicht-Pfaff'scher Graphen. Die Äquivalenz von „4.“ und „1.“ in Satz 4.9 ist im Übrigen eine Verallgemeinerung des Arguments, dass wir in Lemma 3.13 für den Beweis der nicht-Pfaff'schheit von $K_{3,3}$ verwendet haben.

Die Abbildungen 4.4, 4.5 und 4.6 geben jeweils eine unfügsame Menge alternierender Kreise für die Graphen Cubeplex, Twinplex und den Petersen-Graphen an, und beweisen so (ebenfalls nach Satz 4.9) dass all diese Graphen nicht-Pfaff'sch sind. Das zum Bilden der Kreise jeweils herangezogene Matching ist nicht extra eingezeichnet, kann aber leicht rekonstruiert werden, indem man die symmetrische Differenz zweier

4 Nicht-bipartite Pfaff'sche Graphen

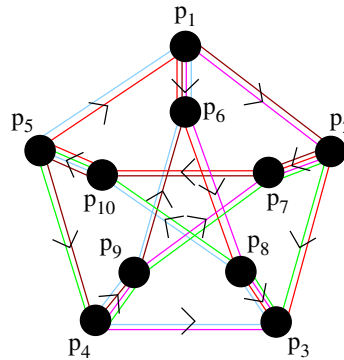


Abbildung 4.6: ...und des Petersen-Graphen

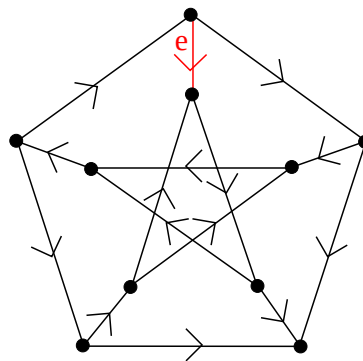


Abbildung 4.7: Der Petersen-Graph und eine Pfaff'sche Orientierung von P'

Kreise bildet. Der Übersichtlichkeit halber sind im Folgenden alle angegebenen Kreise nochmals aufgelistet:

Cubplex (Abb.)		Twinplex (Abb.)		Petersen Graph (Abb.)	
$c_2c_3c_9c_{10}c_5c_6c_{12}c_{11}c_8c_7$	g	$t_1t_2t_3t_4t_5t_6t_7t_8t_9t_{10}t_{11}t_{12}$	g	$p_2p_3p_8p_{10}p_5p_4p_9p_7$	g
$c_1c_2c_3c_9c_{10}c_{11}c_{12}c_6c_5c_4$	g	$t_1t_2t_6t_5t_{12}t_{11}t_7t_8t_4t_3t_{10}t_9$	g	$p_1p_2p_7p_9p_4p_3p_8p_6$	u
$c_1c_2c_3c_4$	g	$t_5t_6t_7t_8t_9t_{10}t_{11}t_{12}$	g	$p_1p_5p_{10}p_7p_2p_3p_8p_6$	u
$c_5c_6c_7c_8c_9c_{10}$	g	$t_1t_9t_{10}t_3t_4t_5t_6t_2$	u	$p_1p_2p_7p_{10}p_5p_4p_9p_6$	u
$c_1c_4c_3c_2c_7c_8c_9c_{10}c_{11}c_{12}$	g	$t_1t_2t_6t_5t_4t_3t_{10}t_9$	u	$p_1p_5p_{10}p_8p_3p_4p_9p_6$	u
$c_1c_4c_5c_6c_7c_8c_{11}c_{12}$	u				

Bemerkung. Um zu zeigen, dass der Petersen-Graph minimal nicht-Pfaff'sch ist, muss man noch beweisen, dass sowohl das Kontrahieren von Kreisen ungerader Länge, als auch das Löschen einer beliebigen Kante, einen Pfaff'schen Graphen hervorbringt. Ersteres folgt, da durch das Kontrahieren eines beliebigen ungeraden Kreises der Graph planar wird und somit Pfaff'sch ist. Sei P' der Graph, der entsteht, wenn eine beliebige

4.3 Zulässige Operationen in Pfaff'schen Graphen

Kante gelöscht wird, wegen der Symmetrie des Petersen-Graphen o.B.d.A. die Kante e aus Abbildung 4.7. Es bleibt dem Leser und der Leserin überlassen, zu überprüfen, dass alle zentralen Kreise in P' ungerade orientiert sind (Ein anderer Weg, die letzte Behauptung zu beweisen, verwendet, dass P' fast-bipartit ist und, mangels Knotenzahl, keine gerade Unterteilung von Twinplex und Cubeplex enthält. Außerdem kann man sich davon überzeugen, dass der Graph keine gerade Unterteilung des $K_{3,3}$ enthält, woraus ebenfalls die Pfaff'schheit von P' folgt).

Sowohl bipartite, als auch fast-bipartite Graphen sind also durch eine endliche Liste verbotener, minimal nicht-Pfaff'scher, schwacher Matching Minoren charakterisiert. Für allgemeine Graphen schlägt eine solche Charakterisierung leider fehl, mehr noch, es kann eine unendliche Liste minimal nicht-Pfaff'scher Graphen erzeugt werden (siehe dazu Abschnitt 4.4). Die Operationen im folgenden Abschnitt werden einerseits zum Beweis der Behauptung verwendet werden, dass die Graphen dieser Liste wirklich **minimal** nicht-Pfaff'sch sind. Andererseits sind sie als Motivation zur Formulierung neuer Vermutungen gedacht.

4.3 Zulässige Operationen in Pfaff'schen Graphen

Wir sind also auf der Suche nach weiteren Operationen, die, ähnlich des Bildens eines (schwachen) Matching Minors, die Eigenschaft, Pfaff'sch zu sein, invariant lassen. Die Vermutung geht dahin, dass mit endlich vielen verschiedenen (geschickt gewählten) Transformationen, alle minimalen nicht-Pfaff'schen Graphen auf den $K_{3,3}$ zurückgeführt werden können.

4.3.1 Die Kompression

Die erste Operation, die wir einführen werden, ist die sogenannte Kompression:

Definition 4.11. Wir betrachten einen Graphen G mit zentralem Teilgraphen H , so dass

$$V(H) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3, v_4, w_1, w_2\},$$

$$E(H) = \{u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4\} \cup \bigcup_{i=1}^4 \{u_iv_i, v_iw_1, v_iw_2\}$$

und der Grad der Knoten "in der Mitte", namentlich $u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, v_4$, in G gleich 3 ist (siehe Abbildung 4.8 links). Die "Kompression" sieht jetzt wie folgt aus: Die Knoten u_2

4 Nicht-bipartite Pfaff'sche Graphen

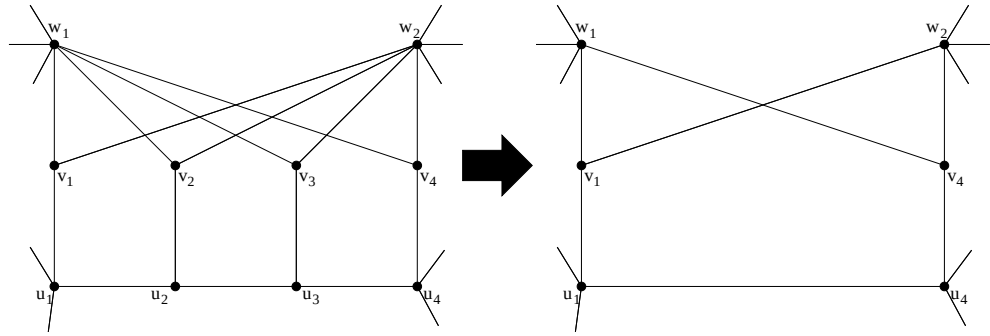


Abbildung 4.8: Eine Kompression

und u_3 werden samt ihrer inzidenten Kanten gelöscht und durch eine Kante u_1u_4 ersetzt. Die Knoten v_2 und v_3 werden ebenfalls samt ihrer berührenden Kanten gelöscht. Übrig bleibt der Graph in Abbildung 4.8 rechts.

Man sagt: Der neue Graph G' ist aus G durch *Kompression (vom Typ Eins)* entstanden.

Um zeigen zu können, dass G' genau dann Pfaff'sch ist, wenn G es ist, benötigen wir zunächst folgendes Lemma (siehe auch [16]):

Lemma 4.12. Sei G ein Graph, D eine Pfaff'sche Orientierung von G , und $u, v \in V(G)$ und $uv \notin E(G)$. Sei C ein Kreis in $G' := G + uv$ mit $uv \in E(C)$.

Folgende Bedingung ist hinreichend für die Existenz einer Pfaff'schen Orientierung von G' :

Es existiert für jedes perfekte Matching F von G' mit $uv \in F$ eine Folge $F = F_0, F_1, \dots, F_k$ von perfekten Matchings von G' und C sei F_k -alternierend, so dass $F_i \triangle F_{i+1}$ jeweils ein ungerade orientierter Kreis in G ist.

Beweis. Sei D' eine Orientierung von G' , die aus D dadurch hervorgeht, dass man uv so richtet, dass C ungerade orientiert ist.

Sei F ein Matching von G' , das uv enthält. Wegen der Voraussetzung und Lemma 1.7 ist $\text{sgn } F_0 = \text{sgn } F_k$, und $\text{sgn } F_k = \text{sgn}(F_k \triangle C)$, da C ungerade Umlaufparität hat. Da $F_k \triangle C$ auch ein Matching von G ist, kann man (nach Lemma 1.10) o.B.d.A. annehmen, dass $\text{sgn}(F_k \triangle C) = 1$ ist, und somit gilt auch $\text{sgn } F = 1$.

Matchings von G' , die uv nicht enthalten, sind auch Matchings von G und haben daher ohnehin alle das gleiche Vorzeichen.

□

4.3 Zulässige Operationen in Pfaff'schen Graphen

Die nächsten zwei Lemmas stammen ebenfalls von Norine und Thomas [16]. Sie zeigen, dass die Kompression die Pfaff'sche Eigenschaft invariant lässt:

Lemma 4.13. *Sei G ein Pfaff'scher Graph und man erhalte G' aus G durch Kompression eines passenden Graphen $H \subseteq G$. Dann ist G' ebenfalls Pfaff'sch.*

Beweis. Wir übernehmen die Beschriftung von H aus der Definition 4.11. Wir zeigen, dass der Graph $G + u_1u_4$ Pfaff'sch ist, wodurch auch die Pfaff'schheit des Teilgraphen G' gezeigt wäre. Dazu wollen wir Lemma 4.12 verwenden, weswegen wir alle Matchings von $G + u_1u_4$ betrachten, welche die Kante u_1u_4 enthalten, sowie den Kreis $C = u_1v_1w_1v_3u_3u_4u_1$. Ein perfektes Matching $F \ni u_1u_4$ von $G + u_1u_4$ enthält entweder v_1w_1 oder v_1w_2 . Im ersten Fall ist $v_4w_2 \in F$, und daher $v_3u_3 \in F$, also ist C bereits F -alternierend und es ist nichts mehr zu tun.

Im zweiten Fall ist $v_4w_1 \in F$, und dadurch $v_3u_3 \in F$, wodurch C dann $F \triangle C_{1,4}$ -alternierend ist, wobei die Kreise $C_{i,j}$ durch $C_{i,j} = v_iw_1v_jw_2v_i$ definiert seien. Damit Lemma 4.12 zur Anwendung kommen kann, muss noch gezeigt werden, dass $C_{1,4}$ in jeder Pfaff'schen Orientierung von G ungerade Umlaufparität besitzt (und dass er zentral ist, was leicht an Hand der Abbildung 4.8 zu überprüfen ist).

Die Kreise $C_{1,2}$, $C_{2,3}$ und $C_{3,4}$ sind ungerade orientiert, da sie zentral in H (und damit in G) sind (Satz 1.9), weswegen (Bemerkung 3.17) $C_{2,4} = C_{2,3} \triangle C_{3,4}$ gerade orientiert sein muss, und $C_{1,4} = C_{1,2} \triangle C_{2,4}$ ebenfalls ungerade Umlaufparität hat. $\square$

Umgekehrt gilt:

Lemma 4.14. *Sei G' ein Pfaff'scher Graph, der aus G durch Kompression eines passenden Graphen $H \subseteq G$ entstanden ist. Dann ist G ebenfalls Pfaff'sch.*

Beweis. Die Knoten von H sind wieder wie in Definition 4.11 benannt. Sei D' eine Pfaff'sche Orientierung von G' . Wir zeigen wieder, dass der Graph $G + u_1u_4$ Pfaff'sch ist, wodurch auch die Behauptung bewiesen wäre. Nach Lemma 4.4 kann man für eine Pfaff'sche Orientierung die Kanten eines Spannbaums frei wählen.

Wir nehmen also an, $w_1v_1, w_1v_4, v_4w_2, v_1u_1, v_4u_4, u_1u_4 \in E(D)$. Wir erweitern auf eine Orientierung D_+ von $G + u_1u_4$, indem D noch die Kanten $w_1v_2, w_1v_3, w_2v_3, v_2w_2, v_2u_2, v_3u_3, u_1u_2, u_3u_2, u_3u_4$ hinzugefügt werden. Wenn es gelingt, zu zeigen, dass jedes perfekte Matching in $G + u_1u_4$ gleiches Vorzeichen hat wie eins der Matchings von $G + u_1u_4$, die sowohl u_2v_2 , als auch u_3v_3 beinhalten (diese entsprechen, eingeschränkt auf G' , genau den Matchings von G' und haben daher lt. Voraussetzung alle das gleiche Vorzeichen), dann sind wir fertig.

4 Nicht-bipartite Pfaff'sche Graphen

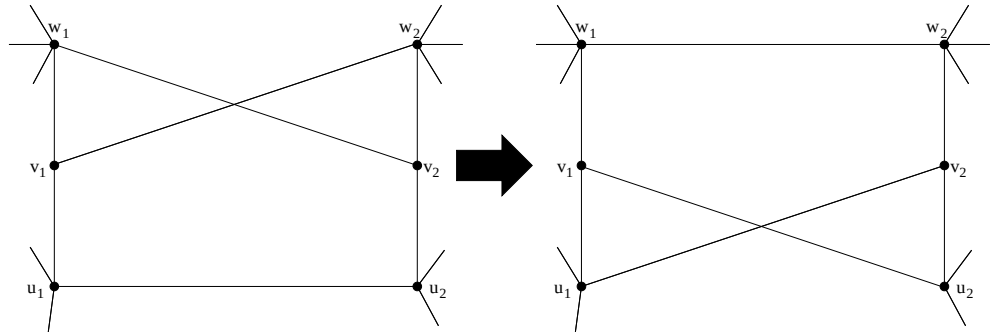


Abbildung 4.9: Ein Flip zwischen zwei Finnen

Sei F ein Matching von $G + u_1u_4$, dass nicht beide Kanten u_2v_2 und u_3v_3 enthält. Wir unterscheiden die Fälle $u_2v_2 \in F$, $u_3v_3 \in F$ und $\{u_2v_2, u_3v_3\} \cap F = \emptyset$. Es kommt abermals wiederholt Lemma 1.7 zum Tragen, d.h. dass das Bilden der symmetrischen Differenz eines Matchings und eines ungerade orientierten Kreises das Vorzeichen des Matchings unberührt lässt. Zunächst sei $u_2v_2 \in F$. Daraus folgt, dass $w_iv_3 \in F$ für ein i aus $\{1, 2\}$, und v_1u_1, u_3u_4 sind ebenfalls Matchingkanten von F . Wir setzen $F_1 = F \triangle C_1$, wobei $C_1 = u_1v_1w_iv_3u_3u_4u_1$. Der Fall $u_3v_3 \in F$ funktioniert analog. Falls jetzt keine der beiden Kanten in F enthalten sein sollten, dann sind $u_2u_3, u_1v_1, u_4v_4 \in F$ und $v_2w_i, v_3w_j \in F$ für $\{i, j\} \in \{1, 2\}$. Der Kreis für die symmetrische Differenz ist $C_2 = u_1v_1w_iv_2u_2u_3v_3w_jv_4u_4u_1$ und $F_2 = F \triangle C_2$ ist das gesuchte Matching. $\square$

4.3.2 Flip und Abschluss

Als nächstes betrachten wir die sogenannte *Finne*:

Definition 4.15. Sei wieder ein zentraler Teilgraph eines Graphen G gegeben, mit

$$V(H) = \{u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2\}$$

und

$$E(H) = \{u_1u_2, u_1v_1, u_2v_2, v_1w_1, v_1w_2, v_2w_1, v_2w_2\}.$$

Der Grad (in G) der "inneren" Knoten, diesmal sind das v_1 und v_2 , sei wieder gleich 3.

Der oben beschriebene Teilgraph H wird als *Finne* bezeichnet.

Definition 4.16. Sei G ein Graph mit der Finne $H \subseteq G$, der durch folgende Operation zu einem Graphen $\bar{G}$ transformiert werden kann: Die Kanten v_1w_2, v_2w_1, u_1u_2 aus Abbildung 4.9 werden gelöscht, dafür v_1u_2, v_2u_1, w_1w_2 hinzugefügt.

4.3 Zulässige Operationen in Pfaff'schen Graphen

Dann sagt man: Der Graph $\overline{G}$ ist aus G durch einen *Flip* der Finne H hervorgegangen.

Bemerkung. Der *geflippte* Graph $\overline{H}$ ist ebenfalls eine Finne.

Wieder ist zu zeigen, dass ein Flip die Pfaff'sche Eigenschaft unangetastet lässt [16].

Lemma 4.17. *Sei G ein Graph, und $\overline{G}$ sei aus G durch einen Flip einer Finne $H \subseteq G$ entstanden. Dann ist G genau dann Pfaff'sch, wenn $\overline{G}$ Pfaff'sch ist.*

Beweis. Angenommen, G sei Pfaff'sch. Die Finne H sei wie in der Definition oben beschriftet. Nach Lemma 4.12 ist der Graph $G_+ := G + w_1w_2$ Pfaff'sch: Betrachte den Kreis $C = w_1v_1u_1u_2v_2w_2w_1$. Dieser ist F -alternierend für jedes perfekte Matching F von G_+ , das w_1w_2 enthält, da dann auch immer $\{u_1v_1, u_2v_2\} \subseteq F$ gelten muss. Sei also D_+ eine Pfaff'sche Orientierung von G_+ . Nach Lemma 4.4 kann man, analog zum Beweis von Lemma 4.14, annehmen, dass $w_1v_1, w_1v_2, w_2v_2, u_1v_1, u_2v_2, u_1u_2 \in E(D_+)$, als beliebige Orientierung des zugehörigen Spannbaums von H . Daraus folgt, dass w_1w_2 in $E(D_+)$ sein muss, da der Kreis $w_1w_2v_2u_2u_1v_1w_1$ zentral ist (siehe Satz 1.9). Die Kante v_1w_2 ist in $E(D_+)$, weil der Kreis $w_1v_2w_2v_1w_1$ zentral ist.

Sei D' die Orientierung des Graphen $G' = G_+ + \{v_2u_1, u_2v_1\}$, die aus D_+ gebildet wird, indem man v_2u_1 und u_2v_1 (in genau dieser Orientierung) hinzufügt. Um zu zeigen, dass D' (eingeschränkt auf $\overline{G}$) schon die gesuchte Pfaff'sche Orientierung von $\overline{G}$ ist, finden wir für jedes perfektes Matching $\overline{F}_i$ von $\overline{G}$, ein Matching F_i von G_+ , dass gleiches Vorzeichen hat.

Falls $\{u_1v_1, u_2v_2\} \subseteq \overline{F}_i$, dann ist nichts zu zeigen, da $\overline{F}_i$ in diesem Fall auch Matching von G_+ ist. Nehmen wir also an, dass $v_2u_1 \in \overline{F}_i$ (der Fall $u_2v_1 \in \overline{F}_i$ funktioniert analog). Dann muss, um v_1 zu matchen, entweder v_1u_2 , oder aber v_1w_1 in $\overline{F}_i$ sein. Falls Ersteres zutrifft, bildet man ein Matching F_1 von G_+ aus der symmetrischen Differenz von $\overline{F}_i$ mit einem Kreis $C = u_1v_1u_2v_2$. Im zweiten Fall nimmt man den Kreis $C' = u_1v_1w_1v_2$, und erhält das Matching $F_2 := \overline{F}_i \triangle C'$. Das sind, wie an Hand von Abbildung 4.9 leicht nachzuprüfen ist, Matchings von G_+ , die jeweils das gleiche Vorzeichen haben wie das zugehörige Matching $\overline{F}_i$.

□

Die letzte Operation, die wir benötigen, ist der Abschluss eines Graphen G .

Definition 4.18. Sei G ein Graph und $u, v \in V(G)$. Der Graph $G + uv$ heißt *Abschluss* von G , falls jeder zentrale Kreis in dem um die Knoten u und v reduzierten Graphen $G - u - v$, auch zentral in G ist.

4 Nicht-bipartite Pfaff'sche Graphen

Die Pfaff'sche Eigenschaft ist invariant bezüglich des Abschlusses [16].

Lemma 4.19. *Der Abschluss eines Pfaff'schen Graphen ist Pfaff'sch.*

Beweis. Die symmetrische Differenz zweier Matchings F_1, F_2 von $G+uv$, die jeweils die Kante uv enthalten, ist eine Vereinigung von F_1F_2 -alternierenden Kreisen, die für jede (o.B.d.A. positive) Pfaff'sche Orientierung ungerade Umlaufparität hat (siehe wieder Lemma 1.7): Denn die Kante uv ist nicht in $F_1 \Delta F_2$ enthalten, und somit auch in keinem der F_1F_2 -alternierenden Kreise. Für den Rest gilt die Behauptung laut Voraussetzung (die entstehenden Kreise sind alle zentral in G , und daher ungerade orientiert). Man muss also nur uv so orientieren, dass ein beliebiges Matching F von $G + uv$, das uv enthält, positives Vorzeichen hat. $\square$

Beispiel 4.20. Betrachten wir einen Graphen G , der eine Finne H wie in Abbildung 4.9 links als zentralen Teilgraphen enthält. Dann ist $G + w_1w_2$ ein Abschluss von G .

Denn sei C ein zentraler Kreis von $G - w_1 - w_2$, und F ein Matching von $G - w_1 - w_2 - C$. Dieses muss $\{u_1v_1, u_2v_2\}$ enthalten, da v_1 , bzw. v_2 sonst nicht gematcht wären. Aus demselben Grund darf C weder u_1 , noch u_2 enthalten.

Sei $F_1 := F \cap (G - H)$. Dann ist $F_1 \cup \{u_1u_2, v_1w_1, v_2w_2\}$ ein Matching von $G - C$ und C somit ein zentraler Kreis von G , wodurch die Voraussetzungen erfüllt sind.

4.4 Eine unendliche Liste minimal nicht-Pfaff'scher Graphen

Wie bereits am Beginn dieses Kapitels erwähnt, gibt es für allgemeine nicht-bipartite Graphen keine so schöne Charakterisierung Pfaff'scher Graphen mittels einer endlichen Liste verbotener *minimal nicht-Pfaff'scher Graphen* mehr. Dazu definieren wir in diesem Abschnitt eine unendliche Liste von Graphen, und zeigen, dass fast alle dieser Graphen die Eigenschaft haben, minimal nicht-Pfaff'sch zu sein.

4.4.1 Der Graph $G(k, M)$

Definition 4.21. Sei für eine natürliche Zahl $k \geq 1$ der Kreis C_{2k+1} der Länge $2k + 1$ gegeben, mit Knoten $1, 2, \dots, 2k + 1$ im Uhrzeigersinn numeriert. Sei M ein nicht perfektes, möglicherweise sogar leeres, Matching von Knoten in C_{2k+1} . Dann ist der Graph $G(k, M)$ wie folgt definiert:

Die Knotenmenge sei gegeben durch

$$V(G(k, M)) = \{u_1, u_2, \dots, u_{2k+1}, v_1, v_2, \dots, v_{2k+1}, w_1, w_2\}.$$

4.4 Eine unendliche Liste minimal nicht-Pfaff'scher Graphen

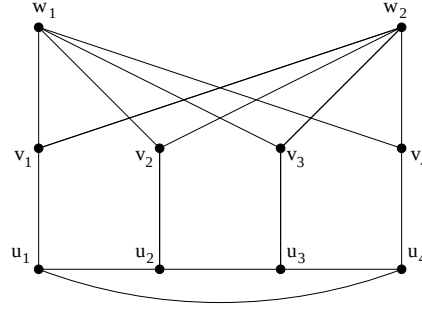


Abbildung 4.10: Der $G(1, \emptyset)$

Dazu sind folgende Knoten adjazent:

- $u_i v_i$ für $1 \leq i \leq 2k + 1$.
- $u_i u_{i+1}$, $v_{i+1} w_1$ und $v_i w_2$, falls $\{i, i + 1\} \notin M$.
- $u_i v_{i+1}$ und $v_i u_{i+1}$, falls $\{i, i + 1\} \in M$.

Bemerkung. Die Knoten $u_1, u_2, \dots, u_{2k+1}; v_1, v_2, \dots, v_{2k+1}$ haben Grad 3, nur w_1 und w_2 haben von k abhängigen Grad, nämlich $\deg(w_i) = 2k + 1 - |M|$.

Einen Graphen aus der Familie der $G(k, M)$ kennen wir schon: Der Cubeplex (Abbildung 4.1, betrachte Bild drei) ist isomorph zum Graphen $G(2, \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\})$, wenn man die untere Zeile von links nach rechts mit den u_i identifiziert, die mittlere mit den Knoten v_i , die beiden oberen Knoten (mit den Nummern 4 und 12) sollen w_1 , bzw. w_2 entsprechen.

Durch die wachsende Knotenzahl hat die oben definierte Menge von Graphen unendliche Kardinalität. Wir zeigen zunächst, dass alle diese Graphen nicht-Pfaff'sch sind. Im weiteren Verlauf wird bewiesen, dass die Graphen $G(k, M)$ für $k \geq 2$ jeweils sogar die Eigenschaft haben, minimal nicht-Pfaff'sch zu sein. Beide Resultate stammen von Norine et al. [16].

4.4.2 Der Graph $G(k, M)$ ist für fast alle k minimal nicht-Pfaff'sch

Lemma 4.22. Die Graphen $G(1, \emptyset)$ und $G(k, M)$ sind nicht-Pfaff'sch für alle $k \geq 2$ und jedes beliebige Matching M von C_{2k+1} .

Beweis. Betrachte den Graphen $G(1, \emptyset)$ in Abbildung 4.10. Dieser enthält den ungeraden Kreis $C := u_1 u_2 u_3 u_1$. Durch Kontraktion von C erhält man den $K_{3,3}$, also muss $G(1, \emptyset)$ nach dem Beweis von Satz 4.9 nicht-Pfaff'sch sein. Der Graph $G(k, \emptyset)$ kann

4 Nicht-bipartite Pfaff'sche Graphen

durch eine Folge von Kompressionen in den Graphen $G(1, \emptyset)$ übergeführt werden und ist somit nach Lemma 4.13 ebenfalls nicht-Pfaff'sch.

Der Beweis für beliebige Kardinalität von M erfolgt durch Induktion nach $|M|$. Sei $G := G(k, M')$ mit $|M'| > 0$. Wir wählen ein i , so dass $\{i, i+1\} \in M$. Der Graph $G + w_1w_2$ kann aus dem Graphen $G(k, M' - \{i, i+1\})$ durch Flip des induzierten zentralen Teilgraphen mit den Knoten $\{u_i, u_{i+1}, v_i, v_{i+1}, w_1, w_2\}$ erhalten werden. Also ist nach Induktionsvoraussetzung und Lemma 4.17 der Graph $G + w_1w_2$ nicht-Pfaff'sch. Wenn wir zeigen können, dass dieser Graph ein Abschluss von G ist, sind wir nach Lemma 4.19 fertig.

Das Matching M kann nicht perfekt sein, also muss $\{j, j+1\} \notin M$ gelten für ein $1 \leq j \leq 2k+1$. Der induzierte Teilgraph auf $\{u_j, u_{j+1}, v_j, v_{j+1}, w_1, w_2\}$ ist somit eine Finne, und deshalb nach Beispiel 4.20 der Graph $G + w_1w_2$ ein Abschluss von G . $\square$

Satz 4.23. *Der Graph $G(k, M)$ ist minimal nicht-Pfaff'sch für alle $k \geq 2$ und jedes beliebige Matching M von C_{2k+1} .*

Beweis. Nachdem wir schon bewiesen haben, dass die $G(k, M)$ alle nicht-Pfaff'sch sind, genügt es, zu zeigen, dass das Löschen einer beliebigen Kante e oder das Kontrahieren eines (ebenfalls beliebigen) ungeraden Kreises U jeweils in einem Pfaff'schen Graphen resultiert. Der Übersichtlichkeit wegen teilen wir das Resultat in zwei Lemmas, deren Beweis dann auch die Gültigkeit von Satz 4.23 belegt.

Lemma 4.24. *Der Graph $G(k, M) - e$ ist Pfaff'sch für alle $k \geq 2$ und jedes beliebige Matching M von C_{2k+1} .*

Beweis. Wir starten mit dem Fall $|M| = 0$. Zunächst benötigen wir eine Konstruktion aller perfekter Matchings von $G(k, \emptyset)$: Sei für alle $1 \leq i \leq 2k-1$ das Matching F_{2i-1} das perfekte Matching von $G(k, \emptyset)$, das aus den Kanten u_jv_j für alle $j \notin \{i, i+1\}$ besteht, sowie den Kanten u_iu_{i+1} , v_iw_1 und $v_{i+1}w_2$. Das Matching F_{2i} sei dadurch gegeben, dass man im Matching F_{2i-1} die Matchingkanten $\{v_iw_1, v_{i+1}w_2\}$ durch v_iw_2 und $v_{i+1}w_1$ ersetzt.

Damit sind bereits alle möglichen Kombinationen von Matching-Kanten berücksichtigt und $\{F_1, F_2, \dots, F_{4k+2}\}$ ist die Menge aller perfekten Matchings von $G(k, \emptyset)$.

Für jedes $1 \leq j \leq 4k+2$ gibt es ein e_j aus $E(G(k, \emptyset))$, sodass $e_j \in F_j \cap F_{j+1}$, jedoch $e_j \notin F_l$ für $l \notin \{j, j+1\}$. Konkret wäre das die Kante $v_{i+1}w_1$ für $j = 2i$, und $v_{i+1}w_2$ für $j = 2i+1$. Daraus folgt, dass für jede echte Teilmenge $\emptyset \neq S \subset \{1, 2, \dots, 4k+2\}$ die symmetrische Differenz $\triangle_{i \in S} F_S$ nicht-leer ist. Da für eine beliebige Kante e die Menge

4.4 Eine unendliche Liste minimal nicht-Pfaff'scher Graphen

der perfekten Matchings von $G(k, \emptyset) - e$ eine echte Teilmenge von $\{F_1, F_2, \dots, F_{4k+2}\}$ ist, folgt nach Lemma 4.7 „4.“ die Pfaff'schheit des Graphen $G(k, \emptyset) - e$.

Im Induktionsschritt nach der Kardinalität von M setzen wir der Übersichtlichkeit wegen $G := G(k, M)$. Betrachten wir zunächst den Fall, dass eine Kante $\{i, i+1\} \in M$ existiert, so dass

$$e \notin \{u_i v_i, u_i v_{i+1}, u_{i+1} v_i, u_{i+1} v_{i+1}, v_i w_1, v_{i+1} w_2\}.$$

So ein i existiert auf jeden Fall, wenn $|M| \geq 2$. Falls der Graph

$$\bar{G} := G - e - \{u_i, v_i, u_{i+1}, v_{i+1}, w_1, w_2\}$$

ein perfektes Matching besitzt, dann kann $(G - e) + w_1 w_2$ durch einen Flip in $G(k, M - \{i, i+1\}) - e$ transformiert werden. Daher ist $G - e$ nach Lemma 4.17 und Lemma 4.19 sowie der Induktionsannahme Pfaff'sch.

Falls $\bar{G}$ kein perfektes Matching besitzt, dann muss $e = u_j v_j$ gelten für ein j , dass nicht von M überdeckt ist. Der Graph $G - u_j v_j$ enthält eine Menge von paarweise nicht-adjazenten Knoten $W = \{v_1, v_2, \dots, v_{2k+1}, u_j\}$. Die Kardinalität dieser Menge beträgt $2k+2 = \frac{V(G)}{2}$, weshalb in einem perfekten Matching von $G - u_j v_j$ jede Matchingkante mit genau einem Knoten aus W inzident sein muss. Sei $f = u_l u_{l+1}$ eine Kante von $G - u_j v_j$, so dass $j \notin \{l, l+1\}$ (hier geht die Voraussetzung ein, dass für k in $G(k, M)$ gilt: $k \geq 2$). Also ist f zu keinem Knoten aus W inzident und damit in keinem perfekten Matching enthalten. Somit ist $G - u_j v_j$ Pfaff'sch, wenn $G - \{u_j v_j, f\}$ Pfaff'sch ist, was laut Induktionsannahme gilt.

Bleibt zu überprüfen, dass bei $|M| = 1$ in $G(k, M)$ ebenfalls keine Kante e gelöscht werden kann, ohne einen Pfaff'schen Graphen zu erhalten. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $\{1, 2\}$ die (einzige) Matchingkante von M auf C_{2k+1} ist. Falls $e \notin (u_1 v_1, u_1 v_2, u_2 v_1, u_2 v_2, v_1 w_1, v_2 w_2)$, dann funktioniert der Beweis wie im Fall $|M| \geq 2$. Sei also o.B.d.A. die Kante e , die gelöscht wird, aus $\{u_1 v_2, v_1 w_1\}$. Falls $e = u_1 v_2$, dann existiert ein eindeutiges, perfektes Matching von $G - e$, welches die Kante $u_2 v_1$ enthält. Der Graph $G - \{e, u_2 v_1\}$ ist ein Teilgraph von $G(k, \emptyset)$ und somit Pfaff'sch, weshalb auch $G - e$ Pfaff'sch ist. Falls aber $e = v_1 w_1$, dann liegt die Kante $u_2 u_3$ in einem perfekten Matching, in dem auch die Kanten $u_1 v_1$, $v_2 w_2$ und $v_3 w_1$ enthalten sein müssen. Damit ist dieses Matching eindeutig bestimmt, und $G - e$ ist Pfaff'sch, wenn $G - \{e, u_2 u_3\}$ Pfaff'sch ist. Dies ist analog zu oben nach Induktionsvoraussetzung erfüllt.

□

4 Nicht-bipartite Pfaff'sche Graphen

Lemma 4.25. *Das Kontrahieren eines beliebigen Kreises U ungerader Länge in $G := G(k, M)$ mit $k \geq 2$ resultiert in einem Pfaff'schen Graphen G' .*

Beweis. Ziel ist es, zu zeigen, dass jeder der auftretenden Fälle auf die Kontraktion eines ungeraden Kreises in einem Graphen $G - e$ zurückgeführt werden kann, für ein passendes $e \in E(G)$. Wir haben bereits gezeigt, dass $G - e$ Pfaff'sch ist, und könnten somit nach Satz 4.9 folgern, dass dies auch für G' gilt.

Wir dürfen annehmen, dass im Graphen $G - V(U)$ jeder Knoten mit maximal einem Knoten aus U adjazent ist. Denn sei $v \in G - V(U)$ und u bzw. u' in $V(U)$, e_1 und e_2 die zugehörigen inzidenten Kanten. Kontrahiert man (o.B.d.A.) den Kreis U in $G - e_1$, so erhält man ebenfalls G' . Nach der Überlegung oben ist G' in diesem Fall daher ebenfalls Pfaff'sch. Aus dem gleichen Grund kann man annehmen, dass U ein *induzierter Teilgraph* von G ist, also alle Kanten zwischen Knoten aus $V(U)$ enthält. Betrachten wir die verschiedenen Möglichkeiten für ungerade Kreise in G :

Zunächst seien $w_1, w_2 \notin V(U)$. Da der Graph $G - \{w_1, w_2, u_i\}$ bipartit ist für ein beliebiges $i \leq 2k + 1$, müssen alle u_i in so einem Kreis enthalten sein, $1 \leq i \leq 2k + 1$. Angenommen, die Kante $\{i, i + 1\}$ wäre in M , dann muss genau einer der Knoten $\{v_i, v_{i+1}\}$ in $V(U)$ sein, während der andere der Knoten zwei Nachbarn in $V(U)$ hat, was nach unserer Annahme ausgeschlossen ist. Daraus folgt $U = u_1 u_2 \cdots u_{2k+1} u_1$. Kontrahiert man diesen Kreis, so erhält man einen Graph isomorph zum $K_{3, 2k+1}$ (wobei die eine Bipartitionsklasse den kontrahierten Knoten, nennen wir ihn u , enthält, und die beiden Knoten $\{w_1, w_2\}$. Die andere Klasse besteht aus $\{v_1, v_2, \dots, v_{2k+1}\}$). Dieser Graph enthält (da $k \geq 2$) keine perfekten Matchings und ist somit trivialerweise Pfaff'sch.

Betrachten wir also den Fall, dass $\{w_1, w_2\} \cap V(U) \neq \emptyset$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $w_1 v_1 \in U$, genauso wie $v_1 u_1$. Ist jetzt $u_1 v_2 \in U$, dann hat u_2 zwei Nachbarn v_1 und v_2 in $V(U)$ und muss daher selbst Element von $V(U)$ sein, womit $v_2 u_2$ in U sein muss. Dann kann aber $v_1 u_2$ nicht in U sein und somit ist U kein induzierter Teilgraph. Da der Fall $u_1 v_{2k+1} \in U$ analog funktioniert, kann man o.B.d.A. annehmen, dass $u_1 u_2 \in U$. Da der Knoten v_2 zwei Nachbarn in $V(U)$ hat, muss er selbst in $V(U)$ liegen. Wegen einer analogen Überlegung zum vorigen Fall gilt $v_2 u_3 \notin U$, woraus $U = w_1 v_1 u_1 u_2 v_2 w_1$ folgt. Da der Knoten w_2 maximal einen Nachbarn in U haben kann, muss $\{2, 3\} \in M$ gelten. Kontrahiert man U jedoch in dem Graphen $G(k, M - \{2, 3\}) - w_2 v_2$, so erhält man ebenfalls G' . $\square$

Aus den Lemmas 4.24 und 4.25 folgt direkt das gewünschte Resultat. $\square$

Weitere minimal nicht-Pfaff'sche Graphen sind nicht bekannt. Norine et al. [16] haben

4.5 Einige Vermutungen zur Reduktion auf eine endliche Liste verbotener Teilgraphen

daher folgende Vermutung formuliert:

Vermutung 4.26. *Jeder minimal nicht-Pfaff'sche Graph ist isomorph zu $K_{3,3}$, dem Petersen-Graph, dem Twinplex oder dem Graph $G(k, M)$ für ein $k \geq 2$ und ein beliebiges Matching M von C_{2k+1} .*

4.5 Einige Vermutungen zur Reduktion auf eine endliche Liste verbotener Teilgraphen

Wünschenswert wären an dieser Stelle Operationen, welche die unendliche Menge von Graphen $\{G(k, M)\}$ auf eine endliche Anzahl von Graphen zurückführen könnten. Wir wissen bereits aus dem Beweis von Satz 4.22, dass der Graph $G(k, \emptyset)$ durch eine Folge von Kompressionen auf den Graphen $G(1, \emptyset)$ reduziert werden kann, aus welchem wiederum durch Kontraktion des ungeraden Kreises $u_1u_2u_3u_1$ der Graph $K_{3,3}$ hervorgeht. Jetzt haben wir zwar ebenfalls gesehen, dass $G(k, M)$ durch eine Folge von Flips und Abschlüssen auf den Graphen $G(k, \emptyset)$ zurückgeführt werden kann. Allerdings sind diese Transformationen nicht reduktiv, d.h. die Knotenzahl bleibt jeweils gleich. Daher werden wir in diesem Abschnitt zwei neue, die Knotenzahl jeweils vermindern, Kompressionen einführen, welche ebenfalls die Pfaff'sche Eigenschaft erhalten.

Des Weiteren wollen wir allgemeine Voraussetzungen definieren, unter denen eine gegebene Operation „gültig“ ist. Es wird sich zeigen, dass Vermutung 4.26 implizieren würde, dass es eine endliche Menge von gültigen Reduktionen gibt, so dass jeder Pfaff'sche Graph durch eine endliche Abfolge solcher Operationen in den $K_{3,3}$ übergeführt werden kann.

4.5.1 Weitere Kompressionen

Definition 4.27. Sei H ein Graph, der wie im Folgenden definiert ist (siehe auch Abbildung 4.11): Es sei die Knotenmenge definiert durch

$$V(H) := \{u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3, v_4, w_1, w_2\},$$

und die Kantenmenge

$$E(H) := \{u_1u_2, u_2v_3, u_3v_2, u_3u_4, v_1w_1, v_1w_2v_2w_1v_3w_2v_4w_1v_4w_2\} \cup \bigcup_{i=1}^4 \{u_i v_i\}.$$

4 Nicht-bipartite Pfaff'sche Graphen

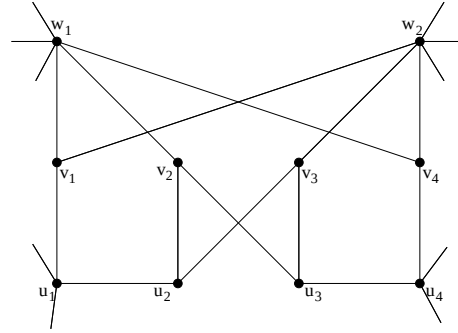


Abbildung 4.11: Der Ausgangsgraph für die Kompression vom Typ Zwei

Zusätzlich sollen die Knoten v_1, v_2, v_3, v_4, u_2 und u_3 Grad 3 in G haben. Falls G einen zentralen Teilgraph H in obiger Gestalt enthält, so dass der Kreis $v_2u_2v_3u_3v_2$ zentral in G ist, und ein weiterer Graph G' aus G erhalten werden kann, indem man die Knoten u_2, u_3, v_2, v_3 in H löscht und eine Kante u_1u_4 hinzufügt (siehe Abbildung 4.8), so sagt man: „Der Graph G' ist aus G durch eine *Kompression vom Typ Zwei* hervorgegangen.“

Der Beweis des folgenden Satzes stammt wieder aus [16]:

Lemma 4.28. *Sei G ein Pfaff'scher Graph, und sei G' durch eine Kompression vom Typ Zwei aus G hervorgegangen. Dann ist der Graph G' ebenfalls Pfaff'sch.*

Beweis. Der Beweis funktioniert zum Teil analog zu dem von Lemma 4.13. Wir übernehmen wieder die Beschriftung aus der Definition, hier Def. 4.27. Wir fügen die Kante w_1w_2 zu G hinzu, und behaupten, dass der resultierende Graph $G + w_1w_2$ Pfaff'sch ist. Der Graph G' geht aus $G + w_1w_2$ hervor, indem man die auf der Knotenmenge $\{w_1, w_2, v_2, v_3, u_2, u_3\}$ induzierte Finne „flippt“ und eine Kompression (von Typ Eins) auf den resultierenden Graphen operieren lässt.

Es genügt also, zu zeigen, dass $G + w_1w_2$ Pfaff'sch ist. Betrachten wir den Kreis $C := w_1v_1u_1u_2v_3w_2w_1$. Um Lemma 4.12 anwenden zu können, sei F ein perfektes Matching von $G + w_1w_2$, so dass $w_1w_2 \in F$, und D eine Pfaff'sche Orientierung von G . Dann ist auch $v_1u_1 \in F$, und entweder gilt $u_2v_3 \in F$, wodurch C ein F -alternierender Kreis wäre, oder die Kante u_2v_2 liegt in F . In letzterem Fall müsste die Kante u_3v_3 ebenfalls in F liegen. Sei in diesem Fall $C_1 := v_2u_2v_3u_3v_2$ und $F_1 := F \triangle C_1$. Der Kreis C_1 muss laut Definition von H zentral in G sein, und ist somit (auch) in D ungerade orientiert. Also sind die Voraussetzungen für Lemma 4.12 erfüllt und $G + w_1w_2$, und somit auch G' , Pfaff'sche Graphen. $\square$

Um wirklich alle Graphen $G(k, M)$ auf $G(1, \emptyset)$ zurückführen zu können, benötigen wir

4.5 Einige Vermutungen zur Reduktion auf eine endliche Liste verbotener Teilgraphen

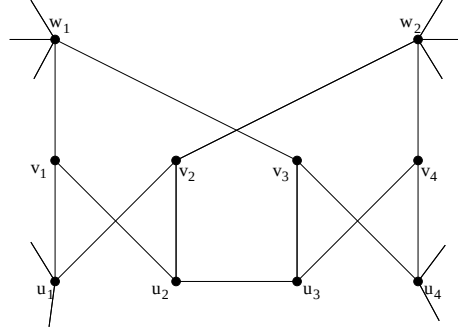


Abbildung 4.12: Der Teilgraph, auf den eine Kompression vom Typ Drei anwendbar ist.

noch eine letzte Operation, die sogenannte Kompression vom Typ Drei:

Definition 4.29. Sei wie gehabt H ein zentraler Teilgraph eines Graphen G , sodass

$$V(H) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3, v_4, w_1, w_2\},$$

wobei die Kantenmenge wie folgt gegeben ist (siehe auch Abbildung 4.12):

$$E(H) = \{u_i v_i | 1 \leq i \leq 4\} \cup \{u_1 v_2, u_2 v_1, u_3 v_4, u_4 v_3, v_1 w_1, v_2 w_2, v_3 w_1, v_4 w_2\}.$$

Bis auf die Knoten u_1, u_4, w_1, w_2 haben wieder alle Knoten Grad 3 in G , sind also mit keinen Knoten aus $V(G) - V(H)$ adjazent. Zusätzlich wollen wir verlangen, dass die Kreise $C_1 := v_1 u_1 v_2 u_2 v_1$ und $C_2 := v_3 u_3 v_4 u_4 v_3$ zentral in G sind. Der Graph G' entsteht (ganz analog zu den Kompressionen vom Typ Eins und Zwei) aus G , indem man u_2, u_3, v_2, v_3 samt inzidenter Kanten löscht, und die Kanten $u_1 u_4, v_1 w_2, v_2 w_1$ hinzufügt (siehe wieder Abbildung 4.8 rechts). Dann ist G' aus G durch eine *Kompression vom Typ Drei* entstanden.

Lemma 4.30. Falls ein Graph G Pfaff'sch ist, dann auch jeder durch Kompression von Typ Drei entstandene Graph G' (siehe [16]).

Beweis. Seien die Knoten beschriftet wie in obiger Definition (bzw. Abbildung 4.12). Der Beweis erfolgt ganz ähnlich wie jener für die Kompression vom Typ Zwei: Wir zeigen zunächst, dass der Graph $G + w_1 w_2$ Pfaff'sch ist, und wollen dazu wieder Lemma 4.12 verwenden.

Betrachten wir den Kreis $C := w_1 v_1 u_1 v_2 u_2 u_3 v_3 u_4 v_4 w_2 w_1$. Sei F ein perfektes Matching von $G + w_1 w_2$, dass $w_1 w_2$ enthält. Durch das wiederholte Bilden symmetrischer Differenzen von F mit den zentralen Kreisen C_1 und C_2 aus der Definition kann ein

4 Nicht-bipartite Pfaff'sche Graphen

Matching F' gefunden werden, so dass alle Kanten $u_i v_i$, mit $1 \leq i \leq 4$, in F' liegen. Genauer gilt für das Matching F entweder $\{u_1 v_1, u_2 v_2\} \in F$, oder $\{u_1 v_2, u_2 v_1\} \in F$. Durch $F \triangle C_1$ kann zwischen diesen zwei Möglichkeiten gewechselt werden. Der Kreis C ist F' -alternierend, wodurch die Voraussetzungen für Lemma 4.12 erfüllt sind und $G + w_1 w_2$ ein Pfaff'scher Graph ist.

Daraus kann man die Pfaff'schheit von G' wie folgt beweisen: Sei G'' der Graph, der durch Flip der Finne, die auf den Knoten $\{u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2\}$ induziert ist, aus G' entsteht. G'' ist Pfaff'sch nach Lemma 4.17. Betrachten wir den Graphen $G'' + w_1 w_2$ mit dem Kreis $C' := w_1 w_2 v_4 u_4 v_3 u_3 u_2 v_2 w_1$. Sei $\bar{F}$ ein Matching von $G'' + w_1 w_2$, dass $w_1 w_2$ enthält. Die Kante $u_2 v_2$ muss in $\bar{F}$ sein, weil $u_1 v_1 \in \bar{F}$. Ist C' dennoch kein $\bar{F}$ -alternierender Kreis, so kann durch Bilden von $\bar{F} \triangle C_2$ ein passendes Matching gefunden werden. Wir verwenden wieder Lemma 4.12, um zu sehen, dass $G'' + w_1 w_2$ Pfaff'sch ist. Flippt man jetzt die Finne auf den Knoten $\{u_3, v_3, u_4, v_4, w_1, w_2\}$, so erhält man den Graphen aus Abbildung 4.8 links, und wir haben die Kompression vom Typ Drei auf eine vom Typ Eins zurückgeführt, womit G' Pfaff'sch ist. $\square$

Bemerkung. Die Umkehrung der Sätze 4.28 und 4.30 folgt direkt aus Satz 4.14: Sei ein Graph G mit zentralem Teilgraphen H wie in Abbildung 4.8 rechts gegeben. Durch die Umkehrung der Kompression von Typ Eins erhalten wir den Graphen 4.8 links.

Im Fall der Kompression von Typ Zwei flippt man nun die Finne auf den Knoten $\{u_2, v_2, u_3, v_3, w_1, w_2\}$, bei der Kompression vom Typ Drei sind es die Finnen rechts und links davon. Die dabei (fallweise doppelt) entstehende Kante $w_1 w_2$ wird gelöscht, was die Pfaff'sche Eigenschaft ebenfalls nicht verletzt und wir erhalten die Graphen aus Abbildung 4.11, respektive 4.12.

Betrachten wir nun wieder den Graphen $G(k, M)$ mit $k \geq 2$ und $|M| \neq \emptyset$. Falls im Kreis C_{2k+1} zwei Kanten e_1 und e_2 in M Abstand 1 haben (also $e_1 e_0 e_2$ ein M -endender Pfad ist für ein $e_0 \in C_{2k+1}$), dann enthält $G(k, M)$ einen zentralen Teilgraphen wie in 4.12 abgebildet. Der Graph $G(k, M)$ kann in diesem Fall durch Kompression vom Typ Drei auf einen Graphen $G(k-1, M'')$ reduziert werden, wobei $|M''| = |M| - 2$. Gibt es hingegen keine Matchingkanten von M mit Abstand 1, so kann die Kompression vom Typ Zwei angewendet werden, um einen Graphen $G(k-1, M')$ zu erhalten, mit $|M'| = |M| - 1$.

Sollte das Matching M leer sein, so reduziert, wie schon in Lemma 4.22 gesehen, die wiederholte Anwendung der Kompression vom Typ Eins, $G(k, \emptyset)$ auf einen Graphen isomorph zu $G(1, \emptyset)$. Wie erwähnt ist dieser durch Kontraktion eines ungeraden Kreises auf den Graphen $K_{3,3}$ zurückzuführen.

4.5 Einige Vermutungen zur Reduktion auf eine endliche Liste verbotener Teilgraphen

Die oben getätigten Überlegungen motivieren folgende Vermutung:

Vermutung 4.31. *Ein zusammenhängender Graph ist genau dann Pfaff'sch, wenn er nicht durch eine Folge von Kantenlöschungen, Bikontraktionen, Kontraktionen von Kreisen ungerader Länge, oder Kompressionen vom Typ Eins, Zwei bzw. Drei, auf einen Graphen isomorph zu $K_{3,3}$, Twinplex oder dem Petersen-Graph zu reduzieren ist.*

Bemerkung. Man kann zeigen, dass jeder Graph, den man aus dem Twinplex durch Hinzufügen einer beliebigen Seite oder das Ersetzen eines Knotens durch einen Graphen K_3 erhält, den Graphen $K_{3,3}$ als Matching Minor enthält.

Man kann in der Vermutung 4.31 demnach die Bedingungen, den Twinplex betreffend, fallen lassen und stattdessen fordern, dass der Graph nicht isomorph zum Twinplex ist.

4.5.2 Reduktionen mit Hilfe gültiger Regeln

Wir wollen zeigen, dass die Richtigkeit von Vermutung 4.31 implizieren würde, dass es eine endliche Menge sogenannter „gültiger“ Reduktionen gibt, durch welche jeder nicht-Pfaff'sche Graph auf den $K_{3,3}$ zurückgeführt werden kann. Dazu formalisieren wir zunächst die Anforderungen, die wir beispielsweise an die Kompressionen und die Bikontraktion gestellt haben:

Definition 4.32. Seien H und H' Graphen mit $|E(H')| < |E(H)|$, sei $\mathcal{V}$ eine möglicherweise leere Familie von Teilmengen von $V(H)$, und sei $f : W \rightarrow V(H')$ eine Abbildung für $W \subseteq V(H)$. Dann bezeichnen wir $\mathcal{R} := (H, H', \mathcal{V}, W, f)$ als *Regel*.

Sei G ein Graph. Sei ϕ ein Isomorphismus zwischen H und einem Teilgraphen von G , so dass kein Knoten in $\phi(V(H) - W)$ inzident zu einer Kante von $E(G) - \phi(E(H))$ ist. Für jedes $V \in \mathcal{V}$ soll zusätzlich der Teilgraph, der von $\phi(V)$ induziert wird, zentral in G sein.

Der Graph G' entstehe nun aus G durch Löschen der Knotenmenge $\phi(V(H) - W)$ und der Kanten aus $\phi(E(H))$ und durch Hinzufügen einer Kopie des Graphen H' zum resultierenden Graphen, sowie durch Identifizieren der Knoten $\phi(w)$ und $f(w)$ für alle $w \in W$.

Man sagt: Der Graph G' ist aus dem G durch eine Reduktion unter Verwendung der Regel $\mathcal{R}$ entstanden.

Beispiel 4.33. Betrachten wir die Graphen H und H' wie in Definition 4.11. Es sei $\mathcal{V} := \{H\}$ und die Menge $W := \{u_1, u_4, v_1, v_2, w_1, w_2\}$. Definiert man $\mathcal{R}_K := (H, H', \mathcal{V}, W, f)$, wobei $f(u_i) = u_i$, $f(v_i) = v_i$ und $f(w_i) = w_i$ (d.h. f sieht so aus, wie man es lt.

4 Nicht-bipartite Pfaff'sche Graphen

Abbildung 4.8 erwarten würde), so kann die Kompression vom Typ Eins als Reduktion unter Verwendung der Regel $\mathcal{R}_K$ verstanden werden.

Bemerkung. Die restlichen verwendeten Reduktionen (Kompression vom Typ Zwei und Drei, Bikontraktion) können ganz analog definiert werden.

Definition 4.34. Eine Regel $\mathcal{R}$ heißt *gültig*, falls jeder Graph, der durch eine Reduktion unter Verwendung von $\mathcal{R}$ aus einem Pfaff'schen Graphen entsteht, ebenfalls Pfaff'sch ist. In Anlehnung daran kann man die Reduktion selbst als *gültig* bezeichnen.

Die bisher aufgetretenen Reduktionen sind also alle gültig. Definiert man nun eine Regel $\mathcal{R}_T := (T, K_{3,3}, \mathcal{V} = \emptyset, W = \emptyset, f = \emptyset)$, wobei T der Twinplex ist, dann kann die Abbildung $T \rightarrow K_{3,3}$ als Reduktion unter Verwendung der gültigen Regel $\mathcal{R}_T$ aufgefasst werden, da der Twinplex ohnehin nicht-Pfaff'sch ist. (Wobei f hier als leer bezeichnet wird, weil die Definitions- und somit die Wertemenge leer sind). Analog lässt sich der Petersen-Graph auf den Graphen $K_{3,3}$ abbilden. Daher folgt aus Vermutung 4.26 (siehe wieder [16]):

Vermutung 4.35. *Es existiert eine endliche Liste von gültigen Regeln, so dass jeder nicht-Pfaff'sche Graph durch Reduktionen unter Verwendung dieser Regeln auf einen Graph isomorph zu $K_{3,3}$ transformiert werden kann.*

Literaturverzeichnis

- [1] J. Cigler, Einführung in die lineare Algebra und Geometrie, 2. Teil, *Manz* (1977).
- [2] R. Diestel, Graphentheorie, *Springer*, 3. Auflage (2006).
- [3] I. Fischer, C.H.C. Little, A characterisation of Pfaffian near bipartite graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* (2001), [175-222].
- [4] P.W. Kasteleyn, The statistics of dimers on a lattice. I. The number of dimer arrangements on a quadratic lattice. *Physica* 27 (1961), [1209-1225].
- [5] C. Krattenthaler, Diskrete Mathematik Vorlesungsskriptum, *Institut für Mathematik der Universität Wien* (2001).
- [6] C. Kuratowski, Sur le problème des courbes gauches en topologie, *Fund. Math.* 15. (1930), [271-283].
- [7] C.H.C Little, A characterization of convertible $(0,1)$ -matrices, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 18 (1975), [187-208].
- [8] C.H.C. Little, F. Rendl, Operations preserving the Pfaffian property of a graph, *J. Austral. Math. Soc., Ser. A* 50 (1991), [248-257].
- [9] C.H.C. Little, F. Rendl, An algorithm for the ear decomposition of a 1-factor covered graph, *J. Austral. Math. Soc., Ser. A* 46 (1989), [296-301].
- [10] C.H.C. Little, F. Rendl, I. Fischer, Towards a characterisation of Pfaffian near bipartite graphs, *Discrete Math.* 244 (2002), [279-297].
- [11] L. Lovász, M.D. Plummer, Matching Theory, *Akadémiai Kiadó* (1986), [317-321].
- [12] A.A.A. Miranda, C.L. Lucchesi, Recognizing near-bipartite Pfaffian graphs in polynomial time, *Discrete Applied Mathematics* 158 (2010), [1275-1278].
- [13] T. Muir, A Treatise on the Theory of Determinants, MacMillan and Co., London, *Jbuch* 14.100 (1882), [318].

- [14] D.J. Naddef, W.R. Pulleyblank, Ear decompositions of elementary graphs and GF₂-rank of perfect matchings, *Ann. Discrete Math.* 16 (1982), [241-260].
- [15] S. Norine, C.H.C. Little, K.L. Teo, A new proof of a characterization of Pfaffian bipartite graphs, *J. Combin. Theory, Ser. B* 91 (2004), [123-126].
- [16] S. Norine, R. Thomas, Minimally non-Pfaffian graphs, *J. Combin. Theory, Ser. B* 98 (2008), [1038-1055].
- [17] N. Robertson, P.D. Seymour, R. Thomas, Permanents, Pfaffian orientations and even directed circuits, *Ann. Math.* 150 (2) (1999), [929-975].
- [18] L.G. Valiant, The Complexity of Computing the Permanent, *Theoretical Computer Science (Elsevier)* 8: (1979), [189–201].

Lebenslauf

Der Autor, Thomas Glatz, wurde am 17. Juni 1982 in Wien geboren. Von September 1988 bis Juni 1992 besuchte er die Volksschule Wien 21 Irenäusgasse, von September 1992 bis Juni 2000 das Realgymnasium des GRG 21, Ödenburgerstraße, wo er auch, mit ausgezeichnetem Erfolg, maturierte.

Seit Oktober 2000 studiert er Mathematik an der Universität Wien, mit Schwerpunkten in diskreter Mathematik und Kombinatorik. Durch die Teilnahme an einigen Lehrveranstaltungen des Instituts für Volkswirtschaft der Universität Wien vertiefte er zudem sein Interesse an spieltheoretischen und ökonometrischen Modellen und deren praktischer Anwendung in der Ökonomie.